

**T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**3-BOYUTLU LORENTZ UZAYINDA TİMLİKE
YÜZEYLERİN GAUSS DENKLEMLERİ**

DOKTORA TEZİ

Abdullah İNALCIK

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK
Enstitü Bilim Dalı : GEOMETRİ
Tez Danışmanı : Doç. Dr. Soley ERSOY

ŞUBAT 2014

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

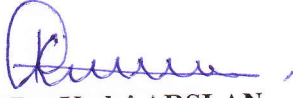
3-BOYUTLU LORENTZ UZAYINDA TİMLİKE
YÜZEYLERİN GAUSS DENKLEMLERİ

DOKTORA TEZİ

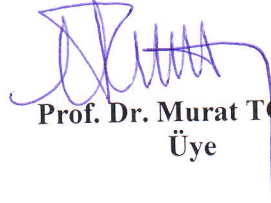
Abdullah İNALCIK

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

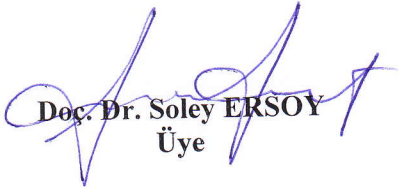
Bu tez 13/02/2014 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.



Prof. Dr. Kadri ARSLAN
Jüri Başkanı



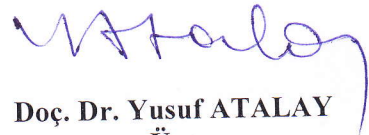
Prof. Dr. Murat TOSUN
Üye



Doç. Dr. Soley ERSOY
Üye



Doç. Dr. İsmail GÖK
Üye



Doç. Dr. Yusuf ATALAY
Üye

TEŞEKKÜR

Bu çalıőmanın hazırlanmasında değerli zamanını ayıran, her aőamasını titizlikle değerlendirip önerileriyle yol gösteren, her zaman ve her konuda desteğini gördüğüm danışman hocam Sayın Doç. Dr. Soley ERSOY'a minnet ve őükranlarımı sunarım.

Çalıőmam süresince özenle çalıőmalarımı takip eden, her konuda bana destek olan başta hocam Sayın Prof. Dr. Murat TOSUN olmak üzere Sakarya Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü öğretim üyelerine teşekkür ederim.

Çalıőmam sırasında ellerinden gelen her türlü desteği, fedakârlığı ve sabrı gösteren aileme ve eşime en derin duygularla teşekkür ederim.

2012-50-02-041 nolu proje ile çalıőmama destek veren SAÜ Bilimsel Araştırma Projeleri Komisyonuna da teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR.....	ii
İÇİNDEKİLER.....	iii
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ.....	v
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	vi
ÖZET.....	vii
SUMMARY.....	viii
BÖLÜM 1.	
GİRİŞ.....	1
BÖLÜM 2.	
TEMEL KAVRAMLAR.....	4
BÖLÜM 3.	
ÜÇ BOYUTLU LORENTZ UZAYINDA TİMELİKE YÜZEYLER.....	14
BÖLÜM 4.	
TİMELİKE GENELLEŞTİRİLMİŞ SİLİNDİR, TİMELİKE DÖNEL YÜZEY ve TİMELİKE HELİKODİAL YÜZEYLERİN GAUSS DENKLEMLERİ.....	36
4. 1. Timelike Dönel Yüzeyler ve Timelike Helikoidal Yüzeyler.....	36
4. 1. 1. $l \in \mathbb{R}_1^3$ Spacelike Olma Durumu.....	36
4. 1. 2. $l \in \mathbb{R}_1^3$ Timelike Olma Durumu.....	38
4. 1. 3. $l \in \mathbb{R}_1^3$ Null Olma Durumu.....	39
4. 2. Timelike Genelleştirilmiş Silindir.....	40

4. 2. 1. $l \in \mathbb{R}_1^3$ Spacelike Olma Durumu.....	40
4. 2. 2. $l \in \mathbb{R}_1^3$ Timelike Olma Durumu.....	41
4. 3. Timelike Genelleştirilmiş Silindir, Timelike Dönel Yüzey ve Timelike Helikoidal Yüzeylerin Gauss Denklemleri.....	41
GAUSS DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ.....	56
5. 1. Sabit Ortalama Eğrilikli Timelike Dönel Yüzeylerin ve Timelike Genelleştirilmiş Silindirlerin Gauss Denklemi.....	57
5. 1. 1 . $H = 0$ Durumu.....	59
5. 1. 2 . $H \neq 0$ Durumu.....	60
5. 2. A Sabit Olmak Üzere, $J = A$ Olan Timelike Dönel Yüzeylerin ve Timelike Genelleştirilmiş Silindirlerin Gauss Denklemi.....	63
5. 3. $C > 0$ Sabit Adımlı, Sabit Ortalama Eğrilikli Timelike Helikodial Yüzeylerin Gauss Denklemi.....	64
5. 3. 1 . $H = 0$ Durumu.....	66
5. 3. 2 . $H \neq 0$ Durumu.....	67
5. 4. $C > 0$ Sabit Adımlı, Ortalama Eğriliği Sabit Olmayan İzotermik Timelike Helikodial Yüzeylerin Gauss Denklemi.....	68
5. 5. $C > 0$ Sabit Adımlı, Ortalama Eğriliği Sabit Olmayan, İzotermik Koordinatlardan Elde Edilemeyen ve $J > 0$ Olan Timelike Helikodial Yüzeylerin Gauss Denklemi.....	69
KAYNAKLAR.....	71
ÖZGEÇMİŞ.....	74

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

\mathbb{R}	: Reel uzay
\mathbb{C}	: Kompleks uzay
\mathbb{R}_1^3	: Üç boyutlu Lorentz uzay
M^2	: Timelike yüzey
d	: Türev operatörü
*	: Hodge-yıldız operatörü
Δ	: Laplasyan operatörü
ψ	: Açık
dA	: Alan elementi
K	: Gauss eğrilik
H	: Ortalama eğrilik
S	: Şekil operatörü
D	: Koneksiyon
I	: Birinci temel form
II	: İkinci temel form

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 4. 1. 1. 1. Spacelike eksenli timelike dönel yüzeyler	37
Şekil 4. 1. 1. 2. Spacelike eksenli timelike helikoidal yüzeyler	37
Şekil 4. 1. 2. 1. Timelike eksenli timelike dönel yüzeyler	38
Şekil 4. 1. 2. 2. Timelike eksenli timelike helikoidal yüzeyler.....	38
Şekil 4. 1. 3. 1. Null eksenli timelike dönel yüzeyler	39
Şekil 4. 1. 3. 2. Null eksenli timelike helikoidal yüzey.....	39
Şekil 4. 2. 1. 1. Spacelike eksenli timelike genelleştirilmiş silindir.....	40
Şekil 4. 2. 2. 1. Timelike eksenli timelike genelleştirilmiş silindir.....	41

ÖZET

Anahtar Kelimeler: Lorentz uzayı, timelike yüzey, dönel yüzey, genelleştirilmiş silindir ve helikoidal yüzey, Gauss denklemi

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde Lorentz uzayında temel kavramlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde 3-boyutlu Lorentz uzayında timelike yüzeyler için yapı denklemleri, Gauss ve Codazzi-Mainardi denklemleri ile bu yüzeylerin Gauss, ortalama eğriliği ve Hodge-yıldız operatörü tanımları verilip bir timelike yüzeyin farklı iki izotermal dual çatısı arasındaki açının harmonik olduğu bulunmuştur. Ayrıca sabit ortalama eğrilikli bir timelike yüzeyin izotermik hale getirilebileceği gösterilmiştir. Bir timelike yüzeyin asli ve asli olmayan çatıları arasındaki açı ψ olmak üzere, $d(2\psi)$ değeri hesaplanmış ve bu değer yardımıyla bir timelike yüzeyin sabit ortalama eğrilikli olması halinde sağladığı kısmi diferensiyel denklem elde edilmiştir. Ayrıca timelike yüzeyin maksimal ($H = 0$) olması durumunda, bu diferensiyel denklemin yeni ifadesi verilmiştir. $\psi = 0$ olmak üzere, bir timelike yüzeyin izotermik olması için gerek ve yeter koşul verilmiş ve bu koşulun ψ ve H değerlerinin sabit olması durumunda da geçerli olduğu ifade edilmiştir.

Dördüncü bölümde, 3-boyutlu Lorentz uzayında timelike dönel yüzeylerin, timelike genelleştirilmiş silindirlere ve timelike helikoidal yüzeylerin özel kabuller altında Gauss denklemleri bulunmuştur. Ayrıca, bir timelike helikoidal yüzeyin ortalama eğriliğinin sabit olması için gerek ve yeter koşulun $\psi = \text{sabit}$ olduğu kanıtlanmıştır.

Beşinci bölümde, dördüncü bölümde elde edilen Gauss denklemlerinin çözümleri araştırılmış ve geometrik yorumlar yapılmıştır.

THE GAUSS EQUATIONS OF TIMELIKE SURFACES ON 3-DIMENSIONAL LORENTZIAN SPACE

SUMMARY

Key Words: Lorentzian space, timelike surface, surface of revolution, generalized cylinder and helicoidal surface, Delaunay surface, Gauss equation.

This thesis consists of five chapters. The first chapter is devoted to the introduction. In the second chapter, the basic concepts in Lorentzian space are introduced.

In the third chapter, some basic concepts of the structure equations, Gauss and Codazzi-Mainardi equations for the timelike surfaces, the Gauss and mean curvature of timelike surfaces and Hodge-star operator are given. It is proved that the angle between two different isothermal dual frame of a timelike surface is harmonic and a timelike surface are isothermic. For the angle ψ between the principal frame and non-principal frame of timelike surface, the value of $d(2\psi)$ is obtained. By the aid of this value, the partial differential equation providing the timelike surface with constant mean curvature is obtained. Moreover, the new expression of this differential equation is given when timelike surface is maximal (i.e $H = 0$). The necessary and sufficient condition for a timelike surface being isothermic is given when $\psi = 0$ and it is expressed that this condition is satisfied in the case of ψ and H are constants.

In the fourth chapter, the Gauss equations of timelike surface of revolution, timelike generalized cylinder and timelike helicoidal surface are obtained. Moreover, it is proved that the mean curvature of timelike helicoidal surface is constant if and only if the angle between helices and principal curve is constant.

In the final chapter, the solutions of the Gauss equations which found in the previous chapter are investigated and some geometrical interpretations are done.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

3-boyutlu Öklid uzayda düzlemsel bir eğrinin bir eksen etrafında dönmesi sonucu oluşan yüzeye dönel yüzey, bir eksen boyunca ötelenmesi sonucu oluşan yüzeye genelleştirilmiş silindir yüzeyi ve bir eksen etrafında hem ötelenip hem dönmesi sonucu oluşan yüzeye helikoidal yüzey denir (Eisenhart 1909), (Kreyszig 1957), (Gray, 2006), (Kühnell, 2006). Bu yüzeyler Öklid uzayının hep güncel kalan çalışma konusudur ve literatürde de bu alanda birçok çalışma mevcuttur (Roussos, 2000), (Soyuçok, 1995), (Arslan, 2009), (Bozkurt, 2012).

Bour, bir helikoidal yüzey için bu yüzeye izometrik olan bir dönel yüzeyin var olduğunu ve helikoid üzerindeki helis eğrisine dönel yüzeyler üzerindeki çemberlerin karşılık geldiğini göstermiştir. Ayrıca minimal helikoidal yüzeyin katenoide izometrik deformasyonunu tanımlamıştır (Bour, 1862).

Do Carmo, sabit ortalama eğrilikli helikoidal yüzeylerin helikoidal hareket boyunca invariant olduklarını, minimal olmaları durumunda dairesel silindire benzediğini belirlemiştir. Dairesel silindirin üreteç eğrisinin (çemberinin) de helikoidi meydana getiren helisin izometrik deformasyonu ile elde edilebileceğini göstermiştir (Do Carmo, 1982).

Roussos, helikoidal yüzeylerin Bonnet yüzeyi olması için gerek ve yeter şartı belirlemiştir (Roussos, 1988). Ayrıca sabit ortalama eğrilikli helikoidal yüzeylerin ortalama eğriliğini korumak şartıyla Delaunay yüzeylere izometrik deformasyonunu tasvir etmiştir (Roussos, 1991).

Baikoussis, Gauss eğriliği sıfır olan, ikinci temel form eğriliği ile ortalama eğriliği eşit olan helikoidal yüzeylerin asli eğrilikleri oranının sabit olduğunu ve bu oranla karakterize edilebileceğini, ayrıca helikoidal yüzeylerin birinci dereceden diferansiyel denklemlerden elde edilebileceğini göstermiştir (Baikoussis, 1998).

Lorentz uzayı, Öklid uzayına göre daha karmaşık bir yapıya sahiptir. Dönel yüzey, genelleştirilmiş silindir ve helikoidal yüzeyler 3-boyutlu Lorentz uzayında eksenin spacelike, timelike ve null olma durumlarına göre sınıflandırılır ve bu sınıflar da kendi aralarında yüzeyin spacelike, timelike ve null olma durumlarına göre üçe ayrılır. Bu sınıflandırma literatürde farklı yönleriyle ele alınmıştır. Örneğin McNerthey bu sınıflandırmayı kabul ederek yüzey örnekleri vermiştir. Ayrıca bu yüzeylerin timelike ve spacelike olması halinde maksimal olma durumlarını, Gauss eğriliği sabit ve yüzeyin timelike olması halinde Bäcklund teoremini incelemiştir (McNerthey, 1980).

Ikawa, helikoidal yüzeyleri eksen ve üreteç eğrisine göre sınıflandırmıştır ve 3-boyutlu Lorentz uzayında Bour teoreminin sağlandığını göstermiştir (Ikawa, 2001).

Beneki, helikoidal yüzeyleri dört sınıfa ayırmıştır ve bu sınıflar altında Gauss eğriliğini koruyan veya ortalama eğriliği diferensiyellenebilir fonksiyon olan helikoidal yüzeylerle ilgili çalışma yapmıştır (Beneki, 2002).

Güler, dönel yüzey ve helikoidal yüzeyleri eksenlerine göre sınıflandırmıştır. Ayrıca null üreteç eğrisine sahip olan Bour teoremine göre birbirine izometrik olan timelike helikoidal ve timelike dönel yüzey örnekleri vermiştir (Güler, 2010).

Benzer şekilde 3-boyutlu Lorentz uzayında bu yüzeylerle ilgili (Turgut, 1998), (Hou, 2007), (Demir, 2010) ve (İnalçık, 2011) çalışmaları da mevcuttur.

Bilindiği üzere 3-boyutlu Öklid uzayda birinci temel formu

$$I = E(s, t)(ds^2 + dt^2)$$

şeklinde ifade edilebilen yüzeylere izotermik yüzey, yüzeyin (s, t) parametrelendirmesine izotermal parametrelendirme denir (Gray, 2006). Bu tanım 3-boyutlu Lorentz uzayda timelike ve spacelike yüzeyler için, parametre eğrilerinin timelike veya spacelike olması göz önüne alınarak McNerthey tarafından

$$I = E(s, t)(ds^2 - dt^2)$$

olarak verilmiştir (McNerthey, 1980).

3-boyutlu Öklid uzayda dönel yüzeylerin ve genelleştirilmiş silindirlerin izotermik yüzey oldukları bilinir (Gray, 2006). Fakat helikoidal yüzeyler için aynı genellemeyi yapmak mümkün değildir (Roussos, 2000). Magid, 3-boyutlu Lorentz uzayında da timelike ve spacelike dönel yüzey ve genelleştirilmiş silindirlerin izotermik olduğunu göstermiştir (Magid, 2005). McNerthey de maksimal timelike ve spacelike helikoidal yüzeylerin izotermik olduğunu göstermiştir (McNerthey, 1980).

Bu gözlemler altında bu çalışmada, 3-boyutlu Lorentz uzayda timelike dönel yüzeylerin, timelike genelleştirilmiş silindirlerin ve timelike helikoidal yüzeylerin Gauss denklemleri ve çözümleri araştırılmıştır.

Öklid uzayda iyi bilinen Gauss ve Codazzi-Mainardi denklemleri (Do Carmo, 1994) ve (Park, 2008) göz önüne alınarak timelike yüzeylerin Gauss ve Codazzi-Mainardi denklemleri verilmiştir. Timelike yüzeyin dual çatısı yardımıyla Gauss ve ortalama eğriliği hesaplanarak bir timelike yüzeyin farklı iki izotermal dual çatısı arasındaki açının harmonik olduğunu kanıtlanmıştır. Ayrıca, timelike yüzeyin ortalama eğriliğinin sabit olması durumunda sağladığı kısmi diferensiyel denklem elde edilmiştir. Yüzeyin maksimal olması halinde, bu diferensiyel denklemin yeni hali ile bir timelike yüzeyin izotermik olması için gerek ve yeter şart verilmiştir.

Bölüm 4'te timelike dönel yüzeyler, timelike genelleştirilmiş silindirler ve timelike helikoidal yüzeyler için Bölüm 3'te elde edilen karakterizasyonlar tekrar düzenlenmiş ve özel kabuller altında (sabit ortalama eğrilikli timelike dönel yüzeyler ve timelike genelleştirilmiş silindirler, $J = A$ (A sabit) olan timelike dönel yüzeyler ve timelike genelleştirilmiş silindirler, $C > 0$ sabit adımlı ve sabit ortalama eğrilikli timelike helikoidal yüzeyler, $C > 0$ sabit adımlı ve ortalama eğriliği sabit olmayan izotermik timelike helikoidal yüzeyler, $C > 0$ sabit adımlı ve ortalama eğriliği sabit olmayan, izotermik koordinatlardan elde edilemeyen ve $J > 0$ olan timelike helikoidal yüzeyler) bu yüzeylerin Gauss denklemleri elde edilmiştir ki bu denklemlerin diferensiyel denklem oldukları görülmüştür. Bölüm 5'te Gauss denklemlerinin çözümleri araştırılmış, yüzeylerin ikinci temel formları hakkında bilgi verilmiş ve geometrik yorumlar yapılmıştır.

BÖLÜM 2. TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 2. 1. V , sonlu boyutlu reel vektör uzayı olmak üzere,

$$\langle , \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

2-linear fonksiyonu $\forall v, w \in V$ için $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$ özeliğini sağlıyor ise \langle , \rangle dönüşümüne V üzerinde bir simetrik 2-linear form denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2. 2. \langle , \rangle , V vektör uzayı üzerinde simetrik 2-linear form olsun. Bu takdirde,

- i) $\forall v \in V, v \neq 0$ için $\langle v, v \rangle > 0$ ise \langle , \rangle 2-linear formu pozitif tanımlıdır,
- ii) $\forall v \in V, v \neq 0$ için $\langle v, v \rangle < 0$ ise \langle , \rangle 2-linear formu negatif tanımlıdır,
- iii) $\forall v \in V, v \neq 0$ için $\langle v, v \rangle \geq 0$ ise \langle , \rangle 2-linear formu yarı-pozitif tanımlıdır,
- iv) $\forall v \in V, v \neq 0$ için $\langle v, v \rangle \leq 0$ ise \langle , \rangle 2-linear formu yarı-negatif tanımlıdır,
- v) $\forall w \in V$ için $\langle v, w \rangle = 0$ için $v = 0$ oluyorsa \langle , \rangle 2-linear formuna nondejenere aksi halde dejeneredir denir

(O'Neill, 1983).

Tanım 2. 3. \langle , \rangle , V üzerinde simetrik 2-linear form ve W da V nin bir alt uzayı olsun. \langle , \rangle nin W üzerinde kısıtlanmış $\langle , \rangle|_W$ olmak üzere

$$\langle , \rangle|_W : W \times W \rightarrow \mathbb{R}$$

negatif tanımlı olacak şekilde en büyük boyutlu W altuzayının boyutuna, \langle , \rangle simetrik 2-lineer formun indeksi denir. Eğer \langle , \rangle nin indeksi ν ise $0 \leq \nu \leq \text{boy}V$ dir (O'Neill, 1983).

Tanım 2. 4. M , türevlenebilir (C^∞ sınıfından) manifold ve

$$\begin{aligned} \langle , \rangle : \chi(M) \times \chi(M) &\rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R}) \\ (X, Y) &\rightarrow \langle X, Y \rangle \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan simetrik, 2-lineer ve nondejenere metrik fonksiyona, M üzerinde bir metrik tensör denir. Bu metrik tensörün indeksi, M manifoldunun indeksi olarak ifade edilir. M , C^∞ sınıfından bir manifold olmak üzere, $\chi(M)$ de tanımlı \langle , \rangle iç çarpım fonksiyonu, M nin her bir tanjant uzayına bir iç çarpım indirger. Böylece $\forall X, Y \in \chi(M)$, $P \in M$ ve $X_p, Y_p \in T_M(P)$ için

$$\langle , \rangle|_P : T_M(P) \times T_M(P) \rightarrow \mathbb{R}$$

biçiminde tanımlanan simetrik, 2-lineer ve nondejenere fonksiyonuna $T_M(P)$ üzerinde bir metrik tensör denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2. 5. M bir C^∞ sınıfından manifold ve \langle , \rangle de M üzerinde sabit indeksli bir metrik tensör olmak üzere, (M, \langle , \rangle) ikilisine bir yarı-Reimann manifoldu denir. Böylece M yarı-Reimann manifoldunun indeksi ν olmak üzere $0 \leq \nu \leq n = \text{boy}M$ dir. Özel olarak $\nu = 0$ ise M bir Riemann manifoldu, $\nu = 1$ ve $n \geq 2$ durumunda ise M bir Lorentz manifoldu adını alır (O'Neill, 1983).

Tanım 2. 6. M ve \bar{M} , sırasıyla, n ve $(n+d)$ -boyutlu birer C^∞ sınıftan manifold ve $x: M \rightarrow \bar{M}$ diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun. $\forall P \in M$ için

$$dx_p: T_M(P) \rightarrow T_{\bar{M}}(P)$$

türev dönüşümü bire bir ise x fonksiyonuna bir immersiyon denir (Chen, 1973).

Tanım 2. 7. \mathbb{R}^n , n -boyutlu Öklid uzayı verilsin. $0 \leq \nu \leq n$ olmak üzere

$$\langle X, Y \rangle = -\sum_{i=1}^{\nu} x_i y_i + \sum_{j=\nu+1}^n x_j y_j$$

şeklinde bir metrik tensör tanımlanırsa $(\mathbb{R}^n, \langle, \rangle)$ ikilisi yarı-Öklid uzayı olarak isimlendirilir ve \mathbb{R}_ν^n ile gösterilir. Özel olarak $\nu=1$, $n \geq 2$ durumunda ise \mathbb{R}_1^n , n -boyutlu Lorentz uzayı adını alır. Metrik tensör ise Lorentz metriği olarak adlandırılır (O'Neill, 1983).

Tanım 2. 8. M , bir yarı-Riemann manifoldu $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ ve $\forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için

$$\begin{aligned} D: \chi(M) \times \chi(M) &\rightarrow \chi(M) \\ (X, Y) &\rightarrow D(X, Y) = D_X Y \end{aligned}$$

operatörü,

$$D1) D_X(Y + Z) = D_X Y + D_X Z,$$

$$D2) D_{X+Y} Z = D_X Z + D_Y Z,$$

$$D3) D_{fX} Y = f D_X Y,$$

$$D4) D_X(fY) = X[f]Y + f D_X Y,$$

$$D5) [X, Y] = D_X Y - D_Y X,$$

$$D6) Z[\langle X, Y \rangle] = \langle D_Z X, Y \rangle + \langle X, D_Z Y \rangle$$

özelliklerini sağlıyorsa D ye M üzerinde bir Reimann koneksiyon, $D_X Y$ ye de Y vektör alanının X vektör alanına göre Reimann anlamında kovaryant türevi denir (Hacısalihoglu, 1983).

Tanım 2. 9. M , bir yarı-Reimann manifoldu ve bu manifoldun yerel koordinat sistemi $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ olsun. M üzerindeki vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ ve

$$g_{ij} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle \text{ olmak üzere, } \forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R}) \text{ için}$$

$$\text{grad} : C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow \chi(M)$$

$$f \rightarrow \text{grad}(f) = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona, f fonksiyonun gradyenti denir. Burada $g^{ij} = (g_{ij})^{-1}$ dir (O'Neill, 1983).

Tanım 2. 10. M , bir yarı-Reimann manifoldu, bu manifoldun yerel koordinat sistemi $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ve M üzerindeki vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olsun.

$$X = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \text{ olmak üzere, } \forall X \in \chi(M) \text{ için}$$

$$\text{div} : \chi(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

$$X \rightarrow \text{div}(X) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial a_i}{\partial x_i}$$

şeklinde tanımlanan div fonksiyonuna, M de $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ koordinat sistemine göre X vektör alanın diverjans fonksiyonu denir (Ralph, 1988).

Tanım 2. 11. M , bir yarı-Reimann manifoldu olsun. $\forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için

$$\begin{aligned} C^\infty(M, \mathbb{R}) &\rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R}) \\ f &\rightarrow \Delta(f) = \text{div}(\text{grad}(f)) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı fonksiyona, f fonksiyonun Laplasyanı denir ve $\Delta(f)$ ile gösterilir (O'Neill, 1983).

Tanım 2. 12. M , bir yarı-Reimann manifoldu ve f , M de diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $\Delta(f) = 0$ ise f fonksiyonuna harmonik fonksiyon denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2. 13. M n-boyutlu yarı-Reimann manifold, M manifoldu üzerinde tanımlanan k – formların cümlesi $\wedge^k(M)$ ve hacim elementi dA olsun.

$$*: \wedge^k(M) \rightarrow \wedge^{n-k}(M)$$

izomorfizmi $\forall \alpha, \beta \in \wedge^k(M)$ için

$$\alpha \wedge * \beta = \langle \alpha, \beta \rangle dA$$

bağıntısını sağlıyorsa, bu dönüşüme Hodge-yıldız operatörü denir (Martin, 1991).

Teorem 2. 1. M , n-boyutlu yarı-Reimann manifoldu, M manifoldu üzerinde diferensiyellenebilir iki fonksiyon f ve g olsun. dA , M manifoldunun hacim elementi olmak üzere

- i) $d * d(f) = \Delta(f) dA$,
- ii) $d * (f d(h)) = (\langle \text{grad}(f), \text{grad}(f) \rangle + f \Delta(h)) dA$,
- iii) $\Delta(fh) = 2 \langle \text{grad}(f), \text{grad}(f) \rangle + f \Delta(h) + h \Delta(f)$

dır (Külahcı, 2008).

Tanım 2. 14. M , yarı-Reimann manifoldu ve $X \in \chi(M)$ olsun. Eğer

- i) $\langle X, X \rangle < 0$ ise X vektör alanına timelike,
- ii) $\langle X, X \rangle > 0$ veya $X = 0$ ise X vektör alanına spacelike,
- iii) $\langle X, X \rangle = 0$ ve $X \neq 0$ ise X vektör alanına null (lightlike) vektör alanı adı verilir

(O'Neill, 1983).

Tanım 2. 15. M yarı-Reimann manifoldu olsun. $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$\langle X, Y \rangle = 0$$

ise X ve Y vektörü birbirine diktir denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2. 16. M yarı-Reimann manifoldu olsun. $X \in \chi(M)$ vektörünün normu

$$\|X\| = \sqrt{|\langle X, X \rangle|}$$

ile tanımlanır (O'Neill, 1983).

Teorem 2. 2. M yarı-Reimann manifold ve $X \in \chi(M)$ olmak üzere aşağıdaki özellikler sağlanır;

- i) $\|X\| > 0$ dır,
- ii) $\|X\| = 0 \Leftrightarrow X$ bir null vektör alanıdır,
- iii) X bir timelike vektör alanı ise $\|X\|^2 = -\langle X, X \rangle$ dir,
- iv) X bir spacelike vektör alanı ise $\|X\|^2 = \langle X, X \rangle$ dir

(O'Neill, 1983).

Tanım 2. 17. \mathbb{R} de bir açık küme I olmak üzere

$$\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_1^n$$

diferensiyellenebilir fonksiyonuna, n -boyutlu Lorentz uzay \mathbb{R}_1^n de bir eğri denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2. 18. 2-boyutlu Lorentz uzayı \mathbb{R}_1^2 de Lorentzian birim çember

$$S_1^1 = \{a \in \mathbb{R}_1^2 \mid \langle a, a \rangle = 1\}$$

biçiminde tanımlanır. Bu çemberin teğetleri daima timelike vektörlerdir. Benzer olarak, hiperbolik birim çember

$$H_0^1 = \{a \in \mathbb{R}_1^2 \mid \langle a, a \rangle = -1\}$$

biçiminde tanımlı olup, bu eğrinin teğetleri de spacelike vektörlerdir (O'Neill, 1983).

Tanım 2. 19. 3 boyutlu Lorentz uzayı \mathbb{R}_1^3 de Lorentz ve hiperbolik birim küreler sırasıyla,

$$S_1^2 = \{a \in \mathbb{R}_1^3 \mid \langle a, a \rangle = 1\}$$

ve

$$H_0^2 = \{a \in \mathbb{R}_1^3 \mid \langle a, a \rangle = -1\}$$

biçiminde ifade edilirler (O'Neill, 1983).

Tanım 2. 20. α , \mathbb{R}_1^n Lorentz uzayında bir eğri olsun. Böylece, α eğrisinin hız vektörü α' olmak üzere

- i) $\langle \alpha', \alpha' \rangle < 0$ ise α timelike eğri,
- ii) $\langle \alpha', \alpha' \rangle > 0$ veya $\alpha' = 0$ ise α spacelike eğri,
- iii) $\langle \alpha', \alpha' \rangle = 0$ ve $\alpha' \neq 0$ ise α null eğri

olarak adlandırılır (O'Neill, 1983).

Tanım 2. 21. $U \subset \mathbb{R}^2$ açık küme olmak üzere

$$X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M^2 \subset \mathbb{R}_1^3$$

$$(u, v) \rightarrow X(u, v) = (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v))$$

immersiyonu yardımıyla elde edilen M^2 ye \mathbb{R}_1^3 3-boyutlu Lorentz uzayında bir yüzey, (u, v) ye de M^2 yüzeyinin parametrelendirmesi denir. $i = 1, 2, 3$ olmak üzere, x_i diferensiyellenebilir fonksiyondur. Bu yüzeyin birim normal vektörü

$$\eta = \frac{\frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v} \right\|}$$

şeklinde tanımlıdır. M^2 yüzeyinin η birim normal vektörü için

- i) η timelike ise M^2 ye spacelike yüzey,
- ii) η spacelike ise M^2 ye timelike yüzey

denir (Kühnell, 2006).

Tanım 2. 22. M^2 , \mathbb{R}_1^3 3-boyutlu Lorentz uzayında $X(u, v)$ immersiyonuyla birlikte verilmiş bir yüzey olsun.

$$E = \left\langle \frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial u} \right\rangle, F = \left\langle \frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle, G = \left\langle \frac{\partial X}{\partial v}, \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle$$

olmak üzere

$$ds^2 = Edu^2 + 2Gdudv + Fdv^2$$

eşitliğine M^2 yüzeyinin birinci temel formu adı verilir (Kühnell, 2006).

Tanım 2. 23. \mathbb{R}_1^3 , 3-boyutlu Lorentz uzayında $X(u, v)$ immersiyonuyla birlikte verilen M^2 timelike yüzeyi için $F=0$ ise (u, v) parametresine M^2 timelike yüzeyinin ortogonal parametrelendirmesi denir (McNerthey, 1980).

Tanım 2. 24. \mathbb{R}_1^3 , 3-boyutlu Lorentz uzayında $X(u, v)$ immersiyonuyla birlikte verilen M^2 timelike yüzeyi için $F=0$ ve $E=-G$ ise (u, v) parametresine M^2 yüzeyinin izotermal parametrelendirmesi ve M^2 timelike yüzeyine de izotermik yüzey denir (McNerthey, 1980).

Tanım 2. 25. \mathbb{R}_1^3 , 3-boyutlu Lorentz uzayında M^2 , $X(u, v)$ immersiyonuyla birlikte verilmiş timelike bir yüzey ve bu yüzeyin birim normal vektörü η olsun.

$$L = \langle \eta, X_{uu} \rangle, M = \langle \eta, X_{uv} \rangle, N = \langle \eta, X_{vv} \rangle$$

olmak üzere

$$II(u, v) = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$$

eşitliğine M^2 timelike yüzeyinin ikinci temel formu adı verilir (Lopez, 2008).

Tanım 2. 26. \mathbb{R}_1^3 , 3-boyutlu Lorentz uzayında M^2 $X(u, v)$ immersiyonuyla birlikte verilmiş timelike bir yüzey olsun. Yüzeyin birim normal vektörü η ve $X \in \chi(M^2)$ olmak üzere M^2 timelike yüzeyinin şekil operatörü

$$S : \chi(M^2) \rightarrow \chi(M^2)$$

$$X \rightarrow S(X) = -D_x \eta$$

olarak tanımlanır. S şekil operatörü self-adjoint, simetrik ve lineer fonksiyondur. Şekil operatörü matrisinin determinantı

$$K = \det(S)$$

M^2 timelike yüzeyinin Gauss eğriliği ve izi

$$H = \frac{1}{2} \text{iz}(S)$$

M^2 timelike yüzeyinin ortalama eğriliğidir (McNerthey, 1980).

Tanım 2. 27. M^2, \mathbb{R}_1^3 3-boyutlu Lorentz uzayında $X(u, v)$ immersiyonuyla birlikte verilmiş bir timelike yüzey olsun. Eğer yüzeyin ortalama eğriliği sıfır ise M^2 yüzeyine timelike maksimal yüzey denir (Weinstein, 1996).

Tanım 2. 28. M^2, \mathbb{R}_1^3 3-boyutlu Lorentz uzayında $X(u, v)$ immersiyonuyla birlikte verilmiş timelike bir yüzey olsun. $p \in M^2$ noktasında

$$II_p(u, v) = \lambda(p) I_p(u, v)$$

ise p noktasına M^2 timelike yüzeyinin umbilik noktası denir (Lopez, 2008).

BÖLÜM 3. ÜÇ BOYUTLU LORENTZ UZAYINDA TİMELİKE YÜZEYLER

\mathbb{R}_1^3 , 3-boyutlu Lorentz uzayı

$$\langle , \rangle = dx_1^2 - dx_2^2 + dx_3^2$$

iç çarpımıyla verilsin. M^2 bu uzayda diferensiyellenebilir, yönlendirilebilir bir timelike yüzey ve $x \in M^2$ noktasında yüzeyin ortonormal çatısı $\{x; j_1, j_2, j_3\}$ olsun. Burada j_2 timelike birim vektör ve j_3 yüzeyin birim normal vektörü olup, $j_3 : M^2 \rightarrow S_1^2$ şeklinde tanımlanabilir ve yüzeyin Gauss dönüşümüne karşılık gelir (Park, 2008).

Tanım 3. 1. M^2 diferensiyellenebilir ve yönlendirilebilir bir timelike yüzey ve $\{x; j_1, j_2, j_3\}$ yüzeyin ortonormal çatısı olsun. $dx = \mu_1 j_1 - \mu_2 j_2$ ve $1 \leq i, k, l \leq 3$ olmak üzere

$$\mu_i = \langle dx, j_i \rangle$$

ifadesine $x \in M^2$ noktasında M^2 timelike yüzeyinin $\{j_i\}$ ortonormal çatısına karşılık gelen dual çatısının elemanları,

$$dj_k = \sum_{l=1}^3 \varepsilon_l \mu_{kl} j_l, \quad \varepsilon_l = \langle j_l, j_l \rangle = \begin{cases} 1, & j_l \text{ spacelike} \\ -1, & j_l \text{ timelike} \end{cases} \quad (3.1)$$

olmak üzere

$$\mu_{kl} = \langle dj_k, j_l \rangle$$

ifadesine $\{j_i\}$ ortonormal çatısına karşılık gelen koneksiyon (bağ) form denir.

Burada $\mu_{kl} = -\mu_{lk}$ dır (Park, 2008).

Teorem 3. 1. M^2 timelike yüzeyinin birinci ve ikinci yapı denklemleri, sırasıyla,

$$d\mu_k = \sum_{l=1}^3 \varepsilon_l \mu_l \wedge \mu_{lk} \quad (3.2)$$

ve

$$d\mu_{kl} = \sum_{n=1}^3 \varepsilon_n \mu_{kn} \wedge \mu_{nl} \quad (3.3)$$

dir (Park, 2008).

Yardımcı Teorem 3. 1. $1 \leq i \leq 3$ olmak üzere, M^2 timelike yüzeyinde $\{j_i\}$ ortonormal çatısına karşılık gelen dual çatı $\{\mu_i\}$ olsun. Bu takdirde, M^2 timelike yüzeyi üzerinde

$$\mu_3 = 0$$

dır.

İspat. $\mu_3 = \langle dx, j_3 \rangle$ ve $dx = \mu_1 j_1 - \mu_2 j_2$ olduğundan

$$\mu_3 = \langle \mu_1 j_1 - \mu_2 j_2, j_3 \rangle = 0$$

elde edilir.

Sonuç 3. 1. M^2 timelike yüzeyinin dual çatısı $\{\mu_1, \mu_2, \mu_3\}$ olmak üzere

$$\mu_1 \wedge \mu_{13} - \mu_2 \wedge \mu_{23} = 0$$

dir.

İspat. M^2 timelike yüzeyi üzerinde $\mu_3 = 0$ olduğundan $d\mu_3 = 0$ dir. Dolayısıyla yüzeyin birinci yapı denkleminde ispat görülür.

M^2 yüzeyinin birinci temel formu, 1-formlar yardımıyla

$$I = \mu_1^2 - \mu_2^2$$

olarak verilir (Park, 2008).

Yardımcı Teorem 3. 2. M^2 timelike yüzeyinde p ve q diferensiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere

$$d\mu_1 = -p\mu_1 \wedge \mu_2, \quad d\mu_2 = q\mu_1 \wedge \mu_2 \quad (3.4)$$

dir.

İspat. $\{\mu_1, \mu_2\}$, M^2 timelike yüzeyinin dual çatısı olduğundan μ_{12} koneksiyon formu, p ve q diferensiyellenebilir fonksiyonlar yardımıyla

$$\mu_{12} = p\mu_1 + q\mu_2 \quad (3.5)$$

gibi ifade edilebilir. (3.2) denkleminde yüzeyin yapı denklemleri

$$d\mu_1 = -\mu_2 \wedge \mu_{21}$$

ve

$$d\mu_2 = \mu_1 \wedge \mu_{12}$$

dir. Burada μ_{12} koneksiyon formu yerine p ve q diferensiyellenebilir fonksiyonlar türünden değeri yazılırsa

$$d\mu_1 = -\mu_2 \wedge \mu_{21} = \mu_2 \wedge \mu_{12} = \mu_2 \wedge (p\mu_1 + q\mu_2) = p\mu_2 \wedge \mu_1 = -p\mu_1 \wedge \mu_2$$

ve

$$d\mu_2 = \mu_1 \wedge \mu_{12} = \mu_2 \wedge (p\mu_1 + q\mu_2) = q\mu_1 \wedge \mu_2$$

elde edilir.

Yardımcı Teorem 3. 3. α, β, γ diferensiyellenebilir fonksiyonları olmak üzere M^2 timelike yüzeyinde

$$\mu_{13} = \alpha\mu_1 + \beta\mu_2, \quad \mu_{23} = -\beta\mu_1 + \gamma\mu_2 \quad (3.6)$$

olarak ifade edilebilir.

İspat. α, β, γ ve θ diferensiyellenebilir fonksiyonları yardımıyla

$$\mu_{13} = \alpha\mu_1 + \beta\mu_2, \quad \mu_{23} = \theta\mu_1 + \gamma\mu_2$$

eşitlikleri

$$\mu_1 \wedge \mu_{13} - \mu_2 \wedge \mu_{23} = 0$$

denkleminde yerine yazılırsa

$$\mu_1 \wedge (\alpha\mu_1 + \beta\mu_2) - \mu_2 \wedge (\theta\mu_1 + \gamma\mu_2) = \beta\mu_1 \wedge \mu_2 - \theta\mu_2 \wedge \mu_1 = (\beta + \theta)\mu_1 \wedge \mu_2 = 0$$

elde edilir. $\mu_1 \wedge \mu_2 \neq 0$ olduğundan $\beta = -\theta$ bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

Yardımcı Teorem 3. 4. M^2 timelike yüzeyinin Gauss ve ortalama eğriliği, sırasıyla,

$$K = -(\alpha\gamma + \beta^2) \quad (3.7)$$

ve

$$H = \frac{\alpha - \gamma}{2}$$

dir (Park, 2008).

İspat. M^2 timelike yüzeyinin birim normal vektörü $j_3 : M^2 \rightarrow S_1^2$ için

$$dj_3 : \mathcal{X}(M^2) \rightarrow \mathcal{X}(S_1^2)$$

dönüşümü timelike yüzeyinin şekil operatörüdür ve (3.1) denklemi yardımıyla

$$dj_3 = \mu_{31}j_1 - \mu_{32}j_2$$

dır. (3.6) denklemindeki eşitlikler yardımıyla

$$dj_3 = \begin{bmatrix} -\alpha & -\beta \\ -\beta & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} [j_1 \quad j_2] = \begin{bmatrix} -\alpha & -\beta \\ -\beta & \gamma \end{bmatrix}$$

elde edilir. Böylece M^2 timelike yüzeyinin Gauss ve ortalama eğriliği sırasıyla

$$K = \det(dj_3) = -(\alpha\gamma + \beta^2)$$

ve

$$H = \frac{1}{2} \text{iz}(-dj_3) = \frac{\alpha - \gamma}{2}$$

olarak bulunur.

\mathbb{R}_1^3 , 3-boyutlu Lorentz uzayında bir timelike yüzey üzerindeki S şekil operatörü matrisi için 3 farklı ihtimal söz konusudur. Şekil operatörü matrisi ya \mathbb{R} üzerinde köşegenleştirilebilir ya \mathbb{C} üzerinde köşegenleştirilebilir ancak \mathbb{R} üzerinde köşegenleştirilemez ya da \mathbb{C} üzerinde köşegenleştirilemez ve bir tek reel özdeğere sahiptir (Magid, 2005). S nin 3-boyutlu Lorentz uzayında köşegenleştirilebilmesi

için gerek ve yeter şart $H^2 - K > 0$ olmasıdır (Chen, 1999). Dolayısıyla M^2 timelike yüzeyi üzerinde $H^2 - K > 0$ olarak kabul edilecektir.

μ_{12} , μ_{13} ve μ_{23} koneksiyon formları yardımıyla M^2 timelike yüzeyinin Gauss ve Codazzi-Mainardi denklemleri aşağıdaki teoremdaki bağıntılar ile verilebilir.

Teorem 3. 2. M^2 timelike yüzeyinin Gauss ve Codazzi-Mainardi denklemleri sırasıyla,

$$d\mu_{12} = K\mu_1 \wedge \mu_2 \quad (3.8)$$

ve

$$\begin{aligned} d\mu_{13} &= \gamma d\mu_1 - \beta d\mu_2, \\ d\mu_{23} &= \beta d\mu_1 + \alpha d\mu_2 \end{aligned}$$

(3.9)

dır.

İspat. (3.3) denkleminde verilen yüzeyin ikinci yapı denklemlerinden

$$d\mu_{12} = \mu_{13} \wedge \mu_{32} = -\mu_{13} \wedge \mu_{23}$$

dir. Bu denklemde, (3.6) denkleminde verilen μ_{13} ve μ_{23} koneksiyon formları yerine yazılırsa

$$d\mu_{12} = (\alpha\mu_1 + \beta\mu_2) \wedge (-\beta\mu_1 + \gamma\mu_2) = -\alpha\gamma\mu_1 \wedge \mu_2 + \beta^2\mu_2 \wedge \mu_1 = -(\alpha\gamma + \beta^2)\mu_1 \wedge \mu_2$$

elde edilir. Böylece son denklem ve (3.7) denklemini yardımıyla

$$d\mu_{12} = K\mu_1 \wedge \mu_2$$

elde edilir. Benzer şekilde Codazzi-Mainardi denklemlerini bulmak için

$$d\mu_{13} = -\mu_{12} \wedge \mu_{23}, \quad d\mu_{23} = \mu_{21} \wedge \mu_{13}$$

yapı denkleminlerinde (3.5) ve (3.6) denklemleri yerlerine yazılırsa

$$d\mu_{13} = -(p\mu_1 + q\mu_2) \wedge (-\beta\mu_1 + \gamma\mu_2) = -p\gamma\mu_1 \wedge \mu_2 + q\beta\mu_2 \wedge \mu_1 = -p\gamma\mu_1 \wedge \mu_2 - q\beta\mu_1 \wedge \mu_2$$

ve

$$d\mu_{23} = -(p\mu_1 + q\mu_2) \wedge (\alpha\mu_1 + \beta\mu_2) = -p\beta\mu_1 \wedge \mu_2 - q\alpha\mu_2 \wedge \mu_1 = -p\beta\mu_1 \wedge \mu_2 + q\alpha\mu_1 \wedge \mu_2$$

elde edilir. Ayrıca Yardımcı Teorem 3. 2. deki (3.4) denklemleri yardımıyla

$$d\mu_{13} = \gamma(-p\mu_1 \wedge \mu_2) - \beta(q\mu_1 \wedge \mu_2) = \gamma d\mu_1 - \beta d\mu_2$$

ve

$$d\mu_{23} = -\beta(p\mu_1 \wedge \mu_2) + \alpha(q\mu_1 \wedge \mu_2) = \beta d\mu_1 + \alpha d\mu_2$$

elde edilir.

Örnek 3. 1. $S_1^2 = \{a \in \mathbb{R}_1^3 \mid \langle a, a \rangle = r\}$ Lorentz küresinin Gauss eğriliğinin $\frac{1}{r^2}$

olduğunu gösterelim. İlk olarak, S_1^2 yüzeyinin dual çatısını ve koneksiyon formunu

elde edelim. $\{U_1, U_2, U_3\}$, S_1^2 üzerinde hareket eden Lorentzian küresel çatı olsun.

Böylece 3-boyutlu Lorentz uzayı \mathbb{R}_1^3 ün birim normal çatısı $\{i, j, k\}$ yardımıyla

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \phi \cos \theta & \cosh \phi \sin \theta & \sinh \phi \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ \sinh \phi \cos \theta & \sinh \phi \sin \theta & \cosh \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ j \\ k \end{pmatrix}$$

yazılabilir. $x_1 = r \cosh \phi \cos \theta$, $x_2 = r \cosh \phi \sin \theta$ ve $x_3 = r \sinh \phi$ olmak üzere

$\{i, j, k\}$ çatısının dual çatısı $\{dx_1, dx_2, dx_3\}$ dir. Kısalığın hatırı için

$$A = \begin{pmatrix} \cosh \phi \cos \theta & \cosh \phi \sin \theta & \sinh \phi \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ \sinh \phi \cos \theta & \sinh \phi \sin \theta & \cosh \phi \end{pmatrix}, \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

denirse, $\{U_1, U_2, U_3\}$ çatısının dual çatısı $\{\mu_1, \mu_2, \mu_3\}$ için

$$\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix} = A \varepsilon \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix}$$

eşitliğinden $\{r \cosh(\phi)d\theta, -rd\phi, dr\}$ elde edilir. Ayrıca bu çatıya karşılık gelen koneksiyon form

$$(\mu_{ij}) = dAA^{-1}\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & -d\theta \sinh(\phi) & -d\theta \cosh(\phi) \\ d\theta \sinh(\phi) & 0 & d\phi \\ d\theta \cosh(\phi) & -d\phi & 0 \end{pmatrix}$$

olarak bulunur. Diğer taraftan

$$d\mu_{12} = d(-d\theta \sinh(\phi)) = -(d(d\theta) \sinh(\phi) + d\theta \wedge \cosh(\phi)d\phi) = -\cosh(\phi)d\theta \wedge d\phi$$

ve

$$\mu_1 \wedge \mu_2 = r \cosh(\phi)d\theta \wedge -rd\phi = -r^2 \cosh(\phi)d\theta \wedge d\phi$$

denklemlerinin eşitliğinden $K = \frac{1}{r^2}$ olduğu görülür.

M^2 timelike yüzeyinin x noktasındaki asli çatısı $\{x; e_1, e_2, e_3 = j_3\}$, bu asli çatının

dual çatısı ve koneksiyon formları sırasıyla, $\{w_1, w_2, w_3\}$ ve $\{w_{kl}\}$, $1 \leq k, l \leq 3$, olsun.

e_1 ve j_1 arasındaki açı ψ olmak üzere

$$j_1 = \cosh \psi e_1 + \sinh \psi e_2, j_2 = \sinh \psi e_1 + \cosh \psi e_2, \quad (3.10)$$

$$\mu_1 = \cosh \psi w_1 + \sinh \psi w_2, \mu_2 = \sinh \psi w_1 + \cosh \psi w_2, \quad (3.11)$$

$$\mu_{13} = \cosh \psi w_{13} + \sinh \psi w_{23}, \mu_{23} = \sinh \psi w_{13} + \cosh \psi w_{23} \quad (3.12)$$

bağıntıları vardır (Chen, 1999). Bu takdirde aşağıdaki yardımcı teorem verilebilir.

Yardımcı Teorem 3. 5. M^2 timelike yüzeyinin μ_{12} ve w_{12} koneksiyon formları arasında

$$\mu_{12} = w_{12} - d\psi \quad (3.13)$$

bağıntısı vardır.

İspat. (3.11) denkleminde d operatörü uygulanırsa

$$d\mu_1 = \cosh \psi dw_1 + \sinh \psi d\psi \wedge w_1 + \sinh \psi dw_2 + \cosh \psi d\psi \wedge w_2$$

elde edilir. Son eşitlikte birinci yapı denklemleri kullanılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned} d\mu_1 &= \cosh \psi (-w_{12} \wedge w_2) + \sinh \psi d\psi \wedge w_1 + \sinh \psi (-w_{12} \wedge w_1) + \cosh \psi d\psi \wedge w_2 \\ &= -w_{12} \wedge (\cosh \psi w_2 + \sinh \psi w_1) + d\psi \wedge (\cosh \psi w_2 + \sinh \psi w_1) \\ &= (d\psi - w_{12}) \wedge \mu_2 \end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca birinci yapı denklemlerinden $d\mu_1 = -\mu_{12} \wedge \mu_2$ olduğundan

$$(d\psi - w_{12}) \wedge \mu_2 = -\mu_{12} \wedge \mu_2 \Rightarrow d\psi - w_{12} = -\mu_{12}$$

elde edilir ki ispat tamamlanmış olur.

Tanım 3. 2. M^2 timelike yüzeyi üzerinde

$$*\mu_1 = -\mu_2, *\mu_2 = -\mu_1, *^2 = 1$$

şeklinde tanımlanan işleme Hodge-yıldız operatörü denir (Chen, 1999).

Yardımcı Teorem 3. 5. ve Hodge-yıldız operatörü yardımıyla aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3. 3. M^2 timelike yüzeyinin farklı iki çatısı $\{j_1, j_2\}$, $\{e_1, e_2\}$ ve bu çatılara karşılık gelen dual çatılar sırasıyla $\{\mu_1, \mu_2\}$ ve $\{w_1, w_2\}$ olmak üzere, $\{\mu_1, \mu_2\}$ dual çatısı izotermal koordinatlardan elde edilmiş olsun. Bu durumda $\{w_1, w_2\}$ dual çatısının da izotermal koordinatlardan elde edilebilmesi için gerek ve yeter şart $\Delta\psi = 0$ dır, yani dual çatılar arasındaki açının harmonik olmasıdır.

İspat. Bir yüzeyin izotermal koordinatlardan elde edilebilmesi için gerek ve yeter koşul $d*\mu_{12} = 0$ dır (Stephanidis, 1987). Bu durum göz önünde bulundurularak (3.13) denkleminde Hodge-yıldız operatörü uygulanırsa

$$*\mu_{12} = *w_{12} - *d\psi$$

elde edilir. Son denkleme d operatörü uygulanırsa

$$d*\mu_{12} = d*w_{12} - d*d\psi$$

bulunur. Kabul gereği $\{\mu_1, \mu_2\}$ dual çatısı izotermal koordinatlardan elde edilmiş olduğundan $d*\mu_{12} = 0$ dır. Bu eşitlik son denkleminde kullanılırsa

$$d*w_{12} = d*d\psi$$

elde edilir. Diğer taraftan Laplasyan operatörü yardımıyla, M^2 timelike yüzeyinin alan elementi dA olmak üzere

$$d*d\psi = \Delta\psi dA$$

olduğundan

$$d * w_{12} = \Delta \psi dA \quad (3.14)$$

elde edilir (Külahcı, 2008). Kabul edelim ki $\{w_1, w_2\}$ dual çatısı izotermal koordinatlardan elde edilmiş olsun. Bu durumda $d * w_{12} = 0$ olup, (3.14) denkleminde

$$\Delta \psi dA = 0$$

elde edilir. Alan elementi

$$dA = \mu_1 \wedge \mu_2 = w_1 \wedge w_2$$

olup bu değer sıfırdan farklı olduğundan

$$\Delta \psi = 0$$

bulunur. Bulunan bu ifade ψ nin harmonik olduğunu gösterir.

Tersine, ψ harmonik ise $\Delta \psi = 0$ dır. Bu durumda, dA alan elementi sıfırdan farklı olduğundan (3.14) denkleminde

$$d * w_{12} = 0$$

olur. Böylece $\{w_1, w_2\}$ dual çatısının izotermal koordinatlardan elde edilmiş olduğunu gösterir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

M^2 timelike yüzeyinin $\{e_1, e_2\}$ asli doğrultularına karşılık gelen asli eğrilikleri a ve c olsun. Bu durumda

$$w_{13} = aw_1, w_{23} = -cw_2 \quad (3.15)$$

olup yüzeyin Gauss ve ortalama eğriliği, sırasıyla

$$K = -ac$$

ve

$$H = \frac{a-c}{2} \quad (3.16)$$

dır. Ayrıca

$$J = \frac{a+c}{2} \quad (3.17)$$

olarak adlandırılımsın. (3.11), (3.12), (3.15), (3.16) ve (3.17) denklemleri yardımıyla aşağıdaki yardımcı teorem verilebilir.

Yardımcı Teorem 3. 6. M^2 timelike yüzeyinin $\{e_1, e_2\}$ asli çatısı ile $\{j_1, j_2\}$ asli olmayan çatısına karşılık gelen koneksiyon formlar sırasıyla, $1 \leq k, l \leq 3$ olmak üzere, $\{\mu_{kl}\}$ ve $\{w_{kl}\}$ olsun. Bu durumda $\mu_{13} = \alpha\mu_1 + \beta\mu_2$, $\mu_{23} = -\beta\mu_1 + \gamma\mu_2$, $w_{13} = aw_1$, $w_{23} = -cw_2$ eşitliklerini sağlayan α , γ , β , a ve c diferensiyellenebilir fonksiyonları arasında

$$\alpha = J \cosh 2\psi + H, \quad \beta = -J \sinh 2\psi, \quad \gamma = -J \cosh 2\psi + H \quad (3.18)$$

bağıntıları vardır.

İspat. $\mu_{13} = \alpha\mu_1 + \beta\mu_2$ eşitliğinde (3.11) denklemini göz önüne alırsanız

$$\begin{aligned} \mu_{13} &= \alpha (\cosh \psi w_1 + \sinh \psi w_2) + \beta (\sinh \psi w_1 + \cosh \psi w_2) \\ &= (\alpha \cosh \psi + \beta \sinh \psi) w_1 + (\alpha \sinh \psi + \beta \cosh \psi) w_2 \end{aligned} \quad (3.19)$$

elde edilir. Diğer taraftan (3.15) denklemini yardımıyla, (3.12) denkleminin birinci eşitliği yeniden düzenlenirse

$$\mu_{13} = \cosh \psi w_{13} + \sinh \psi w_{23} = \cosh \psi (aw_1) - \sinh \psi (cw_2) \quad (3.20)$$

bulunur. (3.19) ve (3.20) denklemlerinin eşitliğinden

$$\alpha \cosh \psi + \beta \sinh \psi = a \cosh \psi, \quad (3.21)$$

$$\alpha \sinh \psi + \beta \cosh \psi = -c \sinh \psi \quad (3.22)$$

elde edilir. Bu lineer denklem sistemini çözmek için (3.21) denklemi $\cosh \psi$, (3.22) denklemi $\sinh \psi$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} \alpha \cosh^2 \psi + \beta \cosh \psi \sinh \psi &= a \cosh^2 \psi, \\ \alpha \sinh^2 \psi + \beta \sinh \psi \cosh \psi &= -c \sinh^2 \psi \end{aligned}$$

bulunur. Son iki denklem taraf tarafa çıkarılırsa

$$\alpha = a \cosh^2 \psi + c \sinh^2 \psi$$

elde edilir. Ayrıca, $\cosh^2 \psi - \sinh^2 \psi = 1$ olduğu dikkate alınarak, bu son denklem

$$\alpha = \frac{a}{2} \cosh^2 \psi + \frac{c}{2} \sinh^2 \psi + \frac{a}{2} (1 + \sinh^2 \psi) + \frac{c}{2} (-1 + \cosh^2 \psi)$$

olarak ifade edilebilir. Son eşitlikte gerekli işlemler yapılır, (3.16) ve (3.17) denklemleri göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{a}{2} \cosh^2 \psi + \frac{c}{2} \cosh^2 \psi + \frac{a}{2} \sinh^2 \psi + \frac{c}{2} \sinh^2 \psi + \frac{a}{2} - \frac{c}{2} \\ &= \left(\frac{a+c}{2} \right) \cosh^2 \psi + \left(\frac{a+c}{2} \right) \sinh^2 \psi + \left(\frac{a-c}{2} \right) \\ &= \left(\frac{a+c}{2} \right) (\cosh^2 \psi + \sinh^2 \psi) + \left(\frac{a-c}{2} \right) \\ &= J \cosh 2\psi + H \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer yolla $\mu_{23} = -\beta\mu_1 + \gamma\mu_2$ eşitliğinde (3.11) denklemi yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \mu_{23} &= -\beta(\cosh \psi w_1 + \sinh \psi w_2) + \gamma(\sinh \psi w_1 + \cosh \psi w_2) \\ &= (-\beta \cosh \psi + \gamma \sinh \psi) w_1 + (-\beta \sinh \psi + \gamma \cosh \psi) w_2 \end{aligned} \quad (3.23)$$

bulunur. Diğer taraftan (3.15) denklemini göz önünde alınarak, (3.12) denkleminin ikinci eşitliği yeniden düzenlenirse

$$\mu_{23} = \sinh \psi w_{13} + \cosh \psi w_{23} = \sinh \psi (aw_1) - \cosh \psi (cw_2) \quad (3.24)$$

olur. (3.23) ve (3.24) denklemlerinin eşitliğinden

$$-\beta \cosh \psi + \gamma \sinh \psi = a \sinh \psi, \quad (3.25)$$

$$-\beta \sinh \psi + \gamma \cosh \psi = -c \cosh \psi \quad (3.26)$$

bulunur. Eğer (3.25) denklemi $-\cosh \psi$, (3.26) denklemi $\sinh \psi$ ile çarpılırsa

$$\beta \cosh^2 \psi - \gamma \cosh \psi \sinh \psi = -a \cosh \psi \sinh \psi,$$

$$-\beta \sinh^2 \psi + \gamma \sinh \psi \cosh \psi = -c \sinh \psi \cosh \psi$$

elde edilir. Taraf tarafa toplama işlemi yapılır ve (3.17) denklemi kullanılırsa

$$\beta = -\left(\frac{a+c}{2}\right) 2 \cosh \psi \sinh \psi = -J \sinh 2\psi$$

elde edilir. Benzer şekilde (3.25) denklemi $-\sinh \psi$, (3.26) denklemi $\cosh \psi$ ile çarpılırsa

$$\beta \cosh \psi \sinh \psi - \gamma \sinh^2 \psi = -a \sinh^2 \psi,$$

$$-\beta \cosh \psi \sinh \psi + \gamma \cosh^2 \psi = -c \cosh^2 \psi$$

olur. Bu iki denkleminin taraf tarafa toplamından

$$\gamma = -c \cosh^2 \psi - a \sinh^2 \psi$$

elde edilir. Elde edilen bu son denklem

$$\gamma = -\left(\frac{c}{2} \cosh^2 \psi + \frac{a}{2} \sinh^2 \psi + \frac{c}{2} (1 + \sinh^2 \psi) + \frac{a}{2} (-1 + \cosh^2 \psi)\right)$$

olarak ifade edilebilir. Böylece (3.16) ve (3.17) denklemleri yardımıyla

$$\begin{aligned}
\gamma &= -\left(\frac{c}{2}\cosh^2\psi + \frac{a}{2}\sinh^2\psi + \frac{c}{2}(1 + \sinh^2\psi) + \frac{a}{2}(-1 + \cosh^2\psi)\right) \\
&= -\left(\left(\frac{a+c}{2}\right)\cosh^2\psi + \left(\frac{a+c}{2}\right)\sinh^2\psi - \left(\frac{a-c}{2}\right)\right) \\
&= -\left(\frac{a+c}{2}\right)(\cosh^2\psi + \sinh^2\psi) + \left(\frac{a-c}{2}\right) \\
&= -J \cosh 2\psi + H
\end{aligned}$$

bulunur.

Yardımcı Teorem 3. 6. göz önüne alınarak aşağıdaki yardımcı teorem verilebilir.

Yardımcı Teorem 3. 7. M^2 timelike yüzeyinin ortalama eğriliği H ve $dH = H_1\mu_1 - H_2\mu_2$ olmak üzere

$$d(2\psi) = 2\sinh 2\psi \left(\frac{H_1}{J}\mu_1 + \frac{H_2}{J}\mu_2\right) - 2\cosh 2\psi \left(\frac{H_1}{J}\mu_2 + \frac{H_2}{J}\mu_1\right) - 2\mu_{12} + *4d(\ln J) \quad (3.27)$$

dır.

İspat. $\{w_1, w_2\}$, M^2 nin dual bazı olduğundan w_{12} 1-formu, \tilde{p} ve \tilde{q} diferensiyellenebilir fonksiyonları yardımıyla

$$w_{12} = \tilde{p}w_1 + \tilde{q}w_2$$

şeklinde ifade edilebilir. (3.15) denkleminde d operatörü uygulanır ve birinci yapı denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
dw_{13} &= da \wedge w_1 + adw_1 = da \wedge w_1 + a(-w_{12} \wedge w_2) \\
&= da \wedge w_1 + a(-(\tilde{p}w_1 + \tilde{q}w_2) \wedge w_2) \\
&= da \wedge w_1 + a(-\tilde{p}w_1 \wedge w_2) = da \wedge w_1 + a\tilde{p}w_2 \wedge w_1 \\
&= (da + a\tilde{p}w_2) \wedge w_1
\end{aligned} \tag{3.28}$$

ve

$$\begin{aligned}
dw_{23} &= -dc \wedge w_2 - cdw_2 = -dc \wedge w_2 - c(w_{21} \wedge w_1) \\
&= -dc \wedge w_2 - c(-w_{12} \wedge w_1) \\
&= -dc \wedge w_2 - c(-(\tilde{p}w_1 + \tilde{q}w_2) \wedge w_1) \\
&= -dc \wedge w_2 - c(-\tilde{q}w_2 \wedge w_1) \\
&= -dc \wedge w_2 - c\tilde{q}w_1 \wedge w_2 = (-dc - c\tilde{q}w_1) \wedge w_2
\end{aligned} \tag{3.29}$$

elde edilir. Diğer taraftan ikinci yapı denklemlerinden

$$dw_{13} = -w_{12} \wedge w_{23} = -(\tilde{p}w_1 + \tilde{q}w_2) \wedge -cw_2 = -c\tilde{p}w_2 \wedge w_1 \tag{3.30}$$

ve

$$dw_{23} = w_{21} \wedge w_{13} = -w_{12} \wedge w_{13} = -(\tilde{p}w_1 + \tilde{q}w_2) \wedge aw_1 = a\tilde{q}w_1 \wedge w_2 \tag{3.31}$$

bulunur. (3.28) ve (3.30) denklemlerinin eşitliğinde, (3.17) denklemi göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
dw_{13} &= (da + a\tilde{p}w_2) \wedge w_1 = -c\tilde{p}w_2 \wedge w_1, \\
da + a\tilde{p}w_2 &= -c\tilde{p}w_2, \\
da &= -(a + c)\tilde{p}w_2 = -2J\tilde{p}w_2
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde (3.29) ve (3.31) denklemlerinin eşitliğinde, (3.17) denklemi kullanılarak

$$\begin{aligned}
dw_{23} &= (-dc - c\tilde{q}w_1) \wedge w_2 = a\tilde{q}w_1 \wedge w_2, \\
-dc - c\tilde{q}w_1 &= a\tilde{q}w_1, \\
dc &= -(c\tilde{q}w_1 + a\tilde{q}w_1) = -(c + a)\tilde{q}w_1 = -2J\tilde{q}w_1
\end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca u ve v diferensiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere

$$dH = d\left(\frac{a-c}{2}\right) = uw_1 - vw_2$$

olarak ifade edilir, da ve dc değerleri yerine yazılırsa

$$\frac{da - dc}{2} = \frac{-2J\tilde{p}w_2 + 2J\tilde{q}w_1}{2} = J\tilde{q}w_1 - J\tilde{p}w_2 = uw_1 - vw_2$$

olur ki buradan $J\tilde{q} = u$ ve $J\tilde{p} = v$ elde edilir.

$$da = (-u + J\tilde{q})w_1 - 2J\tilde{p}w_2$$

ve

$$dc = -2J\tilde{q}w_1 + (-v + J\tilde{p})w_2$$

olmak üzere

$$da + dc = -uw_1 - vw_2 - J\tilde{q}w_1 - J\tilde{p}w_2$$

dir. Denklemin her iki tarafı $2J$ ile bölünürse

$$\frac{da + dc}{2J} = d(\ln J) = -\frac{1}{2} \left(\frac{u}{J} w_1 + \frac{v}{J} w_2 + \tilde{q}w_1 + \tilde{p}w_2 \right)$$

olur. Bu eşitliğe Hodge-yıldız operatörü uygulanırsa

$$\begin{aligned} *d(\ln J) &= -\frac{1}{2} \left(\frac{u}{J} *w_1 + \frac{v}{J} *w_2 + \tilde{q} *w_1 + \tilde{p} *w_2 \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left(-\frac{u}{J} w_2 - \frac{v}{J} w_1 - \tilde{q}w_2 - \tilde{p}w_1 \right) \\ &= \frac{v}{J} w_1 + \frac{u}{J} w_2 + w_{12} \end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan $dH = H_1\mu_1 - H_2\mu_2 = uw_1 - vw_2$ olduğundan

$$u = \cosh \psi H_1 - \sinh \psi H_2, v = -\sinh \psi H_1 + \cosh \psi H_2$$

yazılabilir. (3.11) denklemi ile birlikte u ve v değerleri bu son denklemde yerine yazılıp gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned}
*2d \ln J &= \frac{1}{J} \left[(-\sinh \psi H_1 + \cosh \psi H_2)(\cosh \psi \mu_1 - \sinh \psi \mu_2) \right. \\
&\quad \left. + (\cosh \psi H_1 - \sinh \psi H_2)(-\sinh \psi \mu_1 + \cosh \psi \mu_2) \right] + w_{12} \\
&= \frac{1}{J} \left[-\sinh \psi \cosh \psi H_1 \mu_1 + \sinh^2 \psi H_1 \mu_2 + \cosh^2 \psi H_2 \mu_1 \right. \\
&\quad \left. - \cosh \psi \sinh \psi H_2 \mu_2 - \cosh \psi \sinh \psi H_1 \mu_1 + \cosh^2 \psi H_1 \mu_2 \right. \\
&\quad \left. + \sinh^2 \psi H_2 \mu_1 - \sinh \psi \cosh \psi H_2 \mu_2 \right] + w_{12} \\
&= \frac{1}{J} \left[-2 \sinh \psi \cosh \psi (H_1 \mu_1 + H_2 \mu_2) \right. \\
&\quad \left. + (\cosh^2 \psi + \sinh^2 \psi)(H_1 \mu_2 + H_2 \mu_1) \right] + w_{12}
\end{aligned}$$

bulunur. Sonuç olarak

$$w_{12} = *2d(\ln J) + \sinh 2\psi \left(\frac{H_1}{J} \mu_1 + \frac{H_2}{J} \mu_2 \right) - \cosh 2\psi \left(\frac{H_1}{J} \mu_2 + \frac{H_2}{J} \mu_1 \right)$$

olur. Elde edilen bu denklem ve (3.13) denklemi göz önüne alınarak

$$\begin{aligned}
d(2\psi) &= 2(w_{12} - \mu_{12}) \\
&= 2 \sinh 2\psi \left(\frac{H_1}{J} \mu_1 + \frac{H_2}{J} \mu_2 \right) - 2 \cosh 2\psi \left(\frac{H_1}{J} \mu_2 + \frac{H_2}{J} \mu_1 \right) + *4d(\ln J) - 2\mu_{12}
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Böylece, Yardımcı Teorem 3. 7. den aşağıdaki teoremler verilebilir.

Teorem 3. 4. M^2 timelike yüzeyinin ortalama eğriliğinin sabit olması için gerek ve yeter koşul

$$d(2\psi) = *4d(\ln J) - 2\mu_{12} \quad (3.32)$$

olmasıdır.

İspat. Kabul edelim ki M^2 timelike yüzeyinin H ortalama eğriliği sabit olsun. Dolayısıyla

$$dH = H_1 \mu_1 - H_2 \mu_2 = 0$$

dır. Ayrıca $\mu_1 \neq 0$, $\mu_2 \neq 0$ ve $\mu_1 \neq \mu_2$ olduğundan

$$H_1 = H_2 = 0$$

dır. H_1 ve H_2 değerleri (3.27) denkleminde yerine yazılırsa

$$d(2\psi) = *4d(\ln J) - 2\mu_{12}$$

elde edilir.

Tersine kabul edelim ki

$$d(2\psi) = *4d(\ln J) - 2\mu_{12}$$

olsun. Bu durumda (3.27) denkleminde

$$H_1 = H_2 = 0$$

olur. Dolayısıyla $dH = 0$ yani H sabittir.

Teorem 3. 4. yardımıyla aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3. 5. Sabit ortalama eğrilikli M^2 timelike yüzeyi

$$\Delta \ln(H^2 - K) = K \quad (3.33)$$

kısmi diferensiyel denklemini sağlar.

İspat. (3.32) denkleminde d operatörü uygulanırsa

$$d(d(2\psi)) = 4d * d(\ln J) - 2d\mu_{12} \Rightarrow 0 = 4d * d(\ln J) - 2d\mu_{12}$$

bulunur. Bu son denkleminde Laplasyan operatörü uygulanır ve Gauss denklemi göz önüne alınır

$$0 = 2\Delta(\ln J)\mu_1 \wedge \mu_2 - K\mu_1 \wedge \mu_2 = (2\Delta(\ln J) - K)\mu_1 \wedge \mu_2$$

elde edilir. Ayrıca $\mu_1 \wedge \mu_2 \neq 0$ olduğundan

$$0 = 2\Delta(\ln J) - K \Rightarrow \Delta(\ln J) = \frac{K}{2}$$

elde edilir. $J = \sqrt{H^2 - K}$ olduğu göz önünde bulundurulursa

$$\frac{1}{2}\Delta(\ln(H^2 - K)) = \frac{K}{2}$$

bulunur ve ispat tamamlanır.

Teorem 3. 5. in bir sonucu aşağıda verilmiştir.

Sonuç 3. 2. $K < 0$ olan M^2 maksimal timelike yüzeyi için

$$\Delta(\ln(-K)) = K$$

bağıntısı vardır.

İspat. M^2 timelike yüzeyi maksimal ise $H = 0$ dir. Bu değer (3.33) denkleminde yerine yazılarak ispat tamamlanır.

Teorem 3. 6. Ortalama eğriliği sabit olan bir M^2 timelike yüzeyi izotermik hale getirilebilir.

İspat. M^2 timelike yüzeyinin $\{e_1, e_2\}$ asli çatısı ile $\{j_1, j_2\}$ asli olmayan çatısı çakıştırılarak M^2 timelike yüzeyi izotermik hale getirilebilir. Çünkü çatılar arasındaki açı sıfır, yani $\psi = 0$ alınır, (3.13) ve (3.32) denklemlerinden

$$w_{12} = \mu_{12} = *2d(\ln J)$$

olduğu görülür. Bu denkleme Hodge-yıldız operatörü uygulanırsa

$$*w_{12} = *\mu_{12} = 2d(\ln J)$$

bulunur. Elde edilen bu denklemin dış türevi alınırsa $d*w_{12} = d*\mu_{12} = 0$ elde edilir.

Ayrıca ψ sabit durumunda da (3.32) denklemini yardımıyla $*w_{12} = *\mu_{12} = 2d(\ln J)$ olduğu, dolayısıyla izotermik olma şartının sağlandığı görülür. Böylece ispat tamamlanır.

Ayrıca, $\psi = 0$ olma durumunda herhangi bir timelike yüzeyin izotermik olması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki teoremdeki gibi verilebilir.

Teorem 3. 7. M^2 timelike yüzeyinin $\{e_1, e_2\}$ asli çatısı ile $\{j_1, j_2\}$ asli olmayan çatısı çakışık ve bu çatılara karşılık gelen dual çatılar sırasıyla $\{\mu_1, \mu_2\}$ ve $\{w_1, w_2\}$ olmak üzere, M^2 timelike yüzeyinin izotermik olması için gerek ve yeter şart

$$d\left(\frac{H_1}{J}\mu_2 + \frac{H_2}{J}\mu_1\right) = 0 \quad (3.34)$$

olmasıdır.

İspat. Eğer (3.27) denkleminde $\psi = 0$ değeri yerine yazılırsa

$$\left(\frac{H_1}{J}\mu_1 + \frac{H_2}{J}\mu_2\right) = -\mu_{12} + *2d(\ln J)$$

elde edilir. Bu son denkleme Hodge-yıldız operatörü uygulanırsa

$$*\left(\frac{H_1}{J}\mu_1 + \frac{H_2}{J}\mu_2\right) = *-\mu_{12} + *^22d(\ln J) \Rightarrow \left(\frac{H_1}{J}\mu_2 + \frac{H_2}{J}\mu_1\right) = *\mu_{12} - 2d(\ln J)$$

olur. Daha sonra d operatörü uygulanırsa

$$d\left(\frac{H_1}{J}\mu_2 + \frac{H_2}{J}\mu_1\right) = d*\mu_{12} - 2d(d(\ln J)) \Rightarrow d\left(\frac{H_1}{J}\mu_2 + \frac{H_2}{J}\mu_1\right) = d*\mu_{12}$$

elde edilir. Bu son denklemden $d\left(\frac{H_1}{J}\mu_2 + \frac{H_2}{J}\mu_1\right) = 0$ ancak ve ancak $d*\mu_{12} = 0$ olduğu kolayca görülür ki bu da yüzeyin izotermik hale getirilebilme koşuludur.

Sonuç 3. 3. (u, v) asli koordinatlarıyla verilmiş bir timelike yüzey için (3.34) denklemi, ortalama eğriliğinin ikinci dereceden hiperbolik homojen kısmi diferensiyel denklemi olan

$$H_{uu} - H_{vv} - (\ln J)_u H_u - (\ln J)_v H_v = 0$$

denklemine eşittir.

İspat. (u, v) asli koordinatları için $dH = H_u du - H_v dv$ olduğundan (3.34) denklemi

$$d\left(\frac{H_u}{J} dv + \frac{H_v}{J} du\right) = \frac{H_{uu}}{J} du \wedge dv + \frac{H_{vv}}{J} dv \wedge du + d\left(\frac{1}{J}\right) H_u dv + d\left(\frac{1}{J}\right) H_v du = 0$$

olarak elde edilir. Diğer taraftan

$$d\left(\frac{1}{J}\right) = \frac{-dJ}{J^2} = \frac{-J_u du + J_v dv}{J^2}$$

olup

$$\frac{H_{uu}}{J} du \wedge dv - \frac{H_{vv}}{J} du \wedge dv - \frac{J_u H_u}{J^2} du \wedge dv - \frac{J_v H_v}{J^2} du \wedge dv = \left(\frac{H_{uu}}{J^2} - \frac{H_{vv}}{J^2} - \frac{J_u H_u}{J^2} - \frac{J_v H_v}{J^2}\right) du \wedge dv = 0$$

dır. $du \wedge dv \neq 0$ olduğundan, sırasıyla, aşağıdaki düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} \frac{H_{uu}}{J} - \frac{H_{vv}}{J} - \frac{J_u H_u}{J^2} - \frac{J_v H_v}{J^2} = 0 &\Rightarrow H_{uu} - H_{vv} - \frac{J_u}{J} H_u - \frac{J_v}{J} H_v = 0 \\ &\Rightarrow H_{uu} - H_{vv} - (\ln J)_u H_u - (\ln J)_v H_v = 0 \end{aligned}$$

bulunur.

BÖLÜM 4. TİMELİKE GENELLEŞTİRİLMİŞ SİLİNDİR, TİMELİKE DÖNEL YÜZEY ve TİMELİKE HELİKOİDAL YÜZEYLERİN GAUSS DENKLEMLERİ

4. 1. Timelike Dönel Yüzeyler ve Timelike Helikoidal Yüzeyler

\mathbb{R}_1^3 , 3-boyutlu Lorentz uzayında $\pi \subset \mathbb{R}_1^3$ bir düzlem olmak üzere, $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \pi \subset \mathbb{R}_1^3$ düzlemsel eğrisinin, kendisiyle kesişmeyen $l \in \mathbb{R}_1^3$ doğrultusu etrafında dönmesi sonucu oluşan yüzeye dönel yüzey, α eğrisinin $l \in \mathbb{R}_1^3$ doğrultusu etrafında aynı anda dönme ve ötelenmesi sonucu oluşan yüzeye de helikoidal yüzey denir. Özel olarak bu yüzeylerin η birim normal vektörleri spacelike ise bu yüzeylere sırasıyla, timelike dönel yüzey ve timelike helikoidal yüzey denir. Bu yüzeyler $l \in \mathbb{R}_1^3$ doğrultusuna göre üçe ayrılabilir (McNertthey, 1980), (Ikawa, 2001).

4. 1. 1. $l \in \mathbb{R}_1^3$ Spacelike Olma Durumu

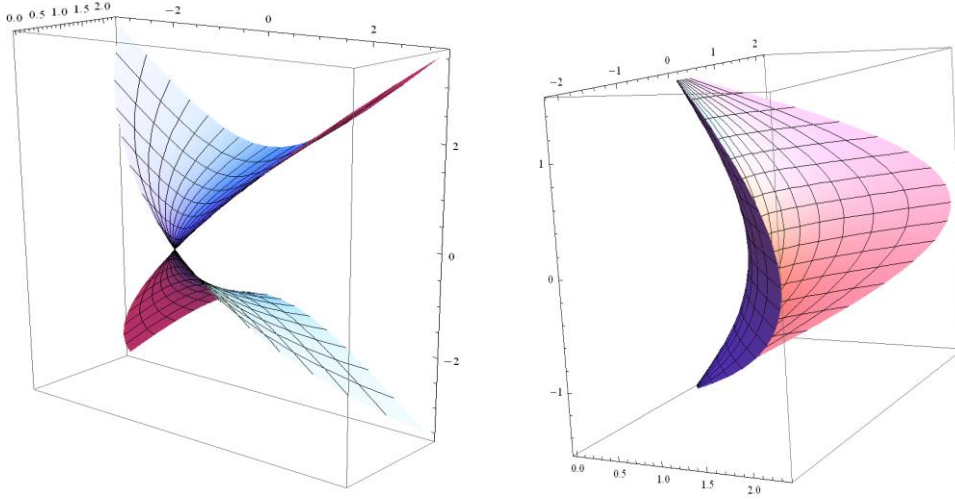
l doğrultusu yerine $(1,0,0)$ almak genelliği bozmaz. Bu durumda π düzlemi ya x_1x_2 – düzlemi ya da x_1x_3 – düzlemi olarak alınabilir. α eğrisi x_1x_2 – düzleminde ise f ve g diferensiyellenebilir fonksiyonlar yardımıyla, $\alpha = (f(t), g(t), 0)$ olarak parametrize edilebilir. Eğer α eğrisi x_1x_3 – düzleminde ise $\alpha = (f(t), 0, g(t))$ gibi parametrize edilebilir. α eğrisinin x_1x_2 – düzleminde yattığı kabul edilirse, timelike dönel yüzey

$$D(s, t) = (f(t), g(t) \cosh \psi(s), g(t) \sinh \psi(s))$$

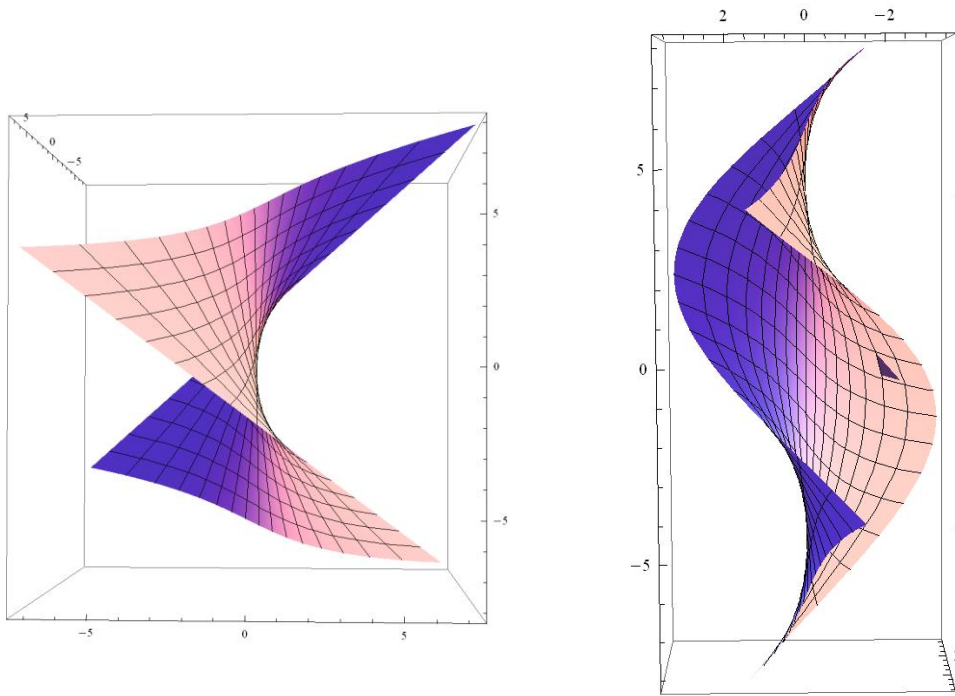
ve timelike helikoidal yüzey

$$H(s, t) = (f(t) + h(s), g(t) \cosh \psi(s), g(t) \sinh \psi(s))$$

olarak ifade edilebilir. Burada $h(s)$ timelike helikoidal yüzeyin bir adımınıdır (McNerthey, 1980), (Ikawa, 2001).



Şekil 4. 1. 1. 1. Spacelike eksenli timelike dönele yüzeyler



Şekil 4. 1. 1. 2. Spacelike eksenli timelike helikoidal yüzeyler

4. 1. 2. $l \in \mathbb{R}_1^3$ Timelike Olma Durumu

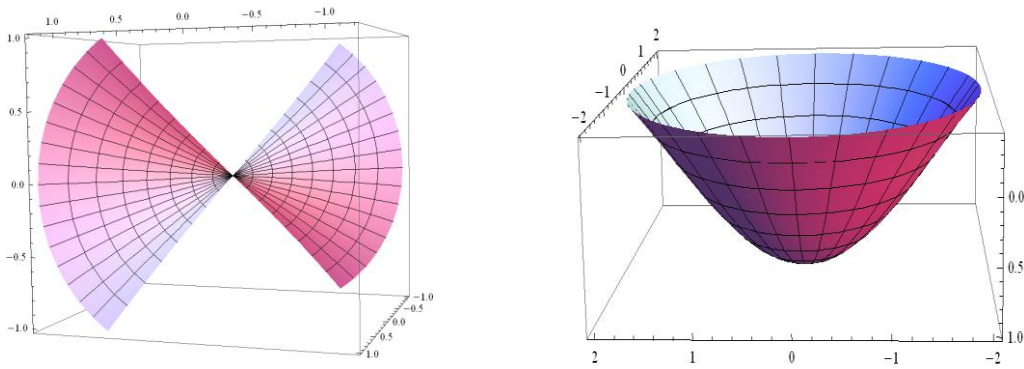
l doğrultusu olarak $(0,1,0)$ alınırsa π düzlemi x_1x_2 -düzlemi ya da x_2x_3 -düzlemi olarak alınabilir. α eğrisinin x_1x_2 -düzleminde yattığı kabul edilirse, f ve g diferensiyellenebilir fonksiyonlar yardımıyla, $\alpha = (f(t), g(t), 0)$ olarak parametrize edilebilir. Böylece timelike döneel yüzey

$$D(s, t) = (f(t) \cos \psi(s), g(t), f(t) \sin \psi(s))$$

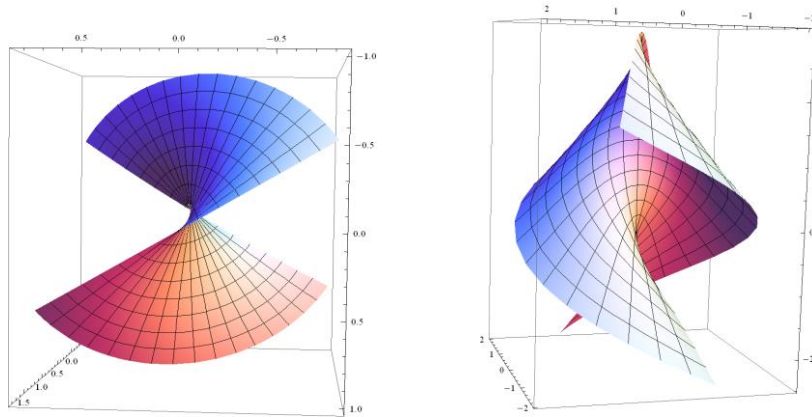
ve timelike helikoidal yüzey, $h(s)$ adımı yardımıyla,

$$H(s, t) = (f(t) \cos \psi(s), g(t) + h(s), f(t) \sin \psi(s))$$

olarak ifade edilebilir (McNerthey, 1980), (Ikawa, 2001).



Şekil 4. 1. 2. 1. Timelike eksenli timelike döneel yüzeyler



Şekil 4. 1. 2. 2. Timelike eksenli timelike helikoidal yüzeyler

4. 1. 3. $l \in \mathbb{R}_1^3$ Null Olma Durumu

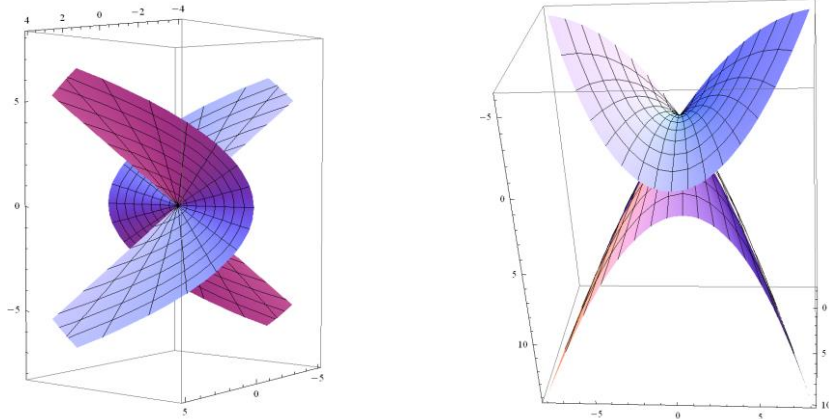
l doğrultusu yerine $(1,1,0)$ almak genelliği bozmaz. f ve g diferensiyellenebilir fonksiyonlar yerine sırasıyla $\varphi(t)+t$ ve $\varphi(t)-t$ alınabilir. Dolayısıyla α eğrisi $\alpha = (\varphi(t)+t, \varphi(t)-t, 0)$ olarak parametrize edilebilir. Timelike dönel yüzey

$$D(s, t) = (t(1-s^2) + \varphi(t), -t(1+s^2) + \varphi(t), -2st),$$

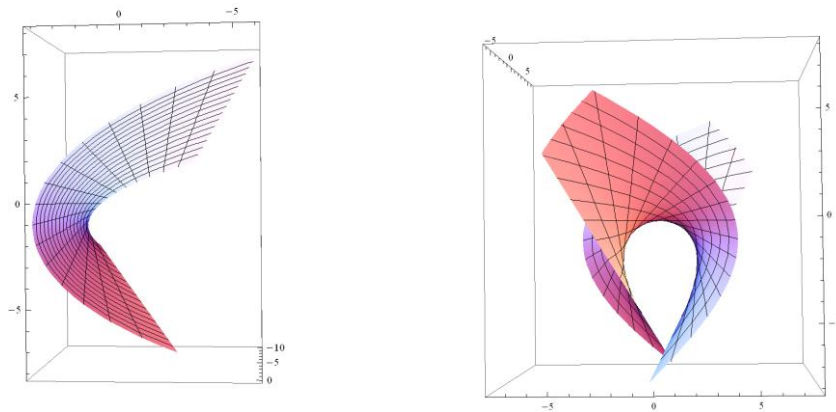
ve timelike helikoidal yüzey, $h(s)$ adımı yardımıyla

$$H(s, t) = (t(1-s^2) + \varphi(t) + h(s), -t(1+s^2) + \varphi(t) + h(s), -2st)$$

olarak ifade edilebilir (Ikawa, 2001).



Şekil 4. 1. 3. 1. Null eksenli timelike dönel yüzeyler



Şekil 4. 1. 3. 2. Null eksenli timelike helikoidal yüzeyler

4. 2. Timelike Genelleştirilmiş Silindir

Genelleştirilmiş silindir, $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \pi \subset \mathbb{R}_1^3$ düzlemsel eğrisinin $l \in \mathbb{R}_1^3$ doğrultusu boyunca ötelenmesiyle oluşan yüzeydir. h diferensiyellenebilir fonksiyon olmak üzere

$$\tilde{G}(s,t) = \alpha(t) + h(s)l$$

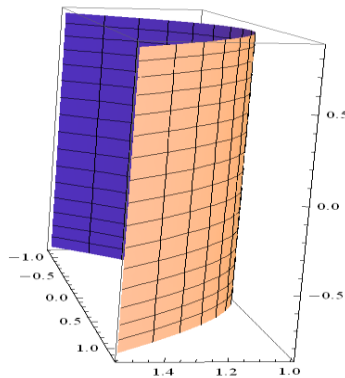
gibi ifade edilebilir (Gray, 2006). Bu yüzeyin η birim normal vektörü spacelike ise bu yüzeye timelike genelleştirilmiş silindir denir. Timelike genelleştirilmiş silindiri, $l \in \mathbb{R}_1^3$ doğrultusuna göre ikiye ayırmak mümkündür.

4. 2. 1. $l \in \mathbb{R}_1^3$ Spacelike Olma Durumu

l doğrultusu yerine $(1,0,0)$ alınrsa π x_2x_3 -düzlemi olup, α eğrisi, $\alpha = (0, f(t), g(t))$ olarak parametrize edilebilir. Burada f ve g diferensiyellenebilir fonksiyonlardır. Böylece timelike genelleştirilmiş silindir

$$\tilde{G}(s,t) = (h(s), f(t), g(t))$$

olarak ifade edilebilir (McNerthey, 1980), (Ikawa, 2001).



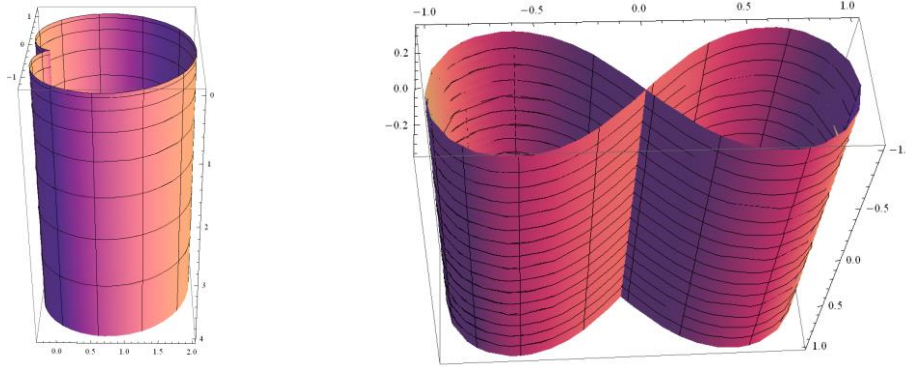
Şekil 4. 2. 1. 1. Spacelike eksenli timelike genelleştirilmiş silindir

4. 2. 2. $l \in \mathbb{R}_1^3$ Timelike Olma Durumu

l doğrultusu $(0,1,0)$ olarak kabul edilirse π düzlemi, x_1x_3 - düzlemi olup, f ve g diferensiyellenebilir fonksiyonlar yardımıyla, $\alpha = (f(t), 0, g(t))$ olarak parametrize edilebilir. Bu durumda timelike genelleştirilmiş silindir

$$\tilde{G}(s,t) = (f(t), h(s), g(t))$$

olarak ifade edilebilir (McNerthey, 1980), (Ikawa, 2001).



Şekil 4. 2. 2. 1. Timelike eksenli timelike genelleştirilmiş silindirler

4. 3. Timelike Genelleştirilmiş Silindir, Timelike Dönel Yüzey ve Timelike Helikoidal Yüzeylerin Gauss Denklemi

\mathbb{R}_1^3 , 3-boyutlu Lorentz uzayında timelike dönel yüzey, timelike genelleştirilmiş silindir ve timelike helikoidal yüzeylerin birinci temel formu

$$I = E(s)(ds^2 - dt^2), E(s) > 0$$

olarak ifade edilebilir. Burada Lorentzian izometri boyunca yörünge parametresi t ve eğri boyunca yörüngeye dik olan geodeziklerin parametresi s dir (Kim, 2012).

Dolayısıyla, (s, t) izotermal geodezik koordinatlarıdır ve yüzeyin doğal koordinatları olarak adlandırılır. $e(s) = \sqrt{E(s)}$ olmak üzere, kabul edelim ki

$$j_1 = \frac{1}{e(s)} \frac{\partial}{\partial s}, \quad j_2 = \frac{1}{e(s)} \frac{\partial}{\partial t}, \quad \mu_1 = e(s) ds, \quad \mu_2 = e(s) dt$$

olsun. Bu kabulden faydalanılarak aşağıdaki sonuç verilebilir.

Yardımcı Teorem 4.3.1. $e(s) = \sqrt{E(s)}$ olmak üzere $\mu_1 = e(s) ds$ ve $\mu_2 = e(s) dt$ için

$$\mu_{12} = (\ln e(s))_s dt \quad (4.1)$$

dir.

İspat. p ve q diferensiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere

$$\mu_{12} = p\mu_1 + q\mu_2$$

eşitliği $d\mu_1 = -\mu_{12} \wedge \mu_2$ birinci yapı denkleminde yerine yazılırsa

$$-(p\mu_1 + q\mu_2) \wedge \mu_2 = -p\mu_1 \wedge \mu_2 = -pe(s) ds \wedge e(s) dt = -pe^2(s) ds \wedge dt$$

bulunur. Diğer taraftan, μ_1 in dış türevi

$$d\mu_1 = d(e(s) ds) = ((e(s))_s ds) \wedge ds = (e(s))_s ds \wedge ds = 0$$

olduğundan

$$p = 0$$

olur. Benzer yolla $d\mu_2 = -\mu_{12} \wedge \mu_1$ birinci yapı denklemi yardımıyla

$$d\mu_2 = -(p\mu_1 + q\mu_2) \wedge \mu_1 = q\mu_1 \wedge \mu_2 = qe(s)ds \wedge e(s)dt = qe^2(s)ds \wedge dt$$

dır. Ayrıca, μ_2 in dış türevi

$$d\mu_2 = d(e(s)dt) = \left((e(s))_s ds \right) \wedge dt = (e(s))_s ds \wedge dt$$

olduğundan, bu iki denklemin eşitliğinden

$$q = \frac{(e(s))_s}{e^2(s)}$$

dır. Böylece $\mu_{12} = p\mu_1 + q\mu_2 = \frac{(e(s))_s}{e^2(s)} \mu_2$ bulunur. $\mu_2 = e(s)dt$ olduğundan

$$\mu_{12} = (\ln e(s))_s dt = \frac{(e(s))_s}{E(s)} \mu_2$$

bulunur.

Timelike dönel yüzey, timelike genelleştirilmiş silindir ve timelike helikoidal yüzeyler \tilde{M}^2 ile gösterilsin. \tilde{M}^2 timelike yüzeyi için (3.8) denkleminde verilen Gauss denklemi, μ_{12} koneksiyon formu yardımıyla aşağıdaki teoremdeki gibi verilebilir.

Teorem 4.3.1. \tilde{M}^2 timelike yüzeyi üzerinde Gauss denklemi

$$\frac{1}{2E(s)} (\ln E(s))_{ss} = K = H^2 - J^2 \quad (4.2)$$

dır.

İspat. \tilde{M}^2 timelike yüzeyi için $e^2(s) = E(s)$ olmak üzere $\mu_1 = e(s)ds$ ve $\mu_2 = e(s)dt$ olduğundan (3.8) denklemi

$$\begin{aligned} d\mu_{12} &= K\mu_1 \wedge \mu_2 = K(e(s)ds) \wedge (e(s)dt) \\ &= Ke^2(s)ds \wedge dt = KE(s)ds \wedge dt \end{aligned} \quad (4.3)$$

olarak bulunur. Diğer taraftan, (4.1) denkleminde

$$d\mu_{12} = d\left(\left(\ln e(s)\right)_s dt\right) = d\left(\left(\ln e(s)\right)_s\right) \wedge dt + \left(\ln e(s)\right)_s d(dt) = \left(\ln e(s)\right)_{ss} ds \wedge dt$$

elde edilir. Ayrıca $e^2(s) = E(s)$ olduğundan, bulunan bu son ifade

$$d\mu_{12} = \frac{1}{2} \left(\ln E(s)\right)_{ss} ds \wedge dt \quad (4.4)$$

olarak ifade edilebilir. (4.3) ve (4.4) denklemleri göz önüne alınırsa

$$2KE(s)ds \wedge dt = \frac{1}{2} \left(\ln E(s)\right)_{ss} ds \wedge dt$$

bulunur. Böylece

$$K = H^2 - J^2 = \frac{1}{2E(s)} \left(\ln E(s)\right)_{ss}$$

elde edilir.

\tilde{M}^2 timelike yüzeyinde $H = H(s)$, $J = J(s)$, $\psi = \psi(s)$ olduğundan $H_s = \frac{dH}{ds}$,

$J_s = \frac{dJ}{ds}$, $\psi_s = \frac{d\psi}{ds}$ yazılabilir ki burada $J > 0$ dır. Bu durumda aşağıdaki sonuç

verilebilir.

Sonuç 4.3.1. \tilde{M}^2 timelike yüzeyinde (3.27) denklemi

$$d(2\psi) = 2 \sinh 2\psi \frac{H_s}{J} ds - 2 \cosh 2\psi \frac{H_s}{J} dt - 2(\ln e(s))_s dt + *4(\ln J)_s ds \quad (4.5)$$

olarak verilebilir.

İspat. \tilde{M}^2 timelike yüzeyinin ortalama eğriliği H olmak üzere

$$H_s ds = H_1 e(s) ds - H_2 e(s) dt$$

eşitliğinden

$$H_1 = \frac{1}{e(s)} H_s \text{ ve } H_2 = 0$$

olduğu görülür. Ayrıca $\mu_1 = e(s) ds$, $\mu_2 = e(s) dt$ eşitlikleri ve (4.1) denklemi (3.27) denkleminde yerine yazılırsa

$$d(2\psi) = 2 \sinh 2\psi \left(\frac{H_s}{J} \frac{e(s)}{e(s)} (e(s) ds) \right) - 2 \cosh 2\psi \left(\frac{H_s}{J} \frac{e(s)}{e(s)} (e(s) dt) \right) - 2((\ln e(s))_s dt) + *4((\ln J)_s ds)$$

bulunur. Gerekli işlemler yapırsa

$$d(2\psi) = 2 \sinh 2\psi \frac{H_s}{J} ds - 2 \cosh 2\psi \frac{H_s}{J} dt - 2(\ln e(s))_s dt + *4(\ln J)_s ds$$

elde edilir.

Böylece aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 4.3.2. \tilde{M}^2 timelike yüzeyi üzerinde

$$\psi_s = \sinh 2\psi \left(\frac{H_s}{J} \right), \quad (\ln(J^4 E))_s = -2 \cosh 2\psi \left(\frac{H_s}{J} \right) \quad (4.6)$$

bağıntısı vardır.

İspat. \tilde{M}^2 timelike yüzeyinde $J = J(s)$ ve $\psi = \psi(s)$ olduğundan, (4.5)

denkleminde $*(\ln J)_s ds = -(\ln J)_s dt$ eşitliği göz önüne alınır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$2\psi_s ds = 2 \sinh 2\psi \left(\frac{H_s}{J} \right) ds - 2 \cosh 2\psi \left(\frac{H_s}{J} \right) dt - 4 (\ln J)_s dt - (\ln e^2(s))_s dt$$

bulunur. $e(s) = \sqrt{E(s)}$ olduğundan, bu son denklem

$$2\psi_s ds = 2 \sinh 2\psi \left(\frac{H_s}{J} \right) ds + \left[-2 \cosh 2\psi \left(\frac{H_s}{J} \right) - 4 (\ln J)_s - (\ln E(s))_s \right] dt$$

olarak düzenlenir. Buradan

$$2\psi_s = 2 \sinh 2\psi \left(\frac{H_s}{J} \right)$$

ve

$$-2 \cosh 2\psi \left(\frac{H_s}{J} \right) = 4 (\ln J)_s + (\ln E(s))_s \quad (4.7)$$

olduğu görülür. Ayrıca (4.7) denkleminin sağ tarafı

$$4 (\ln J)_s + (\ln E(s))_s = (\ln J^4)_s + (\ln E(s))_s = (\ln (J^4 E(s)))_s$$

biçiminde düzenlenirse, ispat tamamlanmış olur.

Bilindiği üzere timelike genelleştirilmiş silindir ve timelike dönel yüzeyler izotermiktir (Magid, 2005). Ayrıca $\psi = 0$ olup (4.6) denklemindeki ilk eşitlik bu yüzeyler için de sağlanır. İkinci eşitlik ise

$$\left(\ln(J^4 E)\right)_s = -2 \frac{H_s}{J} \quad (4.8)$$

biçiminde yazılabilir. Bu son denklem $H^2 - K > 0$ olan tüm timelike genelleştirilmiş silindir ve timelike dönel yüzeyler için sağlanır. Buna ilave olarak, bu timelike yüzeylerin ortalama eğriliğinin sabit olması durumunda (4.8) denklemi, $B > 0$ sabit olmak üzere

$$J^4 E = B \quad (4.9)$$

şeklini alır.

Teorem 4. 3. 2. Sabit ortalama eğrilikli timelike genelleştirilmiş silindir ve timelike dönel yüzeyler için Gauss denklemi

$$J^4 \left(\ln J^4\right)_{ss} = -2B(H^2 - J^2), B > 0 \quad (4.10)$$

dır.

İspat. (4.9) denkleminde

$$E = \frac{B}{J^4}$$

elde edilir. Bu eşitlik, (4.2) ile verilen Gauss denkleminde yerine yazılırsa

$$\left(\ln E\right)_{ss} = \left(\ln \frac{B}{J^4}\right)_{ss} = \left(\ln B\right)_{ss} - \left(\ln J^4\right)_{ss} = 2EK$$

elde edilir. B sabit olduğundan, son denklem

$$\left(\ln J^4\right)_{ss} = -2EK \Rightarrow \left(\ln J^4\right)_{ss} = -2 \frac{B}{J^4} K$$

halini alır ki

$$J^4 (\ln J^4)_{ss} = -2B(H^2 - J^2)$$

olur.

Teorem 4.3.3. A sabit olmak üzere, $J = A$ olan timelike genelleştirilmiş silindir ve timelike dönel yüzeyler için Gauss denklemi

$$H_{ss} = ADe^{-\frac{2H}{A}}(A^2 - H^2) \quad (4.11)$$

dır.

İspat. $J = A$ sabit olduğundan ve (4.6) denklemden

$$\left(\ln(J^4 E) \right)_s = \left(\ln(A^4 E) \right)_s = \left(\ln A^4 + \ln E \right)_s = \left(\ln E \right)_s = -2 \frac{H_s}{A} \quad (4.12)$$

elde edilir. Ayrıca $D > 0$ integral sabiti olmak üzere, $(\ln E)_s$ nin s ye göre integrali yardımıyla

$$\ln E = -\frac{2}{A}H + \ln D$$

bulunur. Bulunan bu denklemde gerekli işlemler yapılırsa

$$E = De^{-\frac{2H}{A}} \quad (4.13)$$

olur. Bulunan E değeri, (4.2) Gauss denkleminde yerine yazılırsa

$$(\ln E)_{ss} = 2De^{-\frac{2H}{A}}(H^2 - A^2)$$

elde edilir. Diğer taraftan, (4.12) denklemi yardımıyla

$$(\ln E)_{ss} = \left((\ln E)_s \right)_s = \left(-2 \frac{H_s}{A} \right)_s = -2 \frac{H_{ss}}{A}$$

olduğundan

$$\frac{H_{ss}}{A} = De^{-2\frac{H}{A}} (A^2 - H^2)$$

bulunur ki ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.3.3. Timelike helikoidal yüzeyler için (4.6) denklemi

$$\frac{H_s}{J} = \frac{\psi_s}{\sinh 2\psi} = -\frac{1}{2}(\ln \coth \psi)_s, \quad \left(\ln(EJ^4 \sinh 2\psi) \right)_s = 0 \quad (4.14)$$

dır.

İspat. Timelike helikoidal yüzeyler için $\psi \neq 0$ dır. Ayrıca (4.6) denklemden

$$\frac{\psi_s}{\sinh 2\psi} = \frac{H_s}{J}$$

olduğu açıktır. Aslında

$$(\ln \coth \psi)_s = \frac{(\coth \psi)_s}{\coth \psi} = \frac{-\frac{1}{\sinh^2 \psi} \psi_s}{\coth \psi} = \frac{-\psi_s}{\sinh^2 \psi} \frac{\sinh \psi}{\cosh \psi} = \frac{-\psi_s}{\sinh \psi \cosh \psi} = \frac{-2\psi_s}{\sinh 2\psi}$$

dır. Bu (4.14) denkleminin ilk eşitliğini ispatlar. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} (\ln EJ^4)_s + (\ln \sinh 2\psi)_s &= -2 \cosh 2\psi \left(\frac{H_s}{J} \right) + \frac{2\psi_s \cosh 2\psi}{\sinh 2\psi} \\ &= -2 \cosh 2\psi \left(\frac{H_s}{J} \right) + 2 \left(\frac{\psi_s}{\sinh 2\psi} \right) \cosh 2\psi \end{aligned}$$

eşitliğinden kolayca görülür ki

$$\left(\ln(EJ^4 \sinh 2\psi) \right)_s = 0$$

dır.

Sonuç 4. 3. 4. Kabul edelim ki $\psi \in (0, \infty)$ olsun. Bu durumda $C > 0$ sabit olmak üzere, (4.14) denklemi

$$\frac{H_s}{J} = \frac{\psi_s}{\sinh 2\psi} = -\frac{1}{2}(\ln \coth \psi)_s, \quad E = \frac{C}{J^4 \sinh 2\psi} \quad (4.15)$$

halini alır.

İspat. (4.15) denkleminin ilk eşitliğinin sağlandığı açıktır. (4.14) denkleminin ikinci eşitliğinin integralinden

$$\ln(EJ^4 \sinh 2\psi) = \ln C \Rightarrow e^{\ln(EJ^4 \sinh 2\psi)} = e^{\ln C}$$

dır. Dolayısıyla

$$EJ^4 \sinh 2\psi = C$$

olur ki bu da (4.15) denkleminin ikinci eşitliğidir.

Sonuç 4. 3. 4. yardımıyla sabit ortalama eğrilikli timelike helikoidal yüzeyler için aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 4. 3. 5. Bir timelike helikoidal yüzeyin ortalama eğriliği sabittir ancak ve ancak timelike helikoidal yüzeyin asli eğrisi ile helisi arasındaki açı sabittir.

İspat. Kabul edelim ki, yüzeyin ortalama eğriliği sabit olsun. Bu durumda (4.15) denklemi kullanılarak

$$\frac{\psi_s}{\sinh 2\psi} = 0$$

elde edilir ki $\psi_s = 0$ olur. Bu ψ nin sabit olduğunu gösterir.

Tersine, ψ sabit olsun. Yine (4.15) denkleminde

$$\frac{H_s}{J} = 0$$

elde edilir ki buradan H nın sabit olduğu açıktır.

Teorem 4. 3. 4. $\psi \in (0, \infty)$ olmak üzere, sabit ortalama eğrilikli timelike helikoidal yüzeyin Gauss denklemi

$$J^4 (\ln J^4)_{ss} = -2 \frac{C}{\sinh 2\psi} (H^2 - J^2) \quad (4.16)$$

dır.

İspat. Timelike helikoidal yüzeyin ortalama eğriliği sabit olduğundan, Sonuç 4. 3. 3. den ψ açısının da sabit olduğu görülür. (4.15) denkleminde

$$E = \frac{C}{J^4 \sinh 2\psi}$$

bulunmuştu. Ayrıca H sabit olduğundan (4.6) yardımıyla, (4.9) denklemindeki gibi $J^4 E = \tilde{B}$ olarak kabul edilebilir ki burada \tilde{B} sabittir. Böylece son denklemden

$$\tilde{B} = \frac{C}{\sinh 2\psi}$$

elde edilir. Ayrıca

$$E = \frac{\tilde{B}}{J^4}$$

eşitliği, (4.2) Gauss denkleminde yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\left(\ln \frac{\tilde{B}}{J^4} \right)_{ss} = (\ln \tilde{B})_{ss} - (\ln J^4)_{ss} = 2EK$$

$$(\ln J^4)_{ss} = -2EK \Rightarrow (\ln J^4)_{ss} = -2 \frac{\tilde{B}}{J^4} K$$

$$J^4 (\ln J^4)_{ss} = -2 \frac{C}{\sinh 2\psi} (H^2 - J^2)$$

bulunur.

Teorem 4. 3. 5. Ortalama eğriliği sabit olmayan izotermik timelike helikoidal yüzeylerin Gauss denklemi

$$\frac{\sinh^4 2as}{a^4} (H_s)^4 \left(\frac{H_{ss}}{H_s} \right)_s - \frac{4 \sinh^2 2as}{a^2} (H_s)^4 + \frac{2C \sinh 2as}{a^2} (H_s)^2 - \frac{2C}{\sinh 2as} H^2 = 0 \quad (4.17)$$

dir.

İspat. Timelike helikoidal yüzey izotermik olduğundan Teorem 3. 3. den dolayı yüzeyin (s, t) koordinat sistemi ile asli koordinat sistemi arasındaki ψ açısı harmoniktir. Dolayısıyla $\psi = \psi(s)$ olmak üzere

$$\Delta \psi = 0 \Leftrightarrow \psi = as + b$$

elde edilir ki burada a ve b sabittir. Burada $a = 0$ ise ψ sabit olur. Sonuç 4. 3. 5. den, H ortalama eğriliği de sabit olur ki bu durum Teorem 4. 3. 4. de incelendi. Bu sebeple $a \neq 0$ olsun. s yerine $s - \frac{b}{a}$ alınırsa b yok edilebilir ve

$$\psi = as$$

gibi ifade edilebilir ki $H = H(s)$ olduğu görülür. Ayrıca (4.15) denkleminde ψ değeri yerine yazılırsa

$$\frac{H_s}{J} = \frac{\psi_s}{\sinh 2\psi} = \frac{(as)_s}{\sinh 2as} = \frac{a}{\sinh 2as}$$

bulunur. Elde edilen

$$J = \frac{H_s \sinh 2as}{a}$$

eşitliğinin s ye göre türevleri alınırsa

$$\begin{aligned} J_s &= \frac{1}{a} (H_{ss} \sinh 2as + 2aH_s \cosh 2as), \\ J_{ss} &= \frac{1}{a} (H_{sss} \sinh 2as + 2aH_{ss} \cosh 2as + 2aH_{ss} \cosh 2as + 4a^2 H_s \sinh 2as) \\ &= \frac{1}{a} (H_{sss} \sinh 2as + 4aH_{ss} \cosh 2as + 4a^2 H_s \sinh 2as) \end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca

$$(J_s)^2 = \frac{1}{a^2} \left((H_{ss})^2 \sinh^2 2as + 4aH_s H_{ss} \sinh 2as \cosh 2as + 4a^2 (H_s)^2 \cosh^2 2as \right)$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \frac{(J_s)^2}{J^2} &= \frac{\frac{1}{a^2} \left((H_{ss})^2 \sinh^2 2as + 4aH_s H_{ss} \sinh 2as \cosh 2as + 4a^2 (H_s)^2 \cosh^2 2as \right)}{\frac{1}{a^2} (H_s)^2 \sinh^2 2as} \\ &= \left(\frac{H_{ss}}{H_s} \right)^2 + 4a \frac{H_{ss}}{H_s} \coth 2as + 4a^2 \frac{\cosh^2 2as}{\sinh^2 2as} \end{aligned} \quad (4.18)$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\frac{J_{ss}}{J} = \frac{\frac{1}{a} (H_{sss} \sinh 2as + 2aH_{ss} \cosh 2as + 2aH_{ss} \cosh 2as + 4a^2 H_s \sinh 2as)}{\frac{1}{a} H_s \sinh 2as}$$

olup, gerekli işlemler yapılırsa

$$\frac{J_{ss}}{J} = \frac{H_{sss}}{H_s} + 4a \frac{H_{ss}}{H_s} \coth 2as + 4a^2 \quad (4.19)$$

elde edilir. Bu durumda, (4.18) ve (4.19) denklemleri

$$(\ln J)_{ss} = \frac{J_{ss}}{J} - \frac{(J_s)^2}{J^2}$$

denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} (\ln J)_{ss} &= \frac{H_{sss}}{H_s} + 4a \frac{H_{ss}}{H_s} \coth 2as + 4a^2 - \left[\left(\frac{H_{ss}}{H_s} \right)^2 + 4a \frac{H_{ss}}{H_s} \coth 2as + 4a^2 \frac{\cosh^2 2as}{\sinh^2 2as} \right] \\ &= \frac{H_{sss}}{H_s} + 4a \frac{H_{ss}}{H_s} \coth 2as + 4a^2 - \left(\frac{H_{ss}}{H_s} \right)^2 - 4a \frac{H_{ss}}{H_s} \coth 2as - 4a^2 \frac{(1 + \sinh^2 2as)}{\sinh^2 2as} \\ &= \frac{H_{sss}}{H_s} - \left(\frac{H_{ss}}{H_s} \right)^2 + 4a^2 - \frac{4a^2}{\sinh^2 2as} - 4a^2 = \left(\frac{H_{ss}}{H_s} \right)_s - \frac{4a^2}{\sinh^2 2as} \end{aligned}$$

elde edilir. $(\ln J)_{ss}$ değeri, (4.16) denkleminde verilen Gauss denkleminde yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned} \left(\frac{H_s \sinh 2as}{a} \right)^4 \left[\left(\frac{H_{ss}}{H_s} \right)_s - \frac{4a^2}{\sinh^2 2as} \right] &= -2 \frac{C}{\sinh 2\psi} \left(H^2 - \left(\frac{H_s \sinh 2as}{a} \right)^2 \right) \\ \frac{(H_s)^4 \sinh^4 2as}{a^4} \left(\frac{H_{ss}}{H_s} \right)_s - \frac{\sinh^4 2as}{a^4} (H_s)^4 \frac{4a^2}{\sinh^2 2as} &= -2 \frac{C}{\sinh 2\psi} H^2 + 2 \frac{C}{\sinh 2\psi} \left(\frac{H_s \sinh 2as}{a} \right)^2 \\ \frac{\sinh^4 2as}{a^4} (H_s)^4 \left(\frac{H_{ss}}{H_s} \right)_s - \frac{4 \sinh^2 2as}{a^2} (H_s)^4 - \frac{2C \sinh 2as}{a^2} (H_s)^2 + \frac{2C}{\sinh 2as} H^2 &= 0 \end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 4. 3. 6. Ortalama eğriliği $H = H(s) \neq$ sabit ve $J =$ sabit olmak üzere izotermik hale getirilemeyen timelike helikoidal yüzeylerin Gauss denklemi

$$2J^2 \sinh 2\psi (\ln \sinh 2\psi)_{ss} = C \left(4 - \left(-\ln \coth 2\psi + \frac{F}{J} \right)^2 \right) \quad (4.20)$$

dir öyle ki burada F sabittir.

İspat. Daha önce belirtildiği gibi bu yüzeyler izotermik hale getirilemezler. Dolayısıyla $\psi \neq 0$ olur. Bu durumda $C > 0$ ve F sabit olmak üzere, (4.15) denkleminde

$$H = -\frac{J}{2} \ln \coth 2\psi + \frac{F}{2}, \quad E = \frac{C}{J^4 \sinh 2\psi} \quad (4.21)$$

olur. Buradan

$$(\ln E)_{ss} = \left(\ln \left(\frac{C}{J^4 \sinh 2\psi} \right) \right)_{ss} = (\ln C - \ln J^4 - \ln \sinh 2\psi)_{ss} = -(\ln \sinh 2\psi)_{ss}$$

bulunur. Bu son denklem, (4.2) ve (4.21) denklemlerinden

$$\begin{aligned} -(\ln \sinh 2\psi)_{ss} &= 2 \frac{C}{J^4 \sinh 2\psi} \left(\left(-\frac{J}{2} \ln \coth 2\psi + \frac{F}{2} \right)^2 - J^2 \right) \\ -J^4 \sinh 2\psi (\ln \sinh 2\psi)_{ss} &= 2CJ^2 \left(\left(-\frac{1}{2} \ln \coth 2\psi + \frac{F}{2J} \right)^2 - 1 \right) \\ 2J^2 \sinh 2\psi (\ln \sinh 2\psi)_{ss} &= C \left(4 - \left(-\ln \coth 2\psi + \frac{F}{J} \right)^2 \right) \end{aligned}$$

elde edilir.

BÖLÜM 5. GAUSS DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ

$$\begin{aligned} X : U \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow M^2 \subset \mathbb{R}_1^3 \\ (s, t) &\rightarrow X(s, t) \end{aligned}$$

immersiyonu yardımıyla, timelike dönel yüzey, timelike genelleştirilmiş silindir ve timelike helikoidal yüzeylerin birinci temel formu Bölüm 4 te, $\langle X_s, X_s \rangle = E$, $\langle X_s, X_t \rangle = F$, $\langle X_t, X_t \rangle = G$ olmak üzere,

$$I = E(s)(ds^2 - dt^2), \quad E(s) > 0$$

(yani $E = -G$ ve $F = 0$) olarak verilmişti. Diğer taraftan, yüzeyin şekil operatörü S olmak üzere

$$S(X_s) = \alpha X_s + \beta X_t, \quad S(X_t) = -\beta X_s + \gamma X_t$$

için, ikinci temel form katsayıları

$$\begin{aligned} L &= -\langle S(X_s), X_s \rangle = -E\alpha = -E(J \cosh 2\psi + H), \\ M &= -\langle S(X_s), X_t \rangle = E\beta = -E(J \sinh 2\psi), \\ N &= -\langle S(X_t), X_t \rangle = E\gamma = E(-J \cosh 2\psi + H) \end{aligned} \tag{5.1}$$

olarak verilebilir. Böylece, bu yüzeylerin ikinci temel formu

$$II = -E(J \cosh 2\psi + H)ds^2 - 2E(J \sinh 2\psi)dsdt + E(-J \cosh 2\psi + H)dt^2$$

olur. Ayrıca yüzeyin izotermik olmaması durumunda (yani $E \neq -G$ veya $F \neq 0$) (5.1) denklemi

$$\begin{aligned}
L &= -(E\alpha + F\beta) = -(E(J \cosh 2\psi + H) - F(J \sinh 2\psi)), \\
M &= -(F\alpha + G\beta) = -F(J \cosh 2\psi + H) + G(J \sinh 2\psi), \\
N &= -(-F\beta + G\gamma) = F(J \sinh 2\psi) + G(-J \cosh 2\psi + H)
\end{aligned} \tag{5.2}$$

halini alır.

Bölüm 4 te

i) sabit ortalama eğrilikli timelike dönel yüzeylerin ve timelike genelleştirilmiş silindirlerin,

ii) $J = A$ ve A sabit olan timelike dönel yüzeylerin ve timelike genelleştirilmiş silindirlerin,

iii) $C > 0$ sabit adımlı, sabit ortalama eğrilikli timelike helikoidal yüzeylerin,

iv) $C > 0$ sabit adımlı, ortalama eğriliği sabit olmayan izotermik timelike helikoidal yüzeylerin,

v) $C > 0$ sabit adımlı, ortalama eğriliği sabit olmayan, izotermik koordinatlardan elde edilemeyen ve $J > 0$ olan timelike helikoidal yüzeylerin,

Gauss denklemleri bulunmuştur. Bu bölümde ise, elde edilen bu Gauss denklemlerinin çözümleri aranacaktır. Bulunan çözümler, (5.1) ve (5.2) denklemleri göz önüne alınarak yüzeylerin ikinci temel formları verilecektir. Elde edilen ikinci temel form yardımıyla geometrik yorumlar yapılacaktır. Bu diferensiyel denklemler beş alt başlıkta incelenecektir.

5. 1. Sabit Ortalama Eğrilikli Timelike Dönel Yüzeylerin ve Timelike Genelleştirilmiş Silindirlerin Gauss Denklemi

(4.10) denklemi ile verilen, sabit ortalama eğrilikli timelike dönel yüzeylerin ve timelike genelleştirilmiş silindirlerin Gauss denklemi olan

$$J^4 (\ln J^4)_{ss} = -2B(H^2 - J^2), \quad B \text{ sabit}$$

diferensiyel denkleminin aşıkâr çözümü

$$J = \pm H$$

dır. Burada J sabittir. Son denklem ve (4.9) denkleminde

$$E = \frac{B}{H^4}$$

dir. Ayrıca bu yüzeyler izotermik olduğundan yüzeyin asli çatısı ile asli olmayan çatısı arasındaki ψ açısı sıfır olduğu göz önüne alınır, (5.1) denklemini yardımıyla ikinci temel formun katsayıları

$$L = E(H \pm J), M = 0, N = E(H \mp J)$$

olarak bulunur. Bu katsayılar, temel form sabit ortalama eğrilikli timelike genelleştirilmiş silindirleri ve timelike dönel yüzeylerin bu aşikâr çözüm altında timelike dairesel silindir olduğunu gösterir. Çünkü özel çözümden

$$J = \pm H \Rightarrow a + c = a - c \vee a + c = -a + c$$

dir. Yüzeyin ortalama eğriliği sabit olduğundan $c = 0$, $a = \text{sabit}$ veya $a = 0$, $c = \text{sabit}$ elde edilir ki bu da timelike dairesel silindiri tasvir eder (Pascual, 1992). İkinci olarak aşikâr olmayan çözümünü elde etmek için

$$J^4 4(\ln J)_{ss} = 4J^4 \left(\frac{J_{ss}}{J} - \frac{(J_s)^2}{J^2} \right) = -2B(H^2 - J^2) \Rightarrow J^3 J_{ss} - J^2 (J_s)^2 = -\frac{1}{2}B(H^2 - J^2)$$

bulunur. Burada P sabit olmak üzere $-\frac{1}{2}B = P$ seçilirse, son denklem

$$J^3 J_{ss} - J^2 (J_s)^2 = P(H^2 - J^2) \quad (5.3)$$

halini alır. Bu denklem $J = \pm H$ için sağlanır ki bu aşikâr çözüm daha önce incelenmişti. Dolayısıyla bu diferensiyel denklemin aşikâr olmayan çözümünü, $J > 0$ olduğu bilindiğinden, $H = 0$ ve $H \neq 0$ olma durumlarında ayrı ayrı incelenecektir.

5. 1. 1. $H = 0$ Durumu

Bu durum sabit ortalama eğrilikli timelike genelleştirilmiş silindirelerin ve timelike döneel yüzeylerin maksimal olma durumudur. (5.3) denkleminde $H = 0$ kabulü yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$J^3 J_{ss} - J^2 (J_s)^2 = P(-J^2) \Rightarrow JJ_{ss} - (J_s)^2 = -P$$

elde edilir. Bu diferensiyel denklemin bilgisayar programı yardımıyla elde edilen çözümü

$$J_1 = \frac{\left(\exp\left(\frac{1}{2} \ln P + \sqrt{C_1} (C_2 + s)\right) \right)^2 - 2P}{2\sqrt{C_1} \exp\left(\frac{1}{2} \ln P + \sqrt{C_1} (C_2 + s)\right)}, J_2 = \frac{\left(\exp\left(\frac{1}{2} \ln P - \sqrt{C_1} (C_3 + s)\right) \right)^2 - 2P}{2\sqrt{C_1} \exp\left(\frac{1}{2} \ln P - \sqrt{C_1} (C_3 + s)\right)}$$

dır. Burada C_1 , C_2 ve C_3 integral sabitleridir. (4.9) denkleminde

$$E = \frac{B}{J^4}$$

olduğundan farklı J_1 ve J_2 değerlerine karşılık, farklı

$$E_1 = \frac{B}{\left(\frac{\left(\exp\left(\frac{1}{2} \ln P + \sqrt{C_1} (C_2 + s)\right) \right)^2 - 2P}{2\sqrt{C_1} \exp\left(\frac{1}{2} \ln P + \sqrt{C_1} (C_2 + s)\right)} \right)^4}, E_2 = \frac{B}{\left(\frac{\left(\exp\left(\frac{1}{2} \ln P - \sqrt{C_1} (C_3 + s)\right) \right)^2 - 2P}{2\sqrt{C_1} \exp\left(\frac{1}{2} \ln P - \sqrt{C_1} (C_3 + s)\right)} \right)^4}$$

değerleri elde edilir. Böylece yüzeylerin birinci temel formu elde edilmiş olur. (5.1) denkleminde, bulunan değerler yerine yazılırsa

$$L_1 = -E_2 J_2 = \frac{B}{(J_1)^3}, M_1 = 0, N_1 = -E_2 J_2 = \frac{B}{(J_1)^3}$$

ve

$$L_2 = -E_2 J_2 = -\frac{B}{(J_2)^3}, \quad M_2 = 0, \quad N_2 = -E_2 J_2 = -\frac{B}{(J_2)^3}$$

olur. Böylece, sabit ortalama eğrilikli timelike genelleştirilmiş silindirin ve timelike dönel yüzeylerin maksimal olma durumlarında ikinci temel formları teşkil edilmiş olur.

5.1.2. $H \neq 0$ Durumu

Bu durumda (5.3) denklemini incelemek zordur. Dolayısıyla

$$y = \left(\frac{J_s}{J} \right)^2 > 0$$

değişken değişimi yapılırsa

$$\frac{dy}{ds} = 2 \left(\frac{J_s}{J} \right) \frac{J_{ss} J - (J_s)^2}{J^2}$$

elde edilir. Ayrıca, (5.3) denklemi yeniden düzenlenirse

$$\frac{J^3 J_{ss} - J^2 (J_s)^2}{J^2} = P \left(\frac{H^2}{J^2} - 1 \right) \Rightarrow J J_{ss} - (J_s)^2 = P \left(\frac{H^2}{J^2} - 1 \right)$$

olduğundan

$$\frac{dy}{ds} = 2 \left(\frac{J_s}{J} \right) \frac{P \left(\frac{H^2}{J^2} - 1 \right)}{J^2} = 2P \left(\frac{J_s}{J^3} \right) \left(\frac{H^2}{J^2} - 1 \right) = 2P J_s \left(\frac{H^2}{J^5} - \frac{1}{J^3} \right) \Rightarrow \frac{dy}{dJ} = 2P \left(\frac{H^2}{J^5} - \frac{1}{J^3} \right)$$

elde edilir. Elde edilen bu diferensiyel denklemin J ye göre integrali alınırsa

$$y = 4P \left(-\frac{H^2}{4J^4} + \frac{1}{2J^2} \right) - 4C_4$$

bulunur ki burada $C_4 > 0$ integral sabitidir. O halde, $y = \left(\frac{J_s}{J}\right)^2$ olduğundan

$$\begin{aligned} \left(\frac{J_s}{J}\right)^2 &= 4P\left(-\frac{H^2}{4J^4} + \frac{1}{2J^2}\right) - 4C_4 \Rightarrow (J_s)^2 = 4\left(\frac{-PH^2 + 2PJ^2 - 4C_4J^4}{4J^2}\right) \\ \Rightarrow J_s &= \pm \frac{\sqrt{-PH^2 + 2PJ^2 - 4C_4J^4}}{J} \Rightarrow \frac{dJ}{ds} = \pm \frac{\sqrt{-PH^2 + 2PJ^2 - 4C_4J^4}}{J} \\ \Rightarrow \frac{JdJ}{\sqrt{-PH^2 + 2PJ^2 - 4C_4J^4}} &= \pm ds \end{aligned}$$

dır. Bu son denklemin integrali alınırsa

$$\int \frac{JdJ}{\sqrt{-PH^2 + 2PJ^2 - 4C_4J^4}} = \int \pm ds = \pm(C_4 + s)$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} \int \frac{JdJ}{\sqrt{-PH^2 + 2PJ^2 - 4C_4J^4}} &= -\frac{1}{\sqrt{C_4}} \int \frac{JdJ}{\sqrt{4J^4 - 2\frac{P}{C_4}J^2 + \frac{PH^2}{C_4}}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{C_4}} \int \frac{JdJ}{\sqrt{4J^4 - 2\frac{P}{C_4}J^2 + \left(\frac{P}{C_4}\right)^2 - \left(\frac{P}{C_4}\right)^2 + \frac{PH^2}{C_4}}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{C_4}} \int \frac{JdJ}{\sqrt{\left(2J^2 - \frac{P}{C_4}\right)^2 - \frac{C_4PH^2 - P^2}{C_4}}} \end{aligned}$$

bulunur. Burada $\frac{C_4PH^2 - P^2}{C_4} = C_5$ denirse

$$\int \frac{JdJ}{\sqrt{-PH^2 + 2PJ^2 - 4C_4J^4}} = \frac{1}{\sqrt{C_4}} \int \frac{JdJ}{\sqrt{\left(2J^2 - \frac{P}{C_4}\right)^2 - C_5}}$$

olur. Eğer $2J^2 - \frac{P}{C_4} = \sqrt{C_5} \sin t$ değişken değişimi yapılırsa $4JdJ = \sqrt{C_5} \cos t dt$

yazılabilir. C_6 integral sabiti olmak üzere, bu eşitlikler yardımıyla

$$-\frac{1}{\sqrt{C_4}} \int \frac{\frac{1}{4} \sqrt{C_5} \cos t dt}{\sqrt{(\sqrt{C_5} \sin t)^2 - C_5}} = -\frac{1}{4\sqrt{C_4}} \int \frac{\cos t dt}{\sqrt{(\sin t)^2 - 1}} = \frac{1}{4\sqrt{C_4}} \int dt = \frac{1}{4\sqrt{C_4}} t + C_6$$

olur. Ayrıca $\arcsin \left(\frac{2J^2 - \frac{P}{C_4}}{\sqrt{C_5}} \right) = t$ olduğundan

$$-\frac{1}{\sqrt{C_4}} \int \frac{JdJ}{\sqrt{\left(2J^2 - \frac{P}{C_4}\right)^2 - C_5}} = \frac{1}{4\sqrt{C_4}} \left(\arcsin \left(\frac{2J^2 - \frac{P}{C_4}}{\sqrt{C_5}} \right) \right) + C_6$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\sqrt{C_4}} \left(\arcsin \left(\frac{2J^2 - \frac{P}{C_4}}{\sqrt{C_5}} \right) \right) + C_6 = \pm(C_4 + s) &\Rightarrow \frac{2J^2 - \frac{P}{C_4}}{\sqrt{C_5}} = \sin(4\sqrt{C_4} [\pm(C_4 + s) - C_6]) \\ \Rightarrow J = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{C_5} \sin(4\sqrt{C_4} [\pm(C_4 + s) - C_6]) + \frac{P}{C_4}}{2}} \end{aligned}$$

bulunur. Böylece (4.9) denkleminde

$$E = \frac{4B}{\sqrt{C_5} \sin(4\sqrt{C_4} (\pm(C_4 + s) - C_6)) + \frac{P}{C_4}}$$

dir. İkinci temel formun katsayıları (5.1) denklemini yardımıyla

$$L = \frac{-4B}{\sqrt{C_5} \sin\left(4\sqrt{C_4}(\pm(C_4+s)-C_6)\right) + \frac{P}{C_4}} \left(\pm \sqrt{\frac{\sqrt{C_5} \sin\left(4\sqrt{C_4}(\pm(C_4+s)-C_6)\right) + \frac{P}{C_4}}{2}} + H \right),$$

$$M = 0,$$

$$N = \frac{-4B}{\sqrt{C_5} \sin\left(4\sqrt{C_4}(\pm(C_4+s)-C_6)\right) + \frac{P}{C_4}} \left(\mp \sqrt{\frac{\sqrt{C_5} \sin\left(4\sqrt{C_4}(\pm(C_4+s)-C_6)\right) + \frac{P}{C_4}}{2}} - H \right)$$

dır.

5. 2. A Sabit Olmak Üzere, $J = A$ Olan Timelike Dönel Yüzeylerin ve Timelike Genelleştirilmiş Silindirlerin Gauss Denklemi

Bu yüzeylerin Gauss denklemi, (4.11) denklemiyle verilen

$$H_{ss} = ADe^{-\frac{2H}{A}} (A^2 - H^2)$$

diferensiyel denkleminin aşikar çözümü $H = \pm A = (\pm J)$ dır. Ayrıca (4.13) denkleminde

$$E = De^{-\frac{2\pm A}{A}} = De^{\mp 2}$$

elde edilir. (5.1) denklemi yardımıyla, yüzeyin ikinci temel form katsayıları

$$L = De^{\mp 2} (A \mp H), \quad M = 0, \quad N = De^{\mp 2} (A \pm H)$$

dır. Yani

$$L = -2ADe^{\mp 2}, \quad M = 0, \quad N = 0$$

ve

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 2ADe^{\mp 2}$$

olarak bulunur. A sabit olmak üzere, $J = A$ olan timelike dönel yüzeylerin ve timelike genelleştirilmiş silindirin, Bölüm 5. 1. de olduğu gibi, timelike dairesel silindir olduğunu gösterir. Diğer taraftan bu diferensiyel denklemin aşikâr olmayan çözümü C_7, C_8 ve C_9 integral sabitleri olmak üzere

$$\int \frac{e^{\frac{H}{A}}}{\sqrt{2A^2DH^2 - A^4D - 4C_7e^{\frac{H}{A}} + 2A^3DH}} dH = -\frac{1}{2}\sqrt{2}(C_8 + s)$$

$$\int \frac{e^{\frac{H}{A}}}{\sqrt{2A^2DH^2 - A^4D - 4C_7e^{\frac{H}{A}} + 2A^3DH}} dH = -\frac{1}{2}\sqrt{2}(C_9 + s)$$

integrallerinin çözümüyle mevcuttur. Bu integralleri hesaplamak oldukça zordur. Eğer bu integraller yardımıyla H değeri hesaplandığında ikinci temel formun katsayıları

$$L = De^{\mp 2}(A + H), \quad M = 0, \quad N = De^{\mp 2}(A - H)$$

olarak elde edilir.

5. 3. $C > 0$ Sabit Adımlı, Sabit Ortalama Eğrilikli Timelike Helikoidal Yüzeylerin Gauss Denklemi

Bu yüzeylerin Gauss denklemi, (4.16) denklemi ile verilen

$$J^4 (\ln J)_{ss} = -2 \frac{C}{\sinh 2\psi} (H^2 - J^2)$$

dir. Bu diferensiyel denklemin aşikâr çözümü

$$J = \pm H$$

dır. (4.15) denkleminde

$$E = \frac{C}{H^4 \sinh 2\psi}$$

elde edilir. Bu durumda, (5.1) denklemi kullanılarak, bu yüzeylerin ikinci temel form katsayıları

$$L = -E(\pm H \cosh 2\psi + H) = -EH \mp \frac{C}{H^3} \coth 2\psi,$$

$$M = -E(\pm H \sinh 2\psi) = \mp \frac{C}{H^3},$$

$$N = -E(\pm H \cosh 2\psi - H) = EH \mp \frac{C}{H^3} \coth 2\psi$$

olur.

Ayrıca, (4.15) denkleminde

$$E = \frac{C_1}{\sinh 2\psi_1} = \frac{C_2}{\sinh 2\psi_2}$$

elde edilir. Bu eşitlikten de anlaşılacağı gibi farklı C_1 ve C_2 sabit adımlarına sırasıyla farklı ψ_1 ve ψ_2 açıları karşılık gelir. Farklı C_1 ve C_2 adımlarına farklı iki timelike helikoidal yüzey karşılık geldiğinden birinci temel formları, ortalama eğrilikleri ve J değerleri aynı olan fakat ikinci temel formları farklı, iki timelike helikoidal yüzey elde edilmiş olur ki böylece sabit adımlı timelike helikoidal yüzeylerin izometrik deformasyonu tasvir edilmiş olur. Diğer taraftan, $C_2 = 0$ ise ($C_1 \neq C_2$ olduğundan $C_1 \neq 0$ dır) $\psi_2 = 0$ olur. (4.15) denkleminde

$$\frac{H_s}{J} = 0 \Rightarrow H_s = 0 \Rightarrow H = \text{sabit}$$

elde edilir. Yani, adım sıfır alınarak bir timelike helikoidal yüzey sabit ortalama eğrilikli bir timelike helikoidal yüzeye izometrik deformasyonu elde edilir.

Bu diferensiyel denklemin aşikar olmayan çözümüne bakılırsa, (4.16) denklemi

$$J^4 4(\ln J)_{ss} = 4J^4 \left(\frac{J_{ss}}{J} - \frac{(J_s)^2}{J^2} \right) = -2 \frac{C}{\sinh 2\psi} (H^2 - J^2)$$

$$\Rightarrow J^3 J_{ss} - J^2 (J_s)^2 = -2 \frac{C}{\sinh 2\psi} (H^2 - J^2)$$

olarak elde edilir. Aslında, sabit ortalama eğrilikli timelike dönel yüzeylerin ve timelike genelleştirilmiş silindirlere Gauss denklemi olan (4.10) diferensiyel denkleminde P sabit olmak üzere,

$$B = \frac{C}{\sinh 2\psi} = P$$

alınırsa (4.10) ve (4.16) diferensiyel denklemlerinin benzer olduğu görülür. Dolayısıyla bu diferensiyel denklemin çözümü de benzerdir. Bölüm 5. 1. deki gibi aşikâr olmayan çözümü $H = 0$ ve $H \neq 0$ olma durumlarında incelenecektir.

5. 3. 1. $H = 0$ Durumu

Bu durum, $C > 0$ sabit adımlı, sabit ortalama eğrilikli timelike helikoidal yüzeylerin maksimal olma durumudur. (5.3) denkleminde kabuller yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$J^3 J_{ss} - J^2 (J_s)^2 = P(-J^2) \Rightarrow J J_{ss} - (J_s)^2 = -P$$

elde edilir. Elde edilen bu diferensiyel denklemin çözümü bilgisayar programı yardımıyla

$$J_1 = \frac{\left(\exp\left(\frac{1}{2} \ln P + \sqrt{C_{10}} (C_{11} + s)\right) \right)^2 - 2P}{2\sqrt{C_{10}} \exp\left(\frac{1}{2} \ln P + \sqrt{C_{10}} (C_{11} + s)\right)}, J_2 = \frac{\left(\exp\left(\frac{1}{2} \ln P - \sqrt{C_{10}} (C_{12} + s)\right) \right)^2 - 2P}{2\sqrt{C_{10}} \exp\left(\frac{1}{2} \ln P - \sqrt{C_{10}} (C_{12} + s)\right)}.$$

olarak bulunur. C_{10} , C_{11} ve C_{12} integral sabitleridir. (4.15) denkleminde

$$E = \frac{C}{J^4 \sinh 2\psi}$$

olduğundan farklı J_1 ve J_2 değerlerine karşılık

$$E_1 = \frac{C}{\left(\frac{\left(\exp\left(\frac{1}{2} \ln P + \sqrt{C_{10}} (C_{11} + s)\right)\right)^2 - 2P}{2\sqrt{C_{10}} \exp\left(\frac{1}{2} \ln P + \sqrt{C_{10}} (C_{11} + s)\right)} \right)^4 \sinh 2\psi},$$

$$E_2 = \frac{C}{\left(\frac{\left(\exp\left(\frac{1}{2} \ln P - \sqrt{C_{10}} (C_{12} + s)\right)\right)^2 - 2P}{2\sqrt{C_{10}} \exp\left(\frac{1}{2} \ln P - \sqrt{C_{10}} (C_{12} + s)\right)} \right)^4 \sinh 2\psi}$$

elde edilir. (5.1) denkleminde bulunan değerler yerine yazılırsa ikinci temel formun katsayıları

$$L_1 = -E_1 H - \frac{C}{J^3} \coth 2\psi, \quad M_1 = -E_1 J \sinh 2\psi = \frac{C}{J^3}, \quad N_1 = E_1 H - \frac{C}{J^3} \coth 2\psi$$

ve

$$L_2 = -E_2 H - \frac{C}{J^3} \coth 2\psi, \quad M_2 = -E_2 J \sinh 2\psi = \frac{C}{J^3}, \quad N_2 = E_2 H - \frac{C}{J^3} \coth 2\psi$$

olur.

5.3.2. $H \neq 0$ Durumu

Bölüm 5.1.2. de ki çözüme benzer şekilde

$$y = \left(\frac{J_s}{J} \right)^2 > 0$$

değişken değişimi yapılır ve Bölüm 5. 1. 2. deki aynı işlemler yapılırsa C_{13} , C_{14} ve C_{15} integral sabitleri olmak üzere

$$J = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{C_{14}} \sin\left(4\sqrt{C_{13}}\left[\pm(C_{13} + s) - C_{15}\right]\right) + \frac{P}{C_{13}}}{2}}$$

bulunur. (4.15) denkleminde

$$E = \frac{C}{\left(\sqrt{\frac{\sqrt{C_{14}} \sin\left(4\sqrt{C_{13}}\left[\pm(C_{13} + s) - C_{15}\right]\right) + \frac{P}{C_{13}}}{2}}\right)^2 \sinh 2\psi}$$

olur ve ikinci temel formun katsayıları (5.1) denklemini yardımıyla

$$L = -EH - \frac{C}{J^3} \coth 2\psi, \quad M = -EJ \sinh 2\psi = \frac{C}{J^3}, \quad N = EH - \frac{C}{J^3} \coth 2\psi$$

olarak bulunur.

5. 4. $C > 0$ Sabit Adımlı, Ortalama Eğriliği Sabit Olmayan İzotermik Timelike Helikoidal Yüzeylerin Gauss Denklemi

(4.17) denkleminde verilen

$$\frac{\sinh^4 2as}{a^4} (H_s)^4 \left(\frac{H_{ss}}{H_s}\right)' - \frac{4 \sinh^2 2as}{a^2} (H_s)^4 + \frac{2C \sinh 2as}{a^2} (H_s)^2 - \frac{2C}{\sinh 2as} H^2 = 0$$

diferensiyel denkleminin çözümü oldukça zordur. Yüzey izotermik olduğundan daha önce belirtildiği gibi $\psi = as$ kabul edilebilir. Eğer bu diferensiyel denklemin çözüldüğü varsayıлып H değeri bulunursa, (4.15) denkleminde

$$J = \frac{aH_s}{\sinh 2as}$$

elde edilir. Sonra bu eşitlik yardımıyla da

$$E = \frac{C}{\left(\frac{aH_s}{\sinh 2as}\right)^4 \sinh 2as} = \frac{C \sinh^3 2as}{(aH_s)^4}$$

bulunur. (5.1) denklemini kullanılarak bu yüzeylerin ikinci temel form katsayıları

$$L = -EH - \frac{C}{(aH_s)^3} \sinh^2 2as \cosh 2as,$$

$$M = E(\pm H \sinh 2as) = \frac{C}{(aH_s)^3} \sinh^2 2as,$$

$$N = EH - \frac{C}{(aH_s)^3} \sinh^2 2as \cosh 2as$$

olarak bulunur.

5. 5. $C > 0$ Sabit Adımlı, Ortalama Eğriliği Sabit Olmayan, İzotermik Koordinatlardan Elde Edilemeyen ve $J > 0$ Olan Timelike Helikoidal Yüzeylerin Gauss Denklemi

Bu yüzeylerin Gauss denklemi, (4.20) denklemiyle verilen

$$2J^2 \sinh 2\psi (\ln \sinh 2\psi)_{,ss} = C \left(4 - \left(-\ln \coth 2\psi + \frac{F}{J} \right)^2 \right)$$

ikinci dereceden homojen olmayan diferensiyel denklemin çözümünü bulmak kolay değildir. Eğer denklemin çözümünün bulunduğu varsayılırsa, ψ bulunur. Bununla birlikte, (4.15) denkleminde E , J ve H değerleri elde edilir. Böylece yüzeyin ikinci temel formun katsayıları, (5.2) denklemini yardımıyla

$$\begin{aligned}L &= -(E(J \cosh 2\psi + H) - F(J \sinh 2\psi)), \\M &= -F(J \cosh 2\psi + H) + G(J \sinh 2\psi), \\N &= F(J \sinh 2\psi) + G(-J \cosh 2\psi + H)\end{aligned}$$

olur.

KAYNAKLAR

ARSLAN, K. BULCA, B., BAYRAM, B. ÖZTÜRK, G., UGAIL, H., On spherical product surfaces in E^3 , International Conference on Cyber Worlds, 132-137, 2009.

BAIKOUSSIS, C., KOUFOGIORGOS, T., Helicoidal surfaces with prescribed mean or Gaussian curvature, J. Geometry, 63, 25-29, 1998.

BENEKI, Chr.C., KAIMAKAMIS, G., PAPANTANIOU, B., Helicoidal surfaces in three-dimensional Minkowski space, J. Math. Appl., 275, 586-614, 2002.

BOUR, E., Memoire sur le deformation de surfaces, Journal de l'Ecole Polytechnique, XXXIX Cahier 1-148, 1862.

BOZKURT, Z., GÖK, İ., EKMEKÇİ, F. N., YAYLI, Y., On the Bour's theorem with respect to conformal map in Minkowski space E_1^3 , JDSGT, 10(2), 2012.

BOZKURT, Z., GÖK, İ., EKMEKÇİ, F. N., YAYLI, Y., A conformal approach to Bour's theorem, Mathematica Aeterna, 2(8), 701-713, 2012.

CHEN, B. Y., Geometry of submanifolds, Marcel Dekker Inc., New York, 1973.

CHEN, W., LI, H., On the classification of the timelike Bonnet surfaces, In: Geometry and topology of submanifolds, 10, Chern, S. Chen, W., Shelton Street, Covent Garden, London, 18-31, 1999.

DEMİR, E., Lorentz uzayında umbilik yüzeyler, Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 2010.

DO CARMO, M. P., Differential forms and applications, Springer-Verlag, Berlin, 1994.

DO CARMO, M. P., DAJCZER, M., Helicoidal surfaces with constant mean curvature, Tohoku Math. J., 34, 425-435, 1982.

EISENHART, L. P., A Treatise on the Differential Geometry of Curves and Surfaces, Ginn and Company, USA, 1909.

GRAY, A., ABBENA, E., SALAMAON, S., Modern differeantial geometry of curves and surfaces with Mathematica, Taylor and Francis Group, United States, 2006.

GÜLER, E., 3-boyutlu Minkowski uzayında light-like üreteç eğrili time-like helisoidal ve dönel yüzeyler, Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 2010.

HACISALİHOĞLU, H. H., Diferensiyel geometri, İnönü Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi Yayınları, 2, 1983.

IKAWA, T., Bour's theorem in Minkowski geometry, Tokyo J. Math., 24(2), 377-394, 2001.

İNALCIK, A., ERSOY, S., Non-null helicoidal surfaces as Bonnet surfaces, International Meeting Lorentzian Geometry, Granada, Spain, 2011.

HOU, Z. H., JI, F., Helicoidal surfaces with $H^2 = K$ in Minkowski 3-space, J. Math. Anal. Appl., 325, 101-113, 2007.

KIM, W. K., KOH, S., SHIN, H., YANG, S., Helicoidal minimal surfaces in $H^2 \times \mathbb{R}$, Bull. Aust. Math. Soc., 86, 135-149, 2012.

KREYSZIG, E., Differential Geometry, Dover Pub., USA, 1957.

KUHNELL, W., Differential geometry: curves-surfaces-manifolds, AMS, United States, 2006.

KÜLAHCI, M., Semi-Reimann geometride integral formülleri, Doktora Tezi, Fırat Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Elazığ, 2008.

LOPEZ, R., Differential geometry of curves and surfaces in Lorentz-Minkowski space, Mini course taught at the Institutio de Matematica e Estatistica, University of Sao Paulo, Brasil, 2008.

MAGID, M. A., Lorentzian isothermic surface in R_j^n , Rocky Mountain J. Math., 35(2), 627-640, 2005.

MARTIN, D., Manifolds theory, Ellis Hardwood Lmt., West Sussex, 1991.

McNERTNEY, L.V., One-parameter families of surface with constant curvature in Lorentzian 3-space, PhD. Thesis, Brown University, 1980.

O'NEILL, B., Elementary Differential Geometry. Academic Press, New York, London, 1966.

O'NEILL, B., Semi-Riemannian geometry with applications to relativity, Academic Press, London, 1983.

PASCUAL, L., FEARRANDEZ, A., On surface in the 3-dimensional Lorentz-Minkowski space, Pacific J. Math., 152, 93-100, 1992.

PARK, J., Lorentzian surfaces with constant curvatures and transformations in the 3-dimensional Lorentzian space, J. Korean Math. Soc., 45, 41-61, 2008.

RALPH, A., JERROLD, E. M., TUDOR, R., Manifolds, tensor analysis, and applications, Springer Verlag, New York, 1988.

ROUSSOS, I. M., The helicoidal surfaces as Bonnet surfaces, Tohoku Math. J., 40(2), 3, 485-490, 1988.

ROUSSOS, I. M., HITT, L. R., Computer graphics of helicoidal surfaces with constant mean curvature, An. Acad. Bras. Ci., 63(3), 211-228, 1991.

ROUSSOS, I. M., Surfaces in E^3 invariant under a one Parameter group of isometries E^3 , An. Acad. Bras. Ci., 72, 125-159, 2000.

SOYUÇOK, Z., The problem of non-trivial isometries of surfaces preserving the principal curvatures, J. Geometry, 52, 173-188, 1995.

STEPHANIDIS, N. K., Differential geometry, Thessaloniki, Greece, 1987.

TURGUT, A., HACISALİHOĞLU, H. H., Timelike ruled surfaces in the Minkowski 3-space-II, Tr. J. of Mathematics, 22, 33-46, 1998.

WEINSTEIN, T., An introduction to Lorentz surfaces, Walter de Gruyter, Berlin, 1996.

ÖZGEÇMİŞ

Abdullah İNALCIK, 17.02.1986 tarihinde Erzurum'un Aşkale ilçesinin Çay Köy köyünde doğdu. İlköğrenimini Erzurum'da Vali Vefik Kitapçıgil İlkokulunda, orta ve lise öğrenimini Erzurum Anadolu Lisesinde tamamladı. 2004 yılında Uludağ Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünde başladığı lisans eğitimini 2008 yılında tamamladı. 2008-2010 yılları arasında Sakarya Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Enstitü Anabilim Dalında yüksek lisans eğitimi aldı. 2010 yılında Sakarya Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Enstitü Anabilim Dalında doktora eğitimine başladı. Temmuz 2010 yılından beri Artvin Çoruh Üniversitesi'nde araştırma görevlisi olarak çalışıyor. Abdullah İNALCIK evli ve bir kız çocuk babasıdır.