T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

$\mathbb{R}_1^3$ 3-BOYUTLU MİNKOWSKİ UZAYINDA NULL PARALEL p -EQUİDİSTANT REGLE YÜZEYLER

DOKTORA TEZİ

Ayşe Zeynep AZAK

Enstitü Anabilim Dalı	**:**	**MATEMATİK**
Tez Danışmanı	**:**	**Doç. Dr. Murat TOSUN**
Ortak Tez Danışmanı		**Yrd. Doç. Dr. Melek MASAL**

Mart 2010

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

$\mathbb{R}_1^3$ 3-BOYUTLU MİNKOWSKİ UZAYINDA NULL PARALEL p-EQUİDİSTANT REGLE YÜZEYLER

DOKTORA TEZİ

Ayşe Zeynep AZAK

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Bu tez 05 / 03 /2010 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr.
H. Hilmi HACISALİHOĞLU
Jüri Başkanı

Doç. Dr.
Murat TOSUN
Üye

Prof. Dr.
H. Murat TÜTÜNCÜ
Üye

Doç. Dr.
Nejat EKMEKÇİ
Üye

Yrd. Doç. Dr.
İbrahim ÖZGÜR
Üye

TEŞEKKÜR

Doktora danışmanlığımı üstlenip beni her konuda yetiştirmek için emek harcayan, bilgi ve tecrübelerini benimle paylaşan, her zaman destek ve yardımını gördüğüm saygıdeğer hocam Doç. Dr. Murat TOSUN'a minnet ve şükranlarımı sunarım.

Çalışmalarım esnasında bana vakit ayıran, özenle çalışmalarımı takip eden ve hiçbir konuda yardımını esirgemeyen, ikinci danışmanım Sakarya Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi saygıdeğer hocam Melek MASAL'a teşekkürü bir borç bilirim.

Çalışmam süresince bana emeği geçen Matematik Bölümündeki değerli hocalarıma ve yakın desteklerini gördüğüm araştırma görevlisi arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Her konuda benim arkamda olan eğitim sürem boyunca sabır, güven ve anlayış gösteren annem Şükran SAĞLAMTAŞ'a, anneannem Müşide SAĞLAMTAŞ'a dedem Şükrü SAĞLAMTAŞ'a ve eşim Mehmet AZAK'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Bu çalışma SAÜ Bilimsel Araştırma Projeleri Komisyonu tarafından desteklenmiştir.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

E^3	: 3-boyutlu Öklid uzayı
$\mathbb{R}_1^3$	: 3-boyutlu indeksi 1 olan Minkowski uzayı
N_0	: Birim normal vektör alanı
I	: Birinci temel form
E, F, G	: Birinci temel formun katsayıları
d	: Dağılma parametresi
α	: Diferensiyellenebilir eğri
K	: Gauss eğrilik fonksiyonu
K_{II}	: İkinci Gauss eğrilik fonksiyonu
H_{II}	: İkinci ortalama eğrilik fonksiyonu
II	: İkinci temel form
e, f, g	: İkinci temel formun katsayıları
$P_S(\lambda)$	: Karakteristik polinom
$D,\ \hat{D}$	: Levi-Civita konneksiyonları
$\langle\ \rangle$	: Metrik tensör
M, M^*	: Null paralel p-equidistant B-scrollar
H	: Ortalama eğrilik fonksiyonu
γ	: Striksiyon eğrisi
III	: Üçüncü temel form

TABLOLAR VE ŞEKİLLER LİSTESİ

ÖZET

Anahtar kelimeler: Minkowski uzayı, paralel p-equidistant, regle yüzeyler, şekil operatörü.

Bu çalışma, altı bölümden oluşmuştur. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde Öklid ve Minkowski uzayı ile ilgili bazı temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Üçüncü bölümde 3-boyutlu Öklid ve Minkowski uzayında regle yüzey kavramı ve B-scrollar ifade edildi. Dördüncü bölümde E^3, 3-boyutlu Öklid uzayında paralel p-equidistant regle yüzeyler ile $\mathbb{R}_1^3$, 3-boyutlu Minkowski uzayında spacelike ve timelike paralel p-equidistant regle yüzeyler ile ilgili tanım ve teoremlere yer verildi.

Beşinci bölüm bu çalışmanın orijinal kısmını oluşturmaktadır ve dört alt bölüm olarak düzenlenmiştir. Beşinci bölümün birinci alt bölümünde null paralel p-equidistant B-scrollar tanıtıldı. İkinci alt bölümde null paralel p-equidistant B-scrolların şekil operatörlerine karşılık gelen matrisler hesaplanarak aralarındaki ilişki verildi. Üçüncü alt bölümde şekil operatörünün cebirsel değişmezleri ile ilgili bazı teorem ve sonuçlar elde edildi. Son olarak da null paralel p-equidistant B-scrolların dralleri, ikinci ortalama ve Gauss eğrilikleri arasındaki ilişkiler bulundu. Ayrıca null paralel p-equidistant B-scrolların dayanak eğrileri ile ilgili bazı karakteristik teorem ve sonuçlar ifade edildi.

Altıncı bölümde tüm çalışmanın geniş bir özeti yapıldı ve bundan sonra null paralel p-equidistant B-scrollarla ile ilgili yapılacak araştırmalara yönelik öneride bulunuldu.

NULL PARALLEL P-EQUIDISTANT RULED SURFACES IN THREE DIMENSIONAL MINKOWSKI SPACE $\mathbb{R}_1^3$

SUMMARY

Key Words: Minkowski space, parallel p-equidistant, ruled surfaces, shape operator.

This thesis consist of six chapters. The first chapter is devoted to the introduction. In the second chapter some basic definitions and theorems are given related to the Euclidean and Minkowski space. In the third chapter, the concept of ruled surface and B-scrolls are expressed in 3-dimensional Minkowski space $\mathbb{R}_1^3$ and 3-dimensional Euclidean space E^3. In the fourth chapter, definitions and theorems are given with related to parallel p-equidistant ruled surfaces in three dimensional Euclidean space and related to spacelike and timelike parallel p-equidistant ruled surfaces in three dimensional Minkowski space.

The fifth chapter of this study constitutes the original part and settled as four sub-sections. In the first subsection null parallel p-equidistant B-scrolls are introduced. In the second subsection, the matrices of shape operators for null paralel p-equidistant B-scrolls are calculated and the relationships between the matrices of shape operators are given. In the third subsection, some theorems and conclutions are obtained about the algebraic invariants of the shape operators. Lastly, the relationships between dralls, second mean and second Gaussian curvatures of null p-parallel equidistant B-scrolls have been found. In addition, some characteristic theorems and conclutions have been expressed with related to base curves of null parallel p-equidistant B-scrolls.

In the sixth chapter of this thesis, a brief summary of the study is given and a suggestion is proposed for investigations on the realm of null parallel p-equidistant B-scrolls.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Uzaysal harekette, hareketli bir katı cisim içerisine daldırılmış, yönlendirilmiş doğruların yörüngeleri genellikle regle yüzeylerdir. Bu yüzden, regle yüzeylerin uzaysal geometrisi, uzaysal mekanizma teorisinin oransal dizayn problemlerinin çalışılmasında önemli bir yer tutar. Bu amaçla A. T. Yang tarafından regle yüzeylerin bazı karakteristik özelikleri mekanizma teorisine uygulandı (Kirson ve Roth, 1975). Aynı zamanda eğrilerin ve açılabilir yüzeylerin geometrisi kullanılarak, bazı uzaysal dizayn problemleri H. Pottmann tarafından çalışıldı (Lu ve Ravani, 1995). Böylece E^3, 3-boyutlu Öklid uzayı ve $\mathbb{R}^3_1$, 3-boyutlu Minkowski uzayında regle yüzeyler ile ilgili bir çok çalışma ortaya konulmuştur. Örneğin, A. Turgut tarafından yapılan "3-boyutlu Minkowski Uzayında Spacelike ve Timelike Regle Yüzeyler" adlı doktora çalışmasında, dayanak eğrisi spacelike bir eğri ve anadoğrusu spacelike bir doğru alınarak elde edilen spacelike regle yüzeylerin boğaz noktası, boğaz çizgisi, dağılma parametresi ve bu regle yüzeylerin açılabilir olması ile ilgili teoremler elde edildi. Ayrıca dayanak eğrisi spacelike bir eğri ve anadoğruları timelike olan veya dayanak eğrisi timelike bir eğri ve anadoğruları spacelike olan timelike regle yüzeyler için de benzer teoremlere yer verildi (Turgut, 1995).

Öklid uzayında paralel p-equidistant regle yüzeyler ilk olarak 1986 yılında I. E. Valeontis tarafından "Paralel p-$\ddot{A}$quidistante Regelfl$\ddot{a}$chen" adlı makalede tanımlandı. Bu regle yüzeylerin Frenet çatılarının denkliği ile dayanak eğrilerinin eğrilikleri arasındaki ilişkiler verilerek striksiyon eğrileri ile ilgili bazı sonuçlar elde edildi (Valeontis, 1986). Bu makaleden hareketle "Genelleştirilmiş Paralel p-Equidistant Regle Yüzeyler" adlı doktora çalışmasında M. Baykut tarafından E^3, 3-boyutlu Öklid uzayında tanımlı paralel p-equidistant regle yüzeylerin şekil operatörlerinin cebirsel değişmezleri ve dayanak eğrilerinin küresel göstergeleri ile ilgili karakteristik sonuçlar elde edildi. Ayrıca paralel p-equidistant regle yüzeyler E^n, n-boyutlu Öklid uzayına genelleştirilerek, bu regle yüzeylerin ortalama, Ricci, kesitsel, skalar eğrilikleri hesaplanarak bu eğrilikler arasındaki bağıntılar ifade edildi (Baykut, 1997). Daha sonraki yıllarda M. Masal ve N. Kuruoğlu tarafından $\mathbb{R}_1^3$ ve $\mathbb{R}_1^n$ de spacelike ve timelike paralel p-equidistant regle yüzeyler tanımlanarak bu regle yüzeylerin şekil operatörleri ile ilgili bazı sonuçlar elde edilmiştir (Kuruoğlu ve Masal, 2007), (Masal ve Kuruoğlu, 2005), (Masal, 2006).

Dayanak eğrisi null olan timelike regle yüzeyler oldukça yenidir. 3-boyutlu Lorentz (Minkowski) uzayındaki bu tip regle yüzeyleri ilk olarak L. K. Graves "Codimension One Isometric Immersions Between Lorentz Spaces" adlı makalede B-scrollar olarak adlandırmıştır (Graves, 1979). Literatürde null scroll ve B-scrollarla ilgili birçok çalışma görmek mümkündür. Bu çalışmalara bir kaç örnek vermek istersek; H. Balgetir, M. Bektaş ve M. Ergüt tarafından yapılan "On The B-Scrolls In The Three Dimensional Lorentzian Space L^3" adlı makalede 3- boyutlu Lorentz (Minkowski) uzayında bir B-scrollun merkez noktası, striksiyon eğrisi ve pseudo-ortogonal yörüngesi tanımlanarak bu yapılarla ilgili bazı teoremler elde edilmiştir (Balgetir, Bektaş ve Ergüt, 2005). Yine H. Balgetir, M. Bektaş ve J. Inoguchi tarafından yapılan "Null Bertrand Curves in Minkowski 3-space and Their Characterizations" adlı çalışmada Cartan çatılı null eğrilerin Bertrand eğrisi olma durumu incelenmiştir ve null Bertrand eğrilerinin null geodezikler ya da sabit ikinci eğrilikli Cartan çatılı null eğriler oldukları sonucuna ulaşılmıştır (Balgetir, Bektaş ve Inoguchi, 2004). Null scrolların Gauss dönüşümü S. M. Choi, B-scrolların Gauss dönüşümü L. J. Alias tarafından incelenmiştir (Ki ve Sch, 1998), (Ferrandez ve Lucas, 1998),. A. F. Yalınız, H. H. Hacısalihoğlu tarafından "Null Generalized Helices in L^3 and L^4, 3 and 4-Dimensional Lorentzian Space" adlı makalede 3 ve 4-boyutlu Lorentz uzaylarındaki null genelleştirilmiş helislerin harmonik eğrilikleri elde edilmiş ve null genelleştirilmiş helislerin tanımları harmonik eğrilikler cinsinden verilmiştir (Yalınız ve Hacısalihoğlu, 2005).

3-boyutlu Minkowski uzayında null paralel p-equidistant B-scrolların incelendiği çalışma tarafımızdan yapıldı. Bu çalışmada $\mathbb{R}_1^3$, 3-boyutlu Minkowski uzayında alınan bir null paralel p-equidistant B-scroll yüzey çiftinin Cartan çatılarının denkliği ile dayanak eğrilerinin eğrilikleri arasındaki ilişki, yüzeylerin şekil operatörlerine karşılık gelen matrisler arasındaki ilişki ve şekil operatörlerinin cebirsel değişmezleri arasındaki ilişkiler incelendi. Daha sonra da dağılma parametreleri, ikinci ortalama ve Gauss eğrilikleri arasındaki bağıntılara yer verildi. Ayrıca, null paralel p-equidistant B-scrolların dayanak eğrileri ile ilgili bazı sonuç ve teoremler ifade edildi.

BÖLÜM 2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, sırasıyla, Öklid ve Minkowski uzayındaki temel kavramlar ve teoremlere yer verilecektir.

2.1. Öklid Uzayında Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1. $A \neq \varnothing$ bir cümle ve V de F cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Eğer

$$\Psi : A \times A \to V$$

dönüşümü $P, Q \in A$ noktaları için

$$(P, Q) \to \left(\overrightarrow{PQ}\right) \in V$$

şeklinde tanımlanmış ve aşağıdaki iki aksiyomu sağlıyor ise, A cümlesine V ile birleştirilmiş bir afin uzay adı verilir.

i) Her $P, Q, R \in A$ için $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}$ dir,

ii) Her $P \in A$ ve her $\vec{\alpha} \in V$ için $\overrightarrow{PQ} = \vec{\alpha}$ olacak biçimde bir tek $Q \in A$ noktası vardır.

$\overrightarrow{PQ}$ vektöründe, P noktasına başlangıç noktası, Q noktasına da uç noktası denir. Böylece

$$boyA = boyV$$

dır (Hacısalihoğlu, 1975).

Tanım 2.1.2. Bir V vektör uzayı ile birleşen afin uzay A olsun. $P_0, P_1, P_2, P_3 \in A$ noktaları için $\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \overrightarrow{P_0P_3} \in V$ vektörlerinin sistemi, V nin bir bazı ise $\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ nokta 4-lüsüne A afin uzayının bir afin çatısı denir. Burada P_0 noktasına çatının başlangıç noktası, P_i noktalarına da çatının birim noktaları denir (Hacısalihoğlu, 1975).

Tanım 2.1.3. n-boyutlu standart afin uzayda $E_0 = (0,0,...,0)$, $E_1 = (1,0,...,0)$,...., $E_n = (0,0,...,1)$ noktalarını alalım. $\{E_0, E_1, ..., E_n\}$ çatısına standart afin çatı denir (Hacısalihoğlu, 1975).

Tanım 2.1.4. A afin uzayında bir P noktasının V deki standart afin çatısına göre ifadesi

$$\overrightarrow{P_0P} = \sum_{i=1}^{3} a_i \overrightarrow{P_0P_i}$$

dir. Buradaki

$$a_i : A \to F \quad , \quad 1 \leq i \leq 3$$

fonksiyonlarına P noktasının afin koordinat fonksiyonları ve $\{a_1, a_2, a_3\}$ sıralı 3-lüsüne de F^3 nin afin koordinat sistemi denir (Hacısalihoğlu, 1975).

Tanım 2.1.5. Bir reel afin uzay A ve A ile birleşen vektör uzayı da V olsun. V de

$$\langle\, , \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$$

$$(\vec{x}, \vec{y}) \to \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^{3} x_i y_i \quad , \quad \begin{cases} \vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \\ \vec{y} = (y_1, y_2, y_3) \end{cases}$$

şeklinde bir Öklid iç çarpımı tanımlanırsa, A afin uzayına 3-boyutlu Öklid uzayı denir ve E^3 ile gösterilir (Hacısalihoğlu, 1975).

Tanım 2.1.6. 3-boyutlu bir reel iç çarpım uzayı V ile birleşen bir Öklid uzayı E^3 olsun. V vektör uzayı üzerindeki norm $\| \ \|$ olmak üzere

$$\bar{d} : E^3 \times E^3 \to IR \quad , \quad \bar{d}(X,Y) = \left\| \overline{XY} \right\|$$

olarak tanımlanan fonksiyona E^3 de uzaklık fonksiyonu ve her $X, Y \in E^3$ için $\bar{d}(X,Y)$ değerine de X ile Y arasındaki uzaklık adı verilir (Hacısalihoğlu, 1975).

Teorem 2.1.1. E^3, 3-boyutlu Öklid uzayında uzaklık fonksiyonu bir metriktir (Hacısalihoğlu, 1975).

Tanım 2.1.7. E^3, 3-boyutlu Öklid uzayında tanımlanan uzaklık fonksiyonuna E^3 de Öklid metriği denir (Hacısalihoğlu, 1975).

Tanım 2.1.8. E^3, 3-boyutlu Öklid uzayında farklı üç nokta X, Y, Z olsun. $\overrightarrow{XY}$ ile $\overrightarrow{XZ}$ vektörleri arasındaki $\theta \in \mathbb{R}$ açısı, $0 \leq \theta \leq \pi$ olmak üzere,

$$\cos\theta = \frac{\left\langle \overrightarrow{XY}, \overrightarrow{XZ} \right\rangle}{\left\| \overrightarrow{XY} \right\| \left\| \overrightarrow{XZ} \right\|}$$

dır (Hacısalihoğlu, 1975).

Tanım 2.1.9. 3-boyutlu reel iç çarpım uzayı $\mathbb{R}^3$ ile birleşen E^3 Öklid uzayında, sıralı bir $\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ nokta 4-lüsü için eğer $\left\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \overrightarrow{P_0P_3}\right\}$ vektör sistemi V nin bir ortonormal bazı ise, $\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ çatısına bir dik çatı (veya Öklid çatısı) denir (Hacısalihoğlu, 1975).

Tanım 2.1.10. E^3 de bir X noktasının E^3 deki $\{E_0, E_1, E_2, E_3\}$ standart Öklid çatısına göre ifadesi

$$\overrightarrow{E_0X} = \sum_{i=1}^{3} x_i \overrightarrow{E_0E_i}$$

dir. Buradaki

$$x_i : E^3 \to \mathbb{R} \quad , \quad 1 \leq i \leq 3$$

fonksiyonlarına X noktasının Öklid koordinat fonksiyonları ve $\{x_1, x_2, x_3\}$ sıralı ve reel değerli fonksiyonlar 3-lüsüne de E^3 ün Öklid koordinat sistemi denir (Hacısalihoğlu, 1975).

Tanım 2.1.11. $\tilde{M}$ bir n-boyutlu topolojik manifold ve U da E^n in bir açık alt cümlesi olsun. O zaman U bir ψ homeomorfizimi ile $\tilde{M}$ nin bir W açık alt cümlesine eşlenebilir.

$$\psi : U \subset E^n \to W \subset \tilde{M}$$

(ψ, W) ikilisine $\tilde{M}$ da bir koordinat komşuluğu veya harita denir (Hacısalihoğlu, 1975).

Tanım 2.1.12. $\mathbb{R}$ nin bir açık aralığı I olmak üzere bir

$$\alpha : I \to E^n$$

diferensiyellenebilir fonksiyonuna E^n de bir eğri adı verilir (Hacısalihoğlu, 1975).

Tanım 2.1.13. $M \subset E^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. Bu durumda, $\psi = \left\{\alpha', \alpha'', ..., \alpha^{(r)}\right\}$, $r < n$, sistemi lineer bağımsız ve $\forall \alpha^{(k)}$, $k > r$, için; $\alpha^{(k)} \in Sp\{\psi\}$ olmak üzere, ψ den elde edilen $\{V_1, V_2, ..., V_r\}$ ortonormal sistemine, M eğrisinin Serret Frenet r-ayaklı alanı ve $m \in M$ için $\{V_1(m), ..., V_r(m)\}$ ye $m \in M$ noktasındaki Serret Frenet r-ayaklısı, her bir $\vec{V_i}$, $1 \le i \le r$, vektörüne de Serret Frenet vektörü adı verilir (Hacısalihoğlu, 1975).

Tanım 2.1.14. $M \subset E^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ ya karşılık gelen $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet r-ayaklısı $\{V_1(s), V_2(s), ..., V_r(s)\}$ olsun. Buna göre,

$$k_i : I \to \mathbb{R} \quad , \quad 1 \le i < r$$
$$s \to k_i(s) = \langle V_i'(s), V_{i+1}(s) \rangle$$

şeklinde tanımlanan k_i fonksiyonuna M eğrisinin i-yinci eğrilik fonksiyonu ve $s \in I$ için, $k_i(s)$ reel sayısına da $\alpha(s)$ noktasında M nin i-yinci eğriliği denir (Hacısalihoğlu, 1975).

Teorem 2.1.2. $M \subset E^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ yay parametresi olmak üzere, $\alpha(s)$ noktasında i-yinci eğrilik $k_i(s)$ ve Frenet r-ayaklısı $\{V_1(s), V_2(s), ..., V_r(s)\}$ ise,

$$V_1'(s) = k_1(s) \cdot V_2(s)$$
$$V_i'(s) = -k_{i-1}(s) \cdot V_{i-1}(s) + k_i(s) \cdot V_{i+1}(s), 1 < i < r$$
$$V_r'(s) = -k_{r-1}(s) \cdot V_{r-1}(s)$$

dır (Hacısalihoğlu, 1975).

Tanım 2.1.15. $M \subset E^3$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ ya karşılık gelen $\alpha(s) \in M$ noktasında, M nin 1. ve 2. eğrilikleri $k_1(s)$ ve $k_2(s)$ ise, $H_1(s) = \dfrac{k_1(s)}{k_2(s)}$ şeklinde tanımlı H_1 fonksiyonuna, M nin 1-inci harmonik eğrilik fonksiyonu ve $H_1(s)$ değerine de s noktasındaki harmonik eğriliği denir (Hacısalihoğlu, 1975).

Teorem 2.1.3. $M \subset E^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin.
M bir eğilim çizgisidir $\Leftrightarrow$ $\forall s \in I;\ H_1(s) = \text{sabittir}$ (Hacısalihoğlu, 1975).

Tanım 2.1.16. E^n, n-boyutlu Öklid uzayında (n-1) boyutlu bir yüzey, veya (n-1) yüzey diye E^n deki boş olmayan M cümlesine denir, öyle ki bu M cümlesi

$$M = \left\{ x \in U \subset E^n \,\middle|\, \begin{array}{l} f : U \overset{\text{dif.bilir}}{\rightarrow} \mathbb{R} \\ x \rightarrow f(x) = c,\ U \text{ bir açık alt cümle} \end{array} \right\}$$

$\nabla f\big|_P \neq 0,\ \forall P \in M$ biçiminde tanımlanır. E^3 de bir 2-yüzeye ekseriya sadece yüzey, E^n de bir 1-yüzeye bir eğri ve E^n de bir (n-1) yüzeye $n > 3$ olması halinde hiperyüzey denir (Hacısalihoğlu, 1975).

Tanım 2.1.17. E^n in bir hiperyüzeyi M ve M nin birim normal vektör alanı N_0 olsun. E^n de Riemann konneksiyonu D olmak üzere, $\forall X \in \chi(M)$ için,

$$S(X) = D_X N_0$$

şeklinde tanımlanan $S : \chi(M) \rightarrow \chi(M)$ dönüşümüne M üzerinde şekil operatörü (Weingarten dönüşümü) denir (Hacısalihoğlu, 1975).

Tanım 2.1.18. E^n de bir hiperyüzey M olsun. $1 \leq q \leq n$ olmak üzere,

$$I^q : \chi(M) \times \chi(M) \to C^\infty(M, \mathbb{R}),\ I^q(X,Y) = \left\langle S^{q-1}(X), Y \right\rangle$$

şeklinde tanımlanan I^q fonksiyonuna M hiperyüzeyi üzerinde q-yuncu temel form adı verilir (Hacısalihoğlu, 1975).

Tanım 2.1.19. E^n in bir hiperyüzeyi M ve M nin şekil operatörü S olsun. M nin P noktasına karşılık gelen karakteristik değerleri M nin bu noktadaki asli eğrilikleri, asli eğriliklere karşılık gelen karakteristik vektör denen vektörlerin belirttiği doğrultulara da M nin bu P noktasındaki asli eğrilik doğrultuları denir (Hacısalihoğlu, 1975).

Tanım 2.1.20. E^n de bir hiperyüzey M olsun. M nin P noktasındaki şekil operatörüne karşılık gelen matris $S(P)$ olmak üzere,

$$K : M \to \mathbb{R},\ K(P) = \det S(P)$$

ile tanımlanan fonksiyona, M nin Gauss eğrilik fonksiyonu ve $K(P)$ değerine de M nin P noktasındaki Gauss eğriliği (total eğrilik) denir (Hacısalihoğlu, 1975).

Tanım 2.1.21. E^n de bir hiperyüzey M olsun. M nin P noktasındaki şekil operatörüne karşılık gelen matris $S(P)$ olmak üzere,

$$H : M \to \mathbb{R},\ H(P) = \dot{I}z S(P)$$

ile tanımlanan fonksiyona, M nin ortalama eğrilik fonksiyonu ve $H(P)$ değerine de M nin P noktasındaki ortalama eğriliği denir (Hacısalihoğlu, 1975).

Tanım 2.1.22. E^n de bir hiperyüzey M ve M üzerinde bir eğri α olsun. α nın teğet vektör alanı T ve M nin şekil operatörü S olsun. Eğer T vektör alanı α eğrisi boyunca S nin karakteristik vektörlerine karşılık geliyorsa α eğrisine M üzerinde bir eğrilik çizgisidir denir (Hacısalihoğlu, 1975).

Tanım 2.1.23. E^n nin bir hiperyüzeyi M ve $P \in M$ noktasındaki şekil operatörü S olsun. Eğer $\overrightarrow{X_P}, \overrightarrow{Y_P} \in T_M(P)$ için,

$$\left\langle S\left(\overrightarrow{X_P}\right), \overrightarrow{Y_P} \right\rangle = 0$$

ise bu iki tanjant vektöre eşleniktirler denir. Bir $\overrightarrow{X_P} \neq \vec{0}$ tanjant vektörü için,

$$\left\langle S\left(\overrightarrow{X_P}\right), \overrightarrow{X_P} \right\rangle = 0$$

ise $\overrightarrow{X_P}$ doğrultusuna, M nin P noktasındaki bir asimptotik doğrultusu ve $\overrightarrow{X_P}$ yi $\forall P \in \alpha$ noktasında teğet vektörü kabul eden α eğrisine M üzerinde bir asimptotik çizgidir denir (Hacısalihoğlu, 1975).

Teorem 2.1.4. E^3 ün bir hiperyüzeyi M olsun. M üzerinde birinci, ikinci ve üçüncü temel formları, sırasıyla; I, II, III ve Gauss eğrilik fonksiyonu K, ortalama eğrilik fonksiyonu H olmak üzere,

$$III - H \cdot II + K \cdot I \equiv 0$$

dır (Hacısalihoğlu, 1975).

Tanım 2.1.24. E^3 de bir α eğrisinin asli normali sabit bir $\vec{V}$ doğrultusu ile sabit bir açı oluşturuyorsa α ya E^3 de bir slant helis adı verilir (Izumiya ve Takeuchi, 2004).

Tanım 2.1.25. Bir F cismi üzerindeki bir n-kare matrisi A olsun. $A - \lambda I_n$ matrisine, n-kare birim matrisi I_n ve λ bilinmeyen olmak üzere A nın karakteristik matrisi denir. $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$ determinantı λ nın bir polinomudur ve A nın karakteristik polinomu olarak adlandırılır. $\det(A - \lambda I_n) = 0$ eşitliğine de A nın karakteristik denklemi denir (Lipschutz, 1990).

Teorem 2.1.5. (Cayley-Hamilton) Her matris karakteristik polinomunun bir köküdür (Lipschutz, 1990).

2.2. Minkowski Uzayında Temel Kavramlar

Tanım 2.2.1. V , sonlu boyutlu reel vektör uzayı olmak üzere,

$$\langle\, , \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$$

bilineer fonksiyonu her $\vec{v}, \vec{w} \in V$ için $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle$ özeliğini sağlıyor ise, $\langle\, , \rangle$ ye V üzerinde bir simetrik bilineer form denir (O'neill, 1983).

Tanım 2.2.2. V vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer form $\langle\, , \rangle$ olsun. Bu takdirde,

i) $\forall \vec{v} \in V, \quad \vec{v} \neq 0$ için $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle > 0$ ise $\langle\, , \rangle$ bilineer formu pozitif tanımlı,

ii) $\forall \vec{v} \in V, \quad \vec{v} \neq 0$ için $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle < 0$ ise $\langle\, , \rangle$ bilineer formu negatif tanımlı,

ii) $\forall \vec{v} \in V, \quad \vec{v} \neq 0$ için $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \geq 0$ ise $\langle\, , \rangle$ bilineer formu pozitif yarı-tanımlı,

iv) $\forall \vec{v} \in V, \quad \vec{v} \neq 0$ için $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \leq 0$ ise $\langle\, , \rangle$ bilineer formu negatif yarı-tanımlı,

v) $\forall \vec{w} \in V$ için $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$ için $\vec{v} = \vec{0}$ oluyorsa $\langle\, , \rangle$ bilineer formuna non-dejenere, aksi takdirde dejenere adı verilir (O'neill, 1983).

Tanım 2.2.3. $\mathbb{R}^3$, standart reel vektör uzayında, Öklid iç çarpımı yerine, (-,+,+) işaretli

$$\begin{aligned} \langle , \rangle &: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ (\vec{x}, \vec{y}) &\to \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = -x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 \end{aligned}$$

Lorentzian iç çarpımı alınırsa, $\mathbb{R}^3$ afin uzayına, 3-boyutlu Minkowski uzayı denir ve bu uzay $\mathbb{R}^3_1$ ile gösterilir. Burada $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ dir (O'neill, 1983).

Tanım 2.2.4. $\vec{x}=\left(x_1,x_2,x_3\right)\in\mathbb{R}_1^3$ olsun. Eğer

i) $\left\langle\vec{x},\vec{x}\right\rangle<0$ ise $\vec{x}$ e timelike vektör,

ii) $\left\langle\vec{x},\vec{x}\right\rangle>0$ veya $\vec{x}=\vec{0}$ ise $\vec{x}$ e spacelike vektör,

iii) $\left\langle\vec{x},\vec{x}\right\rangle=0$ ve $\vec{x}\neq\vec{0}$ ise $\vec{x}$ e null (lightlike) vektör adı verilir (O'neill, 1983).

Tanım 2.2.5. $\mathbb{R}_1^3$, 3-boyutlu Minkowski uzayı olsun. $\forall\vec{x},\ \vec{y}\in\mathbb{R}_1^3$ için

$$\left\langle\vec{x},\vec{y}\right\rangle=0$$

ise $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ vektörleri Lorentz anlamda diktirler denir (O'neill, 1983).

Tanım 2.2.6. $\vec{x}=\left(x_1,x_2,x_3\right)\in\mathbb{R}_1^3$ olsun. Bu takdirde

i) $\left\|\vec{x}\right\|>0$ dır,

ii) $\left\|\vec{x}\right\|=0\Leftrightarrow\vec{x}$ bir null vektördür,

iii) $\vec{x}$ bir timelike vektör ise $\left\|\vec{x}\right\|^2=-\left\langle\vec{x},\vec{x}\right\rangle$,

iv) $\vec{x}$ bir spacelike vektör ise $\left\|\vec{x}\right\|^2=\left\langle\vec{x},\vec{x}\right\rangle$ dir (O'neill, 1983).

Tanım 2.2.7. $\mathbb{R}_1^3$, Minkowski uzayında iki vektör $\vec{v}=\left(v_1,v_2,v_3\right)$ ve $\vec{w}=\left(w_1,w_2,w_3\right)$ olmak üzere

$$\vec{v}\wedge\vec{w}=\det\begin{bmatrix}-\vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3}\\ v_1 & v_2 & v_3\\ w_1 & w_2 & w_3\end{bmatrix}=\left(-\left(v_2w_3-v_3w_2\right),-\left(v_1w_3-v_3w_1\right),v_1w_2-v_2w_1\right).$$

vektörüne $\vec{v}$ ve $\vec{w}$ nun vektörel çarpımı (dış çarpımı) denir (O'neill, 1983).

Teorem 2.2.1. $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{x} \in \mathbb{R}_1^3$ olsun. Bu takdirde

i) $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$.

ii) $\det\left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right) = \left\langle \vec{u}, \vec{v} \wedge \vec{w} \right\rangle = \left\langle \vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{w} \right\rangle$.

iii) $\left(\vec{u} \wedge \vec{v}\right) \wedge \vec{w} = -\left\langle \vec{u}, \vec{w} \right\rangle \vec{v} + \left\langle \vec{v}, \vec{w} \right\rangle \vec{u}$.

iv) $\left\langle \vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{w} \wedge \vec{x} \right\rangle = -\left\langle \vec{u}, \vec{w} \right\rangle \left\langle \vec{v}, \vec{x} \right\rangle + \left\langle \vec{v}, \vec{w} \right\rangle \left\langle \vec{u}, \vec{x} \right\rangle$.

dır (O'neill, 1983).

Tanım 2.2.8. $\langle\, , \rangle$, V üzerinde simetrik bilineer form W da V nin bir alt uzayı olsun. $\langle\, , \rangle$ nin W üzerinde kısıtlanmışı $\langle\, , \rangle\big|_W$ olmak üzere

$$\langle\, , \rangle\big|_W : W \times W \to \mathbb{R}$$

negatif tanımlı olacak şekilde en büyük boyutlu W altuzayının boyutuna, $\langle\, , \rangle$ simetrik bilineer formun indeksi denir. $\langle\, , \rangle$ nin indeksi v olmak üzere $0 \le v \le boyV$ dir (O'neill, 1983).

Tanım 2.2.9. $\left(V, \langle\, , \rangle\right)$ Minkowski uzayı olsun. $W \subset V$ alt uzayı için, W üzerine indirgenmiş metrik tensör $\langle\, , \rangle\big|_W$ olmak üzere,

i) $\langle\, , \rangle\big|_W : W \times W \to \mathbb{R}$, pozitif ise W ya spacelike altuzay,

ii) $\langle\, , \rangle\big|_W : W \times W \to \mathbb{R}$, 1-indeksli ve non-dejenere ise W ya timelike altuzay,

iii) $\langle\, , \rangle\big|_W : W \times W \to \mathbb{R}$, dejenere ise W ya lightlike altuzay

denir (O'neill, 1983).

Tanım 2.2.10. $\mathbb{R}_1^3$, 3-boyutlu Minkowski uzayında $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ tarafından gerilen düzlem Π yani $\Pi = Sp\{\vec{u},\vec{v}\}$ olsun. Bu takdirde $\Pi = Sp\{\vec{u},\vec{v}\}$ düzleminin timelike, spacelike veya null olması $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ nin karakterine bağlıdır. Eğer $\langle \vec{u},\vec{v} \rangle = 0$ ise aşağıdaki tablo verilebilir (Ferrandez, Gimenez ve Lucas, 2007).

Tablo 2.2.1. $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski uzayında düzlemler

$\vec{v}$ \ $\vec{u}$	Spacelike	Timelike	Null
Spacelike	Π Spacelike	Π Timelike	Π Null
Timelike	Π Timelike	———	———
Null	Π Null	———	———

(2.2.1)

Tanım 2.2.11. $\alpha \in \mathbb{R}_1^3$ Minkowski uzayında bir eğri olsun. α eğrisinin hız vektörü de $\overrightarrow{\alpha'}$ olmak üzere;

i) $\langle \overrightarrow{\alpha'},\overrightarrow{\alpha'} \rangle < 0$ ise, α timelike eğri,

ii) $\langle \overrightarrow{\alpha'},\overrightarrow{\alpha'} \rangle > 0$ ise, α spacelike eğri,

iii) $\langle \overrightarrow{\alpha'},\overrightarrow{\alpha'} \rangle = 0$ ise, α null eğri

olarak adlandırılır (O’neill, 1983).

Tanım 2.2.12. M bir C^∞ manifold olmak üzere,

$$\begin{aligned} \langle\, , \rangle : \chi(M)\times\chi(M) &\to C^\infty(M,\mathbb{R}) \\ (\vec{X},\vec{Y}) &\to \langle \vec{X},\vec{Y} \rangle \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı simetrik, bilineer, non-dejenere fonksiyona M üzerinde metrik tensör denir. Bu metrik tensörün indeksine M manifoldunun indeksi denir ve ν ile gösterilir (O'neill, 1983).

Tanım 2.2.13. M bir C^{∞}**-**manifold ve $\langle \, , \rangle$ de M üzerinde sabit indeksli metrik tensör olmak üzere $(M, \langle \, , \rangle)$ çiftine bir yarı-Riemann manifoldu denir (O'neill, 1983).

Tanım 2.2.14. $boyM = n$ olmak üzere $(M, \langle \, , \rangle)$ çifti bir yarı-Riemann manifold olsun. Eğer $\nu = 0$ ise $(M, \langle \, , \rangle)$ çiftine bir Riemann manifoldu denir. Ayrıca $n \geq 2$ ve $\nu = 1$ ise $(M, \langle \, , \rangle)$ çiftine bir Lorentz manifoldu denir (O'neill, 1983).

Tanım 2.2.15. $\mathbb{R}_1^n$ de bir Lorentz alt manifold $\bar{M}$ olsun. Eğer $boy\bar{M} = n-1$ ise $\bar{M}$ ye $\mathbb{R}_1^n$ in Lorentz hiperyüzeyi denir.

Burada $\bar{M}$ timelike alt manifold ise $\bar{M}$ ye timelike hiperyüzey; $\bar{M}$ spacelike alt manifold ise $\bar{M}$ ye spacelike hiperyüzey denir.

Ayrıca $\bar{M}$ timelike bir hiperyüzey ve N_0 bu hiperyüzeyin birim normali ise

$$\langle N_0, N_0 \rangle = 1$$

dir, yani N_0 spacelike birim normal vektör alanıdır.

Benzer şekilde $\bar{M}$ spacelike bir yüzey ve N_0 bu hiperyüzeyin birim normali ise

$$\langle N_0, N_0 \rangle = -1$$

dir, yani N_0 timelike birim normal vektör alanıdır (Ferrandez ve Lucas, 1992).

Tanım 2.2.16. $\mathbb{R}_1^n$ de bir Lorentz hiperyüzeyi M olsun. M nin normal vektör alanı N ve M üzerinde Levi-Civita konneksiyonu D olmak üzere

$$\begin{aligned} S:\chi(M) &\to \chi(M) \\ X &\to S(X) = -D_X N \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

şeklinde tanımlı S dönüşümüne M nin şekil operatörü (Weingarten dönüşümü) denir (Ekmekçi, 1991).

Tanım 2.2.17. $\mathbb{R}_1^3$ de bir Lorentz yüzeyi M olsun. $P \in M$ noktasında M nin şekil operatörü S ve yüzeyin birim normal vektör alanı N_0 olmak üzere,

$$\begin{aligned} K: M &\to \mathbb{R} \\ P &\to K(P) = \langle N_0, N_0 \rangle \det S, \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

şeklinde tanımlanan K fonksiyonuna M nin Gauss eğrilik fonksiyonu ve $K(P)$ değerine de $P \in M$ noktasında M nin Gauss eğriliği denir (Sodsiri, 2005).

Tanım 2.2.18. $\mathbb{R}_1^n$ de bir Lorentz hiperyüzeyi M olsun. $P \in M$ noktasında M nin şekil operatörü S olmak üzere

$$S\left(\overrightarrow{X}\right) = \lambda \overrightarrow{X}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad \overrightarrow{X} \in T_P(M) \tag{2.2.4}$$

olacak şekilde bir $\overrightarrow{X} \neq \vec{0}$ vektörü varsa λ sayısına S nin karakteristik değeri ve $\overrightarrow{X}$ vektörüne de S nin karakteristik değerine karşılık gelen karakteristik vektörü denir. S nin karakteristik değerine M nin P noktasındaki asli eğrilikleri ve bu değerlere karşılık gelen karakteristik vektörlere de M nin P noktasındaki asli vektörleri veya asli eğrilik doğrultuları denir (Alias, Ferrandez ve Lucas, 1995).

Tanım 2.2.19. $\mathbb{R}_1^n$ de bir Lorentz hiperyüzeyi M olsun. $P \in M$ noktasında M nin şekil operatörü S olmak üzere

$$P_S(\lambda) = \det(S - \lambda I_{n-1}) = \lambda^{n-1} + a_1 \lambda^{n-2} + \ldots + a_n$$

şeklinde tanımlanan polinoma S nin karakteristik polinomu ve

$$P_S(\lambda) = \det(S - \lambda I_{n-1}) = 0 \tag{2.2.5}$$

denklemine de S nin karakteristik denklemi denir (O'neill, 1983).

Tanım 2.2.20. M bir yarı-Riemann manifoldu ve $\vec{v} \in T_P(M)$ bir null vektör olsun. $T_P(M)$ de bir düzlem Π olsun. Eğer Π, herhangi bir $\vec{w} \in \Pi$ için

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$$

olacak şekilde bir $\vec{v}$ vektörünü ihtiva ediyorsa ve

$$\langle \overrightarrow{w_0}, \overrightarrow{w_0} \rangle \neq 0$$

olacak şekilde bir $\overrightarrow{w_0} \in T_P(\Pi)$ mevcutsa Π düzlemine $\vec{v}$ doğrultusunda bir null düzlem denir (Duggal ve Bejancu, 1996).

Tanım 2.2.21. M bir yarı-Riemann manifoldu ve M üzerinde vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olsun. $\forall \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z} \in \chi(M)$ ve $\forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için

$$D : \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$$
$$\left(\vec{X}, \vec{Y}\right) \to D\left(\vec{X}, \vec{Y}\right) = D_{\vec{X}} \vec{Y}$$

operatörü,

i) $D_{\vec{X}}\left(\vec{Y} + \vec{Z}\right) = D_{\vec{X}} \vec{Y} + D_{\vec{X}} \vec{Z}$

ii) $D_{\vec{X}+\vec{Y}} \vec{Z} = D_{\vec{X}} \vec{Z} + D_{\vec{Y}} \vec{Z}$

iii) $D_{f\vec{X}} \vec{Y} = f D_{\vec{X}} \vec{Y}$

iv) $D_{\vec{X}}\left(f\vec{Y}\right) = \vec{X}[f]\vec{Y} + f\, D_{\vec{X}} \vec{Y}$

özeliklerini sağlıyor ise D ye M üzerinde konneksiyon $D_{\vec{X}} \vec{Y}$ ye de $\vec{Y}$ nin $\vec{X}$ vektör alanına göre kovaryant türevi denir (Hacısalihoğlu, 1975).

Tanım 2.2.22. M bir yarı-Riemann manifoldu ve M üzerindeki konneksiyon D olsun. $\forall \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z} \in \chi(M)$ için

i) $\left[\vec{X}, \vec{Y}\right] = D_{\vec{X}} \vec{Y} + D_{\vec{Y}} \vec{X}$

ii) $\vec{X}\left\langle \vec{Y}, \vec{Z} \right\rangle = \left\langle D_{\vec{X}} \vec{Y}, \vec{Z} \right\rangle + \left\langle \vec{Y}, D_{\vec{X}} \vec{Z} \right\rangle$

özelikleri sağlanıyorsa D konneksiyonuna M üzerinde Levi-Civita konneksiyonu denir (Hacısalihoğlu, 1975).

Tanım 2.2.23. M bir Lorentz manifoldu olsun. M üzerindeki bir α eğrisi için

$$D_{\alpha'}\alpha' = 0$$

ise α eğrisine bir geodezik eğri adı verilir (O'neill, 1983).

Tanım 2.2.24. M bir Lorentz manifoldu ve M üzerinde bir null eğri α olsun. Eğer α null eğrisi için

$$D_{\alpha'}\alpha' = 0 \tag{2.2.6}$$

ise α eğrisine M nin bir null geodeziği denir (Duggal ve Bejancu, 1996).

Tanım 2.2.25. M bir Lorentz manifoldu ve M üzerinde bir eğri α olsun. α üzerinde bir Z vektör alanı için $D_{\alpha'}Z = 0$ ise Z vektör alanına α eğrisi boyunca paralel vektör alanı denir (O'neill, 1983).

Tanım 2.2.26. M yüzeyi $\varphi:\Omega\to\mathbb{R}_1^3$, $\varphi(s,v)$ ve $E,F,G:\Omega\to\mathbb{R}$ olsun.

$$E=\langle\varphi_s,\varphi_s\rangle,\ F=\langle\varphi_s,\varphi_v\rangle,\ G=\langle\varphi_v,\varphi_v\rangle$$

şeklinde tanımlanan fonksiyonlara birinci temel formun katsayıları adı verilir (Sodsiri, 2005).

Teorem 2.2.2. (Brioschi Formülü) $\mathbb{R}_1^3$ de bir M yüzeyi $\varphi:\Omega\to\mathbb{R}_1^3$, $\varphi(s,v)$ ve E,F,G ler birinci temel formun katsayıları olmak üzere M nin Gauss eğrilik fonksiyonu K;

$$K=\frac{1}{\left(EG-F^2\right)^2}\left\{\begin{vmatrix}-\frac{1}{2}E_{vv}+F_{sv}-\frac{1}{2}G_{ss} & \frac{1}{2}E_s & -\frac{1}{2}E_v+F_s\\ F_v-\frac{1}{2}G_s & E & F\\ \frac{1}{2}G_v & F & G\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}0 & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_s\\ \frac{1}{2}E_v & E & F\\ \frac{1}{2}G_s & F & G\end{vmatrix}\right\}$$

ile verilir (Sodsiri, 2005).

Tanım 2.2.27. $\mathbb{R}_1^3$ de M yüzeyi $\varphi:\Omega\to\mathbb{R}_1^3$, $\varphi(s,v)$ yüzeyinin birim normali $N_0=\dfrac{\varphi_s\times\varphi_v}{\|\varphi_s\times\varphi_v\|}$ olsun. Bu takdirde $e,f,g:\Omega\to\mathbb{R}$ olmak üzere,

$$
\begin{aligned}
e&=-\langle N_{0s},\varphi_s\rangle=\langle N_0,\varphi_{ss}\rangle,\\
f&=-\langle N_{0s},\varphi_v\rangle=\langle N_0,\varphi_{sv}\rangle=-\langle N_{0v},\varphi_s\rangle,\\
g&=-\langle N_{0v},\varphi_v\rangle=\langle N_0,\varphi_{vv}\rangle.
\end{aligned}
$$

şeklinde tanımlanan fonksiyonlara ikinci temel formun katsayıları adı verilir (Sodsiri, 2005).

Teorem 2.2.3. M , $\mathbb{R}_1^3$ de açılamaz bir yüzey ise M nin ikinci Gauss eğriliği K_{II} ,

$$
K_{II}=\frac{1}{\left(eg-f^2\right)^2}\left\{\begin{vmatrix}-\frac{1}{2}e_{vv}+f_{sv}-\frac{1}{2}g_{ss} & \frac{1}{2}e_s & -\frac{1}{2}e_v+f_s\\ f_v-\frac{1}{2}g_s & e & f\\ \frac{1}{2}g_v & f & g\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}0 & \frac{1}{2}e_v & \frac{1}{2}g_s\\ \frac{1}{2}e_v & e & f\\ \frac{1}{2}g_s & f & g\end{vmatrix}\right\} \quad (2.2.7)
$$

ile verilir (Sodsiri, 2005).

Sonuç 2.2.1. $\varphi:\Omega\to\mathbb{R}_1^3$ bir yüzey olsun. Her $i\in\{1,2\}$ için,

$$
\Gamma_{ik}^k=\Gamma_{i1}^1+\Gamma_{i2}^2=\left(\ln\sqrt{\left|EG-F^2\right|}\right)_{|i}
$$

şeklindedir (Sodsiri, 2005).

Tanım 2.2.28. $\mathbb{R}_1^3$ de açılamaz bir yüzey M olsun. I. ve II. temel formlarının da Levi-Civita konneksiyonları, sırasıyla D, $\hat{D}$ ve bu konneksiyonların katsayıları da, sırasıyla, Γ_{ij}^k, $\hat{\Gamma}_{ij}^k$ olsun. T fark tensörü, her $i,j,k\in\{1,2\}$ için

$$
T_{ij}^k=\hat{\Gamma}_{ij}^k-\Gamma_{ij}^k
$$

dir (Sodsiri, 2005).

Önerme 2.2.1. M , $\mathbb{R}_1^3$ de açılamaz bir yüzey olsun. II. ikinci temel formunun Levi-Civita konneksiyonu $\hat{D}$ nın katsayıları $\hat{\Gamma}_{ij}^k$ ve T fark tensörü için $i \in \{1,2\}$ olmak üzere,

i) $\hat{\Gamma}_{ik}^k = \left(\ln \sqrt{\left| eg - f^2 \right|} \right)_{|i}$

ii) $T_{ik}^k = \left(\ln \sqrt{K} \right)_{|i}$, burada K , M nin Gauss eğriliğidir.

ikinci temel formu $II = L_{ij} dx^i dx^j$ ile gösterelim. II non-dejenere olduğundan, $\left(L_{ij} \right)$ matrisi tersinirdir. $\left(L_{ij} \right)$ matrisinin tersini $\left(L^{ij} \right)$ ile gösterelim (Sodsiri, 2005).

Teorem 2.2.4. $\mathbb{R}_1^3$ de açılamaz M yüzeyinin H_{II} ile gösterilen ikinci ortalama eğriliği

$$H_{II} = H - \frac{1}{2\sqrt{\left| \det II \right|}} \sum_{ij} \frac{\partial}{\partial u^i} \left(\sqrt{\left| \det II \right|} L^{ij} \frac{\partial}{\partial u^j} \left(\ln \sqrt{\left| K \right|} \right) \right) \tag{2.2.8}$$

dır. Burada, H yüzeyin ortalama eğriliğini göstermektedir (Sodsiri, 2005).

Tanım 2.2.29. $\mathbb{R}_1^3$ de $P \in M$ noktasında M yüzeyi üzerindeki herhangi bir ortonormal çatı $\{e_1, e_2\}$ olsun. M nin ikinci temel formu II olmak üzere

$$H(P) = \frac{1}{2} \left\{ \langle e_1, e_1 \rangle II(e_1, e_1) + \langle e_2, e_2 \rangle II(e_2, e_2) \right\} \Big|_P$$

ifadesine ortalama eğrilik, ayrıca $H_I : M \to \mathbb{R}$ reel değerli bir düzgün fonksiyon olmak üzere,

$$H = H_I N$$

şeklinde tanımlanan H vektör alanına M nin ortalama eğrilik vektör alanı denir. Burada $H_I : M \to \mathbb{R}$ reel değerli düzgün fonksiyonu,

$$H_I = \langle N, N \rangle \frac{eG - 2fF + gE}{2\left(EG - F^2 \right)} = -\frac{eG - 2fF + gE}{2\left| EG - F^2 \right|}$$

dır (Sodsiri, 2005).

Teorem 2.2.5. $\mathbb{R}_1^3$ de bir yüzey M, yüzeyin birim normal vektörü $\overrightarrow{N_0}$ ve şekil operatörüne karşılık gelen matris S olmak üzere, yüzeyin ortalama eğriliği H ise

$$H = \left\langle \overrightarrow{N_0}, \overrightarrow{N_0} \right\rangle \frac{1}{2} \dot{I}zS \tag{2.2.9}$$

şeklindedir (Sodsiri, 2005).

Tanım 2.2.30. M bir Lorentz manifoldu olsun. Eğer $\overrightarrow{X_P}, \overrightarrow{Y_P} \in T_P(M)$ olmak üzere

$$II\left(\overrightarrow{X_P}, \overrightarrow{Y_P}\right) = 0$$

ise $\overrightarrow{X_P}$ ve $\overrightarrow{Y_P}$ vektörlerine eşlenik vektörler denir. Eğer

$$II\left(\overrightarrow{X_P}, \overrightarrow{X_P}\right) = 0 \tag{2.2.10}$$

ise $\overrightarrow{X_P}$ ye P noktasında asimptotik vektör denir (Duggal ve Bejancu, 1996).

Teorem 2.2.6. $\mathbb{R}_1^3$ de bir timelike yüzey M olsun. M üzerinde birinci, ikinci, üçüncü temel formlar, sırasıyla; I, II, III ve Gauss eğrilik fonksiyonu K, ortalama eğrilik fonksiyonu H olmak üzere,

$$III - 2 \cdot H \cdot II + K \cdot I \equiv 0$$

dır (Inoguchi ve Toda, 2004).

Tanım 2.2.31. $\mathbb{R}_1^3$ de bir α null eğrisinin teğeti $\vec{\ell}$ sabit bir $\vec{V}$ doğrultusu ile sabit bir açı oluşturuyorsa α ya $\mathbb{R}_1^3$ de bir null helis adı verilir (Şahin, Kılıç ve Güneş, 2001).

Teorem 2.2.7. α, $\mathbb{R}_1^3$ de bir null eğri olsun. O zaman α bir null helis olması için gerek ve yeter şart $\frac{\kappa}{\tau} = \text{sabit}$ olmasıdır (Şahin, Kılıç ve Güneş, 2001).

Tanım 2.2.32. $\vec{V}$ sabit bir doğrultu ve $\vec{n}$ de α null eğrisinin asli normali olmak üzere $\left\langle \vec{n}, \vec{V} \right\rangle = \text{sabit}$ ise α ya $\mathbb{R}_1^3$ de bir null slant helis adı verilir (Karadağ, 2008).

Teorem 2.2.8. α, $\mathbb{R}_1^3$ de bir null eğri olsun. O zaman α nın bir null slant helis olabilmesi için gerek ve yeter şart α nın bir null helis olmasıdır (Karadağ, 2008).

BÖLÜM 3. REGLE YÜZEYLER

Bu bölümde, E^3 Öklid uzayı ve $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski uzayında regle yüzeyler tanıtılarak bu yüzeylerle ilgili temel kavram ve teoremlere yer verilecektir.

3.1. Öklid Uzayında Regle Yüzeyler

Tanım 3.1.1. Bir $M \subset E^3$ yüzeyi verilsin. $\forall P \in M$ noktasında E^3 ün tamamen M de kalan bir doğrusu varsa, M ye bir regle yüzey ve $\forall P \in M$ noktasından geçen ve M de kalan bu doğruya da regle yüzeyin doğrultmanı denir (Hacısalihoğlu, 1975).

Doğrultmanları kesen ve yüzey üzerinde bulunan diferensiyellenebilir bir $\alpha : I \to E^3$ eğrisine de regle yüzeyin dayanak eğrisi adı verilir. M bir regle yüzey ve α da M nin dayanak eğrisi olsun. $\alpha(s)$ noktasından geçen bir doğrultmanın üzerindeki vektör X olmak üzere doğrultman üzerindeki değişken bir nokta $\beta(v)$ ise,

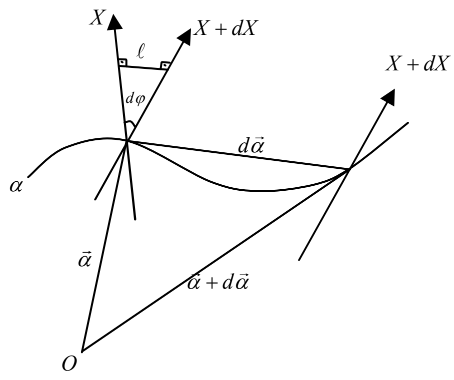
$$\beta(v) = \alpha(s) + vX(s)$$

yazabiliriz. Buna göre bir M regle yüzeyi parametrik olarak,

$$\begin{aligned} &\varphi : I \times \mathbb{R} \to E^3 \\ &\quad (s,v) \to \varphi(s,v) = \alpha(s) + vX(s) \end{aligned}$$

ile verilir (Hacısalihoğlu, 1975).

Tanım 3.1.2. Regle yüzeyin komşu iki anadoğrusu arasındaki en kısa uzaklığın bu iki komşu anadoğru arasındaki açıya oranına, regle yüzeyin dağılma parametresi denir (Hacısalihoğlu, 1975).



Şekil 3.1.1. Dağılma parametresi $\left(d = \dfrac{\ell}{d\varphi} \right)$

Tanım 3.1.3. Bir regle yüzeyin anadoğruları boyunca teğet düzlemleri aynı ise regle yüzeye açılabilirdir denir (Hacısalihoğlu, 1975).

Teorem 3.1.1. Bir $\varphi(s,v)$ regle yüzeyinin açılabilir olması için gerek ve yeter şart dağılma parametresinin sıfır olmasıdır (Hacısalihoğlu, 1975).

Tanım 3.1.4. Eğer

$$\begin{aligned} \varphi : I \times \mathbb{R} &\rightarrow E^3 \\ (s,v) &\rightarrow \varphi(s,v) = \alpha(s) + v\,X(s) \end{aligned}$$

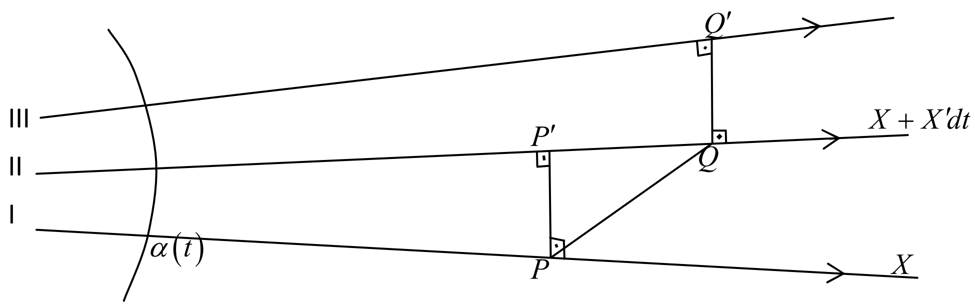
regle yüzeyi $\forall s \in I$ için,

$$\varphi(s+2\pi, v) = \varphi(s,v)$$

olacak şekilde peryodik ise bu regle yüzeye kapalıdır denir (Hacısalihoğlu, 1975).

Tanım 3.1.5. Bir $\varphi(s,v)$ regle yüzeyinin anadoğrularının her birini dik olarak kesen eğriye, regle yüzeyin ortogonal yörüngesi denir (Hacısalihoğlu, 1975).

Tanım 3.1.6. Bir $\varphi(s,v)$ regle yüzeyinde komşu iki doğrultmanın ortak dikmesinin esas olan anadoğru üzerindeki ayağına boğaz (merkez veya striksiyon) noktası adı verilir (Hacısalihoğlu, 1975).



Şekil 3.1.2. Striksiyon noktası

Tanım 3.1.7. Bir $\varphi(s,v)$ regle yüzeyinin anadoğrusu dayanak eğrisi boyunca yüzeyi oluştururken boğaz noktalarının geometrik yerine, regle yüzeyin boğaz (striksiyon) çizgisi (eğrisi) denir (Hacısalihoğlu, 1975).

3.2. Minkowski Uzayında Regle Yüzeyler

Bu bölümde $\mathbb{R}_1^3$ de spacelike ve timelike regle yüzeylerle ilgili kavramlar verilecektir.

Tanım 3.2.1. $\mathbb{R}_1^3$, 3-boyutlu Minkowski uzayında, verilen bir μ doğrusu, verilen bir α eğrisi boyunca hareket ettirilerek bir yüzey elde edilebiliyorsa, bu yüzeye 3-boyutlu Minkowski uzayında bir regle yüzey denir. Bu durumda verilen bir μ

doğrusuna regle yüzeyin anadoğrusu ve verilen α eğrisine, regle yüzeyin dayanak eğrisi denir (Turgut, 1995).

Tanım 3.2.2. $\mathbb{R}_1^3$, 3-boyutlu Minkowski uzayında bir regle yüzeyin anadoğruları boyunca teğet düzlemleri aynı ise regle yüzeye açılabilirdir denir (Turgut, 1995).

Tanım 3.2.3. $\mathbb{R}_1^3$, 3-boyutlu Minkowski uzayında açılabilir olmayan bir regle yüzey verilsin. Regle yüzeyin komşu iki anadoğrusunun ortak dikmesi varsa, bu dikmenin esas anadoğru üzerindeki ayağına boğaz (merkez veya striksiyon) noktası denir (Turgut, 1995).

Tanım 3.2.4. $\mathbb{R}_1^3$, 3-boyutlu Minkowski uzayında açılabilir olmayan bir regle yüzeyin ana doğrusu dayanak eğrisi boyunca yüzeyi oluştururken boğaz noktalarının geometrik yerine, regle yüzeyin boğaz (striksiyon) çizgisi (eğrisi) denir (Turgut, 1995).

Tanım 3.2.5. 3-boyutlu Minkowski uzayında bir regle yüzeyin ana doğrularının her birini dik olarak kesen bir eğriye regle yüzeyin bir ortogonal yörüngesi denir (Turgut, 1995).

Tanım 3.2.6. $\mathbb{R}_1^3$, 3-boyutlu Minkowski uzayında dayanak eğrisi spacelike bir eğri, anadoğruları da spacelike doğrular olan regle yüzeylere spacelike regle yüzeyler denir (Turgut, 1995).

M spacelike regle yüzeyi parametrik olarak,

$$\varphi(s,v)=\alpha(s)+vX(s)$$

ile verilir. M spacelike regle yüzeyinin, α eğrisi boyunca ortonormal çatı alanı, α eğrisinin birim teğeti T ve μ anadoğrusunun teğet vektör alanı (yani doğrultman vektörü) Z ise bu düzlemde T ye dik olacak şekilde

$$Y = Z - \langle Z, T \rangle T$$

seçilerek Y spacelike vektör alanı elde edilir. Ayrıca $X = \dfrac{Y}{\|Y\|}$ alınırsa $\|X\| = 1$ ve $\langle X, T \rangle = 0$ olur.

$$N = T \wedge X$$

olmak üzere

$$\langle X, N \rangle = 0, \langle T, N \rangle = 0, \langle N, N \rangle = -1$$

olur. Bu durumda $\{T, X, N\}$ sistemi M nin ortonormal çatı alanıdır. Böylece $\mathbb{R}_1^3$ deki Levi-Civita konneksiyonu D olmak üzere, α boyunca bu sistemin değişim formülleri

$$\begin{aligned} D_T T &= aX + bN \\ D_T X &= -aT + cN \\ D_T N &= bT + cX \end{aligned}$$

şeklindedir. Burada,

$$\begin{aligned} a &= \langle D_T T, X \rangle = -\langle T, D_T X \rangle \\ b &= -\langle D_T T, N \rangle = \langle T, D_T N \rangle \\ c &= -\langle D_T X, N \rangle = \langle X, D_T N \rangle \end{aligned}$$

dir. M spacelike regle yüzeyi üzerinde

$$\begin{aligned} \varphi_v : I \times \{v\} &\to M \\ (s, v) &\to \varphi_v(s, v) = \alpha(s) + vX(s) \end{aligned}$$

bir eğridir (parametre eğrisi). Bu eğrinin teğet vektör alanı da

$$A = (1 - av)T + cvN$$

dir (Turgut, 1995).

Teorem 3.2.1. $\mathbb{R}_1^3$ de M bir spacelike regle yüzey olsun. Bir anadoğru boyunca teğet düzlemlerin aynı olması için gerek ve yeter şart $c = 0$ olmasıdır (Turgut, 1995).

Teorem 3.2.2. $\mathbb{R}_1^3$ de spacelike bir M regle yüzeyinin açılabilir olması için gerek ve yeter şart $c = 0$ olmasıdır (Turgut, 1995).

Teorem 3.2.3. $\mathbb{R}_1^3$ de açılamaz bir M spacelike regle yüzeyinin boğaz eğrisi

$$\gamma(s) = \alpha(s) + \frac{a}{a^2 - c^2} X(s)$$

olup bu eğri spacelike eğridir (Turgut, 1995).

Tanım 3.2.7. 3-boyutlu Minkowski uzayı $\mathbb{R}_1^3$ de spacelike regle yüzey M olsun. Bu takdirde

$$d = \frac{\langle T \wedge X, X' \rangle}{\langle X', X' \rangle} = -\frac{\det(T, X, X')}{\langle X', X' \rangle}$$

şeklinde tanımlanan d ye spacelike regle yüzeyin dağılma parametresi denir (Turgut, 1995).

Teorem 3.2.5. $\mathbb{R}_1^3$ de bir M spacelike regle yüzeyinin açılabilir olması için gerek ve yeter şart dağılma parametresinin sıfır olmasıdır (Turgut, 1995).

Teorem 3.2.6. $\mathbb{R}_1^3$ de M bir spacelike regle yüzey olsun. M nin açılabilir olması için gerek ve yeter şart M nin Gauss eğrilik fonksiyonunun özdeş olarak sıfır olmasıdır (Turgut, 1995).

Tanım 3.2.8. $\mathbb{R}_1^3$, 3-boyutlu Minkowski uzayında dayanak eğrisi spacelike bir eğri, anadoğruları timelike doğrular ya da dayanak eğrisi timelike bir eğri anadoğruları spacelike olan regle yüzeylere timelike regle yüzeyler denir (Turgut, 1995).

Şimdi bu iki durumu ayrı ayrı inceleyelim.

1.Durum (Dayanak Eğrisi Timelike ise)

M timelike regle yüzeyinin parametrik denklemi,

$$\varphi(s,v) = \alpha(s) + vX(s)$$

dir. M timelike regle yüzeyinin, α timelike eğrisi boyunca ortonormal çatı alanı, α eğrisinin birim teğeti T ve μ anadoğrusunun teğet vektör alanı (yani doğrultman vektörü) Z ise bu düzlemde T ye dik olacak şekilde

$$Y = Z - \langle Z,T\rangle T$$

seçilerek Y timelike vektör alanı elde edilir. Ayrıca $X = \dfrac{Y}{\|Y\|}$ alınırsa $\langle X,X\rangle = -1$ ve $\langle X,T\rangle = 0$ olur. Böylece

$$N = T \wedge X$$

olmak üzere

$$\langle X,N\rangle = 0, \langle T,N\rangle = 0, \langle N,N\rangle = 1$$

dir. Bu durumda $\{T, N, X\}$ sistemi M nin ortonormal çatı alanıdır. O halde $\mathbb{R}_1^3$ deki Levi-Civita konneksiyonu D olmak üzere, α boyunca bu sistemin değişim formülleri

$$\begin{aligned} D_T T &= aX + bN \\ D_T N &= -bT - cX \\ D_T X &= aT - cX \end{aligned}$$

şeklindedir. Burada,

$$\begin{aligned} a &= -\langle D_T T, X \rangle = \langle T, D_T X \rangle \\ b &= \langle D_T T, N \rangle = -\langle T, D_T N \rangle \\ c &= \langle D_T X, N \rangle = -\langle X, D_T N \rangle \end{aligned}$$

dir. M timelike regle yüzeyinin bir parametre eğrisi

$$\begin{aligned} &\varphi_v : I \times \{v\} \to M \\ &\quad (s, v) \to \varphi_v(s, v) = \alpha(s) + vX(s) \end{aligned}$$

olsun. Bu eğrinin teğet vektör alanı da

$$A = (1 + av)T + cvN$$

dir (Turgut, 1995).

2.Durum (Dayanak Eğrisi Spacelike ise)

M timelike regle yüzeyinin parametrik denklemi,

$$\varphi(s, v) = \alpha(s) + vX(s)$$

dir. M timelike regle yüzeyinin, α spacelike eğrisi boyunca ortonormal çatı alanı, α eğrisinin birim teğeti T ve μ anadoğrusunun teğet vektör alanı (yani doğrultman vektörü) Z ise bu düzlemde T ye dik olacak şekilde

$$Y = Z + \langle Z, T \rangle T$$

seçilerek Y spacelike vektör alanı elde edilir. Ayrıca $X=\frac{Y}{\|Y\|}$ alınırsa $\|X\|=1$ ve $\langle X,T\rangle=0$ olur. O halde

$$N=T\wedge X$$

olmak üzere

$$\langle X,N\rangle=0,\langle T,N\rangle=0,\langle N,N\rangle=1$$

dir. Bu durumda $\{X,N,T\}$ sistemi M nin ortonormal çatı alanıdır. Böylece $\mathbb{R}_1^3$ deki Levi-Civita konneksiyonu D olmak üzere, α boyunca bu sistemin değişim formülleri

$$\begin{aligned}
D_T X &= aT+cN\\
D_T N &= bT-cX\\
D_T T &= aX+bN
\end{aligned}$$

dir. Burada,

$$\begin{aligned}
a&=\langle D_T T,X\rangle=-\langle T,D_T X\rangle\\
b&=\langle D_T T,N\rangle=-\langle T,D_T N\rangle\\
c&=\langle D_T X,N\rangle=-\langle X,D_T N\rangle
\end{aligned}$$

dir. M timelike regle yüzeyinin bir parametre eğrisi

$$\begin{aligned}
\varphi_v &: I\times\{v\}\rightarrow M\\
&(s,v)\rightarrow\varphi_v(s,v)=\alpha(s)+vX(s)
\end{aligned}$$

olsun. Bu eğrinin teğet vektör alanı da

$$A=(1+av)T+cvN$$

dir (Turgut, 1995).

Teorem 3.2.7. $\mathbb{R}_1^3$ de M bir timelike regle yüzey olsun. Bir anadoğru boyunca teğet düzlemlerin aynı olması için gerek ve yeter şart $c=0$ olmasıdır (Turgut, 1995).

Teorem 3.2.8. $\mathbb{R}_1^3$ de timelike bir M regle yüzeyinin açılabilir olması için gerek ve yeter şart $c=0$ olmasıdır (Turgut, 1995).

Teorem 3.2.9. $\mathbb{R}_1^3$ de açılamaz bir M timelike regle yüzeyinin boğaz eğrisi,

i) Dayanak eğrisi spacelike bir eğri ise,

$$\gamma(s)=\alpha(s)-\frac{a}{a^2+c^2}X(s)$$

bir spacelike eğridir.

ii) Dayanak eğrisi timelike bir eğri ise,

$$\gamma(s)=\alpha(s)+\frac{a}{c^2-a^2}X(s)$$

bir timelike eğridir (Turgut, 1995).

Tanım 3.2.9. $\mathbb{R}_1^3$, 3-boyutlu Minkowski uzayında timelike regle yüzey M olsun.

$$d=\frac{\langle T\wedge X,X'\rangle}{\langle X',X'\rangle}=-\frac{\det(T,X,X')}{\langle X',X'\rangle}$$

şeklinde tanımlanan d ye timelike regle yüzeyin dağılma parametresi denir (Turgut, 1995).

Teorem 3.2.10. Bir M timelike regle yüzeyinin açılabilir olması için gerek ve yeter şart dağılma parametresinin sıfır olmasıdır (Turgut, 1995).

Teorem 3.2.11. M bir timelike regle yüzey olsun. M nin açılabilir olması için gerek ve yeter şart M nin Gauss eğrilik fonksiyonunun özdeş olarak sıfır olmasıdır (Turgut, 1995).

3.3. $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski Uzayında B-Scrollar

Bu bölümde $\mathbb{R}_1^3$ de dayanak eğrisi null eğri ve doğrultmanı null doğru olan B-scrollar tanıtılacaktır.

Tanım 3.3.1. M , $\mathbb{R}_1^3$ de bir Lorentz manifoldu ve α, M de bir null eğri olmak üzere $\mathbb{R}_1^3$ ün bir bazı

$$\begin{aligned} \langle \ell,\ell \rangle = \langle n,n \rangle = 0 \quad &, \quad \langle \ell,n \rangle = -1 \\ \langle \ell,u \rangle = \langle n,u \rangle = 0 \quad &, \quad \langle u,u \rangle = 1 \end{aligned}$$

koşullarını sağlayan pozitif yönlendirilmiş (ℓ,n,u) vektör üçlüsüdür. ℓ, $\dfrac{d\alpha}{ds}$ in bir pozitif skalar katı olmak üzere $\alpha(s)$ null eğrisinin bir null çatısı $F(s)=(\ell(s),n(s),u(s))$ için

$$\begin{aligned} \frac{d\ell}{ds} &= h\,\ell + \kappa\, u \\ \frac{dn}{ds} &= -h\,n + \tau\, u \\ \frac{du}{ds} &= \tau\,\ell + \kappa\, n \end{aligned} \tag{3.3.1}$$

eşitliklerine, F çatısına göre α null eğrisinin Frenet denklemleri denir (Balgetir, Bektaş ve Ergüt, 2005).

Tanım 3.3.2. $\mathbb{R}_1^3$, 3-boyutlu Minkowski uzayında bir null eğrisi boyunca null bir doğrultman yardımıyla oluşturulmuş regle yüzey üzerinde alınan çatı null çatı ise bu regle yüzeye null scroll denir (Balgetir, Bektaş ve Ergüt, 2005).

Tanım 3.3.3. $\ell = \dfrac{d\alpha}{ds}$ ve $h = 0$ olması durumunda $F = (\ell, n, u)$ çatı alanı Cartan çatısı olarak adlandırılır. Böylece Frenet denklemleri

$$\begin{aligned} \ell' &= \kappa u \\ n' &= \tau u \\ u' &= \tau \ell + \kappa n \end{aligned} \tag{3.3.2}$$

olarak yazılabilir. Burada ℓ ve u vektörleri E^3 deki bir eğri için standart Frenet çatısındaki, sırasıyla, teğet ve asli normal vektörlerine benzer (Graves, 1979).

Tanım 3.3.4. $\mathbb{R}_1^3$ de α bir null eğri ve $F = (\ell, n, u)$, α eğrisi boyunca bir Cartan çatısı olsun. α eğrisi boyunca, n null vektörü hareket ederse

$$\begin{aligned} &\varphi : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_1^3 \\ &\quad (s, v) \to \varphi(s, v) = \alpha(s) + v\, n(s)\,,\ s \in I\,,\ v \in J \end{aligned}$$

parametrizasyonu ile elde edilen regle yüzeye genel olarak $\kappa(s) \neq 0$ ve $\tau = sabit$ olduğunda B-scroll adı verilir ve M ile gösterilir (Balgetir, Bektaş ve Ergüt, 2005).

Teorem 3.3.1. $\mathbb{R}_1^3$, 3-boyutlu Minkowski uzayında $H^2 = K$ olan bütün Lorentzian yüzeyler null scrolldur ve aşağıdaki gibi üç durumda sınıflandırılabilirler.

i) Lorentz düzlemi ya da küre,

ii) B-scroll,

iii) $\tau \neq$ sabit şekil operatörünün minimal polinomu $(x - \tau)^2$ olan bir null scrolldur

(Fenghui ve Zhong, 2007).

Teorem 3.3.2. M , $\mathbb{R}_1^3$ de bir B-scroll olsun. O halde doğrultman boyunca teğet düzlemlerinin çakışık olabilmesi gerek ve yeter şart $c = 0$ olmasıdır (Balgetir, Bektaş ve Ergüt, 2005).

Teorem 3.3.3 $\mathbb{R}_1^3$ de M , B-scrollunun açılabilir olması için gerek ve yeter şart $c = 0$ olmasıdır (Balgetir, Bektaş ve Ergüt, 2005).

Teorem 3.3.4. $\mathbb{R}_1^3$ de açılamaz bir B-scroll M olsun. O zaman B-scrollun dayanak eğrisi striksiyon eğrisidir (Balgetir, Bektaş ve Ergüt, 2005).

Sonuç 3.3.1. $\mathbb{R}_1^3$ de M açılamaz bir B-scroll olsun. O zaman striksiyon eğrisi nulldur (Balgetir, Bektaş ve Ergüt, 2005).

Tanım 3.3.5. $\mathbb{R}_1^3$ de bir B-scrollun dayanak eğrisi ile merkez noktası arasındaki uzaklığın sıfır olması durumunda n' ve u lineer bağımlı olur. Yani d bir reel skalar olmak üzere

$$d\, n' = \ell \wedge n.$$

dir. O halde

$$d = \frac{\langle \ell \wedge n, n' \rangle}{\|n'\|^2} = -\frac{\det(\ell, n, n')}{\|n'\|^2} = \frac{1}{\tau}. \tag{3.3.3}$$

şeklinde tanımlanan d ye M B-scrollunun dağılma parametresi denir. Burada $\langle n', n' \rangle \neq 0$ dır (Balgetir, Bektaş ve Ergüt, 2005).

BÖLÜM 4. PARALEL P-EQUIDISTANT REGLE YÜZEYLER

Bu bölümde E^3 ve $\mathbb{R}_1^3$ de paralel p-equidistant regle yüzeyler tanıtılacaktır.

4.1. E^3 Öklid Uzayında Paralel P-equidistant Regle Yüzeyler

E^3, 3-boyutlu Öklid uzayında yay parametresi ile verilen diferensiyellenebilir bir eğri α ve bu eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı da $\{V_1, V_2, V_3\}$ olsun. Bu takdirde Frenet vektörleri için,

$$V_1 = \alpha' \quad , \quad V_2 = \frac{\alpha''}{\|\alpha''\|} \quad , \quad V_3 = V_1 \wedge V_2$$

yazılabilir. Burada V_1 vektörüne üretici vektör (doğrultman vektörü), V_2 ye merkezi normal vektör ve V_3 Frenet vektörüne de merkezi teğet vektör adı verilir.

Böylece E^3 de dayanak eğrisi $\alpha = \alpha(s)$ ve doğrultmanı $V_1 = V_1(s)$ olan bir M regle yüzeyi, parametrik olarak

$$M = \left\{ \varphi(s,v) \middle| \varphi(s,v) = \alpha(s) + v\, V_1(s),\ (s,v) \in I \times \mathbb{R} \right\}$$

şeklinde verilir. Eğer M nin striksiyon eğrisi γ ve dağılma parametresi de d ile gösterilirse, sırasıyla,

$$\gamma(s) = \alpha(s) - \frac{\langle \alpha'(s), V_1'(s) \rangle}{\|V_1'(s)\|^2} V_1(s) \quad , \quad V_1'(s) \neq 0$$

ve

$$d = \frac{\det(\alpha', V_1, V_1')}{\|V_1'\|^2}$$

dir. Eğer M regle yüzeyi için $d = 0$ ise M ye tors ve $d \neq 0$ ise M ye açılamaz regle yüzey denir (Valeontis, 1986).

Eğer M regle yüzeyinin γ striksiyon çizgisi dayanak eğrisi ve parametresi de yay parametresi olarak alınırsa, M nin parametrik ifadesi,

$$\varphi(s,v)=\gamma(s)+vV_1(s)$$

şeklindedir.

Tanım 4.1.1. E^3 de M regle yüzeyinin dayanak eğrisinin birinci eğriliğine M nin eğriliği, ikinci eğriliğine ise torsiyonu denir (Valeontis, 1986).

Tanım 4.1.2. E^3 de M regle yüzeyinin eğriliği κ ve torsiyonu τ olmak üzere Frenet formülleri,

$$\begin{aligned} V_1' &= \kappa V_2 \\ V_2' &= -\kappa V_1 + \tau V_3 \\ V_3' &= -\tau V_2 \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. M regle yüzeyinin striksiyon çizgisinin T birim teğet vektörünün V_1 ile yaptığı açı σ olmak üzere, T vektörü $\{V_1,V_2,V_3\}$ Frenet 3-ayaklısı cinsinden,

$$T=\cos\sigma V_1+\sin\sigma V_3 \quad , \quad -\frac{\pi}{2}<\sigma\leq\frac{\pi}{2}$$

şeklinde yazılabilir. Burada σ ya M nin striksiyonu, $\{\kappa,\tau,\sigma\}$ sistemine de M nin tamamlanmış invaryant sistemi denir (Valeontis, 1986).

Teorem 4.1.1. E^3 de M, γ striksiyon eğrisini dayanak eğrisi kabul eden bir regle yüzey olsun. σ striksiyon ve κ eğrilik olmak üzere M nin dağılma parametresi,

$$d=\frac{\sin\sigma}{\kappa}$$

dir (Valeontis, 1986).

Tanım 4.1.3. E^3 de bir M regle yüzeyinin striksiyon çizgisi boyunca, $Sp\{V_1,V_2\}$, $Sp\{V_2,V_3\}$, $Sp\{V_3,V_1\}$ uzaylarına karşılık gelen düzlemlere, sırasıyla, asimptotik, polar ve merkezi düzlem adı verilir (Valeontis, 1986).

Tanım 4.1.4. E^3 de iki regle yüzey M ve M^* olsun. Eğer bu regle yüzeyler için,

1) Üretici vektörler paralel, (V_1 ve V_1^* paralel)

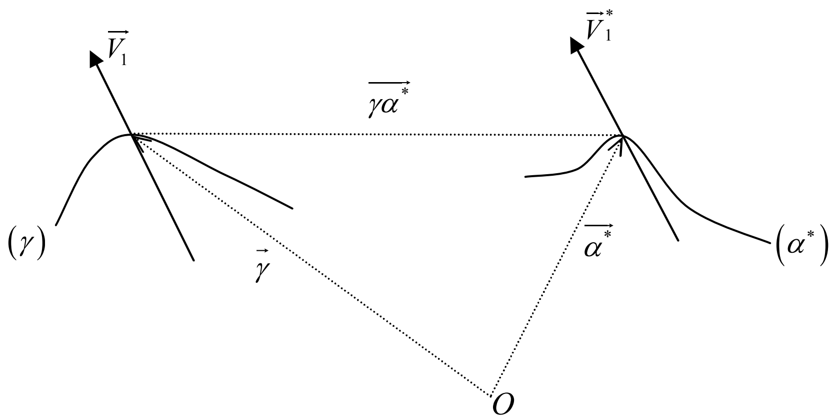
2) Uygun noktalardaki polar düzlemler arasındaki p uzaklığı sabit ise M ve M^* regle yüzey çiftine paralel p-equidistant regle yüzeyler denir.

Eğer özel olarak uygun noktalardaki polar düzlemler çakışırsa M ve M^* regle yüzey çiftine paralel p-equivalent denir. Benzer şekilde uygun noktalardaki asimptotik (merkezi) düzlemler arasındaki q uzaklığı (z uzaklığı) sabit ise, M ve M^* regle yüzey çiftine paralel q-equidistant (z-equidistant) regle yüzeyler denir (Valeontis, 1986).

Böylece M ve M^* paralel p-equidistant regle yüzeylerin parametrik ifadeleri

$$M = \left\{ \varphi(s,v) \middle| \varphi(s,v) = \alpha(s) + v\,V_1(s),\ (s,v) \in I \times \mathbb{R} \right\}$$
$$M^* = \left\{ \varphi^*(s^*,v^*) \middle| \varphi^*(s^*,v^*) = \alpha^*(s^*) + v^*\,V_1(s^*),\ (s^*,v^*) \in I \times \mathbb{R} \right\}$$

şeklinde verilebilir (Valeontis, 1986).



Şekil 4.1.1. M ve M^* paralel p-equidistant regle yüzeyleri

M ve M^* paralel p-equidistant regle yüzeylerin striksiyon eğrileri, dayanak eğrileri olarak alınsın. Ayrıca, M ve M^* regle yüzeylerinin uygun noktalarındaki merkezi düzlemler, asimptotik düzlemler ve polar düzlemler arasındaki uzaklıklar da, sırasıyla, $|z|$, $|q|$ ve $|p|$ dir.

Teorem 4.1.2. E^3 de M ve M^* paralel p-equidistant regle yüzeyler, M nin dayanak eğrisi γ striksiyon çizgisi ve M^* ın dayanak eğrisi α^* olsun. $z(s)$, $q(s)$ ve $p(s)$, $s \in I$, C^2 sınıfından fonksiyonlar ve

$$\alpha^* = \gamma + z V_2 + q V_3 + p V_1$$

olmak üzere, M^* regle yüzeyinin striksiyon çizgisi,

$$\gamma^* = \gamma + z V_2 + q V_3 - \frac{z' - q\tau}{\kappa} V_1$$

dir (Valeontis, 1986).

Sonuç 4.1.1. E^3 de M ve M^* paralel p-equidistant regle yüzeylerinin polar düzlemleri arasındaki uzaklık,

$$p = -\frac{z' - q\tau}{\kappa}$$

dır (Valeontis, 1986).

Teorem 4.1.3. E^3 de M ve M^* paralel p-equidistant regle yüzeyler, M ve M^* regle yüzeylerinin dayanak eğrilerinin parametreleri de, sırasıyla, s ve s^* olsun. M^* daki $\{V_1^*, V_2^*, V_3^*\}$ Frenet 3-ayaklısı ile M deki $\{V_1, V_2, V_3\}$ Frenet 3-ayaklısı denktir (Valeontis, 1986).

Teorem 4.1.4. E^3 de M ve M^* paralel p-equidistant regle yüzeyler, M ve M^* regle yüzeylerinin striksiyon eğrilerinin parametreleri, sırasıyla, s ve s^* olsun. M nin κ eğriliği ve τ torsiyonu ile M^* ın κ^* eğriliği ve τ^* torsiyonu arasında,

$$\kappa^* = \kappa \frac{ds}{ds^*} \qquad \text{ve} \qquad \tau^* = \tau \frac{ds}{ds^*}$$

bağıntıları vardır (Valeontis, 1986).

Tanım 4.1.5. E^3 de M regle yüzeyinin eğriliği κ, torsiyonu τ olmak üzere,

$$k_1 = \frac{\tau}{\kappa}$$

ifadesine M nin konik eğriliği adı verilir (Valeontis, 1986).

Teorem 4.1.5. E^3 de M ve M^* paralel p-equidistant regle yüzeyleri aynı konik eğriliğe sahiptir (Valeontis, 1986).

Teorem 4.1.6. E^3 de M ve M^* paralel p-equidistant regle yüzeyler, M^* ın dağılma parametresi d^* ve M nin dağılma parametresi de d olsun. Bu takdirde, aşağıdaki bağıntı vardır (Valeontis, 1986).

$$d^* = \frac{\sin\sigma + q' + z\,\tau}{\kappa} = d + \frac{q' + z\,\tau}{\kappa}.$$

Teorem 4.1.7. E^3 de M ve M^* paralel p-equidistant regle yüzeyler olsun. M ve M^* regle yüzeyleri için aşağıdaki özeliklerden iki tanesi sağlanırsa üçüncü özelik de sağlanır.

i) M nin γ striksiyon çizgisi M nin bir eğilim çizgisidir.

ii) M^* nin γ^* striksiyon çizgisi M^* ın bir eğilim çizgisidir.

iii) M ve M^* ın uygun noktalardaki asimptotik düzlemleri arasındaki q uzaklığı sabittir (Valeontis, 1986).

Teorem 4.1.8. E^3 de M ve M^* paralel p-equidistant regle yüzeyler olsun. M ve M^* regle yüzeyleri aynı dağılma parametresine sahipse, uygun striksiyon noktaları arasındaki uzaklık sabittir (Valeontis, 1986).

4.2. $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski Uzayında Timelike Paralel P_i-equidistant Regle Yüzeyler

Tanım 4.2.1. $\mathbb{R}_1^3$, 3-boyutlu Minkowski uzayında $\alpha = \alpha(s)$ diferensiyellenebilir timelike bir eğri, $\{k_1, k_2\}$, sırasıyla, birinci, ikinci eğrilikler ve $\{V_1, V_2, V_3\}$ Frenet çatısı olsun. V_1 in α eğrisi boyunca hareketiyle meydana gelen M timelike regle yüzeyi parametrik olarak

$$\varphi(s,v) = \alpha(s) + vV_1(s)$$

denklemi ile verilir. Böylece M timelike regle yüzeyinin striksiyon eğrisi boyunca $Sp\{V_1, V_2\}$, $Sp\{V_2, V_3\}$ ve $Sp\{V_3, V_1\}$ alt uzaylarına karşılık gelen düzlemler, sırasıyla, asimptotik, polar ve merkezi düzlem olarak adlandırılırlar (Kuruoğlu ve Masal, 2007).

Tanım 4.2.2. $\mathbb{R}_1^3$ de M ve M^* iki timelike regle yüzey ve polar, merkezi ve asimptotik düzlemleri arasındaki uzaklıklar, sırasıyla, p_1, p_2, p_3 olsun. Eğer

i) M ve M^* ın doğrultmanları paralel,

ii) M ve M^* ın $p_i, 1 \leq i \leq 3$ uzaklıkları sabit ise M ve M^* regle yüzey çifti timelike dayanak eğrili, timelike paralel p_i-equidistant regle yüzeyler olarak adlandırılır (Kuruoğlu ve Masal, 2007).

Teorem 4.2.1. $\mathbb{R}_1^3$ de M ve M^* timelike paralel p_i-equidistant regle yüzeylerinin striksiyon eğrileri, sırasıyla, γ ve γ^* olmak üzere bu striksiyon eğrileri arasında

$$\gamma^* = \gamma + \left(\frac{p_3 k_2 + p_2'}{-k_1} \right) V_1 + p_2 V_2 + p_3 V_3$$

bağıntısı vardır (Kuruoğlu ve Masal, 2007).

Teorem 4.2.2. $\mathbb{R}_1^3$ de M ve M^* timelike paralel p_1-equidistant regle yüzeyler olsun. M ve M^* ın polar düzlemleri arasındaki

$$p_1 = \frac{p_3 k_2 + p_2'}{-k_1}$$

uzaklığı sabittir (Kuruoğlu ve Masal, 2007).

Teorem 4.2.3. $\mathbb{R}_1^3$ de M ve M^* timelike paralel p_1-equidistant regle yüzeylerinin karşılıklı noktalarındaki Frenet çatıları $\frac{ds^*}{ds} > 0$ için denktir (Kuruoğlu ve Masal, 2007).

Sonuç 4.2.1. M ve M^* timelike paralel p_i-equidistant regle yüzeyler olsun.

i) M ve M^* ın dayanak eğrilerinin, sırasıyla, k_1, k_1^* birinci eğrilikleri ve k_2, k_2^* ikinci eğrilikleri arasında

$$k_i^* = k_i \frac{ds}{ds^*}, \quad 1 \leq i \leq 2 .$$

şeklinde bir bağıntı vardır.

ii) M^* ın dayanak eğrisi eğilim eğrisi ise, M nin dayanak eğrisi de eğilim eğrisidir.

iii) M ve M^* ın dayanak eğrileri striksiyon eğrileridir (Kuruoğlu ve Masal, 2007).

Teorem 4.2.4. $\mathbb{R}_1^3$ de M ve M^* timelike paralel p_i-equidistant regle yüzeyler olsun. M ve M^* regle yüzeylerinin dağılma parametreleri arasında

$$d_{V_i^*} = d_{V_i} \frac{ds^*}{ds} \quad , \quad 1 \leq i \leq 3.$$

bağıntısı vardır (Kuruoğlu ve Masal, 2007).

Teorem 4.2.5. $\mathbb{R}_1^3$ de M ve M^* timelike paralel p_i-equidistant regle yüzeyler olsun. M ve M^* ın şekil operatörleri, sırasıyla, S ve S^* olmak üzere aralarında

$$S^* = S$$

bağıntısı vardır (Kuruoğlu ve Masal, 2007).

Sonuç 4.2.2. M ve M^* timelike paralel p_i-equidistant regle yüzeyler olsun.

i) M ve M^* ın Gauss eğrilikleri, sırasıyla, K ve K^* ise,

$$K^* = K = 0$$

dır.

ii) M ve M^* ın ortalama eğrilikleri, sırasıyla, H ve H^* ise,

$$H^* = H = \begin{cases} \dfrac{k_2}{2vk_1}, \; v > 0 \text{ için} \\ -\dfrac{k_2}{2vk_1}, \; v < 0 \text{ için} \end{cases}$$

dir.

iii) M nin eğrilik ekseni ise M^* ın da eğrilik eksenidir. (Tersi de doğrudur.)

iv) M nin asimptotik eğrisi, M^* ın da asimptotik eğrisidir. (Tersi de doğrudur) (Kuruoğlu ve Masal, 2007).

4.3. $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski Uzayında Spacelike Paralel P_i-equidistant Regle Yüzeyler

Tanım 4.3.1. M regle yüzeyinin üreteci V_1, M^* regle yüzeyinin üreteci V_1^* ve M ile M^* $\mathbb{R}_1^3$ de iki spacelike regle yüzey olsun. Polar, merkezi ve asimptotik düzlemleri arasındaki uzaklıklar, sırasıyla, p_1, p_2, p_3 olsun. Eğer

i) M ve M^* ın üretici vektörleri paralel,

ii) $1 \le i \le 3$ için p_i uzaklıkları sabit ise M ve M^* regle yüzey çifti, $\mathbb{R}_1^3$ de spacelike paralel p_i-equidistant regle yüzeyler olarak adlandırılırlar. Eğer $p_i = 0$ ise M ve M^* regle yüzey çifti spacelike p_i-equivalent regle yüzeyler olarak adlandırılırlar (Masal ve Kuruoğlu, 2005).

Teorem 4.3.1. $\mathbb{R}_1^3$ de M ve M^* spacelike paralel regle yüzeyler olsun. M nin striksiyon eğrisi γ ve M^* ın striksiyon eğrisi γ^* olmak üzere

$$\gamma^* = \gamma + \left(\frac{p_3 k_2 + p_2'}{-k_1} \right) V_1 + p_2 V_2 + p_3 V_3$$

şeklinde bir bağıntı vardır (Masal ve Kuruoğlu, 2005).

Teorem 4.3.2. $\mathbb{R}_1^3$ de M ve M^* spacelike paralel p_i equidistant regle yüzeyler olsunlar.

i) M ve M^* daki, sırasıyla, $\{V_1, V_2, V_3\}$ ve $\{V_1^*, V_2^*, V_3^*\}$ Frenet çatıları $\frac{ds^*}{ds} > 0$ için karşılıklı noktalarda denktir.

ii) M ve M^* ın dayanak eğrilerinin eğrilikleri, sırasıyla, k_1, k_1^* ve torsiyonları da k_2, k_2^* ise,

$$k_i^* = k_i \frac{ds}{ds^*}, \quad 1 \le i \le 2.$$

dir.

iii) Spacelike paralel p_1-equidistant regle yüzeylerin (ya da spacelike paralel p_1-equivalent regle yüzeylerin) polar düzlemleri arasındaki uzaklık

$$p_1 = \frac{p_3 k_2 + p_2'}{-k_1} = \text{sabit} \quad \left(\text{ya da } p_1 = \frac{p_3 k_2 + p_2'}{-k_1} = 0 \right)$$

dır.

iv) M ve M^* ın dayanak eğrileri striksiyon eğrileridir.

v) M nin striksiyon eğrisi eğilim çizgisi ise, M^* ın da striksiyon eğrisi eğilim çizgisidir. (Tersi de doğrudur) (Masal ve Kuruoğlu, 2005).

Teorem 4.3.3. $\mathbb{R}_1^3$ de M ve M^* spacelike paralel p_i-equidistant regle yüzeylerinin karşılıklı noktalarındaki dağılma parametreleri, sırasıyla, d_{V_i} ve $d_{V_i^*}$ ise,

$$d_{V_i^*} = d_{V_i} \frac{ds^*}{ds}, \quad 1 \le i \le 3.$$

dir (Masal ve Kuruoğlu, 2005).

Teorem 4.3.4. $\mathbb{R}_1^3$ de M ve M^* spacelike paralel p_i-equidistant regle yüzeyler olsunlar.

i) M ve M^* spacelike paralel p_i-equidistant regle yüzeylerinin şekil operatörlerinin matrisleri, sırasıyla, S ve S^* ise $S = S^*$ dır.

ii) M nin Gauss eğriliği K, M^* ın Gauss eğriliği K^* ise,

$$K^* = K = -\det S = 0.$$

dır.

iii) M nin ortalama eğriliği H, M^* ın ortalama eğriliği H^* ise,

$$H^* = H = \frac{\dot{I}zS}{\text{boyut}M} = \begin{cases} -\dfrac{k_2}{2vk_1}, v > 0 \text{ için} \\ \dfrac{k_2}{2vk_1}, v < 0 \text{ için} \end{cases}.$$

dır.

iv) M deki geodezik eğriler, M^* da da geodezik eğrilerdir.

v) M deki asli eğrilik doğrultusu M^* da da asli eğrilik doğrultusudur.

vi) M deki asimptotik eğri M^* da da asimptotik eğridir.

(Son üç durumun tersleri de doğrudur) (Masal ve Kuruoğlu, 2005).

Teorem 4.3.5. $\mathbb{R}_1^3$ de M ve M^* spacelike paralel p_i-equidistant regle yüzeyler olsunlar.

i) M ve M^* ın ikinci temel formları, sırasıyla, II ve II^* ise, $\forall V,W \in \chi(M)$ ve $\forall V,W \in \chi(M^*)$ için

$$II^*(V,W) = II(V,W)$$

dir.

ii) M deki eşlenik vektörler aynı zamanda M^* da da eşlenik vektörlerdir.

iii) M deki asimptotik doğrultular M^* da da asimptotik doğrultulardır.

Son iki durumun tersleri de doğrudur (Masal ve Kuruoğlu, 2005).

Teorem 4.3.6. $\mathbb{R}_1^3$ de M ve M^* spacelike paralel p_i-equidistant regle yüzeyler olsunlar.

i) M ve M^* ın q-yuncu temel formları, sırasıyla, I^q ve I^{*q} ise, $\forall X,Y \in \chi(M)$ ve $\forall X^*,Y^* \in \chi(M^*)$ için

$$I^{*q}(X^*,Y^*) = I^q(X,Y), \quad 1 \le q \le 3$$

dır.

ii) M ve M^* ın şekil operatörlerinin karakteristik polinomları, sırasıyla, $P_S(\lambda)$ ve $P_{S^*}(\lambda)$ ise,

$$P_{S^*}(\lambda) = P_S(\lambda)$$

dır (Masal ve Kuruoğlu, 2005).

BÖLÜM 5. $\mathbb{R}_1^3$, 3-BOYUTLU MİNKOWSKİ UZAYINDA NULL PARALEL P-EQUİDİSTANT B-SCROLLAR

Bu bölüm, çalışmamızın orjinal ksmını oluşturmaktadır. Bu kısımda ilk olarak $\mathbb{R}_1^3$, 3-boyutlu Minkowski uzayında null paralel p-equidistant B-scrollar tanımlanarak, null paralel p-equidistant B-scrolların Cartan çatılarının denkliği, şekil operatörlerine karşılık gelen matrisler, Gauss ve ortalama eğrilikleri ile birinci, ikinci ve üçüncü temel formlar ile ilgili bağıntılar elde edildi.
Daha sonra, null paralel p-equidistant B-scrolların asli eğrilikleri, asli eğrilik doğrultuları ve eşlenik tanjant vektörleri ve konneksiyonları arasındaki ilişki verildi. Son olarak $\mathbb{R}_1^3$ de açılamaz null paralel p-equidistant B-scrollarının dağılma parametreleri, ikinci Gauss eğrilikleri, ikinci ortalama eğrilikleri ile ilgili bağıntılar ile birlikte bir örnek verildi.

5.1. Null Paralel P-equidistant B-Scrollar

$\mathbb{R}_1^3$, 3-boyutlu Minkowski uzayında bir $\alpha = \alpha(s)$ null eğrisinin (3.2.2) denklemleri ile verilen Cartan çatısı $\{\ell, n, u\}$ olsun. Böylece n nin ürettiği B-scroll parametrik olarak

$$M = \{\varphi(s,v) | \varphi(s,v) = \alpha(s) + vn(s)\} \qquad (5.1.1)$$

ile verilir. Burada $\alpha(s)$ null eğrisi ve $n(s)$ null vektörü, sırasıyla, M B-scrollunun dayanak eğrisi ve doğrultman vektörüdür. (5.1.1) denklemi göz önüne alınırsa

$$\varphi_s = \ell(s) + v\tau u(s), \quad \varphi_v = n(s) \qquad (5.1.2)$$

elde edilir. Böylece

$$\ell \wedge n = u \quad , \quad n \wedge u = -n \quad , \quad \ell \wedge u = \ell \qquad (5.1.3)$$

olmak üzere M, B-scrollunun birim normali

$$N_0 = \varphi_s \wedge \varphi_v = u(s) + v\tau n(s) \tag{5.1.4}$$

olur. Son denklem göz önüne alınırsa,

$$\langle N_0, N_0 \rangle = \langle u, u \rangle + v^2\tau^2 \langle n, n \rangle = 1$$

elde edilir. Bu, ifade eder ki N_0 birim normal vektörü bir spacelike vektördür. O halde M bir timelike yüzeydir. $F = (\ell, n, u)$ Cartan çatılı α null eğrisinin Frenet formülleri

$$\begin{aligned} \ell' &= \kappa u \\ n' &= \tau u \\ u' &= \tau \ell + \kappa n \end{aligned}$$

dir. $\mathbb{R}_1^3$, 3-boyutlu Minkowski uzayında, M, B-scrollunun α dayanak eğrisi boyunca $Sp\{\ell, n\}$, $Sp\{n, u\}$ ve $Sp\{u, \ell\}$ alt uzaylarına karşılık gelen düzlemlere, sırasıyla, merkezi düzlem, polar düzlem ve asimptotik düzlem adı verilir. Eğer (2.2.1) denklemi ile verilmiş olan tablo göz önünde bulundurulursa açıktır ki buradaki merkezi düzlem timelike, polar ve asimptotik düzlemler ise null düzlemlerdir.

$\mathbb{R}_1^3$ Minkowski uzayında $\left(\ell^*(s^*), n^*(s^*), u^*(s^*)\right)$ Cartan çatılı bir diğer null eğri α^* olsun. Burada;

$$\begin{aligned} &\ell^*(s^*) = \frac{d\alpha^*}{ds^*}, \qquad g(n^*, n^*) = g(\ell^*, \ell^*) = 0, \\ &g(\ell^*, u^*) = g(n^*, u^*) = 0, \quad g(\ell^*, n^*) = -1, \quad g(u^*, u^*) = 1 \end{aligned} \tag{5.1.5}$$

dır. Böylece $F^* = (\ell^*, n^*, u^*)$ Cartan çatısına göre α^* null eğrisinin Frenet formülleri,

$$\begin{aligned} \ell^{*\prime} &= \kappa^* u^* \\ n^{*\prime} &= \tau^* u^* \\ u^{*\prime} &= \tau^* \ell^* + \kappa^* n^* \end{aligned} \tag{5.1.6}$$

şeklindedir. Burada “ ' ” s^* parametresine göre diferensiyeli gösterir.

O halde, M^* B-scrollu parametrik olarak

$$M^* = \left\{ \varphi^*\left(s^*, v^*\right) \middle| \varphi^*\left(s^*, v^*\right) = \alpha^*\left(s^*\right) + v^* n^*\left(s^*\right) \right\} \tag{5.1.7}$$

ile verilir.

Tanım 5.1.1. $\mathbb{R}_1^3$, 3-boyutlu Minkowski uzayında M ve M^***,** B-scrollar olsunlar.

i) M ve M^*ın üretici vektörleri paralel

ii) M ve M^* ın asimptotik düzlemleri arasındaki p-uzaklığı sabit,

şartları sağlanıyor ise M ve M^* yüzeylerine $\mathbb{R}_1^3$ de null paralel p-equidistant B-scrollar denir. (Burada $\kappa^*\left(s^*\right) \neq 0$, $\tau^*\left(s^*\right)$ sabit, $\kappa(s) \neq 0$, $\tau(s)$ sabittir ve M ve M^*ın dayanak eğrileri aynı zamanda striksiyon eğrileridir.)

Teorem 5.1.1. $\mathbb{R}_1^3$, 3-boyutlu Minkowski uzayında M ve M^* null paralel p-equidistant B-scrollarının $\alpha(s)$ ve $\alpha^*\left(s^*\right)$ dayanak eğrilerinin $\{\ell, n, u\}$ ve $\left\{\ell^*, n^*, u^*\right\}$ Cartan çatılarının birbirine denk olması ($\ell = \ell^*$, $n = n^*$, $u = u^*$) için gerek ve yeter şart $\kappa^* = \kappa \dfrac{ds}{ds^*}$, $\tau^* = \tau \dfrac{ds}{ds^*}$ olmasıdır.

İspat. Kabul edelim ki $\ell = \ell^*, n = n^*, u = u^*$ olsun. O halde (5.1.6) eşitliklerinin birincisinden,

$$\left\langle \frac{d\ell^*}{ds^*}, u^* \right\rangle = \kappa^*$$

yazılabilir. Buradan son denklem ve hipotezden birinci eğrilikler arasındaki ilişki,

$$\kappa \frac{ds}{ds^*} = \kappa^*$$

olarak elde edilir. Yine (5.1.6) eşitliklerinin ikincisinden,

$$\left\langle \frac{dn^*}{ds^*}, u^* \right\rangle = \tau^*$$

bulunur. Bu son eşitlik ve kabul yardımıyla da ikinci eğrilikler arasındaki ilişki de

$$\tau \frac{ds}{ds^*} = \tau^*$$

olarak bulunur.

Tersine kabul edelim ki $\kappa^* = \kappa \frac{ds}{ds^*}$, $\tau^* = \tau \frac{ds}{ds^*}$ ve $n = n^*$ olsun. Böylece M ve M^* null paralel p-equidistant B-scroll olduğundan

$$\frac{dn}{ds} = \frac{dn^*}{ds^*} . \frac{ds^*}{ds} \tag{5.1.8}$$

dır. (5.1.6) ve (3.3.2) eşitlikleri ve kabulden dolayı

$$\tau u = \tau \frac{ds}{ds^*} u^* \frac{ds^*}{ds}$$

$$u = u^*$$

olur. Ayrıca

$$\frac{du}{ds} = \frac{du^*}{ds^*} . \frac{ds^*}{ds}$$

eşitliği göz önünde bulundurularak, (5.1.6) ve (3.3.2) denklemleri son denklemde yerlerine yazılır ve kabul göz önüne alınırsa

$$\tau \ell + \kappa n = \left(\tau \frac{ds}{ds^*} \ell^* + \kappa \frac{ds}{ds^*} n \right) \frac{ds^*}{ds}$$

$$\tau \ell = \tau \ell^*$$

$$\ell = \ell^*$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

5.2. $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski Uzayında Null Paralel p-Equidistant B-Scrolların Şekil Operatörlerinin Matrislerinin Hesabı

$\mathbb{R}_1^3$, 3-boyutlu Minkowski uzayında M ve M^* null paralel p-equidistant B-scrolları, sırasıyla,

$$M = \left\{ \varphi(s,v) \middle| \varphi(s,v) = \alpha(s) + v\, n(s) \right\}$$

$$M^* = \left\{ \varphi^*\left(s^*, v^*\right) \middle| \varphi^*\left(s^*, v^*\right) = \alpha^*\left(s^*\right) + v^*\, n^*\left(s^*\right) \right\}$$

parametrik ifadeleri ile verilsin. Böylece (3.3.2), (5.1.1) eşitlikleri yardımıyla

$$\begin{aligned} \varphi_s &= \ell(s) + v\tau u(s), \\ \varphi_v &= n(s), \end{aligned} \tag{5.2.1}$$

bulunur.

$\chi(M)$ in $\{\varphi_s, \varphi_v\}$ bazı için M, B-scrollunun birim normal vektör alanı N_0 olmak üzere (5.2.1) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} N_0 &= \frac{\varphi_s \wedge \varphi_v}{\|\varphi_s \wedge \varphi_v\|} \\ &= \frac{\left(\ell(s) + v\tau u(s)\right) \wedge n(s)}{\left\|\left(\ell(s) + v\tau u(s)\right) \wedge n(s)\right\|} = u(s) + v\tau n(s) \end{aligned}$$

dır.

Teorem 5.2.1. $\mathbb{R}_1^3$ de M ve M^* null paralel p-equidistant B-scrollarının şekil operatörleri, sırasıyla, S ve S^* olmak üzere S ve S^* arasında

$$S^* = S\left(\frac{ds}{ds^*}\right) \tag{5.2.2}$$

bağıntısı vardır.

İspat. Eğer (2.2.2), (3.3.2), (5.1.2), ve (5.1.4) denklemleri göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} S(\varphi_s) &= -D_{\varphi_s} N_0 = -\frac{dN_0}{ds} \\ &= -\tau\left(\ell(s) + v\tau^2 u(s)\right) - \kappa(s) n(s) \\ &= -\tau\varphi_s - \kappa(s)\varphi_v \end{aligned} \tag{5.2.3}$$

ve

$$\begin{aligned} S(\varphi_v) &= -D_{\varphi_v} N_0 = -\frac{dN_0}{dv} \\ &= -\tau n(s) \\ &= -\tau\varphi_v \end{aligned} \tag{5.2.4}$$

bağıntıları elde edilir. Böylece M nin şekil operatörüne karşılık gelen matris S olmak üzere,

$$\begin{bmatrix} S(\varphi_v) \\ S(\varphi_s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\tau & 0 \\ -\kappa(s) & -\tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_v \\ \varphi_s \end{bmatrix}$$

dır. Buradan,

$$S=\begin{bmatrix} -\tau & 0 \\ -\kappa(s) & -\tau \end{bmatrix} \qquad (5.2.5)$$

elde edilir. Aynı şekilde M^*, B-scrollunun S^* şekil operatörüne karşılık gelen matrisi hesaplayalım:

(5.1.6), (5.1.7) eşitlikleri yardımıyla

$$\begin{aligned} \varphi^*_{s^*} &= \ell^*\left(s^*\right)+v^*\,\tau^*\,u^*\left(s^*\right) \\ \varphi^*_{v^*} &= n^*\left(s^*\right) \end{aligned} \qquad (5.2.6)$$

dır. $\chi\left(M^*\right)$ ın $\left\{\varphi^*_{s^*},\varphi^*_{v^*}\right\}$ bazı için M^*, B-scrollunun birim normal vektör alanı N^*_o olmak üzere (5.2.6) denkleminden

$$\begin{aligned} N^*_o &= \frac{\varphi^*_{s^*}\wedge\varphi^*_{v^*}}{\left\|\varphi^*_{s^*}\wedge\varphi^*_{v^*}\right\|} \\ &= \frac{\left(\ell^*\left(s^*\right)+v^*\,\tau^*\,u^*\left(s^*\right)\right)\wedge n^*\left(s^*\right)}{\left\|\left(\ell^*\left(s^*\right)+v^*\,\tau^*\,u^*\left(s^*\right)\right)\wedge n^*\left(s^*\right)\right\|} = u^*\left(s^*\right)+v^*\,\tau^*\,n^*\left(s^*\right) \end{aligned} \qquad (5.2.7)$$

elde edilir. O halde (2.2.2), (5.1.6), (5.2.6) ve (5.2.7) bağıntılarından

$$\begin{aligned} S^*\left(\varphi^*_{s^*}\right) &= -D_{\varphi^*_{s^*}} N^*_0 = -\frac{dN^*_0}{ds^*} \\ &= -\tau^*\left(\ell^*\left(s^*\right)+v^*\,\tau^{*2}\,u^*\left(s^*\right)\right)-\kappa^*\left(s^*\right)n^*\left(s^*\right) \\ &= -\tau^*\,\varphi^*_{s^*}-\kappa^*\left(s^*\right)\varphi^*_{v^*} \end{aligned} \qquad (5.2.8)$$

ve

$$\begin{aligned} S^*\left(\varphi^*_{v^*}\right) &= -D_{\varphi^*_{v^*}} N^*_0 = -\frac{dN^*_0}{dv^*} \\ &= -\tau^*\,n^*\left(s^*\right) \\ &= -\tau^*\,\varphi^*_{v^*} \end{aligned} \qquad (5.2.9)$$

bulunur. Böylece M^* ın şekil operatörüne karşılık gelen S^* matrisi

$$S^*=\begin{bmatrix} -\tau^* & 0 \\ -\kappa^*\left(s^*\right) & -\tau^* \end{bmatrix} \qquad (5.2.10)$$

olarak elde edilir. O halde (5.2.5), (5.2.10) eşitlikleri ve Teorem 5.1.1 birlikte göz önüne alınırsa, S ve S^* matrisleri arasında,

$$S^* = \begin{bmatrix} -\tau^* & 0 \\ -\kappa^*\left(s^*\right) & -\tau^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\tau \dfrac{ds}{ds^*} & 0 \\ -\kappa \dfrac{ds}{ds^*} & -\tau \dfrac{ds}{ds^*} \end{bmatrix} = S\left(\frac{ds}{ds^*}\right)$$

bağıntısı elde edilir. Bu da ispatı tamamlar. ■

5.3. Temel Formlar ve Şekil Operatörlerinin Cebirsel Değişmezleri

Teorem 5.3.1. $\mathbb{R}_1^3$, de M ve M^* null paralel p-equidistant B-scrollarının Gauss eğrilikleri, sırasıyla K ve K^*, ortalama eğrilikleri de H ve H^* olsunlar. Bu takdirde Gauss ve ortalama eğrilikleri arasında, sırasıyla,

$$K^* = K\left(\frac{ds}{ds^*}\right)^2 \tag{5.3.1}$$

ve

$$H^* = H\left(\frac{ds}{ds^*}\right) \tag{5.3.2}$$

bağıntıları vardır.

İspat. $\mathbb{R}_1^3$, de M ve M^* null paralel p-equidistant B-scrollarının, sırasıyla, K ve K^*, H ve H^*, Gauss ve ortalama eğrilikleri olsunlar. Bu durumda, (2.2.3), (5.2.5), ve (5.2.10) bağıntılarından

$$K = \det S = \tau^2 \tag{5.3.3}$$

ve

$$K^* = \det S^* = \tau^{*2} \tag{5.3.4}$$

bulunur. Aynı zamanda bu eşitliği $I.$ temel formun katsayıları E, F, G olmak üzere,

$$K = \frac{1}{\left(EG - F^2\right)^2}\left\{\begin{vmatrix} -\frac{1}{2}E_{vv} + F_{sv} - \frac{1}{2}G_{ss} & \frac{1}{2}E_s & -\frac{1}{2}E_v + F_s \\ F_v - \frac{1}{2}G_s & E & F \\ \frac{1}{2}G_v & F & G \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_s \\ \frac{1}{2}E_v & E & F \\ \frac{1}{2}G_s & F & G \end{vmatrix}\right\}$$

şeklindeki Brioschi's formülünden de elde edebiliriz. Yani

$$
\begin{array}{llll}
E=\langle \varphi_s,\varphi_s\rangle = v^2\,\tau^2 & , \; E_v = 2\,v\,\tau^2 & , \; E_s = 0 & , \; E_{vv} = 2\,\tau^2 \\
F=\langle \varphi_s,\varphi_v\rangle = -1 & , \; F_s = 0 & , \; F_v = 0 & , \; F_{sv} = 0 \\
G=\langle \varphi_v,\varphi_v\rangle = 0 & , \; G_s = 0 & , \; G_v = 0 & , \; G_{ss} = 0
\end{array}
$$

eşitlikleri Brioschi's formülünde kullanılırsa,

$$
K=\left\{\begin{vmatrix} -\tau^2 & 0 & -v\,\tau^2 \\ 0 & v^2\,\tau^2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & v\,\tau^2 & 0 \\ v\,\tau^2 & v^2\,\tau^2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}\right\}
$$

$$
K=\tau^2
$$

bulunur. Benzer işlemler M^*, B-scrollu için yapılırsa $K^*=\tau^{*2}$ elde edilir.

Eğer (2.2.9), (5.2.5) ve (5.2.10) bağıntıları göz önüne alınırsa

$$
H=\frac{\dot{I}zS}{\text{boyut}M}=\frac{-2\tau}{2}=-\tau \tag{5.3.5}
$$

ve

$$
H^*=\frac{\dot{I}zS^*}{\text{boyut}M^*}=\frac{-2\tau^*}{2}=-\tau^* \tag{5.3.6}
$$

bulunur. (5.3.3), (5.3.4), (5.3.5), (5.3.6) denklemleri ve Teorem 5.1.1 göz önüne alınırsa, $K^*=K\left(\dfrac{ds}{ds^*}\right)^2$ ve $H^*=H\left(\dfrac{ds}{ds^*}\right)$ elde edilir. ■

Şimdi $\chi(M)$ deki bir Z vektör alanının $\chi(M^*)$ da olması için sağlaması gereken şartları araştıralım:

Teorem 5.3.2. $\mathbb{R}_1^3$ de M ve M^* null paralel p-equidistant B-scrollar olsunlar. M nin vektör alanlarının cümlesi $\chi(M)$ ve M^* ın vektör alanlarının cümlesi $\chi(M^*)$ olmak üzere $\forall Z=a\varphi_s+b\varphi_v\in\chi(M)$ ve $\forall Z=a^*\,\varphi^*_{s^*}+b^*\,\varphi^*_{v^*}\in\chi(M^*)$ ise

$$
a^*=a-z \quad , \quad b^*=b-p \quad , \quad v^*=\frac{av\tau-q}{(a-z)\tau}\left(\frac{ds^*}{ds}\right) \tag{5.3.7}
$$

dır.

İspat. M ve M^* null paralel p-equidistant B-scrollarının vektör alanları cümleleri, sırasıyla, $\chi(M)$ ve $\chi(M^*)$ olmak üzere

$$\chi(M) = Sp\{\varphi_s, \varphi_v\}$$
$$\chi(M^*) = Sp\{\varphi^*_{s^*}, \varphi^*_{v^*}\}$$

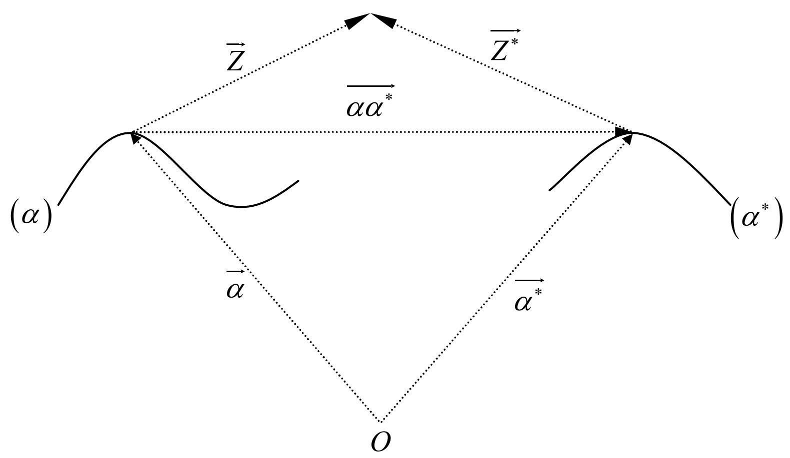
dir. Kabul edelim ki $Z \in \chi(M)$ olsun. Bu durumda $a, b \in \mathbb{R}$ skalarları için,

$$Z = a\,\varphi_s + b\,\varphi_v = a\,\ell(s) + b\,n(s) + a\,v\,\tau\,u(s)$$

yazılabilir. Şimdi de kabul edelim ki Z vektör alanı $\chi(M^*)$ ın da bir vektör alanı olsun. Bu takdirde Z vektör alanının $\{\varphi^*_{s^*}, \varphi^*_{v^*}\}$ bazına göre ifadesi $a^*, b^* \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$Z^* = a^*\,\varphi^*_{s^*} + b^*\,\varphi^*_{v^*} = a^*\,\ell^*(s^*) + b^*\,n^*(s^*) + a^*\,v^*\,\tau^*\,u^*(s^*)$$

şeklinde yazılsın.



Şekil 5.3.1. Null paralel p-equidistant B-scrolların Z ve Z^* vektör alanları

O halde Şekil 5.3.1 den

$$Z^* = Z - \alpha\alpha^*$$

olacağından bu ifadede $\alpha\alpha^* = z\,\ell + p\,n + q\,u$ yerine yazılırsa,

$$Z^* = Z - z\,\ell - p\,n - q\,u$$

$$a^*\,\ell^*(s^*) + b^*\,n^*(s^*) + a^*\,v^*\,\tau^*\,u^*(s^*) = a\,\ell(s) + b\,n(s) + a\,v\,\tau\,u(s) - z\,\ell - p\,n - q\,u$$

$$a^*\,\ell^*(s^*) + b^*\,n^*(s^*) + a^*\,v^*\,\tau^*\,u^*(s^*) = (a - z)\,\ell(s) + (b - p)\,n(s) + (a\,v\,\tau - q)\,u(s)$$

elde edilir. Böylece Teorem 5.1.1 den,

$$a^* = a - z \quad , \quad b^* = b - p \quad , \quad v^* = \frac{av\tau - q}{(a-z)\tau}\left(\frac{ds^*}{ds}\right)$$

bulunur. ■

Teorem 5.3.3. $\mathbb{R}_1^3$ de M ve M^* null paralel p-equidistant B-scrollar olsunlar. M ve M^* ın temel formları arasında,

$$I^{*q} = \left(\frac{ds}{ds^*}\right)^{q-1} I^q \quad , \quad 1 \le q \le 3 \tag{5.3.8}$$

bağıntısı vardır.

İspat. $\forall X, Y \in \chi(M)$ için M, B-scrollunun birinci, ikinci ve üçüncü temel formları I, II, III olmak üzere;

$$\begin{aligned} I(X,Y) &= \langle X, Y \rangle \\ II(X,Y) &= \langle S(X), Y \rangle \\ III(X,Y) &= \langle S^2(X), Y \rangle \end{aligned} \tag{5.3.9}$$

dır. Benzer şekilde, M^* B-scrollunun birinci, ikinci ve üçüncü temel formları, sırasıyla, I^*, II^*, III^* ile gösterilsin. Böylece

$$I^*(X,Y) = \langle X, Y \rangle$$

olduğundan (5.3.9) denkleminden,

$$I^*(X,Y) = I(X,Y)$$

dır. Benzer şekilde

$$II^*(X,Y) = \langle S^*(X), Y \rangle$$

olduğundan (5.2.2) denkleminden,

$$II^*(X,Y) = \left(\frac{ds}{ds^*}\right)\langle S(X), Y \rangle$$

dır. O halde bu son denklem ve (5.3.9) denkleminden,

$$II^*(X,Y) = \left(\frac{ds}{ds^*}\right) II(X,Y)$$

elde edilir. Son olarak

$$III^*(X,Y) = \langle S^{*2}(X), Y \rangle$$

dir. Böylece (5.2.2) ve son denklemden,

$$III^*(X,Y)=\left(\frac{ds}{ds^*}\right)^2\left\langle S^2(X),Y\right\rangle \tag{5.3.10}$$

bulunur. Böylece (5.3.9) ve (5.3.10) denklemlerinden

$$III^*(X,Y)=\left(\frac{ds}{ds^*}\right)^2 III(X,Y)$$

olur. Bu ise ispatı tamamlar. ■

Teorem 5.3.4. $\mathbb{R}_1^3$ de M ve M^* paralel p-equidistant B-scrolların asli eğrilikleri, sırasıyla, k_i ve k_i^*, $i=1,2$ olsun bu takdirde k_i ve k_i^* asli eğrilikleri arasında,

$$k_i^*=\left(\frac{ds}{ds^*}\right)k_i$$

bağıntısı vardır.

İspat. (2.2.4) ile verilen asli eğrilik tanımından $\det\left(S^*-k^*I_2\right)=0$ olduğundan, (5.2.10) denklemi göz önüne alınırsa

$$\begin{vmatrix} -\tau^*-k^* & 0 \\ -\kappa^*\left(s^*\right) & -\tau^*-k^* \end{vmatrix}=0$$

elde edilir. Böylece Teorem 5.1.1 den

$$k_i^*=-\tau^*=-\tau\left(\frac{ds}{ds^*}\right)=k_i\left(\frac{ds}{ds^*}\right) \tag{5.3.11}$$

olarak bulunur. ■

Teorem 5.3.5. $\mathbb{R}_1^3$ de M ve M^* null paralel p-equidistant B-scrollar olsunlar. M nin asli eğrilik doğrultuları M^* ın da asli eğrilik doğrultularıdır. (Tersi de doğrudur.)

İspat. Kabul edelim ki M deki asli eğrilik doğrultusu X olsun. Yani

$$S(X)=k\,X$$

olsun. O halde (5.2.2) denkleminden,

$$S^*(X)=\left(\frac{ds}{ds^*}\right)S(X)=\left(\frac{ds}{ds^*}\right)k\,X=k^*X$$

bulunur. Bu ise X in M^* ın da asli eğrilik doğrultusu olduğunu gösterir.

Tersine, M^* ın asli eğrilik doğrultusu Y olsun. Bu takdirde,

$$S^*\left(Y\right)=k^*Y$$

yazılabilir. Böylece (5.2.2) ve (5.3.11) denklemlerinden,

$$S\left(Y\right)=\left(\frac{ds^*}{ds}\right)S^*\left(Y\right)=\left(\frac{ds^*}{ds}\right)k^*Y=kY$$

elde edilir. Bu ise, Y nin M nin de asli eğrilik doğrultusu olduğunu ifade eder. ■

Teorem 5.3.6. $\mathbb{R}_1^3$ de M ve M^* null paralel p-equidistant B-scrollar olsunlar.

i) M nin eşlenik tanjant vektörleri M^* ın da eşlenik tanjant vektörleridir.

ii) M nin asimptotik doğrultuları M^* ın da asimptotik doğrultularıdır.

Tersleri de doğrudur. ■

İspat.

i) Kabul edelim ki X_P, Y_P, M nin eşlenik tanjant vektörleri olsunlar. O zaman $X_P, Y_P \in T_M\left(P\right)$ olmak üzere

$$\left\langle S\left(X_P\right), Y_P\right\rangle=0$$

dır. Bu takdirde (5.2.2) den,

$$\left\langle\left(\frac{ds^*}{ds}\right)S^*\left(X_P\right), Y_P\right\rangle=0$$

olur. Buradan ise

$$\left\langle S^*\left(X_P\right), Y_P\right\rangle=0$$

dır. Yani, X_P, Y_P M^* ın da eşlenik tanjant vektörleridir.

ii) Kabul edelim ki X_P, M nin asimptotik doğrultusu olsun. Bu takdirde

$$\left\langle S\left(X_P\right), X_P\right\rangle=0$$

dır. O halde (5.2.2) den,

$$\left\langle \left(\frac{ds^*}{ds}\right) S^*\left(X_P\right), X_P \right\rangle = \left(\frac{ds^*}{ds}\right) \left\langle S^*\left(X_P\right), X_P \right\rangle = 0$$

olur. Böylece

$$\left\langle S^*\left(X_P\right), X_P \right\rangle = 0$$

dır. Bu ise X_P nin M^* ın da asimptotik doğrultusu olması demektir. ■

Sonuç 5.3.1. $\mathbb{R}_1^3$ de M ve M^* null paralel p-equidistant B-scrollarının şekil operatörlerine karşılık gelen matrislerin karakteristik polinomlarına Cayley-Hamilton teoremi uygulanırsa,

$$P_{S^*}\left(S^*\right) = \left(\frac{ds}{ds^*}\right)^2 P_S\left(S\right) = 0$$

denklemi elde edilir.

İspat. M ve M^* null paralel p-equidistant B-scrollarına karşılık gelen şekil operatörlerinin matrisleri, sırasıyla, S ve S^* olmak üzere, karakteristik polinomları,

$$P_S\left(\lambda\right) = \lambda^2 - \left(k_1 + k_2\right)\lambda + \left(k_1 k_2\right)$$

ve

$$P_{S^*}\left(\lambda\right) = \lambda^2 - \left(k_1^* + k_2^*\right)\lambda + \left(k_1^* k_2^*\right)$$

dır. M ve M^* ın, sırasıyla, H, H^* ve K, K^* ortalama ve Gauss eğrilikleridir.

$H = \dfrac{k_1 + k_2}{2}$, $H^* = \dfrac{k_1^* + k_2^*}{2}$ ve $K = k_1 k_2$, $K^* = k_1^* k_2^*$ olacağından

$$\begin{aligned} P_S\left(\lambda\right) - \lambda^2 &= -2H\lambda + K \\ P_{S^*}\left(\lambda\right) - \lambda^2 &= -2H^*\lambda + K^* \end{aligned} \tag{5.3.12}$$

elde edilir.

Buradan (5.3.1), (5.3.2) denklemleri göz önüne alınırsa,

$$P_S(\lambda)+2H\lambda-K=P_{S^*}(\lambda)+2H\left(\frac{ds}{ds^*}\right)\lambda+K\left(\frac{ds}{ds^*}\right)^2$$

$$P_{S^*}(\lambda)=P_S(\lambda)+2H\lambda\left(1-\left(\frac{ds}{ds^*}\right)\right)-K\left(1+\left(\frac{ds}{ds^*}\right)^2\right)$$

bulunur.

Ayrıca Cayley-Hamilton teoreminden,

$$P_S(S)=S^2-2HS+K=0$$

$$P_{S^*}(S^*)=S^{*^2}-2H^*S^*+K^*=0$$

elde edilir. O halde (5.2.2), (5.3.1) ve (5.3.2) denklemlerinden,

$$P_{S^*}(S^*)=\left(\frac{ds}{ds^*}\right)^2\left\{S^2-2HS+K\right\}=0$$

$$P_{S^*}(S^*)=\left(\frac{ds}{ds^*}\right)^2 P_S(S)=0$$

bulunur. ■

Teorem 5.3.7. $\mathbb{R}_1^3$ de M ve M^* null paralel p-equidistant B-scrollarının birinci, ikinci, üçüncü temel formları, ortalama ve Gauss eğrilikleri arasında,

$$III^*-2H^*II^*+K^*I^*=\left(\frac{ds}{ds^*}\right)^2\left\{III-2H\,II+K\,I\right\}\equiv 0$$

bağıntısı vardır.

İspat. M ve M^* null paralel p-equidistant B-scrolların $I.,II.,III.$ temel formları, ortalama ve Gauss eğrilikleri arasında,

$$III-2H\,II+K\,I\equiv 0$$

ve

$$III^*-2H^*II^*+K^*I^*\equiv 0$$

bağıntıları vardır. Böylece (5.3.1), (5.3.2) ve (5.3.6) denklemlerinden,

$$III^*-2H^*II^*+K^*I^*=\left(\frac{ds}{ds^*}\right)^2 III-\left(\frac{ds}{ds^*}\right)^2 2H\,II+\left(\frac{ds}{ds^*}\right)^2 K\,I=\left(\frac{ds}{ds^*}\right)^2\left\{III-2H\,II+K\,I\right\}\equiv 0$$

elde edilir. ■

Teorem 5.3.8. $\mathbb{R}_1^3$ de M ve M^* null paralel p-equidistant B-scrollarının Levi-Civita konneksiyonları D ve D^* olmak üzere bu konneksiyonlar arasında,

$$D_X Y = D_X^* Y + \langle S(X), Y \rangle \left\{ u\left(\frac{ds}{ds^*} - 1 \right) + n\left(\frac{av\tau - q}{a - z}\left(\frac{ds}{ds^*} \right) - v\tau \right) \right\} \qquad (5.3.13)$$

bağıntısı vardır.

İspat.

$$M = \left\{ \varphi(s,v) \middle| \varphi(s,v) = \alpha(s) + v\, n(s) \right\}$$
$$M^* = \left\{ \varphi^*\left(s^*, v^*\right) \middle| \varphi^*\left(s^*, v^*\right) = \alpha^*\left(s^*\right) + v^*\, n^*\left(s^*\right) \right\}$$

null paralel p-equidistant B-scrolları olsunlar. $\mathbb{R}_1^3$ deki konneksiyon $\bar{D}$, M ve M^* null paralel p-equidistant B-scrollarının konneksiyonları da, sırasıyla, D ve D^* olmak üzere, bu B-scrolların Gauss denklemleri,

$$\bar{D}_X Y = D_X Y + \langle S(X), Y \rangle N_0$$

ve

$$\bar{D}_X Y = D_X^* Y + \langle S^*(X), Y \rangle N_0^*$$

dır. O halde Teorem 5.1.1 ve (5.3.7) denkleminden, M^* B-scrollunun birim normal vektör alanı

$$\begin{aligned} N_0^* &= u^*\left(s^*\right) + v^*\,\tau^*\, n^*\left(s^*\right) \\ &= u + \frac{av\tau - q}{(a - z)\tau}\left(\frac{ds^*}{ds} \right)\tau\left(\frac{ds}{ds^*} \right) n \\ &= u + \frac{av\tau - q}{a - z} n \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan, (5.2.2) denklemi göz önüne alınarak,

$$D_X Y + \langle S(X), Y \rangle N_0 = D_X^* Y + \left(\frac{ds}{ds^*} \right) \langle S(X), Y \rangle N_0^*$$

$$D_X Y = D_X^* Y + \langle S(X), Y \rangle \left\{ u\left(\frac{ds}{ds^*} - 1 \right) + n\left(\frac{av\tau - q}{a - z}\left(\frac{ds}{ds^*} \right) - v\tau \right) \right\}$$

elde edilir. ■

Teorem 5.3.9. $\mathbb{R}_1^3$ de M ve M^* null paralel p-equidistant B-scrollar olsun. α eğrisi M de asimptotik ve geodezik ise M^* da da geodeziktir.

İspat. M deki α eğrisinin teğeti T olsun. α, M de geodezik ve asimptotik ise, (2.2.6) ve (2.2.10) denklemlerinden

$$\left\langle S\left(T\right),T\right\rangle = 0 \text{ ve } D_T T = 0 \text{ dır.}$$

O halde (5.3.13) denkleminden,

$$D_T^* T = 0$$

bulunur. Bu ise ispatı tamamlar. ■

Sonuç 5.3.2. M ve M^* null paralel p-equidistant B-scrollar olsun. α, M de asimptotik olmasın. Bu takdirde α nın M de geodezik çizgi olması durumunda, M^* da da geodezik çizgi olması için gerek ve yeter şart $\dfrac{ds}{ds^*} = 1$ ve $\dfrac{v\tau z - q}{a - z} - v\tau = 0$ olmasıdır.

İspat. M de α eğrisinin teğeti T olsun. α, M ve M^* da geodezik çizgi ise (5.3.13) denkleminden,

$$\frac{ds}{ds^*} = 1 \text{ ve } \frac{v\tau z - q}{a - z} - v\tau = 0$$

dır. Bu ifade eder ki α, M^* da bir geodezik çizgidir.

Tersine α, M de geodezik ve $\dfrac{ds}{ds^*} = 1$, $\dfrac{v\tau z - q}{a - z} - v\tau = 0$ ise (5.3.13) denkleminden,

$$D_T^* T = 0 .$$

dır. Bu ifade eder ki α, M^* da bir geodezik çizgidir. ■

5.4. $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski Uzayında Null Paralel p-Equidistant B-Scrolların İkinci Ortalama, İkinci Gauss Eğrilikleri ve Dağılma Parametreleri Arasındaki İlişkiler

Açılamaz null paralel p-equidistant B-scrollar için ikinci temel form yüzey üzerinde yeni bir metrik tensör olarak göz önüne alınabileceğinden, (M, II) 2-boyutlu yarı-Riemann manifoldunun K_{II} ile gösterilen ikinci Gauss eğriliği ve yine aynı düşünce ile H_{II} ile gösterilen ikinci ortalama eğriliği hesaplanabilir. Bu bölümde, iki açılamaz M ve M^* null paralel p-equidistant B-scrolların (Yani, sırasıyla, $\tau \neq 0$ ve $\tau^* \neq 0$) öncelikle dağılma parametreleri arasındaki ilişki, daha sonra da ikinci Gauss ve ortalama eğrilikleri arasındaki ilişki ele alınacaktır.

Teorem 5.4.1. $\mathbb{R}_1^3$ de M ve M^* iki açılamaz null paralel p-equidistant B-scrollar olsunlar. M ve M^* ın, sırasıyla, d ve d^* dağılma parametreleri arasında

$$d = d^*\left(\frac{ds}{ds^*}\right)$$

bağıntısı vardır.

İspat. M ve M^* B-scrollarının dağılma parametreleri, sırasıyla, d ve d^* olmak üzere (3.3.3) ve Teorem 5.1.1 yardımıyla

$$d^* = \frac{\det\left(\ell^*, n^*, n^{*\prime}\right)}{\left\|n^{*\prime}\right\|^2} = -\frac{\left\langle \ell^* \wedge n^*, n^{*\prime}\right\rangle}{\left\|n^{*\prime}\right\|^2} = \frac{\left\langle u^*, \tau^* u^*\right\rangle}{\left\|\tau^* u^*\right\|^2} = \frac{1}{\tau^*} = \frac{1}{\tau \dfrac{ds}{ds^*}} = \frac{1}{\tau}\frac{ds^*}{ds} = d\frac{ds^*}{ds}$$

bulunur. Bu ise ispatı tamamlar. ■

M ve M^* B-scrolları açılamaz olduğundan açılım açısı ve açılım uzunluğundan bahsedilemez.

Şimdi M ve M^* açılamaz null paralel p-equidistant B-scrollarının, sırasıyla, ikinci Gauss eğrilikleri K_{II} ve K_{II}^* olmak üzere bunlar arasındaki ilişkiyi inceleyelim:

Teorem 5.4.2. $\mathbb{R}_1^3$ de M ve M^* açılamaz null paralel p-equidistant B-scrollarının, sırasıyla, K_{II} ve K_{II}^* ikinci Gauss eğrilikleri arasında,

$$K_{II}^* = K_{II}\left(\frac{ds}{ds^*}\right)$$

bağıntısı mevcuttur.

İspat. M açılamaz null paralel p-equidistant B-scrollunun birinci temel formunun katsayıları E,F,G olmak üzere

$$E=\langle \varphi_s,\varphi_s\rangle \quad , \quad F=\langle \varphi_s,\varphi_v\rangle \quad , \quad G=\langle \varphi_v,\varphi_v\rangle \tag{5.4.1}$$

dir. Böylece

$$\Delta=\sqrt{F^2-EG}=\sqrt{\langle \varphi_s,\varphi_v\rangle^2-\langle \varphi_s,\varphi_s\rangle\langle \varphi_v,\varphi_v\rangle}$$

dir. O halde (5.1.2) ve (5.4.1) eşitlikleri göz önüne alınırsa

$$E=v^2\tau^2, \quad F=-1, \quad G=0 \tag{5.4.2}$$

olarak bulunur.

Şimdi de ikinci temel formun katsayıları olan

$$e=\frac{\langle \varphi_{ss},\varphi_s\wedge\varphi_v\rangle}{\Delta} \quad , \quad f=\frac{\langle \varphi_{sv},\varphi_s\wedge\varphi_v\rangle}{\Delta} \quad , \quad g=\frac{\langle \varphi_{vv},\varphi_s\wedge\varphi_v\rangle}{\Delta}$$

katsayılarını bulalım. (5.1.2) ve (5. 1.4) den

$$e=\kappa(s)-v^2\tau^3, \quad f=\tau, \quad g=0 \tag{5.4.3}$$

olur. O halde (5.4.3) eşitliği ve bu eşitliğin kısmi türevleri (2.2.7) de yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$K_{II}=\frac{1}{\tau^4}\left\{\begin{vmatrix} \tau^3 & \frac{1}{2}\kappa'(s) & v\tau^3 \\ 0 & \kappa(s)-v^2\tau^3 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & -v\tau^3 & 0 \\ -v\tau^3 & \kappa(s)-v^2\tau^3 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{vmatrix}\right\}=-\tau \tag{5.4.4}$$

bulunur. Benzer şekilde M^* ın ikinci temel formunun katsayıları olan e^*,f^*,g^* hesaplanmak istenirse, (5.2.6) dan

$$e^*=\kappa^*(s^*)-v^{*2}\tau^{*3}, \quad f^*=\tau^*, \quad g^*=0 \tag{5.4.5}$$

bulunacağı açıktır. Böylece (5.4.5) den,

$$K_{II}^{*}=\frac{1}{\tau^{*4}}\left\{\begin{vmatrix}\tau^{*3} & \frac{1}{2}\kappa^{*\prime}\left(s^{*}\right) & v^{*}\tau^{*3}\\ 0 & \kappa^{*\prime}\left(s^{*}\right)-v^{*2}\tau^{*3} & \tau^{*}\\ 0 & \tau^{*} & 0\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}0 & -v^{*}\tau^{*3} & 0\\ -v^{*}\tau^{*3} & \kappa^{*\prime}\left(s^{*}\right)-v^{*2}\tau^{*3} & \tau^{*}\\ 0 & \tau^{*} & 0\end{vmatrix}\right\}=-\tau^{*} \qquad (5.4.6)$$

olarak elde edilir. Buradan (5.4.4) ve (5.4.6) eşitlikleri ile Teorem 5.1.1 göz önüne alınırsa,

$$K_{II}^{*}=-\tau^{*}=-\tau\left(\frac{ds}{ds^{*}}\right)=K_{II}\left(\frac{ds}{ds^{*}}\right)$$

bulunur. ■

Şimdi de M ve M^{*} açılamaz null paralel p-equidistant B-scrolları için, sırasıyla, H_{II} ve H_{II}^{*} ikinci ortalama eğriliklerini hesaplayalım:

Teorem 5.4.3. $\mathbb{R}_1^3$ de M ve M^{*} açılamaz null paralel p-equidistant B-scrolların, sırasıyla, H_{II} ve H_{II}^{*} ikinci ortalama eğrilikleri arasında

$$H_{II}^{*}=H_{II}\left(\frac{ds}{ds^{*}}\right)$$

bağıntısı mevcuttur.

İspat. Önerme 2.2.1 den

$$II=\begin{bmatrix} e & f\\ f & g\end{bmatrix}=L_{ij}=\begin{bmatrix}\kappa(s)-v^{2}\tau^{3} & \tau\\ \tau & 0\end{bmatrix}$$

ve

$$II^{-1}=\begin{bmatrix}L^{11} & L^{12}\\ L^{21} & L^{22}\end{bmatrix}=\frac{1}{\det II}\begin{bmatrix} g & -f\\ -f & e\end{bmatrix}=L^{ij}=\begin{bmatrix}0 & \dfrac{1}{\tau}\\ \dfrac{1}{\tau} & \dfrac{v^{2}\tau^{3}-\kappa(s)}{\tau^{2}}\end{bmatrix} \qquad (5.4.7)$$

$$\det II=-\tau^{2}$$

dir. O halde (2.2.8) ve (5.4.7) denklemlerinden

$$H_{II}=H$$

bulunur.

Benzer şekilde Önerme 2.2.1 den

$$II^{*}=\begin{bmatrix} e^{*} & f^{*} \\ f^{*} & g^{*} \end{bmatrix}=L_{ij}^{*}=\begin{bmatrix} \kappa^{*}\left(s^{*}\right)-v^{*2}\tau^{*3} & \tau^{*} \\ \tau^{*} & 0 \end{bmatrix}$$

ve

$$II^{*-1}=\begin{bmatrix} L^{*11} & L^{*12} \\ L^{*21} & L^{*22} \end{bmatrix}=\frac{1}{\det II^{*}}\begin{bmatrix} g^{*} & -f^{*} \\ -f^{*} & e^{*} \end{bmatrix}=L^{ij*}=\begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{\tau^{*}} \\ \dfrac{1}{\tau^{*}} & \dfrac{v^{*2}\tau^{*3}-\kappa^{*}\left(s^{*}\right)}{\tau^{*2}} \end{bmatrix} \tag{5.4.8}$$

şeklindedir. Buradan (5.4.8) ve (2.2.8) denklemlerinden

$$H_{II}^{*}=H^{*}$$

olarak elde edilir. Böylece (5.3.2) göz önüne alınırsa,

$$H_{II}^{*}=H_{II}\left(\frac{ds}{ds^{*}}\right)$$

eşitliği bulunur. ■

Teorem 5.4.4. $\mathbb{R}_1^3$ deki M ve M^* null paralel p-equidistant B-scrollarının dayanak eğrileri, sırasıyla, α ve α^* olsunlar. Bu durumda α nın null helis olabilmesi için gerek ve yeter şart α^* ın da null helis olmasıdır.

İspat. M null paralel p-equidistant B-scrollunun dayanak eğrisi olan α null helis olsun. Bu durumda Teorem 2.2.7 den

$$\frac{\kappa}{\tau}=\text{sabittir.} \tag{5.4.9}$$

Böylece (5.4.9) eşitliği ve Teorem 5.1.1 den,

$$\frac{\kappa}{\tau}=\frac{\kappa^{*}\left(\dfrac{ds^{*}}{ds}\right)}{\tau^{*}\left(\dfrac{ds^{*}}{ds}\right)}=\frac{\kappa^{*}}{\tau^{*}}=\text{sabit} \tag{5.4.10}$$

olarak bulunur. Yani α^* da null helistir. Tersi de doğrudur. ■

Sonuç 5.4.1. $\mathbb{R}_1^3$ deki M ve M^* null paralel p-equidistant B-scrollarının dayanak eğrileri, sırasıyla, α ve α^* olsunlar. O zaman harmonik eğrilikleri aynıdır.

İspat. Sonucun ispatı Teorem 2.2.7 ve (5.4.10) denkleminden açıktır. ■

Teorem 5.4.5. $\mathbb{R}_1^3$ deki M ve M^* null paralel p-equidistant B-scrollarının dayanak eğrileri, sırasıyla, α ve α^* olsunlar. α nın null slant helis olabilmesi için gerek ve yeter şart α^* ın da null slant helis olmasıdır.

İspat. M null paralel p-equidistant B-scrollunun dayanak eğrisi olan α null helis olsun. O halde Teorem 2.2.8 den α aynı zamanda null slant helistir. (5.4.10) denklemi göz önüne alınırsa α^* ın null helis ve Teorem 2.2.8 den de α^* ın null slant helis olacağı açıktır. ■

Örnek 5.4.1. $\mathbb{R}_1^3$ de M ve M^* null paralel p-equidistant B-scrollarının parametrik denklemleri, sırasıyla,

$$\varphi(s,v) = (s, \cos s, \sin s) + v\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sin s, -\frac{1}{2}\cos s\right)$$

$$\varphi^*(s^*, v^*) = \left(s^* + 2, \cos s^* + 2, \sin s^* + 2\right) + v^*\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sin s^*, -\frac{1}{2}\cos s^*\right)$$

olsun. (Şekil 5.4.1 ve Şekil 5.4.2) Bu durumda (3.2.2) ve (5.1.6) denklemlerinden,

$$\kappa^* = \kappa = 1, \quad \tau^* = \tau = -\frac{1}{2}$$

dır. Ayrıca (5.2.5), (5.2.10) denklemlerinden, M ve M^*ın şekil operatörlerine karşılık gelen matrisler

$$S^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = S$$

(2.2.7), (2.2.8) denklemlerinden, M ve M^* açılamaz null paralel p-equidistant B-scrollarının ikinci Gauss ve ortalama eğrilikleri arasında

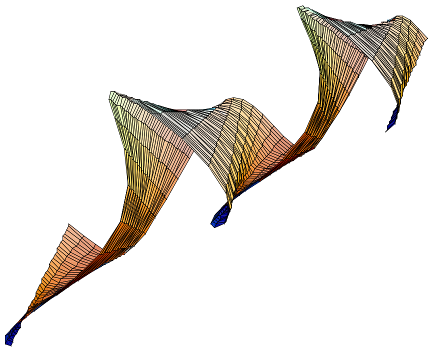
$$K_{II}^* = K_{II} = \frac{1}{2}, \quad H_{II}^* = H_{II} = \frac{1}{2}$$

bağıntısı vardır. Son olarak da (5.2.5), (5.2.10) denklemleri ve asli eğrilik tanımından,

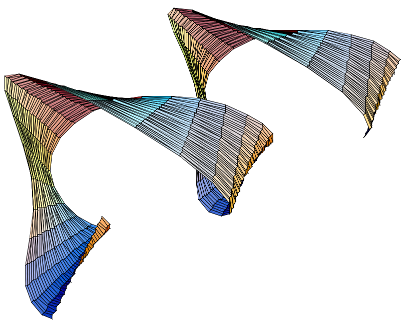
M ve M^*ın asli eğrilikleri arasında,

$$k_{1,2}^* = k_{1,2} = \frac{1}{2}$$

bağıntısı mevcuttur. ■



Şekil 5.4.1. $\varphi(s,v) = (s, \cos s, \sin s) + v\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sin s, -\frac{1}{2}\cos s\right)$ null paralel p-equidistant B-scroll



Şekil 5.4.2. $\varphi^*(s^*,v^*) = (s^*+2, \cos s^*+2, \sin s^*+2) + v^*\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sin s^*, -\frac{1}{2}\cos s^*\right)$ null paralel p-equidistant B-scroll

BÖLÜM 6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada orjinal bölüm dört alt bölümden oluşmaktadır. İlk alt bölümde $\mathbb{R}_1^3$, 3-boyutlu Minkowski uzayında null paralel p-equidistant B-scrollar tanıtılarak, bu B-scrolların dayanak eğrilerinin eğrilikleri arasındaki ilişkiyi veren teorem ifade ve ispat edilmiştir. Böylece çalışmamızın diğer alt bölümlerinde de sık sık değineceğimiz bir teorem ifade edilmiştir. Orjinal bölümün ikinci alt bölümünde null paralel p-equidistant B-scrolların şekil operatörlerine karşılık gelen matrisler hesaplanarak, bu matrisler arasındaki ilişki verilmiştir. Üçüncü alt bölüm şekil operatörünün cebirsel değişmezleri olarak bilinen, null paralel p-equidistant B-scrolların ortalama eğrilikleri, Gauss eğrilikleri, temel formları arasındaki ilişkiler ile bu ilişkiler ile ilgili bazı teorem ve sonuçlara ayrılmıştır. Son kısımda ise, açılamaz null paralel p-equidistant B-scrolların dralleri arasındaki ilişki ele alınmış daha sonra da açılamaz null paralel p-equidistant B- scrollar için yeni bir metrik tensör olarak göz önüne alınabilecek olan ikinci temel form için B-scrolların ikinci ortalama ve ikinci Gauss eğrilikleri arasındaki ilişkiler ele alınmıştır. Son olarak da null paralel p-equidistant B-scrolların dayanak eğrilerinin null veya slant helis olma koşulları incelenmiştir.

Bu çalışmada $\mathbb{R}_1^3$, 3-boyutlu Minkowski uzayında null paralel p-equidistant B-scrollar için elde edilen teorem ve sonuçlar $\mathbb{R}_1^n$, n-boyutlu Minkowski uzayında genelleştirilmiş null paralel p-equidistant B-scrollar için de araştırılabilir.

KAYNAKLAR

ALIAS, L. J., FERRANDEZ, A., LUCAS, P., Hypersurfaces in The Non-Flat Lorentzian Space Forms with a Characteristic Eigenvector Field. Journal of Geometry; 52: 10-24, 1995.

ALIAS, L. J., FERRANDEZ, A., LUCAS, P., On The Gauss Map of B-Scrolls. Tsukuba J. Math.; 22(2): 371-377, 1998.

BALGETİR, H., BEKTAŞ, M., INOGUCHI, J., Null Bertrand Curves and Their Characterizations. Note Mat.; 23(1): 7-13, 2004.

BALGETİR, H., BEKTAŞ, M., ERGÜT, M., On The B-Scrolls In The Three Dimensional Lorentzian Space L^3. Kragujevac J. Math.; 27: 163-174, 2005.

BAYKUT, M., Genelleştirilmiş Paralel p-Equidistant Regle Yüzeyler, Doktora Tezi, Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Samsun, 1997.

CHOI, S. M., KI, U. K., SCH, Y. C, On The Gauss Map of Null Scrolls. Tsukuba J. Math.; 22(1): 273-279, 1998.

DUGGAL, K. L., BEJANCU, A., Lightlike Submanifols of Semi-Riemannian Manifolds and Applications, Kluwer Academic Publishers, 1996.

EKMEKÇİ, N., Lorentz Manifoldları Üzerinde Eğilim Çizgileri Doktora tezi, Ankara Üniversitesi, Ankara, 1991.

FENGHUI, J., ZHONG H. H., On Lorentzian Surfaces with $H^2 = K$ In The Minkowski Space. J. Math. Anal. Appl.; 334: 54-58, 2007.

FERRANDEZ, A., LUCAS, P., Null 2-type Hypersurfaces In a Lorentzian Space. Canad. Math. Bull.; (35)3: 354-360, 1992.

FERRANDEZ, A, GIMENEZ, A., LUCAS, P., Relativistic Particles and The Geometry of 4-D Null Curves. Journal of Geometry and Physics; 57: 2124-2135, 2007.

GRAVES, L. K., Codimension One Isometric Immersions Between Lorentz Spaces. Trans. Amer. Math. Soc.; 252: 367-392, 1979.

HACISALİHOĞLU, H. H., Diferensiyel Geometri, İnönü Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları Mat. No. 2, Malatya, 1975.

IKAWA, T., On Curves and Submanifolds Indefinit Riemannian Manifold. Tsukuba J. Math.; 9(2): 353-371, 1985.

INOGUCHI, J., TODA, M., Timelike Minimal Surfaces Via Loop Groups. Acta Appl. Math.; 84(3): 313-355, 2004.

IZUMIYA S., TAKEUCHI N., New Spacial Curves and Developable Surfaces. Turk J. Math.; 28: 153-163, 2004.

KARADAĞ H. B., KARADAĞ M., Null Generalized Slant Helices in Lorentzian Space. Differential Geometry-Dynamical Systems; 10: 178-185, 2008.

KURUOĞLU, N., MASAL, M., Timelike Parallel p_i-equidistant Ruled Surface By a Timelike Base Curve In The Minkowski 3-space $\mathbb{R}_1^3$. Acta Et Commentationes Tartuensis De Mathematica; 11:1-9, 2007.

LIPSCHUTZ, S., Lineer Cebir Teori ve Problemleri, Mc Graw Hill Inc., 1990.

MASAL, M., KURUOĞLU, N., Spacelike Parallel p_i Equidistant Ruled Surfaces In The Minkowski 3-Space $\mathbb{R}_1^3$. Algebras Groups and Geometries; 22: 13-24, 2005.

MASAL, M., $(m+1)$ Dimensional Spacelike Parallel p_i-Equidistant Ruled Surfaces In The Minkowski Space $\mathbb{R}_1^n$. Novi Sad J. Math.; 36(1): 55-63, 2006.

O'NEILL, B., Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity, Academic Press Inc., 1983.

POTTMANN, H., LU, W., RAVANI, B., Rational Ruled Surfaces and Their Offsets. Technical Report No: 23, Institut Für Geometrie, Technische Universität, Wien, 1995.

SODSIRI, W., Ruled Surfaces of Weingarten Type in Minkowski 3-space, Doctorate Thesis, K. U. Leuven, 2005.

ŞAHİN B., KILIÇ E., GÜNEŞ R., Null Helices in $\mathbb{R}_1^3$. Differential Geometry-Dynamical Systems; 3(2): 31-36, 2001.

TURGUT, A., 3–boyutlu Minkowski Uzayında Spacelike ve Timelike Regle Yüzeyler, Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi, Ankara, 1995.

VALEONTIS, I. E., Paralel p-Äquidistante Regelflächen. Manuscripta Math.; 54: 391-404, 1986.

YALINIZ, A. F., HACISALİHOĞLU, H. H., Null Generalized Helices in L^3 and L^4 3 and 4 Dimensional Lorentzian Space. Mathematical and Computational Applications; 10(1): 105-111, 2005.

YANG, A., T., KIRSON, Y., ROTH, B., On a Kinematics Theory for Ruled Surface. Proceedings of the Fourth World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms; Newcastle Upon Tyne, England, 737-742, 1975.

ÖZGEÇMİŞ

Ayşe Zeynep AZAK, 02.06.1981 de Sakarya' da doğdu. İlk, orta ve lise eğitimini Sakarya' da tamamladı. 2000 yılında başladığı Sakarya Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nü 2004 yılında bitirdi. Aynı yıl Sakarya Üniversitesi'nde yüksek lisansı kazandı. Yüksek lisans öğrenimini sürdürürken 2005 yılında Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nde Araştırma Görevlisi olarak göreve başladı. Yüksek lisans öğrenimini 2006 yılında tamamladı ve aynı yıl Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nde Matematik Anadilim Dalında doktora programına girdi. Halen, Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nden görevlendirme ile Sakarya Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde Araştırma Görevlisi olarak görev yapmaktadır. Ayşe Zeynep AZAK evlidir.