

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**M-SPOTTY ROSENBLOOM-TSFASMAN AĞIRLIK
SAYACI İÇİN MACWILLIAMS ÖZDEŞLİKLERİ**

DOKTORA TEZİ

Vedat ŞİAP

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Mehmet ÖZEN

Ekim 2011

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

M-SPOTTY ROSENBLOOM-TSFASMAN AĞIRLIK
SAYACI İÇİN MACWILLIAMS ÖZDEŞLİKLERİ

DOKTORA TEZİ

Vedat ŞİAP

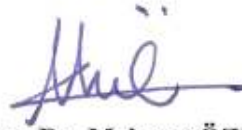
Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Bu tez 14 / 10 /2011 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.



Prof. Dr. Fethi ÇALLIALP

Jüri Başkanı



Doç. Dr. Mehmet ÖZEN

Üye



Prof. Dr. Metin BAŞARIR

Üye



Doç. Dr. Sıtkı DUMAN

Üye



Yrd. Doç. Dr. Bahattin YILDIZ

Üye

TEŞEKKÜR

Eğitim hayatım süresince beni özveri ile yetiőtiren tüm öğretmen ve öğretim üyeleri hocalarıma teőkekkürü bir borç bilirim. Bilhassa, tez çalışmamda fikir ve eleőtirileriyle beni yönlendiren danışmanım Sayın Doç. Dr. Mehmet ÖZEN'e minnettarım. Çalışmalarım sırasında bilgi, görüş ve eleőtirilerinden yararlandığım Sayın Prof. Dr. İrfan ŞİAP'a teőkükürlerimi sunarım.

Ayrıca eğitim hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini üzerimden esirgemeyen aileme de teőkükür ederim.

Ayrıca çalışmanın gerçekleşmesinde çeőtli olanaklarından yararlandığım Sakarya Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Komisyon Başkanlığı'na Proje Numarası 2010-50-02-011 olan lisansüstü projeye vermiş oldukları desteklerinden dolayı teőkükür ederim.

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR.....	ii
İÇİNDEKİLER	iii
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ.....	vi
ŞEKİLLER LİSTESİ	viii
TABLolar LİSTESİ.....	ix
ÖZET.....	x
SUMMARY.....	xi

BÖLÜM 1.

GİRİŞ.....	1
1.1. Cebirsel Yapılar ve Özellikleri.....	1
1.2. Lineer Kodlar.....	8
1.3. M-Spotty Parça (Byte) Hata Düzeltten Kodlar.....	14
1.4. Ağırlık Sayaçları.....	17
1.4.1. Karakterler.....	18
1.4.2. Grup cebri.....	19
1.4.3. MacWilliams özdeşliği.....	21

BÖLÜM 2.

SONLU CİSİMLER ÜZERİNDE M-SPOTTY HAMMING AĞIRLIK SAYACI İÇİN MACWILLIAMS ÖZDEŞLİKLERİ.....	28
--	----

BÖLÜM 3.

M-SPOTTY ROSENBLOOM-TSFASMAN AĞIRLIK SAYACI İÇİN MACWILLIAMS ÖZDEŞLİKLERİ – I.....	37
3.1. F_2 Sonlu Cismi Üzerinde Tanım ve Teoremler.....	37

3.2. F_2 Sonlu Cismi Üzerinde Hadamard Fonksiyonunun İnşa Edilmesi.....	44
3.3. F_2 Sonlu Cismi Üzerinde M-Spotty RT Ağırlık Sayacı için MacWilliams Özdeşliği.....	51
3.4. F_q Sonlu Cismi Üzerinde Tanım ve Teoremler.....	57
3.5. F_q Sonlu Cismi Üzerinde Hadamard Fonksiyonunun İnşa Edilmesi.....	62
3.6. F_q Sonlu Cismi Üzerinde M-Spotty RT Ağırlık Sayacı için MacWilliams Özdeşliği.....	69

BÖLÜM 4.

M-SPOTTY ROSENBLOOM-TSFASMAN AĞIRLIK SAYACI İÇİN MACWILLAMS ÖZDEŞLİKLERİ – II.....	74
4.1. $R_2 = F_2 + uF_2$ Halkası Üzerinde Tanım ve Teoremler.....	74
4.2. $R_2 = F_2 + uF_2$ Halkası Üzerinde Hadamard Fonksiyonunun İnşa Edilmesi.....	79
4.3. $R_2 = F_2 + uF_2$ Halkası Üzerinde M-Spotty RT Ağırlık Sayacı için MacWilliams Özdeşliği.....	88
4.4. $R_q = F_q + uF_q$ Halkası Üzerinde Tanım ve Teoremler.....	93
4.5. $R_q = F_q + uF_q$ Halkası Üzerinde Hadamard Fonksiyonunun İnşa Edilmesi.....	96
4.6. $R_q = F_q + uF_q$ Halkası Üzerinde M-Spotty RT Ağırlık Sayacı için MacWilliams Özdeşliği.....	105
4.7. $R_{2,s} = F_2 [u]/(u^s)$ Halkası Üzerinde M-Spotty RT Ağırlık Sayacı için MacWilliams Özdeşliği.....	111
4.8. $R_{q,s} = F_q [u]/(u^s)$ Halkası Üzerinde M-Spotty RT Ağırlık Sayacı için MacWilliams Özdeşliği.....	119

BÖLÜM 5.

MATRİS KODLAR VE M-SPOTTY ROSENBLOOM-TSFASMAN AĞIRLIĞI.....	128
5.1. Matris Kodlar.....	128
5.2. Matris Kodlar için M-Spotty RT Ağırlığı ve MacWilliams Özdeşliği.....	131

BÖLÜM 6.

SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....	151
KAYNAKLAR.....	152
ÖZGEÇMİŞ.....	156

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$*$: İkili işlem
G	: Grup
$ $: Mertebe
R	: Halka
I	: İdeal
F	: Cisim
F_2	: İkili cisim
F_q	: q elemanlı sonlu cisim
V	: Vektör uzayı
SpE	: E kümesinin bütün lineer birleşimlerinin kümesi
$\langle u, v \rangle$: u ile v nin iç çarpımı
$V(n, q)$: Elemanları F_q dan alınan n - lilerin kümesi
C	: Kod
$[n, k, d]$: n uzunluğunda, k boyutlu, d minimum uzaklığına sahip lineer kod
G	: Üreteç matris
H	: Eşlik denetim matris
C^\perp	: C kodunun dik tümleyeni
w	: Ağırlık
d	: Uzaklık
e	: Hata vektörü
t/b	: $1 \leq t \leq b$ olmak üzere, gelişigüzel bir b -bit hatasında meydana gelen t -bit hatası
$W_c(z)$: C kodunun ağırlık sayacı

- χ : G grubunun bir karakteri
 $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_b)$: Ağırlık dağılım vektörü
 $A_{(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_b)}$: Ağırlık dağılım vektörüne sahip kodsözlerin sayısı
 b : Parça
 \tilde{f} : Hadamard fonksiyonu

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1.2.	Kodsözlerin hata kabiliyet durumlarının kürelerle gösterimi.....	14
Şekil 1.3.	$t = 2$ ve $b = 8$ olmak üzere üçlü m-spotty parça hatalarını gösteren durumlar.....	16
Şekil 5.1.	Matris lineer kodların m-spotty parça hatası.....	131
Şekil 5.2.	Kodlar ve dik tümleyenleri arasındaki ilişki.....	139

TABLolar LİSTESİ

Tablo 1.1.	$p(x) = x^4 + x + 1$ tarafından üretilen F_{2^4} sonlu cisminin elemanlarının gösterimi.....	7
Tablo 3.1.	Kodsözler ve kodsözlere karşılık gelen terimler.....	56

ÖZET

Anahtar kelimeler: M-spotty, MacWilliams özdeşliği, Matris kodlar

Geniş bir kullanım alanına sahip olan hata kontrol kodları, son yıllarda bilgisayar ve iletişim sistemlerindeki güvenilirliği artırma adına birinci derecede önem kazanmıştır. Bu bağlamda, bilgisayar hafıza sistemlerindeki güvenilirliği arttırmak için hata kontrol kodlarının bir sınıfı olan m-spotty parça hata kontrol kodları inşa edilmiştir. M-spotty parça hata kontrol kodları sayesinde yüksek yoğunluklu yarı iletken RAM yongaları güçlü elektromanyetik dalgalar, radyoaktif parçacıklar ya da kozmik parçacıklardan dolayı meydana gelen ardışık hatalar etkili bir şekilde tespit edilebilmekte veya düzeltilebilmektedir. İlk olarak, Hamming metriği kullanılarak m-spotty parça hata kontrol kodları inşa edilmiştir. Bu çalışmada ise m-spotty Rosenbloom-Tsfasman metriği adı verilen yeni bir metrik tanımlanarak m-spotty parça hata kontrol kodları ile bazı çalışmalar yapılmaktadır. Bu çalışmalar, m-spotty Rosenbloom-Tsfasman ağırlık sayaçları için MacWilliams özdeşliklerinin elde edilmesi ve matris kodları ile m-spotty Rosenbloom-Tsfasman ağırlığının ilişkilendirilmesi çalışmasıdır.

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, cebirsel yapıların özellikleri ile ilgili tanımlar ve teoremler, lineer kodların yapısı, m-spotty parça hata kontrol kodları ve MacWilliams özdeşliği hakkında bilgi verilmektedir.

İkinci bölümde, sonlu cisimler üzerinde m-spotty parça hata kontrol kodları için yapılmış çalışmalar üzerinde durulmaktadır.

Üçüncü ve dördüncü bölümlerde, yeni tanımlanan m-spotty Rosenbloom-Tsfasman metriğine göre farklı cebirsel yapılar ele alınarak, m-spotty Rosenbloom-Tsfasman ağırlık sayaçları için MacWilliams özdeşlikleri elde edilmektedir.

Beşinci bölümde, m-spotty Rosenbloom-Tsfasman ağırlığı ile matris kodları ilişkilendirilmektedir.

Altıncı ve son bölüm, sonuç ve öneriler kısmından oluşmuştur.

THE MACWILLIAMS IDENTITIES FOR M-SPOTTY ROSENBLOOM-TSFASMAN WEIGHT ENUMERATOR

SUMMARY

Key Words: M-spotty, MacWilliams identity, Array codes

Error control codes have extensively been applied to semiconductor memories using high density RAM chips with wide Input/Output data. High density semiconductor RAM chips with wide Input/Output, e.g., with 8-bit or 16-bit Input/Output data, have become popular in recent years. However, these semiconductor memories are highly vulnerable to multiple random bit errors when they are exposed to strong electromagnetic waves, radio active particles, or energetic cosmic particles. These multiple random bit errors, typically 2- or 3-bit errors, are usually confined to a byte region because RAM chips, each of which corresponds to a byte having length b bits, are physically independent. These errors can be effectively corrected or detected by m-spotty byte error control codes. Firstly, m-spotty byte error control codes have been characterized by the m-spotty Hamming distance. This study defines a new distance function, called m-spotty Rosenbloom-Tsfasman distance, of the m-spotty byte error control codes. Moreover, this study proposes a MacWilliams type identity for m-spotty Rosenbloom-Tsfasman weight enumerators via the new distance function, which is a metric. However, it is shown that there exists a relationship between array codes and the m-spotty Rosenbloom-Tsfasman weight.

This thesis consists of six chapters. In the first chapter, some basic definitions and theorems related to algebraic structures, some information about linear codes, m-spotty byte error control codes and MacWilliams identity are given.

The second chapter presents a survey of the m-spotty byte error control codes over finite fields.

In the third and fourth chapters, the MacWilliams identity for m-spotty Rosenbloom-Tsfasman weight enumerators over some algebraic structures is obtained.

In the fifth chapter, the array codes having the m-spotty Rosenbloom-Tsfasman weight are introduced.

In the sixth and the last chapter, the conclusion and possible directions for future work are given.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Hata kontrol kodları üzerinde yapılan çalışmalar büyük ölçüde modern cebirin zengin cebirsel yapılarına dayanmaktadır. Birtakım önemli ve kullanışlı kodlar sonlu cisim ve sonlu halkaların cebirsel yapıları temel alınarak inşa edilmektedir. Bu yüzden bu bölümde hem ileriki bölümlerin daha anlaşılır olabilmesi hem de kullanışlı gereksinimlere uygun olan kodları inşa etmek için gerekli olan temel kodlar ve cebirsel yapılar ele alınmaktadır. Bu bölümdeki bilgiler temel seviye düzeyinde olup cebirsel yapılar ile ilgili daha geniş bilgiler [1-3] nolu kaynaklarda, kodlama teorisi ile ilgili daha geniş bilgiler [4-9] nolu kaynaklarda bulunabilir.

1.1. Cebirsel Yapılar ve Özellikleri

Bu kısımda, kodlama teorisinde yapılan önemli çalışmalarda ele alınan cebirsel yapılar ve özellikleri işlenmektedir.

Tanım 1.1.1. [1] G boş olmayan bir küme ve $*$, G de bir ikili işlem olsun. $(G, *)$ cebirsel yapısı aşağıdaki dört aksiyomu sağlıyorsa G grup olarak adlandırılır:

(G1) Kapalılık. $\forall a, b \in G$ için $c = a * b \in G$ dir.

(G2) Birleşme. $\forall a, b, c \in G$ için $a * (b * c) = (a * b) * c$ dir.

(G3) Birim eleman. $\forall a \in G$ için, $a * e = e * a = a$ olacak şekilde $e \in G$ vardır.

(G4) Ters eleman. $\forall a \in G$ için, $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ olacak şekilde $a^{-1} \in G$ vardır.

G kümesi (G1) ve (G2) aksiyomlarını sağlıyorsa yarı grup, (G1), (G2) ve (G3) aksiyomlarını sağlıyorsa monoid olarak adlandırılır. Ayrıca, $\forall a, b \in G$ için $a * b = b * a$ şartını sağlayan bir grup değişmeli grup adını almaktadır. Her grupta birim eleman tek olduğu gibi gruptaki her elemanın tersi de tektir.

Tanım 1.1.2. [1] Sonlu grubun eleman sayısı grubun mertebesi olarak adlandırılır ve $|G|$ ile gösterilir. $(G, *)$ ve (H, Δ) iki grup ve $f : G \rightarrow H$ bir fonksiyon olsun. $\forall a, b \in G$ için $f(a * b) = f(a) \Delta f(b)$ ise f fonksiyonuna G grubundan H grubuna bir homomorfizma denir. Aynı zamanda f birebir ve örten bir homomorfizma ise f izomorfizma olarak adlandırılır.

Eğer G ve H grupları arasında bir izomorfizma varsa bu gruplara izomorf gruplar denir ve $G \cong H$ ile gösterilir.

Tanım 1.1.3. [1] G bir grup ve H , G grubunun boş olmayan bir alt kümesi olsun. Eğer H , G grubundaki işleme göre kendi başına bir grup ise H kümesine G grubunun bir alt grubu denir ve $H < G$ ile gösterilir. Eğer H kümesi G grubunun bir alt kümesi ve G grubunda verilen işleme göre kapalı ise H kümesi, G grubunun bir alt grubudur.

Tanım 1.1.4. [1] $R \neq \emptyset$ kümesi üzerinde tanımlı iki ikili işlem toplama(+) ve çarpma(\cdot) olsun. $(R, +, \cdot)$ cebirsel yapısı aşağıdaki üç aksiyomu sağlıyorsa R halka olarak adlandırılır:

(R1) $(R, +)$ bir değişmeli bir gruptur.

(R2) Çarpma işleminin birleşme özelliği vardır.

(R3) Çarpma işleminin toplama işlemi üzerine sağdan ve soldan dağılma özellikleri vardır. Yani,

$$\forall a, b, c \in R \text{ için } a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \text{ ve } (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

dır.

Halkanın toplama işlemine göre etkisiz elemanına halkanın sıfır elemanı denir ve 0_R ile gösterilir. Halkanın çarpma işlemine göre etkisiz elemanı olmayabilir. Eğer çarpma işlemine göre de etkisiz eleman varsa böyle bir halkaya birimli halka denir ve bu etkisiz elemana da halkanın birim elemanı denir ve 1_R ile gösterilir [1].

Tanım 1.1.5. [1] R bir halka ve $\emptyset \neq I \subset R$ olsun. I alt kümesi aşağıdaki iki aksiyomu sağlıyorsa I ideal olarak adlandırılır:

(I1) Toplama işlemine göre I kümesi R halkasının alt grubudur.

(I2) $\forall s \in I$ ve $\forall r \in R$ için $sr \in I$ ve $rs \in I$ dir.

Tanım 1.1.6. [1] Toplama ve çarpma işlemleri gibi iki işleme sahip F kümesi aşağıdaki üç aksiyomu sağlıyorsa F cisim olarak adlandırılır:

(F1) F kümesi toplama işlemine göre değişmeli bir gruptur.

(F2) Çarpma işlemine göre kapalıdır ve sıfırdan farklı elemanların kümesi çarpma işlemine göre değişmeli bir gruptur.

(F3) F kümesinin her elemanı için çarpma işleminin toplama işlemi üzerine dağılma özelliği vardır.

Sonlu elemanlı bir cisim sonlu cisim veya Galois cismi olarak adlandırılır. q elemanlı bir cisim F_q olarak gösterilir.

Tanım 1.1.7. [1] F bir cisim ve $S \subset F$ olsun. S kümesi kendi başına F cismindeki işlemlere göre bir cisim ise S kümesine F cisminin bir alt cismi denir.

p asal bir sayı olmak üzere, F_p sonlu cismi F_q sonlu cisminin bir alt cismi ise q sayısı, p sayısının bir kuvvetidir.

Tanım 1.1.8. [1] p asal bir tamsayı olmak üzere, p elemanlı F_p sonlu cismi asal bir cisim olarak adlandırılır. F_p asal cisminin genişlemesi p^m elemanlı ise F_p asal cisminin m inci dereceden genişlemesi olan F_{p^m} sonlu cisim olarak tanımlanmaktadır.

m elemanlı $\mathbb{Z}_m = \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$ tamsayılar kümesi bir halkadır. Eğer m asal bir tamsayı ise \mathbb{Z}_m halkası cisimdir. p asal bir tamsayı olmak üzere Z_p, F_p asal

cismidir. p sayısının asal bir tamsayı olması tamsayılar halkası ile cisimler arasındaki ilişkiyi göstermektedir.

$f_{n-1}, f_{n-2}, \dots, f_1, f_0$ katsayıları F_q sonlu cisminin elemanları, indisler ve kuvvetler negatif olmayan tamsayılar olmak üzere, F_q sonlu cismi üzerinde bir polinom aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$f(x) = f_{n-1}x^{n-1} + f_{n-2}x^{n-2} + \dots + f_1x + f_0.$$

f_{n-1} sıfırdan farklı olmak üzere, $f(x)$ polinomunda $n-1$ sayısının alabildiği en büyük değere $f(x)$ polinomunun derecesi denir ve $\deg f(x)$ ile gösterilir. En büyük dereceli polinom teriminin katsayısına polinomun başkatsayısı denir. Eğer baş katsayı $f_{n-1} = 1$ ise polinom monik polinom olarak adlandırılır. Polinomlarda bilinen toplama ve çarpma işlemlerine göre F_q üzerindeki polinomların kümesi bir halkadır ve bu halka polinom halkası olarak adlandırılır. Polinom halkasından alınan $f(x)$ ve $g(x)$ polinomları için toplama işlemi aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$f(x) + g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (f_i + g_i) x^i.$$

Toplamın derecesi bu iki polinomun derecelerinden daha büyük değildir. Polinom halkasında iki polinom çarpımı aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$f(x) \cdot g(x) = \sum_i \left(\sum_{j=0}^i f_j g_{i-j} \right) x^i.$$

$b(x) \cdot q(x) = a(x)$ olacak şekilde bir $q(x)$ polinomu varsa $b(x)$ polinomu $a(x)$ polinomunun bir çarpanıdır veya $a(x)$ polinomu $b(x)$ polinomu tarafından bölünür.

Tanım 1.1.9. [1] α , F_q sonlu cisminin keyfi bir elemanı olmak üzere, sadece α veya $p(x)$ tarafından bölünen bir $p(x)$ polinomu indirgenemez polinom olarak adlandırılır.

Tanım 1.1.10. [1] F cismi üzerinde derecesi sıfırdan farklı monik $p(x)$ polinomu için, mod $p(x)$ polinomlar halkası, polinomlar üzerinde bilinen toplama ve çarpma işlemlerine göre $p(x)$ polinomunun derecesinden daha küçük derecesi olan bütün polinomların kümesi olarak tanımlanır.

Teorem 1.1.1. [1] $p(x)$ polinomunun m inci dereceden monik indirgenemez bir polinom olması için gerek ve yeter koşul F_q üzerinde mod $p(x)$ polinomlar halkasının F_{q^m} cisim genişlemesi olmasıdır.

Örnek 1.1.1. F_2 üzerinde ikinci dereceden indirgenemez $p(x) = x^2 + x + 1$ polinomu alınırsa $F_{2^2} = \{0, 1, x, x+1\}$ elde edilir. Toplama ve çarpım tabloları aşağıdaki gibidir:

+	<u>0</u>	<u>1</u>	<u>x</u>	<u>x+1</u>	·	<u>0</u>	<u>1</u>	<u>x</u>	<u>x+1</u>
<u>0</u>	0	1	x	x+1	<u>0</u>	0	0	0	0
<u>1</u>	1	0	x+1	x	<u>1</u>	0	1	x	x+1
<u>x</u>	x	x+1	0	1	<u>x</u>	0	x	x+1	1
<u>x+1</u>	x+1	x	1	0	<u>x+1</u>	0	x+1	1	x

Tanım 1.1.11. [1] (Sonlu cisim elemanlarının polinom gösterimi) F_p üzerinde m inci dereceden mod $p(x)$ polinomlar halkasına sıfır elemanını ekleyerek F_{p^m} sonlu cisminin elemanları elde edilir. Bu gösterim şekli sonlu cisim elemanlarının polinom gösterimi olarak bilinir.

Tanım 1.1.12. [1] (Sonlu cisim elemanlarının vektör gösterimi) α , F_p üzerinde m inci dereceden indirgenemez $p(x)$ polinomu tarafından üretilen F_{p^m} sonlu cisminin

bir elemanı olsun. Eğer $p(\alpha) = 0$ ise bu takdirde α elemanı $p(x)$ polinomunun bir köküdür. Bu yüzden F_{p^m} sonlu cisminin her elemanı α kullanılarak ifade edilebilir. Yani, her eleman derecesi $m-1$ veya daha küçük olan α polinomları ile gösterilir. F_{p^m} sonlu cisminin bir elemanı $p_{m-1}\alpha^{m-1} + p_{m-2}\alpha^{m-2} + \dots + p_2\alpha^2 + p_1\alpha + p_0$ polinomu ile gösterilsin. Bu takdirde bu polinomun katsayılarından oluşan vektör, F_p üzerinde m uzunluğa sahip $(p_{m-1}, p_{m-2}, \dots, p_2, p_1, p_0)$ ile gösterilir. Bu gösterim sonlu cisim elemanlarının vektör gösterimi olarak adlandırılır.

Örnek 1.1.2. F_2 üzerinde $p(x) = x^2 + x + 1$ polinomu tarafından üretilen F_{2^2} sonlu cisminin elemanlarının kümesi $\{0, 1, \alpha, \alpha + 1\}$ dır. Bu kümenin her bir elemanı sırasıyla F_2 üzerinde uzunluğu iki olan $\{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$ vektörlerle ifade edilir.

Tanım 1.1.13. [1] (Sonlu cisim elemanlarının kuvvet gösterimi) $\alpha \in F_q$ olmak üzere, F_q sonlu cisminin sıfır elemanı dışındaki tüm elemanları α elemanının bir kuvveti olarak ifade edilebiliyorsa α elemanı F_q sonlu cisminin primitif elemanı olarak adlandırılır. Bu gösterime sonlu cisim elemanlarının kuvvet gösterimi denir.

Örnek 1.1.3. F_7 sonlu cisminde $3^1 = 3, 3^2 = 2, 3^3 = 6, 3^4 = 4, 3^5 = 5, 3^6 = 1$ olduğundan 3 elemanı F_7 sonlu cisminin primitif elemanıdır. $p(x) = x^3 + x + 1$ tarafından üretilen F_8 sonlu cismi için $\alpha = x$ primitif elemanı kullanılarak F_8 sonlu cisminin elemanları aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} \alpha &= x, & \alpha^5 &= x^2 + x + 1, \\ \alpha^2 &= x^2, & \alpha^6 &= x^2 + 1, \\ \alpha^3 &= x + 1, & \alpha^7 &= 1 = \alpha^0. \\ \alpha^4 &= x^2 + x, \end{aligned}$$

Örnek 1.1.4. $p(x) = x^4 + x + 1$ tarafından üretilen F_{2^4} sonlu cisminin her elemanı için polinom, vektör ve kuvvet gösterimleri Tablo 1.1'deki gibidir. $p(\alpha) = \alpha^4 + \alpha + 1 = 0$ olsun. Bu taktirde $\alpha^4 = \alpha + 1$ dir. Bu sonuçtan F_{2^4} sonlu cismi inşa edilir. F_{2^4} sonlu cisminin bazı elemanları aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}\alpha^5 &= \alpha \cdot \alpha^4 = \alpha(\alpha + 1) = \alpha^2 + \alpha, \\ \alpha^8 &= \alpha^4 \cdot \alpha^4 = (\alpha + 1) \cdot (\alpha + 1) = \alpha^2 + 1, \\ \alpha^{13} &= \alpha \cdot \alpha^4 \cdot \alpha^8 = \alpha(\alpha + 1)(\alpha^2 + 1) = \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha, \\ &= (\alpha + 1) + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha = \alpha^3 + \alpha^2 + 1.\end{aligned}$$

Tablo 1.1. $p(x) = x^4 + x + 1$ tarafından üretilen F_{2^4} sonlu cisminin elemanlarının gösterimi

<u>Kuvvet gösterimi</u>	<u>Polinom gösterimi</u>	<u>Vektör gösterimi</u>
0	0	(0000)
1	1	(1000)
α	α	(0100)
α^2	α^2	(0010)
α^3	α^3	(0001)
α^4	$1 + \alpha$	(1100)
α^5	$\alpha + \alpha^2$	(0110)
α^6	$\alpha^2 + \alpha^3$	(0011)
α^7	$1 + \alpha + \alpha^3$	(1101)
α^8	$1 + \alpha^2$	(1010)
α^9	$\alpha + \alpha^3$	(0101)
α^{10}	$1 + \alpha + \alpha^2$	(1110)
α^{11}	$\alpha + \alpha^2 + \alpha^3$	(0111)
α^{12}	$1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3$	(1111)
α^{13}	$1 + \alpha^2 + \alpha^3$	(1011)
α^{14}	$1 + \alpha^3$	(1001)

1.2. Lineer Kodlar

Bu kısımda lineer kodlar ile ilgili temel kavramlar verilmektedir. Bu kavramlar arasında vektör uzayı veya modül ile lineer kod arasındaki ilişki, üreteç ve eşlik denetim matrisleri, bir kodun minimum uzaklığı ve minimum uzaklığı sayesinde kodun hata tespit ve düzeltme kabiliyeti yer almaktadır.

Tanım 1.2.1. [2] (Vektör uzayı ve alt uzay) F cismi üzerinde elemanları vektörler olan V kümesi aşağıdaki beş aksiyomu sağlıyorsa vektör uzayı olarak adlandırılır:

(V1) V kümesi toplama işlemine göre değişmeli bir gruptur.

(V2) $\forall c \in F$ ve $\forall v \in V$ için $cv \in V$ dir.

(V3) $\forall c \in F$ ve $\forall u, v \in V$ için $c(u+v) = cu + cv$ dir.

(V4) $\forall a, b \in F$ ve $\forall v \in V$ için $(a+b)v = av + bv$ dir.

(V5) $\forall a, b \in F$ ve $\forall v \in V$ için $(ab)v = a(bv)$, $1v = v$ ve $0v = 0$ dir.

Vektör uzayı kodlama teorisinde önemli bir rol oynamaktadır.

Tanım 1.2.2. [2] (Alt uzay) F cismi üzerinde V vektör uzayının bir S alt kümesi vektör uzayının bütün aksiyomlarını sağlıyorsa S kümesi alt uzay olarak adlandırılır.

S kümesinin V vektör uzayının bir alt uzayı olup olmadığını kontrol etmek için aşağıda verilen aksiyomları kontrol etmek yeterlidir:

(S1) $\forall u, v \in S$ için $u+v \in S$ dir.

(S2) $\forall c \in F$ ve $\forall v \in S$ için $cv \in S$ dir.

c_i skalerler (yani cisim elemanları) olmak üzere, k tane v_1, v_2, \dots, v_k vektörün lineer birleşimi

$$u = c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_kv_k$$

şeklindedir [2].

Tanım 1.2.3. [2] (Lineer Bağımlılık ve Bağımsızlık) V vektör uzayının bir $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ alt kümesi verilsin.

$$c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_kv_k = 0$$

olacak biçimde en az biri sıfırdan farklı olan c_1, c_2, \dots, c_k sayıları varsa $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ kümesi lineer bağımlıdır denir. Lineer bağımlı olmayan kümeye lineer bağımsız küme denir. Lineer bağımsız bir kümede elemanların herhangi biri diğer elemanların lineer birleşimi olarak yazılamaz.

Tanım 1.2.4. [2] $E = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ olsun. $Sp(E)$, E kümesinin bütün lineer birleşimlerinin kümesi olmak üzere, $Sp(E)$ uzayına E kümesinin gerdiği (ürettiği) alt uzay denir. E kümesine de, $Sp(E)$ alt uzayının bir üretici denir.

Eğer E kümesi V vektör uzayını geriyorsa, V vektör uzayındaki lineer bağımsız olan her küme en fazla k tane vektöre sahip olabilir. Bu da k vektör tarafından gerilen bir vektör uzayında en fazla k tane lineer bağımsız vektör olabileceğini göstermektedir. Bu yüzden k tane lineer bağımsız v_1, v_2, \dots, v_k vektörleri V vektör uzayını geriyorsa k , V vektör uzayının boyutu olarak adlandırılır ve $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ kümesi V vektör uzayının bazıdır. k boyutlu bir uzayda, baz tam olarak k tane vektörden oluşmaktadır ve bu vektörler lineer bağımsızdır. Eğer V , k boyutlu bir vektör uzayı ise k tane lineer bağımsız vektörlerin herhangi bir kümesi V vektör uzayının bir bazıdır [2].

Tanım 1.2.5. [2] (İç Çarpım) $F_q^n = \{(v_1, v_2, \dots, v_n) : v_i \in F_q\}$ olmak üzere F_q^n , F_q sonlu cisim üzerinde tanımlı bir vektör uzayı olsun. $f : F_q^n \times F_q^n \rightarrow F_q$ biçiminde, (u, v) deki değeri $\langle u, v \rangle$ ile gösterilen ve aşağıdaki dört aksiyomu doğrulayan bir f

fonksiyonuna F_q^n üzerinde tanımlı bir iç çarpım denir. Vektör uzayı üzerinde bir iç çarpım varsa bu vektör uzayına iç çarpım uzayı denir.

$$(P1) \quad \forall u, v, w \in F_q^n \text{ için } \langle u+v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle \text{ dır.}$$

$$(P2) \quad \forall u, v, w \in F_q^n \text{ için } \langle u, v+w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle \text{ dır.}$$

$$(P3) \quad \forall u \in F_q^n \text{ için } \langle u, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0 \text{ dır.}$$

$$(P4) \quad \forall v \in F_q^n \text{ için } \langle u, v \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0 \text{ dır.}$$

Tanım 1.2.6. [2] (Diklik) V iç çarpım uzayında $\langle u, v \rangle = 0$ ise u vektörü, v vektörüne diktir (veya ortogonaldır) denir.

Tanım 1.2.7. [2] (Modül) R bir halka olsun. M kümesi aşağıda verilen dört aksiyomu sağlıyorsa M kümesine R halkası üzerinde sol modül denir:

$$(M1) \quad M \text{ kümesi toplama işlemine göre de\u0131şmeli bir gruptur.}$$

$$(M2) \quad \forall m \in M \text{ ve } \forall r, s \in R \text{ için } (r+s)m = rm + sm \text{ dır.}$$

$$(M3) \quad \forall m \in M \text{ ve } \forall r, s \in R \text{ için } (rs)m = r(sm) \text{ dır.}$$

$$(M4) \quad \forall m, n \in M \text{ ve } \forall r \in R \text{ için } r(m+n) = rm + rn \text{ dır.}$$

Eğer R halkası birimli bir halka ise aşağıdaki ek aksiyom da sağlanır:

$$(M5) \quad \forall m \in M \text{ için } 1m = m \text{ dır.}$$

Tanım 1.2.7'de verilen "sol" ifadesi halkanın elemanlarının sol taraftan çarpıldığını gösterir. Eğer halkanın elemanları "sağ" taraftan çarpılıyorsa sağ modül tanımı elde edilir.

Tanım 1.2.8. [2] (Alt modül) M , R üzerinde bir modül ve N , M modülünün bir alt grubu olsun. $\forall r \in R$ ve $\forall n \in N$ için $rn \in N$ ise N , M modülünün alt modülü olarak adlandırılır.

Tanım 1.2.9. [4] (Lineer Kod) $V(n, q) = F_q^n$, n uzunluğunda ve q elemanlı sonlu bir cisim üzerinde tanımlanmış bir vektör uzayı olsun. $V(n, q)$ vektör uzayının C alt kümesi alt uzay ise bu takdirde C kümesine lineer kod denir. Benzer biçimde R bir halka olmak üzere, C kümesi n bileşenli R^n nin bir alt modülü ise C kümesine lineer kod denir. C kodunun elemanları da kodsöz olarak adlandırılır.

F_q sonlu cismi üzerinde tanımlı C lineer kodundan alınan k tane w_0, w_1, \dots, w_{k-1} kodsözlerinin lineer birleşimi lineer kodun tanımından F_q sonlu cismi üzerinde C lineer kodunun bir elemanıdır. Eğer w_0, w_1, \dots, w_{k-1} kodsözleri lineer bağımsız ise $\{w_0, w_1, \dots, w_{k-1}\}$, C lineer kodunun bir bazıdır. Bazda bulunan k tane kodsöz C lineer kodun boyutu olur. Eğer C lineer kodunun boyutu k ise o zaman C lineer kodu bir $[n, k]$ - kodu olarak gösterilir.

Tanım 1.2.10. [4] (Üreteç Matris) C bir lineer $[n, k]$ - kodu olsun. Satırları C kodunun baz vektörlerinden oluşan $k \times n$ boyutlu G matrisine, C kodunun üreteç matrisi denir.

Eğer G matrisi C kodunun üreteç matrisi ise C kodunun kodsözleri, G matrisinin satırlarının lineer birleşimidir. Yani,

$$C = \{xG \mid x \in V(k, q)\}$$

şeklindedir.

Tanım 1.2.11. [4] (Standart Form) C bir lineer $[n, k]$ - kodu olsun. Herhangi bir k koordinat yeri verilsin. Bu yerler üzerinde C lineer koduna denk olan ilk k sütunu birim matristen oluşan üreteç matrisine sahip bir kod vardır. $G = (I_k \mid A)$ biçimindeki bir üreteç matrisine standart formdadır denir.

Burada I_k , k boyutundaki birim matrisi temsil eder. Her lineer kodun, standart formda bir üreteç matrisi vardır. $k \times n$ tipindeki bir üreteç matrisi standart formda ise bu kod ilk k koordinatlarında sistemattir. Bu ise kodlama ve dekodlama işlemlerini kolaylaştırır.

Tanım 1.2.12. [4] (Dik Tümleyen) C bir lineer $[n, k]$ - kodu olsun.

$$C^\perp = \{y \in V(n, q) \mid \langle y, x \rangle = 0, \forall x \in C\}$$

şeklinde tanımlanan C^\perp koduna lineer kodun dik tümleyeni denir.

Tanım 1.2.13. [4] (Eşlik Denetim Matrisi) C kodunun üreteç matrisi $G = (I_k \mid A)$ olmak üzere; $GH^T = 0$ şartını sağlayan $H = (-A^T \mid I_{n-k})$ matrisine C kodunun eşlik denetim matrisi denir.

Tanım 1.2.14. [4] Bir $u = (u_0, u_1, \dots, u_{n-1})$ vektörünün sıfırdan farklı elemanlarının sayısı w vektörünün Hamming ağırlığını verir ve $w(u)$ ile gösterilir.

Tanım 1.2.15. [4] u ve v vektörleri arasındaki Hamming uzaklığı $d(u, v)$ ile gösterilir. Ağırlık ile uzaklık arasındaki ilişki aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} d(u, v) &= w(u - v) = w(v - u) \\ &= u \text{ ve } v \text{ vektörlerinin farklı bileşenlerinin sayısı} \end{aligned}$$

Hamming uzaklık aşağıdaki aksiyomları sağladığından bir metriktir [4]:

(HD1) $u \neq v$ için $d(u, v) > 0$ ve $u = v$ için $d(u, v) = 0$ dır.

(HD2) $d(u, v) = d(v, u)$ dır.

(HD3) $d(u, v) + d(v, w) \geq d(u, w)$ dır.

Hamming uzaklık ile Hamming ağırlık bir kodun hata kontrol kapasitesi hakkında bilgi vermektedir. v kodsözü iletilirken alınan hatalı söz r ise v ve r arasındaki Hamming uzaklık yani $d(v, r)$ hataların sayısına eşittir. $e = r - v$ hata vektörünün Hamming ağırlığı yani $w(e)$ hataların sayısını verir.

Tanım 1.2.16. [4] C kodunun elemanları olan farklı kodsözler arasındaki uzaklıkların en küçüğüne C kodunun minimum uzaklığı denir.

C kodunun minimum uzaklığı $d(C)$ ile gösterilirse,

$$d(C) = \min \{d(x, y) \mid x, y \in C, x \neq y\}$$

dır.

Eğer C lineer kodunun minimum uzaklığı d ise C lineer kodu bir $[n, k, d]$ - kodu olarak gösterilir.

Tanım 1.2.17. [4] C kodunun elemanları olan kodsözlerin sıfırdan farklı ağırlıkların en küçüğüne C kodunun minimum ağırlığı denir ve $w(C)$ ile gösterilir.

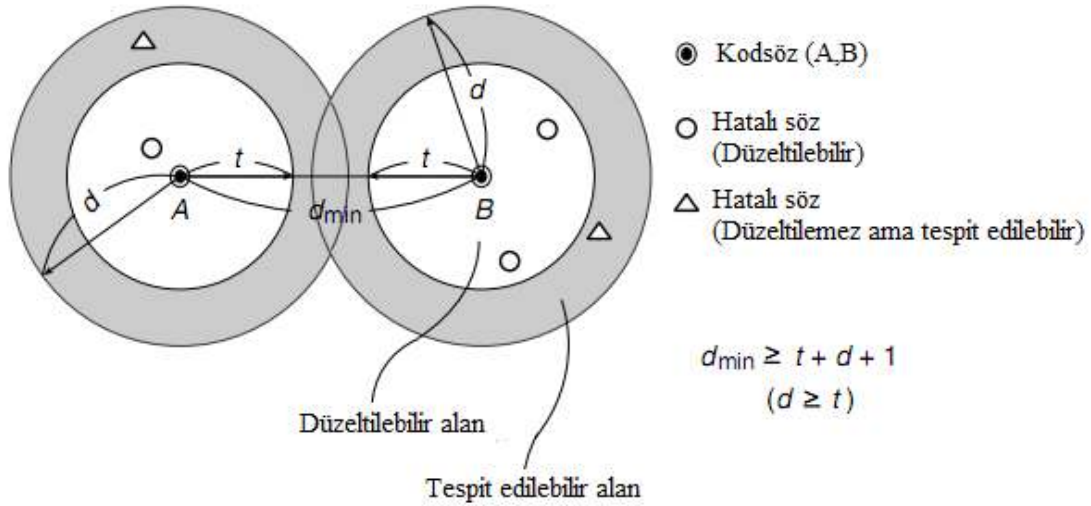
Teorem 1.2.1. [4] C lineer bir kod ise $d(C) = w(C)$ dır. Yani, lineer bir kodun minimum uzaklığı minimum ağırlığına eşittir.

Bir kodun minimum Hamming uzaklığı kodun hata kontrol kapasitesinin belirlenmesi için önemli bir parametredir.

Teorem 1.2.2. [4] C kodunun t -hata tespit eden kod olması için gerek ve yeter şart $d(C) \geq t + 1$ olmasıdır.

Teorem 1.2.3. [4] C kodunun minimum uzaklığı $d(C) = d$ ise C kodu en fazla $t = \left\lfloor \frac{d-1}{2} \right\rfloor$ hata düzeltebilir.

Şekil 1.2, Teorem 1.2.2 ve Teorem 1.2.3 ifadelerini şekil olarak göstermektedir.



Şekil 1.2. Kodsözlerin hata kabiliyet durumlarının kürelerle gösterimi

1.3. M-Spotty Parça (Byte) Hata Düzeltken Kodlar

Bilgisayar hafıza ve iletişim sistemlerindeki güvenilirliği artırma adına hata kontrol kodları uygulama açısından birinci derecede önem kazanmıştır. Özellikle, bilgisayar hafıza sistemlerindeki güvenilirliği artırmak için hata kontrol kodlarının bir sınıfı olan parça (byte) hata kontrol kodları kullanılmaktadır [10]. Bu tür bilgisayar hafıza sistemlerinde parça adı verilen b -bit giriş/çıkış genişliğindeki RAM yongaları (chip) işlev yapmaktadır. RAM yongaları 4, 8, 16, 32 veya daha büyük giriş/çıkış genişliğine sahip iken son zamanlarda yüksek hızlı hafıza sistemlerinde 8, 16 veya 32 bit ($b = 8, 16$ veya 32) giriş/çıkış genişliğine sahip yüksek yoğunluklu RAM yongaları kullanım açısından daha popüler hale gelmiştir. Büyük kapasiteli hafıza sistemlerinde kullanılan bu RAM yongaları, yüksek elektromanyetik dalgalar, radyoaktif parçacıklar ya da kuvvetli kozmik parçacıklara maruz kaldıklarında bu yongalarda birçok gelişigüzel hata bitleri meydana gelmektedir. Bu hata bitlerini

kontrol etmek amacıyla, ikili (binary) kodlar için spotty parça hatası adında yeni bir parça hatası tanımlanmıştır. Bu tip hatalar üzerinde çalışılan kod sınıfı spotty parça hata kontrol kodları adını almaktadır [11].

Bilgisayarlar ikili düzene sahip sayılarla çalışmaktadır. İkili düzendeki her bir rakama (0 yada 1) bit denir. Dolayısıyla ikili düzendeki her basamak bir bittir. Aşağıdaki sayı 8 basamak dolayısıyla da 8 bit uzunluğundadır. Onluk sistemde 155 sayısına eşittir.

$$(10011011)_2 = 155.$$

Bir anlam ifade eden en küçük sayısal veri miktarına parça (byte) denir. 8 bitten oluşan ikili sayı kümesidir. Yukarıdaki $(10011011)_2$ sayısı 1 parça uzunluğundadır.

Tanım 1.3.1. [12] (Spotty parça hatası veya t/b -hatası) $1 \leq t \leq b$ olmak üzere, gelişigüzel bir b -bit parçasında meydana gelen t -bit hatası spotty parça hata veya t/b -hata olarak adlandırılır.

İki çeşit spotty parça hatası bulunmaktadır. Bunlardan biri bir parça içerisindeki s -spotty parça hatası, diğeri de bir parça içerisinde bulunan m -spotty parça hatasıdır.

Tanım 1.3.2. [13] (S-spotty parça hatası) Bir parça içerisindeki gelişigüzel meydana gelen t -bit hata s -spotty parça hatası olarak adlandırılır. Yani, bir parça içerisinde hatalı bitlerin maksimum sayısı $t(\leq b)$ sayısını aşmaz.

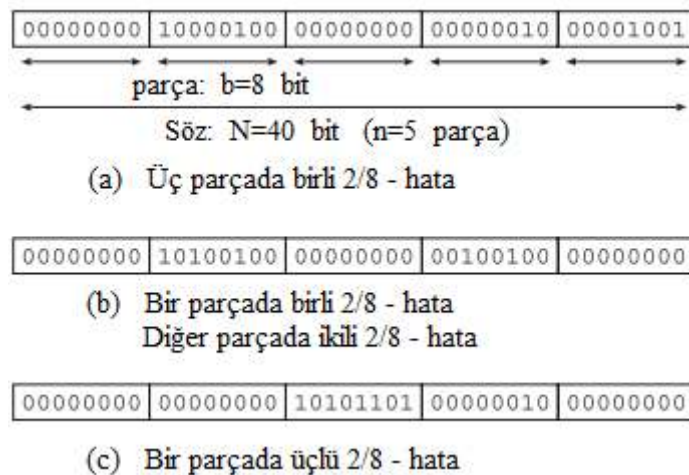
Tanım 1.3.3. [14] (M-spotty parça hatası) Bir parça içerisinde en az bir t/b -hata varsa m -spotty parça hatası olarak adlandırılır. Yani, bir parça içerisinde hatalı bitlerin maksimum sayısı $t(\leq b)$ sayısını aşabilir.

Bir parçadaki hata bitlerinin sayısı q ise bu parçadaki t/b -hatalarının sayısı $\lceil q/t \rceil$

ile bulunur. Burada $\lceil x \rceil$, x sayısına eşit veya büyük tamsayıların en küçüğünü vermektedir.

Tanım 1.3.4. [14] (μ m-spotty parça hatası) Hatalı sözdeki bütün parçalardaki spotty parça hatalarının sayısının toplamı μ ise bu hata μ m-spotty parça hatası olarak adlandırılır. Bilgisayar sistemlerinde yüksek enerjili parçacıklar RAM yongasının belirli bir bölümünü vurduğunda m-spotty parça hatası meydana gelebilir.

Örnek 1.3.1. Şekil 1.3'te $N=40$ uzunluğunda $n=5$ parçadan oluşan ve her parçada 8 bit bulunan bir söz bulunmaktadır. Şekil 1.3(a), 1.3(b) ve 1.3(c), $t=2$ ve $b=8$ olmak üzere üçlü $2/8$ -hataları içeren hatalı sözlere birer örnek teşkil etmektedir. Şekil 1.3(a) da, sözde üç hatalı parça bulunmaktadır ve bu parçaların her biri birli $2/8$ -hata bulundurmaktadır. Yani, her parçadaki hatalı bitlerin maksimum sayısı $t=2$ bit sayısını aşmamaktadır. Ayrıca bu söz üçlü s-spotty parça hatası içermektedir. Şekil 1.3(b) de, ikinci parça üç tane bit hatası bulundurmaktadır. $\lceil 3/t \rceil = \lceil 3/2 \rceil = 2$ olduğundan, bu parçada ikili $2/8$ -hatası bulunmaktadır. Diğer hatalı parçada birli $2/8$ -hatası var olduğundan toplam $2/8$ -hata sayısı üçtür ve üçlü $2/8$ -hatası olarak adlandırılır. Şekil 1.3(c) de, üçüncü parça beş bit hata bulundurmaktadır. $\lceil 5/t \rceil = \lceil 5/2 \rceil = 3$ olduğundan, söz üçlü $2/8$ -hata içermektedir. Yani, Şekil 1.3 mümkün olan bütün üçlü m-spotty $2/8$ -hatalarını göstermektedir.



Şekil 1.3. $t=2$ ve $b=8$ olmak üzere üçlü m-spotty parça hatalarını gösteren durumlar

1.4. Ağırlık Sayaçları

Ağırlık sayaçları, daha sonra üzerinde durulacak olan MacWilliams özdeşliği için oldukça önemli bir yere sahiptir.

Tanım 1.4.1 [15] C , (n, M) parametrelerine sahip herhangi bir kod olsun. $k = 0, 1, \dots, n$ için A_k , k ağırlıklı kodsözlerin sayısını belirtmek üzere C kodunun ağırlık sayacı

$$W_C(z) = \sum_{k=0}^n A_k z^k = \sum_{c \in C} z^{w(c)}$$

olarak ifade edilmektedir. Burada $(A_k)_{k=0}^n$ dizisi, C kodunun ağırlık dağılımı olarak adlandırılır.

$$W_C(x, y) = \sum_{k=0}^n A_k x^k y^{n-k}$$

homojen polinomu da C kodunun ağırlık sayacını belirtmektedir.

Örnek 1.4.1. $(n, M) = (3, 4)$ parametrelerine sahip F_2 sonlu cismi üzerinde $C = \{000, 100, 010, 110\}$ kodu için $C^\perp = \{000, 001\}$ olup C ve C^\perp kodları için ağırlık sayaçları sırasıyla aşağıdaki gibi elde edilir:

$$W_C(z) = \sum_{k=0}^3 A_k z^k = 1 + 2z + z^2,$$

$$W_{C^\perp}(z) = \sum_{k=0}^3 A_k^\perp z^k = 1 + z.$$

MacWilliams özdeşliğinin ispatının daha anlaşılır olması için MacWilliams özdeşliğinin öncesinde karakter yapısı, konu ile ilgili grup cebri ve grup cebri bir elemanın dönüşümü ile ilgili konular ele alınacaktır.

1.4.1. Karakterler

Tanım 1.4.1.1. [15] (Karakter) $(G, +)$ bir grup ve $(\mathbb{C} - \{0\}, \cdot)$ kompleks sayıların çarpımsal grubu olsun. $\chi : G \rightarrow \mathbb{C} - \{0\}$ homomorfizması varsa χ , G grubunun bir karakteri olarak adlandırılır. χ homomorfizma olduğundan her $g, h \in G$ için,

$$\chi(g+h) = \chi(g) \cdot \chi(h) \text{ ve } \chi(0) = 1$$

dır. Her $g \in G$ için $\chi(g) = 1$ ise χ özel olarak G grubunun temel karakteri olarak adlandırılır.

Teorem 1.4.1.1. [15] G bir grup ve χ , G grubunun bir karakteri olsun. Bu takdirde,

$$\sum_{g \in G} \chi(g) = \begin{cases} |G| & \chi \text{ temel karakter ise,} \\ 0 & \chi \text{ temel karakter değil ise,} \end{cases}$$

dır.

Tanım 1.4.1.1'de G toplamsal grubu F_q sonlu cismi olsun. $\chi : F_q \rightarrow \mathbb{C} - \{0\}$ olacak şekilde $(F_q, +)$ grubu üzerinde temel karakter olmasın. $u \in V(n, q)$ olmak üzere, $C \subset V(n, q)$ lineer kodu için $\chi_u : C \rightarrow \mathbb{C} - \{0\}$ fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$\chi_u(c) = \chi(\langle c, u \rangle) = \chi(c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_n u_n).$$

Burada, $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ ve $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ şeklindedir. İç çarpım özellikleri ve χ_u için verilen tanım kullanılarak χ_u fonksiyonunun C kodu için karakter olduğu aşağıdaki gibi gösterilebilir:

$$\begin{aligned}\chi_u(c+d) &= \chi(\langle c+d, u \rangle) = \chi(\langle c, u \rangle + \langle d, u \rangle) \\ &= \chi(\langle c, u \rangle) \cdot \chi(\langle d, u \rangle) = \chi_u(c) \cdot \chi_u(d).\end{aligned}$$

Teorem 1.4.1.2. [15] $\chi_u : C \rightarrow \mathbb{C} - \{0\}$ karakterinin temel karakter olabilmesi için gerek ve yeter şart $u \in C^\perp$ olmasıdır.

Bundan sonra χ_u karakteri, temel olmayan karakter olarak ele alınacaktır.

Sonuç 1.4.1.1. [15] $C \subset V(n, q)$ lineer kod olsun. Bu taktirde $u \in V(n, q)$ için,

$$\sum_{c \in C} \chi_u(c) = |C| \delta_{u \in C^\perp}$$

dır. Burada $\delta_{u \in C^\perp}$ aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\delta_{u \in C^\perp} = \begin{cases} 1 & u \in C^\perp \\ 0 & u \notin C^\perp. \end{cases}$$

1.4.2. Grup cebri

Tanım 1.4.2.1. [15] (Grup Cebri) F bir cisim, G de \cdot işlemine göre bir grup olmak üzere; F cisiminden katsayılı G grubunun sonlu sayıda elemanlarının bütün lineer birleşimlerinin kümesi $F[G]$ grup cebri olarak adlandırılır ve $i=1,2,\dots,n$ için $a_i \in F$, $g_i \in G$ olmak üzere $F[G]$ grup cebri elemanları aşağıdaki gibi gösterilebilir:

$$a_1 g_1 + a_2 g_2 + \dots + a_n g_n.$$

$F[G]$, F üzerinde aşağıda verilen toplama, çarpma ve skalerle çarpma işlemine göre bir cebirdir:

$$(GC1) \sum_{g \in G} a_g g + \sum_{g \in G} b_g g = \sum_{g \in G} (a_g + b_g) g,$$

$$(GC2) \left(\sum_{g \in G} a_g g \right) \left(\sum_{h \in G} b_h h \right) = \sum_{g \in G, h \in G} (a_g b_h) g \cdot h,$$

$$(GC3) \text{ } a \text{ skaler olmak üzere, } a \left(\sum_{g \in G} a_g g \right) = \sum_{g \in G} (a a_g) g.$$

Tanım 1.4.2.1’de tanımlanan grup cebirinde $G = V(n, q)$ ve $F = \mathbb{C}$ kompleks sayılar kümesi olarak alınırsa; $\mathbb{C}V(n, q)$ nin elemanları,

$$g = g(t) = \sum_{x \in V(n, q)} \alpha_x t^x$$

şeklinde olan bütün formel toplamların kümesi olmak üzere, aşağıda verilen toplama, skalerle çarpma ve çarpma işlemlerine göre bir grup cebridir:

$$(1) \sum_{x \in V(n, q)} \alpha_x t^x + \sum_{x \in V(n, q)} \beta_x t^x = \sum_{x \in V(n, q)} (\alpha_x + \beta_x) t^x,$$

$$(2) \beta \text{ skaler olmak üzere, } \beta \sum_{x \in V(n, q)} \alpha_x t^x = \sum_{x \in V(n, q)} (\beta \cdot \alpha_x) t^x,$$

$$(3) \left(\sum_{x \in V(n, q)} \alpha_x t^x \right) \left(\sum_{y \in V(n, q)} \beta_y t^y \right) = \sum_{x \in V(n, q), y \in V(n, q)} (\alpha_x \beta_y) t^{x+y} = \sum_{z \in V(n, q)} \left(\sum_{x+y=z} \alpha_x \beta_y \right) t^z.$$

Dolayısıyla $\mathbb{C}V(n, q)$, \mathbb{C} kompleks sayılar üzerinde $V(n, q)$ grubunun grup cebri olarak adlandırılır [15].

Grup cebrinin elemanlarına karakterler aşağıdaki gibi uygulanabilir:

$$\chi_u(g) = \chi_u \left(\sum_{x \in V(n, q)} \alpha_x t^x \right) = \sum_{x \in V(n, q)} \alpha_x \chi_u(x) = \sum_{x \in V(n, q)} \alpha_x \chi(\langle u, x \rangle).$$

Tanım 1.4.2.2. [15] (Grup cebri elemanlarının dönüşümü) $\mathbb{C}V(n, q)$ grup cebrinin bir elemanı $g(t) = \sum_{x \in V(n, q)} \alpha_x t^x$ olsun.

$$\tilde{g}(t) = \sum_{x \in V(n, q)} \chi_x(g) t^x$$

ile verilen ifade g elemanının dönüşümü olarak adlandırılır.

$\mathbb{C}V(n, q)$ grup cebrinin her bir $g(t) = \sum_{x \in V(n, q)} \alpha_x t^x$ elemanı için, formel toplamları kullanarak g nin ağırlık sayacını aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz:

$$W_g(z) = \sum_{x \in V(n, q)} \alpha_x z^{w(x)} = \sum_{k=0}^n \left(\sum_{w(x)=k} \alpha_x \right) z^k = \sum_{k=0}^n A_k z^k .$$

Eğer $C \subset V(n, q)$ bir kod ve $g_C(t) = \sum_{c \in C} t^c$ C kodunun bir üreteç fonksiyonu ise bu taktirde A_k , C kodunun ağırlık dağılımını verir.

g nin \tilde{g} dönüşümünün ağırlık sayacı benzer şekilde aşağıdaki gibidir:

$$W_{\tilde{g}}(z) = \sum_{x \in V(n, q)} \chi_x(g) z^{w(x)} = \sum_{k=0}^n \left(\sum_{w(x)=k} \chi_x(g) \right) z^k = \sum_{k=0}^n \tilde{A}_k z^k .$$

1.4.3. MacWilliams özdeşliği

Kodlama teorisinin en önemli sonuçlarından biri MacWilliams özdeşliğidir. 1962'de Florence Jessie MacWilliams tarafından elde edilen bu özdeşlik kodlama teorisinde çok geniş çapta uygulama alanı bulmuştur. Yaygın olarak kullanılmasının en önemli sebebi, C lineer kodunun ağırlık sayacı ile C kodunun dik tümleyeni olan C^\perp kodunun ağırlık sayacı arasında elde edilen ilişkidir. Bu kodların ağırlık sayacıları

aracılığıyla elde edilen özdeşliğe de MacWilliams özdeşliği denir. Bu özdeşlikte herhangi C lineer kodunun ağırlık sayacının C lineer kodunun dik tümleyenini olan C^\perp kodunun ağırlık sayacından elde edilebileceği ifade edilmektedir.

Teorem 1.4.3.1. [15] (MacWilliams Özdeşliği) $g, \mathbb{C}V(n, q)$ grup cebirinin bir elemanı olsun. Bu taktirde,

$$W_{\tilde{g}}(z) = (1 + (q-1)z)^n W_g\left(\frac{1-z}{1+(q-1)z}\right)$$

dır.

İspat: $\tilde{g}(t) = \sum_{x \in V(n, q)} \chi_x(g) t^x$ olduğundan,

$$\begin{aligned} W_{\tilde{g}}(z) &= \sum_{x \in V(n, q)} \chi_x(g) z^{w(x)} = \sum_{x \in V(n, q)} \sum_{y \in V(n, q)} \alpha_y \chi(\langle x, y \rangle) z^{w(x)} \\ &= \sum_{y \in V(n, q)} \alpha_y \sum_{x \in V(n, q)} \chi(\langle x, y \rangle) z^{w(x)} \end{aligned}$$

elde edilir. $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ve $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ alınırsa, $x_i = 0$ ise $w(x_i) = 0$ ve $x_i = 1$ ise $w(x_i) = 1$ olduğundan,

$$\begin{aligned} \sum_{x \in V(n, q)} \chi(\langle x, y \rangle) z^{w(x)} &= \sum_{x \in V(n, q)} \chi(x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n) z^{w(x_1) + w(x_2) + \dots + w(x_n)} \\ &= \sum_{x_1 \in F_q} \sum_{x_2 \in F_q} \dots \sum_{x_n \in F_q} \left(\chi(x_1 y_1) z^{w(x_1)} \right) \left(\chi(x_2 y_2) z^{w(x_2)} \right) \dots \left(\chi(x_n y_n) z^{w(x_n)} \right) \\ &= \left(\sum_{x \in F_q} \chi(x y_1) z^{w(x)} \right) \left(\sum_{x \in F_q} \chi(x y_2) z^{w(x)} \right) \dots \left(\sum_{x \in F_q} \chi(x y_n) z^{w(x)} \right) \\ &= \prod_{i=1}^n \left(\sum_{x \in F_q} \chi(x y_i) z^{w(x)} \right). \end{aligned}$$

elde edilir. Eğer $y_i = 0$ ise,

$$\sum_{x \in F_q} \chi(xy_i) z^{w(x)} = \sum_{x \in F_q} \chi(0) z^{w(x)} = \sum_{x \in F_q} z^{w(x)} = 1 + (q-1)z$$

elde edilir. Eğer $y_i \neq 0$ ise, Teorem 1.4.1.1'den dolayı

$$\sum_{x \in F_q} \chi(xy_i) z^{w(x)} = 1 + \sum_{x \neq 0} \chi(xy_i) z = \sum_{x \in F_q} z^{w(x)} = 1 - z$$

dır. Bu yüzden,

$$\sum_{x \in V(n,q)} \chi(\langle x, y \rangle) z^{w(x)} = (1-z)^{w(y)} (1+(q-1)z)^{n-w(y)}$$

elde edilir. Elde edilen eşitlik $W_g^-(s)$ ifadesinde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} W_g^-(z) &= \sum_{y \in V(n,q)} \alpha_y \sum_{x \in V(n,q)} \chi(\langle x, y \rangle) z^{w(x)} \\ &= \sum_{y \in V(n,q)} \alpha_y (1-z)^{w(y)} (1+(q-1)z)^{n-w(y)} \\ &= (1+(q-1)z)^n \sum_{y \in V(n,q)} \alpha_y \left(\frac{1-z}{1+(q-1)z} \right)^{w(y)} \\ &= (1+(q-1)z)^n W_g \left(\left(\frac{1-z}{1+(q-1)z} \right) \right) \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 1.4.3.2. [15] $C \subset V(n, q)$ lineer kod ise bu taktirde $\tilde{g}_C = |C| g_{C^\perp}$ dir.

Sonuç 1.4.3.1. [15] (Lineer kodlar için MacWilliams özdeşliği) $C \subset V(n, q)$ lineer kod ve C^\perp , C lineer kodunun dik tümleyeni olsun. Bu taktirde,

$$W_{C^\perp}(z) = \frac{1}{|C|} (1 + (q-1)z)^n W_C \left(\left(\frac{1-z}{1+(q-1)z} \right) \right)$$

dır.

Örnek 1.4.3.1. $C = \{000, 111\}$ lineer kodunu ele alalım. Bu takdirde $g_C(t)$ üreteç fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$g_C(t) = t^{000} + t^{111}.$$

$x, y \in V(n, 2)$ için $\langle x, y \rangle \in F_2$ olduğundan, temel karakter olmayacak şekilde χ karakteri aşağıdaki alınabilir:

$$\alpha \in F_2 \text{ için } \chi(\alpha) = (-1)^\alpha.$$

Yani,

$$\chi_u(x) = (-1)^{\langle x, u \rangle}$$

dır. Bu takdirde;

$$\chi_x(g_C) = (-1)^{\langle 000, x \rangle} + (-1)^{\langle 111, x \rangle}$$

olacak şekilde aşağıdaki değerler elde edilir:

$$\chi_{000}(g_C) = (-1)^{\langle 000, 000 \rangle} + (-1)^{\langle 111, 000 \rangle} = 1 + 1 = 2,$$

$$\chi_{001}(g_C) = (-1)^{\langle 000, 001 \rangle} + (-1)^{\langle 111, 001 \rangle} = 1 + (-1) = 0,$$

$$\chi_{010}(g_C) = (-1)^{\langle 000, 010 \rangle} + (-1)^{\langle 111, 010 \rangle} = 1 + (-1) = 0,$$

$$\chi_{011}(g_C) = (-1)^{\langle 000, 011 \rangle} + (-1)^{\langle 111, 011 \rangle} = 1 + 1 = 2,$$

$$\begin{aligned}\chi_{100}(g_C) &= (-1)^{\langle 000,100 \rangle} + (-1)^{\langle 111,100 \rangle} = 1 + (-1) = 0, \\ \chi_{101}(g_C) &= (-1)^{\langle 000,101 \rangle} + (-1)^{\langle 111,101 \rangle} = 1 + 1 = 2, \\ \chi_{110}(g_C) &= (-1)^{\langle 000,110 \rangle} + (-1)^{\langle 111,110 \rangle} = 1 + 1 = 2, \\ \chi_{111}(g_C) &= (-1)^{\langle 000,111 \rangle} + (-1)^{\langle 111,111 \rangle} = 1 + (-1) = 0.\end{aligned}$$

Bu yüzden,

$$\tilde{g}_C(t) = \sum_{x \in V(n,2)} \chi_x(g_C) t^x = 2t^{000} + 2t^{011} + 2t^{101} + 2t^{110}$$

elde edilir.

Teorem 1.4.3.2'den $g_{C^\perp}(t) = t^{000} + t^{011} + t^{101} + t^{110}$ yani $C^\perp = \{000,011,101,110\}$ dik tümleyeni bulunur.

Verilen örnekte küçük bir kod ele alındığından bu kodun ağırlık sayacının MacWilliams özdeşliği ile bulunması etkili bir yol değildir. F_q üzerinde olabildiğince büyük bir k parametresine sahip bir kod için eşitliği kullanmak yerinde olacaktır. Örneğin, k parametresi $(n-k)$ 'dan oldukça büyük ise bu durumda kodun dik tümleyeninin ağırlık sayacını bulmak daha kolay olacaktır. Dolayısıyla, buradan kodun ağırlık sayacını hesaplamak çok daha verimlidir.

MacWilliams özdeşliği, kodun ağırlık sayacı ile dik tümleyeninin ağırlık sayacı arasında geçiş sağlamanın yanı sıra, en önemli uygulamalarından biri de lineer programlama sınırır [15]. Lineer programlama sınırı kısaca şöyle özetlenebilir:

Bir kod üç önemli parametreye sahiptir. Bunlar; uzunluk n , minimum uzaklık d ve kodun eleman sayısı M dir. Bu parametreler değiştikçe kodun hızı artmakta veya azalmaktadır. Herhangi bir kodun başka bir koddan daha hızlı olup olmadığını belirlemek için kodların bu parametrelerini karşılaştırmak gerekir. Karşılaştırılacak her kod için bu parametrelerden n ve d aynı değerleri aldığı zaman M üzerinde karşılaştırmalar yapılabilir. Bir kodun içerdiği kodsöz sayısı ne kadar çok olursa

iletişim o kadar çok yönlü olacaktır. Dolayısıyla M nin sabitlenmeyen parametre olmasındaki neden budur. Bu noktada kodlama teorisinin en temel problemi ortaya çıkmaktadır. “Uzunluğu ve minimum uzaklığı bilinen bir kod en fazla kaç kodsöz bulundurabilir?” sorusudur. M nin bulunması için belirlenen bir çok yöntem ortaya atılmıştır ama bilinen en yetkin teknik Philippe Delsarte’ın Lineer Programlama yöntemidir. Delsarte, bu yöntemde sonlu cisimler üzerinde minimum uzaklıklı kodların kodsöz sayısı için sınırların belirlenmesi işlemini bir lineer programlama problemi olarak ele almıştır. Bu yöntem, ağırlık sayaçlarının ve MacWilliams teoreminin ispatında verilen tekniklerin kullanılması ile ispatlanmaktadır [5], [15].

Ağırlık sayaçlarının ve MacWilliams özdeşliğinin diğer bir önemli uygulaması öz dual olan kodlar üzerinde de görülmektedir. Öz dual olan kodlar $C = C^\perp$ şartını sağlayan lineer kodlardır. Öz dual olan kodların en önemli özelliği Teorem 1.4.3.3 ile verilmektedir. Bu teoremden öz dual olan kodların bazı özel kodların ağırlık sayaçları ile temsil edilebileceği sonucuna varılmaktadır.

$[8,4,4]$ parametrelerine sahip Hamming kodun ağırlık sayacı ve $[24,12,8]$ parametrelerine sahip Golay kodun ağırlık sayaçları sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$W_H(x, y) = x^8 + 14x^4y^4 + y^8,$$

$$W_G(x, y) = x^{24} + 759x^{16}y^8 + 2576x^{12}y^{12} + 759x^8y^{16} + y^{24}.$$

Aşağıdaki teorem çift uzunluğa sahip öz dual olan kodların ağırlık sayaçlarını karakterize etmektedir.

Teorem 1.4.3.3. [5] (Gleason Teoremi) Her çift uzunluğa sahip öz dual olan kodun

$$\text{ağırlık sayacı } W_H(x, y) \text{ ve } W_G^*(x, y) = \frac{W_H(x, y)^3 - W_G(x, y)}{42} = x^4y^4(x^4 - y^4)^4$$

polinomlarının bir $F[x, y]$ lineer toplamıdır.

Aynı zamanda C , F_q sonlu cismi üzerinde öz dual olan bir kod ise $W_C(x, y)$ ağırlık sayacı aşağıda verilen MacWilliams dönüşümü altında sabit kalır:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{q}} \begin{pmatrix} 1 & q-1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

C kodunun ağırlık sayacı ile bu kodun MacWilliams dönüşümü aynı ise bu kod formel öz dual kod olarak adlandırılır. Öz dual olan kodlar için ağırlık sayacıları arasındaki ilişki [16] nolu kaynakta ayrıntılı olarak bulunabilir.

Ağırlık sayacıları ile ilgili birçok uygulamayı literatürde bulmak mümkündür. Bu tezde de m-spotty Rosenbloom-Tsfasman ağırlık sayacıları için MacWilliams özdeşliğinin bir uygulaması sunulacaktır.

BÖLÜM 2. SONLU CİSİMLER ÜZERİNDE M-SPOTTY HAMMING AĞIRLIK SAYACI İÇİN MACWILLIAMS ÖZDEŞLİKLERİ

Değişen ve gelişen çağımızda, hayatın hemen her alanında kullanılan bilgisayarların daha hızlı, daha güvenilir ve bilgiyi daha iyi saklama, daha iyi iletme ve daha fazla bilgi depolama amacı ile birçok araştırmacı bilgisayarların donanımı üzerinde yeni teknikler geliştirmeye çalışmaktadır. Bilgisayar donanım sistemlerinin önemli bir kısmını oluşturan RAM yongaları 4-bit giriş/çıkış genişliğindeki bilgisayar hafıza sistemlerinde bit hata kontrol kodları ile kullanılmıştır[17]. Son zamanlarda, 1989'da kullanılan bu RAM yongaları yerini 8, 16, 32-bit giriş/çıkış genişliğindeki yüksek yoğunluklu RAM yongalarına bırakmıştır. Bu yüksek yoğunluklu RAM yongaları yüksek yoğunluklu alanlara, radyoaktif parçacıklara, vb. gibi durumlara maruz kaldıklarında bu yongalarda birçok gelişmiş güzel hata bitleri meydana gelmektedir. Dolayısıyla yüksek yoğunluklu RAM yongalarında hataları daha iyi kontrol etmek amacıyla s-spotty parça hatası yerini hataları daha iyi kontrol eden ikili kodlar için Hamming metriği baz alınarak elde edilen m-spotty parça hatasına bırakmıştır [14]. Daha sonrasında yeni tanımlanan m-spotty parça hatası aracılığıyla m-spotty ağırlığı ve uzaklığı tanımlanmış ve bu tanımlamalardan yararlanılarak verilen kod için ağırlık sayaçları belirlenmiş ve tanımlanan bu ağırlık sayaçları ile kodun kendisi ve dik tümleyen arasında önemli bir ilişki olan MacWilliams özdeşliği elde edilmiştir [12].

M-spotty kavramı, Hamming uzaklığı ve Lee uzaklığı kullanılarak iki farklı şekilde tanımlanmıştır. Bu uzaklıklar aracılığıyla yeni uzaklıklar inşa edilmiş ve sırasıyla m-spotty uzaklık ve m-spotty Lee uzaklık adını almıştır. Tanımlanan bu uzaklıklar sayesinde ağırlık sayaçları ifade edilmiş ve MacWilliams özdeşlikleri ispat edilmiştir [12,18].

Suzuki ve Fujiwara tarafından, F_2 sonlu cismi ve F_{2^k} sonlu genişlemesi üzerinde Hamming metriğine göre ağırlık sayaçları kullanılarak MacWilliams özdeşliğinin

elde edilmesi çalışması, aynı zamanda bu tezin çıkış noktasını oluşturmuştur [12]. Daha sonra, Şiap tarafından m-spotty Lee metrik tanımı yapılmıştır ve bu çalışmada m-spotty Lee ağırlığı ve uzaklığı, m-spotty Lee ağırlık sayaçları ve m-spotty Lee ağırlık sayaçları için MacWilliams özdeşliği ispat edilmiştir [18]. [12] nolu çalışmanın genelleştirilmiş hali, Özen ve Şiap tarafından ispatlanmış ve bu çalışmada $q = p^k$ ve p asal bir sayı olmak üzere F_q sonlu cismi üzerinde m-spotty ağırlık sayaçları için MacWilliams özdeşliği elde edilmiştir [19].

Bu tezde, Rosenbloom-Tsfasman metriği aracılığıyla m-spotty Rosenbloom-Tsfasman adı verilen yeni bir metrik inşa edilmektedir ve bu metrik sayesinde farklı cebirsel yapılar üzerinde MacWilliams özdeşlikleri elde edilmektedir.

Tezin çıkış noktası olan “MacWilliams identity for m-spotty weight enumerator” adlı [12] nolu çalışmada verilen temel tanım ve teoremler, tanımlanan ağırlık sayacına göre elde edilen MacWilliams özdeşliği aşağıdaki gibidir:

Tanım 2.1. [12] e , F_2 üzerinde bir hata vektörü olsun. $0 \leq i \leq n-1$ olmak üzere e_i , e hata vektörünün i inci parçasını temsil etsin. e hata vektöründeki t/b -hatalarının sayısı yada m-spotty Hamming ağırlığı

$$w_M(e) = \sum_{i=0}^{n-1} \left\lfloor \frac{w_H(e_i)}{t} \right\rfloor = l.$$

dır. Burada $w_H(e_i)$, e_i vektörünün F_2 üzerinde Hamming ağırlığını göstermektedir. Eğer $w_M(e) = l$ ise, bu tip hatalar l m-spotty parça hatası olarak adlandırılır.

Eğer $t = b$ ise, $w_M(e)$ aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$w_M(e) = \sum_{i=0}^{n-1} \left\lfloor \frac{w_H(e_i)}{b} \right\rfloor = l.$$

Burada,

$$\left[\frac{w_H(e_i)}{b} \right] = \begin{cases} 0 & w_H(e_i) = 0 \text{ ise,} \\ 1 & w_H(e_i) \neq 0 \text{ ise} \end{cases}$$

dır.

Bu takdirde $w_M(e)$, e hata vektöründeki hatalı parçaların sayısı demektir. Yani, $t = b$ ise m-spotty ağırlığı F_2^b üzerinde Hamming ağırlığına eşittir. Eğer $t = 1$ ise, $w_M(e)$ aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$w_M(e) = \sum_{i=0}^{n-1} \left[\frac{w_H(e_i)}{1} \right] = \sum_{i=0}^{n-1} w_H(e_i).$$

Bu takdirde $w_M(e)$, e hata vektöründeki hatalı bitlerin sayısı demektir. Yani, m-spotty ağırlığı F_2 sonlu cismi üzerinde Hamming ağırlığına eşittir.

Tanım 2.2. [12] u ve v kodsözleri için, m-spotty uzaklık fonksiyonu $d_M(u, v)$ aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$d_M(u, v) = \sum_{i=0}^{n-1} \left[\frac{d_H(u_i, v_i)}{t} \right].$$

Burada $d_H(u_i, v_i)$, F_2 üzerinde u ve v kodsözlerinin i inci parçaları arasındaki Hamming uzaklığını göstermektedir.

Eğer $t = b$ ise bu fonksiyon F_2^b üzerinde Hamming uzaklığına eşittir. Ayrıca, eğer $t = 1$ ise bu fonksiyon F_2 sonlu cismi üzerinde Hamming uzaklığına eşittir.

Teorem 2.1. [12] M-spotty uzaklığı bir metriktir. Yani, Tanım 2.2'de verilen uzaklık fonksiyonu aşağıda verilen metrik aksiyomlarını sağlar:

i) $u \neq v$ için $d_M(u, v) > 0$,

$$u = v \text{ için } d_M(u, v) = 0.$$

$$\text{ii) } d_M(u, v) = d_M(v, u).$$

$$\text{iii) } d_M(u, v) \leq d_M(u, c) + d_M(c, v).$$

İspat: i) d_H uzaklık fonksiyonu F_2 üzerinde bir metrik olduğundan $u \neq v$ iken en az bir i için $u_i \neq v_i$ olacağından $d_H(u_i, v_i) > 0$ dır. Dolayısıyla $d_M(u, v) > 0$ olduğu görülür. Eğer $u = v$ ise, her i için $u_i = v_i$ olacağından $d_H(u_i, v_i) = 0$ dır. Dolayısıyla $d_M(u, v) = 0$ olduğu görülür.

ii) d_H uzaklık fonksiyonu F_2 üzerinde bir metrik olduğundan $d_H(u_i, v_i) = d_H(v_i, u_i)$ eşitliği sağlanır. Buradan,

$$d_M(u, v) = \sum_{i=0}^{n-1} \left[\frac{d_H(u_i, v_i)}{t} \right] = \sum_{i=0}^{n-1} \left[\frac{d_H(v_i, u_i)}{t} \right] = d_M(v, u)$$

elde edilir.

iii) Hamming uzaklığı d_H , F_2 üzerinde $d_H(u_i, v_i) \leq d_H(u_i, c_i) + d_H(c_i, v_i)$ eşitsizliğini sağlar. Bu yüzden $t \in \mathbb{Z}^+$ olduğundan $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ için,

$$\frac{d_H(u_i, v_i)}{t} \leq \frac{d_H(u_i, c_i)}{t} + \frac{d_H(c_i, v_i)}{t}$$

yazılabilir. Buradan,

$$\begin{aligned} \left[\frac{d_H(u_i, v_i)}{t} \right] &\leq \left[\frac{d_H(u_i, c_i)}{t} + \frac{d_H(c_i, v_i)}{t} \right] \\ &\leq \left[\frac{d_H(u_i, c_i)}{t} \right] + \left[\frac{d_H(c_i, v_i)}{t} \right] \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin her iki tarafının $i = 0$ dan $n - 1$ e kadar toplamı alınırsa

$$d_M(u, v) \leq d_M(u, c) + d_M(c, v)$$

eşitsizliği elde edilir.

Tanım 2.3. [12] C kodunun minimum m-spotty uzaklık fonksiyonu d , aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$d = \min_{\substack{u, v \in C \\ u \neq v}} d_M(u, v).$$

Tanım 2.4. [12] C , b parçaların bir n katı olan $N = nb$ uzunluğunda bir kod olsun. $V(nb, 2)$, F_2 sonlu cismi üzerinde tanımlı bir vektör uzayı olsun. $u, v \in V(nb, 2)$ vektörlerinin iç çarpımı aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=0}^{n-1} \langle u_i, v_i \rangle = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{b-1} u_{i,j} \cdot v_{i,j} \right).$$

Burada $\langle u_i, v_i \rangle = \sum_{j=0}^{b-1} u_{i,j} \cdot v_{i,j}$, u_i ve v_i parçalarının iç çarpımını ve $u_{i,j}$ ve $v_{i,j}$ ise u_i ve v_i parçalarının j inci bitlerini göstermektedir.

Herhangi bir u kodsözü için, $\alpha_j(u)$ Hamming ağırlığı j olan parçaların sayısını gösterebilir. Bu taktirde, $\alpha_0(u), \alpha_1(u), \dots, \alpha_b(u)$ sayılarının toplamı, kodun parça sayısını verir. $(\alpha_0(u), \alpha_1(u), \dots, \alpha_b(u))$ Hamming ağırlık dağılım vektörü olmak üzere, bu dağılım vektörü u kodsözü için tek türlü belirlenir. $A_{(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_b)}$, $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_b)$ Hamming ağırlık dağılım vektörüne sahip kodsözlerin sayısını göstermektedir.

Örnek 2.1. $b = 4$ olmak üzere, $u = (0001 \ 1010 \ 1100 \ 0000 \ 1111 \ 0110)$ olsun.

Bu takdirde $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (1, 1, 3, 0, 1)$ dır ve $A_{(1,1,3,0,1)}$, Hamming ağırlık dağılım vektörü $(1, 1, 3, 0, 1)$ olan kodsözleri göstermektedir.

Tanım 2.5. [12] $W_C(z) = \sum_{u \in C} z^{w_M(u)}$ polinomuna m-spotty parça hata kontrol C kodunun ağırlık sayacı denir.

Örnek 2.2. $b = 4$ ve $t = 2$ olmak üzere, C lineer kodu aşağıdaki gibi verilsin:

$$C = \{0000 \ 0000 \ 0000, 1000 \ 1100 \ 0101, 0100 \ 0111 \ 1100, 1100 \ 1011 \ 1111\}.$$

Kodsözlerin C lineer kodunun m-spotty ağırlık sayacının terimlerine katkısı aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} c_1 = (0000 \ 0000 \ 0000) &\rightarrow z^{\lceil 0/2 \rceil + \lceil 0/2 \rceil + \lceil 0/2 \rceil} = z^0, \\ c_2 = (1000 \ 1100 \ 0101) &\rightarrow z^{\lceil 1/2 \rceil + \lceil 2/2 \rceil + \lceil 2/2 \rceil} = z^3, \\ c_3 = (0100 \ 0111 \ 1010) &\rightarrow z^{\lceil 1/2 \rceil + \lceil 3/2 \rceil + \lceil 2/2 \rceil} = z^4, \\ c_4 = (1100 \ 1011 \ 1111) &\rightarrow z^{\lceil 2/2 \rceil + \lceil 3/2 \rceil + \lceil 4/2 \rceil} = z^5. \end{aligned}$$

Dolayısıyla C lineer kodunun m-spotty ağırlık sayacı aşağıdaki gibi elde edilir:

$$W_C(z) = 1 + z^3 + z^4 + z^5$$

Tanım 2.5'de verilen C kodunun ağırlık sayacı, $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_b)$ Hamming ağırlık dağılımına sahip kodsözlerin sayısı olan $A_{(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_b)}$ ile aşağıdaki gibi yorumlanabilir:

$$W_C(z) = \sum_{\substack{(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_b) \\ \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_b \geq 0 \\ \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_b = n}} A_{(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_b)} \prod_{j=0}^b \left(z^{\lceil j/t \rceil} \right)^{\alpha_j}$$

z değişkenin kuvveti olan $\sum_{j=0}^b \lceil j/t \rceil \cdot \alpha_j$ ifadesi kodsözün m -spotty ağırlığını vermektedir [12].

Örnek 2.3. Örnek 2.2’de verilen C lineer kodunu ele alalım. C lineer kodu için Hamming ağırlık dağılım kodsözleri sayısını belirleyelim. C lineer kodu için Hamming ağırlık dağılım vektörleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} c_1 &= (0000 \ 0000 \ 0000) \rightarrow (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (3, 0, 0, 0, 0), \\ c_2 &= (1000 \ 1100 \ 0101) \rightarrow (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (0, 1, 2, 0, 0), \\ c_3 &= (0100 \ 0111 \ 1010) \rightarrow (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (0, 1, 1, 1, 0), \\ c_4 &= (1100 \ 1011 \ 1111) \rightarrow (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (0, 0, 1, 1, 1). \end{aligned}$$

Dolayısıyla Hamming ağırlık dağılım kodsözleri sayısı şu şekildedir:

$$\frac{A_{(3,0,0,0,0)}}{1} \frac{A_{(0,1,2,0,0)}}{1} \frac{A_{(0,1,1,1,0)}}{1} \frac{A_{(0,0,1,1,1)}}{1}.$$

Buradan ağırlık sayacı aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} W_C(z) &= A_{(3,0,0,0,0)} (z^{\lceil 0/2 \rceil})^3 (z^{\lceil 1/2 \rceil})^0 (z^{\lceil 2/2 \rceil})^0 (z^{\lceil 3/2 \rceil})^0 (z^{\lceil 4/2 \rceil})^0 \\ &\quad + A_{(0,1,2,0,0)} (z^{\lceil 0/2 \rceil})^0 (z^{\lceil 1/2 \rceil})^1 (z^{\lceil 2/2 \rceil})^2 (z^{\lceil 3/2 \rceil})^0 (z^{\lceil 4/2 \rceil})^0 \\ &\quad + A_{(0,1,1,1,0)} (z^{\lceil 0/2 \rceil})^0 (z^{\lceil 1/2 \rceil})^1 (z^{\lceil 2/2 \rceil})^1 (z^{\lceil 3/2 \rceil})^1 (z^{\lceil 4/2 \rceil})^0 \\ &\quad + A_{(0,0,1,1,1)} (z^{\lceil 0/2 \rceil})^0 (z^{\lceil 1/2 \rceil})^0 (z^{\lceil 2/2 \rceil})^1 (z^{\lceil 3/2 \rceil})^1 (z^{\lceil 4/2 \rceil})^1 \\ &= 1 + z^3 + z^4 + z^5. \end{aligned}$$

Örnek 2.2’de elde edilen ağırlık sayacı ile aynı olduğu görülebilir.

Teorem 2.2. [12] (MacWilliams Özdeşliği) C , b parçaların bir n katı olan $N = nb$ uzunluğunda bir kod olsun. C kodunun ağırlık sayacı $W_C(z)$ ile dik tümleyeninin ağırlık sayacı $W_{C^\perp}(z)$ arasında aşağıdaki gibi bir bağıntı vardır:

$$g_j^t(z) = \sum_{p=0}^b \left\{ \sum_{s=0}^p (-1)^{p-s} \binom{j}{p-s} \binom{b-j}{s} \right\} z^{\lceil p/t \rceil} \text{ ve } j < l \text{ için } \binom{j}{l} = 0 \text{ ve } \binom{0}{0} = 1$$

olmak üzere;

$$W_{C^\perp}(z) = \sum_{\substack{(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_b) \\ \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_b \geq 0 \\ \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_b = n}} A_{(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_b)}^\perp \prod_{j=0}^b \left(z^{\lceil j/t \rceil} \right)^{\alpha_j} = 2^{-k} \sum_{\substack{(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_b) \\ \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_b \geq 0 \\ \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_b = n}} A_{(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_b)} \prod_{j=0}^b \left(g_j^t(z) \right)^{\alpha_j}$$

özdeşliği sağlanır.

Örnek 2.4. Örnek 2.2’de verilen C lineer kodu için MacWilliams özdeşliğinin sağlandığını gösterelim. İlk önce C^\perp lineer kodunun ağırlık sayacını bulalım. Bunun için C^\perp kodunun elemanları olan kodsözleri tespit etmek gerekir.

C^\perp kodunun ağırlık sayacı, bilgisayar programı aracılığı ile Tanım 2.5 kullanılarak aşağıdaki gibi elde edilir:

$$W_{C^\perp}(z) = 1 + 6z + 75z^2 + 340z^3 + 375z^4 + 198z^5 + 29z^6.$$

Kodun kendisi ile dik tümleyen arasındaki bağıntıyı elde etmek için Hamming ağırlık dağılım kodsöz sayısına ve g_j^t polinomlarının hesaplanmasına gerek vardır. Bu örnek için Hamming ağırlık dağılım kodsöz sayısı Örnek 2.3’de elde edilmiştir. g_j^t polinomları ise aşağıdaki gibi elde edilir:

$$g_0^2(z) = 1 + 10z + 5z^2,$$

$$g_1^2(z) = 1 + 2z - 3z^2,$$

$$g_2^2(z) = 1 - 2z + z^2,$$

$$g_3^2(z) = 1 - 2z + z^2,$$

$$g_4^2(z) = 1 + 2z - 3z^2.$$

Elde edilen sonuçlar Teorem 2.2'de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} W_{C^1}(z) &= 2^{-k} \sum_{\substack{(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \\ \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \geq 0 \\ \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 3}} A_{(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)} \prod_{j=0}^4 (g_j^2(z))^{\alpha_j} \\ &= \frac{1}{2^2} \left(\begin{aligned} &A_{(3,0,0,0,0)} (g_0^2(z))^3 + A_{(0,1,2,0,0)} (g_1^2(z))(g_2^2(z))^2 \\ &+ A_{(0,1,1,1,0)} (g_1^2(z))(g_2^2(z))(g_3^2(z)) \\ &+ A_{(0,0,1,1,1)} (g_2^2(z))(g_3^2(z))(g_4^2(z)) \end{aligned} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\begin{aligned} &(1+10z+5z^2)^3 + (1+2z-3z^2)(1-2z+z^2)^2 \\ &+ (1+2z-3z^2)(1-2z+z^2)(1-2z+z^2) \\ &+ (1-2z+z^2)(1-2z+z^2)1+2z-3z^2 \end{aligned} \right) \\ &= 1 + 6z + 75z^2 + 340z^3 + 375z^4 + 198z^5 + 29z^6 \end{aligned}$$

bulunur. Bu da özdeşliğin sağlandığını gösterir.

BÖLÜM 3. M-SPOTTY ROSENBLOOM-TSFASMAN AĞIRLIK SAYACI İÇİN MACWILLIAMS ÖZDEŞLİKLERİ – I

Bu bölümde, m-spotty parça hata kontrol kodları, Rosenbloom-Tsfasman (kısaca RT) metriği baz alınarak yeni bir metrik olarak tanımladığımız m-spotty RT (MRT) metriği ile karakterize edilmektedir. Bu metrik ile birlikte m-spotty RT ağırlık, m-spotty RT uzaklık, m-spotty RT ağırlık sayacı tanımları verilmektedir. Bu sayede m-spotty parça hata kontrol kodu ve dik tümleyeni için bu kodların m-spotty RT ağırlık sayacıları arasında önemli bir bağıntı olan MacWilliams özdeşliği elde edilmektedir.

Bu bölümdeki çalışmalar, öncelikle F_2 sonlu cismi üzerinde daha sonra daha genel olan F_q sonlu cismi üzerinde yapılmaktadır.

3.1. F_2 Sonlu Cismi Üzerinde Tanım ve Teoremler

Tanım 3.1.1. [20] F_2 sonlu bir cisim, $V(n, 2) = F_2^n$, F_2 üzerinde n uzunluğundaki bütün vektörlerin kümesi ve $C \subset V(n, 2)$ olsun. $c = (c_1, c_2, \dots, c_n) \in C$ kodsözünün RT ağırlığı,

$$w_{RT}(c) = \begin{cases} \max \{i : c_i \neq 0\} & , c \neq 0 \\ 0 & , c = 0 \end{cases}$$

olarak tanımlanır. $c, v \in C$ için $d_{RT}(c, v) = w_{RT}(c - v)$ şeklinde tanımlanan d fonksiyonuna c ve v kodsözlerinin RT uzaklığı denir. Ayrıca d_{RT} uzaklık fonksiyonu, F_2 üzerinde bir metriktir.

Tanım 3.1.2. e bir hata vektörü olsun. $0 \leq i \leq n-1$ olmak üzere e_i , e hata vektörünün i inci parçasını temsil etsin. e hata vektöründeki t/b -hatalarının sayısı

$$w_{MRT}(e) = \sum_{i=0}^{n-1} \left[\frac{w_{RT}(e_i)}{t} \right]$$

dır. Burada $w_{RT}(e_i)$, e_i hata vektörünün F_2 üzerinde RT ağırlığını göstermektedir.

Sonuç 3.1.1. Eğer $t = b$ alınırsa, $w_{MRT}(e)$ aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$w_{MRT}(e) = \sum_{i=0}^{n-1} \left[\frac{w_{RT}(e_i)}{b} \right].$$

Burada,

$$\left[\frac{w_{RT}(e_i)}{b} \right] = \begin{cases} 0 & w_{RT}(e_i) = 0 \text{ ise,} \\ 1 & w_{RT}(e_i) \neq 0 \text{ ise} \end{cases}$$

elde edilir. Bu takdirde $w_{MRT}(e)$, e hata vektöründeki hatalı parçaların sayısı demektir. Yani, $t = b$ ise m-spotty RT ağırlığı F_2^b üzerinde RT ağırlığına eşittir.

Sonuç 3.1.2. Eğer $t = 1$ ise, $w_{MRT}(e)$ aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$w_{MRT}(e) = \sum_{i=0}^{n-1} \left[\frac{w_{RT}(e_i)}{1} \right] = \sum_{i=0}^{n-1} w_{RT}(e_i).$$

Yani, m-spotty RT ağırlığı F_2 sonlu cismi üzerinde RT ağırlığına eşittir.

Örnek 3.1.1. $b = 8$ ve $t = 2$ olmak üzere e hata vektörü aşağıdaki gibi verilsin:

$$e = (00110011 \ 01000100 \ 01100110 \ 01010000) \in F_2^{32}.$$

e_i , e hata vektörünün i inci parçasını göstermek üzere e hata vektörünün parçaları aşağıdaki gibidir:

$$e_0 = (00110011),$$

$$e_1 = (01000100),$$

$$e_2 = (01100110),$$

$$e_3 = (01010000).$$

Burada $i = 0, 1, 2, 3$ için $e_i \in F_2^8$ dır.

e_i parçalarının RT ağırlığı sırasıyla,

$$w_{RT}(e_0) = 8,$$

$$w_{RT}(e_1) = 6,$$

$$w_{RT}(e_2) = 7,$$

$$w_{RT}(e_3) = 4$$

bulunur. Dolayısıyla, e hata vektörünün m-spotty RT ağırlığı aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} w_{MRT}(e) &= \sum_{i=0}^3 \left\lceil \frac{w_{RT}(e_i)}{2} \right\rceil \\ &= \left\lceil \frac{w_{RT}(e_0)}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{w_{RT}(e_1)}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{w_{RT}(e_2)}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{w_{RT}(e_3)}{2} \right\rceil \\ &= \left\lceil \frac{8}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{6}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{7}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{4}{2} \right\rceil \\ &= 4 + 3 + 4 + 2 \\ &= 13. \end{aligned}$$

Tanım 3.1.3. C m-spotty parça hata kontrol kodunun u ve v kodsözleri için, m-spotty RT uzaklık fonksiyonu

$$d_{MRT}(u, v) = \sum_{i=0}^{n-1} \left[\frac{d_{RT}(u_i, v_i)}{t} \right].$$

dır. Burada $d_{RT}(u_i, v_i)$, F_2 üzerinde u ve v kodsözlerinin i inci parçaları arasındaki RT uzaklığını göstermektedir. C kodunun minimum m-spotty RT uzaklığı

$$d = \min_{\substack{u, v \in C \\ u \neq v}} d_{MRT}(u, v)$$

şeklindedir.

u ve v arasındaki m-spotty RT uzaklığı ile $u - v$ nin m-spotty RT ağırlığı arasında aşağıdaki gibi bir ilişki vardır:

$$\begin{aligned} d_{MRT}(u, v) &= \sum_{i=0}^{n-1} \left[\frac{d_{RT}(u_i, v_i)}{t} \right] \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \left[\frac{w_{RT}(u_i - v_i)}{t} \right] \\ &= w_{MRT}(u - v). \end{aligned}$$

Teorem 3.1.1. M-spotty RT uzaklığı bir metriktir. Yani, Tanım 3.1.3'te verilen uzaklık fonksiyonu aşağıda verilen metrik aksiyomlarını sağlar:

i) $u \neq v$ için $d_{MRT}(u, v) > 0$,

$u = v$ için $d_{MRT}(u, v) = 0$.

ii) $d_{MRT}(u, v) = d_{MRT}(v, u)$.

iii) $d_{MRT}(u, v) \leq d_{MRT}(u, c) + d_{MRT}(c, v)$.

İspat: i) d_{RT} uzaklık fonksiyonu F_2 üzerinde bir metrik olduğundan $u \neq v$ iken en az bir i için $u_i \neq v_i$ olacağından $d_{RT}(u_i, v_i) > 0$ dır. Dolayısıyla $d_{MRT}(u, v) > 0$ olduğu görülür. Eğer $u = v$ ise, bütün i ler için $u_i = v_i$ olacağından $d_{RT}(u_i, v_i) = 0$ dır. Dolayısıyla $d_{MRT}(u, v) = 0$ olduğu görülür.

ii) d_{RT} uzaklık fonksiyonu F_2 üzerinde bir metrik olduğundan $d_{RT}(u_i, v_i) = d_{RT}(v_i, u_i)$ dır. Buradan,

$$d_{MRT}(u, v) = \sum_{i=0}^{n-1} \left| \frac{d_{RT}(u_i, v_i)}{t} \right| = \sum_{i=0}^{n-1} \left| \frac{d_{RT}(v_i, u_i)}{t} \right| = d_{MRT}(v, u)$$

elde edilir.

iii) RT uzaklığı d_{RT} , F_2 üzerinde $d_{RT}(u_i, v_i) \leq d_{RT}(u_i, c_i) + d_{RT}(c_i, v_i)$ eşitsizliğini sağlar. Bu yüzden $t \in \mathbb{Z}^+$ olduğundan $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ için,

$$\frac{d_{RT}(u_i, v_i)}{t} \leq \frac{d_{RT}(u_i, c_i)}{t} + \frac{d_{RT}(c_i, v_i)}{t}$$

yazılabilir. Buradan,

$$\begin{aligned} \left| \frac{d_{RT}(u_i, v_i)}{t} \right| &\leq \left| \frac{d_{RT}(u_i, c_i)}{t} + \frac{d_{RT}(c_i, v_i)}{t} \right| \\ &\leq \left| \frac{d_{RT}(u_i, c_i)}{t} \right| + \left| \frac{d_{RT}(c_i, v_i)}{t} \right| \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin her tarafı $i = 0$ dan $n-1$ e kadar toplamı alınırsa

$$d_{MRT}(u, v) \leq d_{MRT}(u, c) + d_{MRT}(c, v)$$

eşitsizliği elde edilir.

Örnek 3.1.2. $b = 8$ ve $t = 3$ olmak üzere u ve v kodsözleri aşağıdaki gibi verilsin:

$$u = (10000000 \ 11110100),$$

$$v = (01010001 \ 00001010).$$

Bu takdirde parçaların RT uzaklıkları

$$d_{RT}(u_0, v_0) = d_{RT}(10000000, 01010001) = 8,$$

$$d_{RT}(u_1, v_1) = d_{RT}(11110100, 00001010) = 7$$

dır. Dolayısıyla u ve v kodsözleri arasındaki m-spotty RT uzaklığı

$$\begin{aligned} d_{MRT}(u, v) &= \sum_{i=0}^1 \left\lceil \frac{d_{RT}(u_i, v_i)}{3} \right\rceil \\ &= \left\lceil \frac{d_{RT}(u_0, v_0)}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{d_{RT}(u_1, v_1)}{3} \right\rceil \\ &= \left\lceil \frac{8}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{7}{3} \right\rceil \\ &= 3 + 3 = 6 \end{aligned}$$

dır.

Tanım 3.1.4. b parça uzunluğunu, n parça sayısını ve N verilen uzayın elemanlarının uzunluğunu göstermek üzere $N = nb$ eşitliği sağlansın. $V(nb, 2) = F_2^{nb}$ vektör uzayı için $c, v \in V(nb, 2)$ olmak üzere u ve v elemanlarının iç çarpımı aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$\langle c, v \rangle = \sum_{i=0}^{n-1} \langle c_i, v_i \rangle = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{b-1} c_{(i,j)} v_{(i,b-j+1)} \right).$$

Burada, $\langle c_i, v_i \rangle = \sum_{j=0}^{b-1} c_{(i,j)} v_{(i,b-j+1)}$, c_i ve v_i elemanlarının iç çarpımlarını, ayrıca $c_{(i,j)}$ ve $v_{(i,j)}$ sırasıyla c_i ve v_i elemanlarının j inci bitlerini göstermektedir.

Örnek 3.1.3. $b = 8$ olmak üzere, $V(16, 2)$ vektör uzayında u ve v elemanları

$$c = (10000000 \ 11110100),$$

$$v = (01010001 \ 00001010)$$

olsun. u ve v elemanlarının iç çarpımı aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\begin{aligned} \langle c, v \rangle &= \sum_{i=0}^1 \langle c_i, v_i \rangle \\ &= \langle c_0, v_0 \rangle + \langle c_1, v_1 \rangle \\ &= 1 + 0 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Tanım 3.1.5. [5] f , F_2^n üzerinde tanımlı bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun Hadamard fonksiyonu olan \tilde{f} aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$c \in F_2^n \text{ olmak üzere } \tilde{f}(c) = \sum_{v \in F_2^n} (-1)^{\langle c, v \rangle} f(v)$$

dır.

Ön Teorem 3.1.1. [5] Eğer C bir ikili $[n, k]$ -kodu ise,

$$\sum_{c \in C^\perp} f(c) = \frac{1}{|C|} \sum_{c \in C} \tilde{f}(c)$$

dır.

MacWilliams özdeşliğinin ispatında önemli bir yer tutan Hadamard fonksiyonunu belirlemede kolaylık sağlaması açısından aşağıdaki P_k kümeleri tanımlanmaktadır.

Tanım 3.1.6. $V(n, 2)$ bir vektör uzayı olsun.

$$P_k = \{v \in V(n, 2) : \deg v(x) = k\}$$

olmak üzere, $V(n, 2)$ uzayının bir ayrışımı P_k kümeleri ile ifade edilebilir. Yani, $I = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ için,

$$V(n, 2) = \bigcup_{k \in I} P_k \text{ ve } i \neq j \text{ için } P_i \cap P_j = \emptyset$$

sağlanır. Hadamard fonksiyonu inşa edilirken derecesi sıfır olan polinomların oluşturduğu P_0 kümesi aşağıdaki gibi ifade edilecektir:

$$P_0 = \{00..00, 10..00\}$$

olduğundan $P_0^* = \{00..00\}$ ve $P_0^{**} = \{10..00\}$ kümeleri için $P_0 = P_0^* \cup P_0^{**}$ ifadesi kullanılacaktır.

3.2. F_2 Sonlu Cismi Üzerinde Hadamard Fonksiyonunun İnşa Edilmesi

$\tilde{f}(c) = \sum_{v \in F_2^n} (-1)^{\langle c, v \rangle} f(v)$ Hadamard fonksiyonu olmak üzere,

$$\delta = \sum_{v \in F_2^n} (-1)^{\langle c, v \rangle}$$

kısımını ele alalım. Tanım 3.1.6'da verilen P_k kümeleri ile δ ifadesi aşağıdaki gibi yazılabilir:

c sabit bir eleman ve $c = (c_0, c_1, \dots, c_{n-3}, c_{n-2}, c_{n-1})$, $v = (v_0, v_1, v_2, \dots, v_{n-3}, v_{n-2}, v_{n-1})$ olmak üzere,

$$\delta = \sum_{v \in P_2^n} (-1)^{\langle c, v \rangle} = \sum_{v \in P_0} (-1)^{\langle c, v \rangle} + \sum_{v \in P_1} (-1)^{\langle c, v \rangle} + \sum_{v \in P_2} (-1)^{\langle c, v \rangle} + \dots + \sum_{v \in P_{n-1}} (-1)^{\langle c, v \rangle}$$

elde edilir. Eşitliğin ilk toplamı olan $\sum_{v \in P_0} (-1)^{\langle c, v \rangle}$ için Tanım 3.1.6'da P_0 kümesi için

bahsi geçen durum göz önüne alınarak toplam aşağıdaki gibi iki toplam olarak ifade edilebilir:

$$\sum_{v \in P_0} (-1)^{\langle c, v \rangle} = \sum_{v \in P_0^*} (-1)^{\langle c, v \rangle} + \sum_{v \in P_0^{**}} (-1)^{\langle c, v \rangle}.$$

Dolayısıyla δ aşağıdaki son halini alır:

$$\delta = \sum_{v \in P_0^*} (-1)^{\langle c, v \rangle} + \sum_{v \in P_0^{**}} (-1)^{\langle c, v \rangle} + \sum_{v \in P_1} (-1)^{\langle c, v \rangle} + \sum_{v \in P_2} (-1)^{\langle c, v \rangle} + \dots + \sum_{v \in P_{n-1}} (-1)^{\langle c, v \rangle}.$$

δ toplamındaki her toplam aşağıdaki gibi sıralansın:

$$\begin{aligned} \sum_{v \in P_0^*} (-1)^{\langle c, v \rangle} &\rightarrow S_0^* \\ \sum_{v \in P_0^{**}} (-1)^{\langle c, v \rangle} &\rightarrow S_0 \\ \sum_{v \in P_1} (-1)^{\langle c, v \rangle} &\rightarrow S_1 \\ \sum_{v \in P_2} (-1)^{\langle c, v \rangle} &\rightarrow S_2 \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \sum_{v \in P_{n-1}} (-1)^{\langle c, v \rangle} &\rightarrow S_{n-1}. \end{aligned}$$

i) $v \in P_0^*$ olduğundan, $v = (00..00)$ dır. Tanım 3.1.4'te verilen iç çarpım göz önüne alınarak, $\langle c, v \rangle = 0$ bulunur. Dolayısıyla, $S_0^* = 1$ elde edilir.

Sonuç 3.2.1. $S_0^* = \{1, \quad v = (00..00)\}$.

ii) $v \in P_0^{**}$ olduğundan, $v = (10..00)$ dır. Tanım 3.1.4'te verilen iç çarpım göz önüne alınarak, $\langle c, v \rangle = c_{n-1}$ bulunur. $c_{n-1} \in F_2$ olduğundan $c_{n-1} = 0$ veya $c_{n-1} = 1$ değerini alır. Eğer $c_{n-1} = 0$ ise $S_0 = 1$, eğer $c_{n-1} = 1$ ise $S_0 = -1$ elde edilir.

Sonuç 3.2.2. $S_0 = \begin{cases} 1, & c_{n-1} = 0 \\ -1, & c_{n-1} = 1. \end{cases}$

iii) $v \in P_1$ olduğundan $v_1 \neq 0$ olmak üzere $v(x) = v_0 + v_1 x$ şeklindedir. Bu yüzden $\langle c, v \rangle = v_0 c_{n-1} + v_1 c_{n-2}$ bulunur. İç çarpım S_1 'de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{v \in P_1} (-1)^{\langle c, v \rangle} = \sum_{v \in P_1} (-1)^{v_0 c_{n-1} + v_1 c_{n-2}} = \sum_{v \in P_1} (-1)^{v_0 c_{n-1}} (-1)^{v_1 c_{n-2}} \\ &= \sum_{v_0 \in F_2} (-1)^{v_0 c_{n-1}} \sum_{\substack{v_1 \in F_2 \\ v_1 \neq 0}} (-1)^{v_1 c_{n-2}} = \sum_{v_0 \in F_2} (-1)^{v_0 c_{n-1}} \sum_{v_1=1} (-1)^{c_{n-2}} \\ &= \left((-1)^0 + (-1)^{c_{n-1}} \right) (-1)^{c_{n-2}} \end{aligned}$$

elde edilir. (c_{n-2}, c_{n-1}) ikilisi için dört farklı durum vardır. Bu durumlar aşağıda verilen Sonuç 3.2.3 ile özetlenmektedir:

Sonuç 3.2.3. $S_1 = \begin{cases} 2, & (c_{n-2}, c_{n-1}) = (0, 0) \\ -2, & (c_{n-2}, c_{n-1}) = (1, 0) \\ 0, & (c_{n-2}, c_{n-1}) = (0, 1) \\ 0, & (c_{n-2}, c_{n-1}) = (1, 1). \end{cases}$

iv) $v \in P_2$ olduğundan $v_2 \neq 0$ olmak üzere $v(x) = v_0 + v_1x + v_2x^2$ şeklindedir. Bu yüzden $\langle c, v \rangle = v_0c_{n-1} + v_1c_{n-2} + v_2c_{n-3}$ bulunur. İç çarpım S_2 'de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{v \in P_2} (-1)^{\langle c, v \rangle} = \sum_{v \in P_2} (-1)^{v_0c_{n-1} + v_1c_{n-2} + v_2c_{n-3}} = \sum_{v \in P_2} (-1)^{v_0c_{n-1}} (-1)^{v_1c_{n-2}} (-1)^{v_2c_{n-3}} \\ &= \sum_{v_0 \in F_2} (-1)^{v_0c_{n-1}} \sum_{v_1 \in F_2} (-1)^{v_1c_{n-2}} \sum_{\substack{v_2 \in F_2 \\ v_2 \neq 0}} (-1)^{v_2c_{n-3}} = \sum_{v_0 \in F_2} (-1)^{v_0c_{n-1}} \sum_{v_1 \in F_2} (-1)^{v_1c_{n-2}} \sum_{v_2=1} (-1)^{c_{n-3}} \\ &= \left((-1)^0 + (-1)^{c_{n-1}} \right) \left((-1)^0 + (-1)^{c_{n-2}} \right) (-1)^{c_{n-3}} \end{aligned}$$

elde edilir. $(c_{n-3}, c_{n-2}, c_{n-1})$ üçlüsü için sekiz farklı durum vardır. Bu durumlar aşağıda verilen Sonuç 3.2.4 ile özetlenmektedir:

$$\text{Sonuç 3.2.4. } S_2 = \begin{cases} 4, & (c_{n-3}, c_{n-2}, c_{n-1}) = (0, 0, 0) \\ -4, & (c_{n-3}, c_{n-2}, c_{n-1}) = (1, 0, 0) \\ 0, & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

v) $v \in P_3$ olduğundan $v_3 \neq 0$ olmak üzere $v(x) = v_0 + v_1x + v_2x^2 + v_3x^3$ şeklindedir. Bu yüzden $\langle c, v \rangle = v_0c_{n-1} + v_1c_{n-2} + v_2c_{n-3} + v_3c_{n-4}$ bulunur. İç çarpım S_3 'de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} S_3 &= \sum_{v \in P_3} (-1)^{\langle c, v \rangle} = \sum_{v \in P_3} (-1)^{v_0c_{n-1} + v_1c_{n-2} + v_2c_{n-3} + v_3c_{n-4}} \\ &= \sum_{v \in P_3} (-1)^{v_0c_{n-1}} (-1)^{v_1c_{n-2}} (-1)^{v_2c_{n-3}} (-1)^{v_3c_{n-4}} \\ &= \sum_{v_0 \in F_2} (-1)^{v_0c_{n-1}} \sum_{v_1 \in F_2} (-1)^{v_1c_{n-2}} \sum_{\substack{v_2 \in F_2 \\ v_3 \neq 0}} (-1)^{v_2c_{n-3}} \sum_{v_3 \in F_2} (-1)^{v_3c_{n-4}} \\ &= \sum_{v_0 \in F_2} (-1)^{v_0c_{n-1}} \sum_{v_1 \in F_2} (-1)^{v_1c_{n-2}} \sum_{v_2 \in F_2} (-1)^{v_2c_{n-3}} \sum_{v_3=1} (-1)^{c_{n-4}} \\ &= \left((-1)^0 + (-1)^{c_{n-1}} \right) \left((-1)^0 + (-1)^{c_{n-2}} \right) \left((-1)^0 + (-1)^{c_{n-3}} \right) (-1)^{c_{n-4}} \end{aligned}$$

elde edilir. $(c_{n-4}, c_{n-3}, c_{n-2}, c_{n-1})$ dördlüsü için onaltı farklı durum vardır. Bu durumlar aşağıda verilen Sonuç 3.2.5 ile özetlenmektedir:

$$\text{Sonuç 3.2.5. } S_3 = \begin{cases} 8, & (c_{n-4}, c_{n-3}, c_{n-2}, c_{n-1}) = (0, 0, 0, 0) \\ -8, & (c_{n-4}, c_{n-3}, c_{n-2}, c_{n-1}) = (1, 0, 0, 0) \\ 0, & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

S_0, S_1, S_2 ve S_3 durumları incelendiğinde diğer durumlar içinde benzer bir genel sonuç elde edilebilir. Daha sonra ispatı verilecek bu genel durumlar aşağıdaki gibidir:

$$\text{Sonuç 3.2.6. } S_k = \begin{cases} 2^k, & (c_{n-(k+1)}, c_{n-k}, c_{n-(k-1)}, \dots, c_{n-1}) = (0, 0, 0, \dots, 0) \\ -2^k, & (c_{n-(k+1)}, c_{n-k}, c_{n-(k-1)}, \dots, c_{n-1}) = (1, 0, 0, \dots, 0) \\ 0, & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

Sonuç 3.2.6 aşağıdaki gibi de yorumlanabilir:

$$\text{Sonuç 3.2.7. } S_k = \begin{cases} 2^k, & w_{RT}(c) < n - k \\ -2^k, & w_{RT}(c) = n - k \\ 0, & w_{RT}(c) > n - k. \end{cases}$$

Sonuç 3.2.6 veya Sonuç 3.2.7 aşağıdaki Ön Teorem 3.2.1 ile ifade edilip ispatlanacaktır. Aşağıda verilen Ön Teorem 3.2.1, bir b parçası için ifade edilecektir.

Ön Teorem 3.2.1. $c = (c_0, c_1, \dots, c_{b-1}), v = (v_0, v_1, \dots, v_{b-1}) \in F_2^b$ ve $w_{RT}(c) = j$ olmak üzere sabit bir k değeri için,

$$S(k, j) = \sum_{v \in F_2^b} (-1)^{\langle c, v \rangle} = \begin{cases} 2^k, & j < b - k \\ -2^k, & j = b - k \\ 0, & j > b - k. \end{cases}$$

dır.

İspat: $c, v \in F_2^b$ ve $w_{RT}(c) = j$ olsun. Bu takdirde,

$$\begin{aligned}
S(k, j) &= \sum_{v \in P_k} (-1)^{\langle c, v \rangle} = \sum_{v \in P_k} (-1)^{c_{b-1}v_0 + c_{b-2}v_1 + c_{b-3}v_2 + \dots + c_{b-k+1}v_{k-2} + c_{b-k}v_{k-1} + c_{b-k-1}v_k} \\
&= \left(\sum_{v_0 \in F_2} (-1)^{c_{b-1}v_0} \right) \left(\sum_{v_1 \in F_2} (-1)^{c_{b-2}v_1} \right) \left(\sum_{v_2 \in F_2} (-1)^{c_{b-3}v_2} \right) \dots \left(\sum_{v_{k-1} \in F_2} (-1)^{c_{b-k}v_{k-1}} \right) \left(\sum_{0 \neq v_k \in F_2} (-1)^{c_{b-k-1}v_k} \right) \\
&= \left(1 + (-1)^{c_{b-1}} \right) \left(1 + (-1)^{c_{b-2}} \right) \left(1 + (-1)^{c_{b-3}} \right) \dots \left(1 + (-1)^{c_{b-k}} \right) (-1)^{c_{b-k-1}}
\end{aligned}$$

elde edilir. $S(k, j)$ için üç farklı durum söz konusudur:

i) Eğer $c_{b-k-1} = 1$ ve c elemanının son k tane bileşeni sıfır ise, (yani $c_{b-k}, c_{b-k+1}, \dots, c_{b-3}, c_{b-2}, c_{b-1}$) bu takdirde $j = w_{RT}(c) = b - k$ ve $S(k, j) = -2^k$ bulunur.

ii) Eğer $c_{b-k-1} = 0$ ve c elemanının son k tane bileşeni sıfır ise, bu takdirde $j = w_{RT}(c) < b - k$ ve $S(k, j) = 2^k$ bulunur.

iii) Eğer c elemanının son k tane bileşeninden en az biri sıfır elemanından farklı ise, bu takdirde $j = w_{RT}(c) > b - k$ ve $S(k, j) = 0$ bulunur.

Dolayısıyla ispat tamamlanır.

Tanım 3.2.1. $\tilde{f}(c) = \sum_{v \in F_2^n} (-1)^{\langle c, v \rangle} f(v)$ Hadamard fonksiyonunda $f(v) = z^{\lceil w_{MRT}(v)/t \rceil}$

alınırsa, $\tilde{f}(c) = \sum_{v \in F_2^n} (-1)^{\langle c, v \rangle} z^{\lceil w_{MRT}(v)/t \rceil}$ şeklinde tanımlanır.

Ön Teorem 3.2.2. $c = (c_0, c_1, \dots, c_{b-1})$ ve $v = (v_0, v_1, \dots, v_{b-1})$, F_2^b nin iki elemanı ve $w_{RT}(c) = j$ olsun. Bu takdirde,

$$\sum_{v \in F_2^b} (-1)^{\langle c, v \rangle} = 1 + S(0, j) + S(1, j) + \dots + S(b-1, j)$$

dir.

İspat:

$$\begin{aligned}
\sum_{v \in F_2^b} (-1)^{\langle c, v \rangle} &= \sum_{\substack{\deg v=0 \\ v=0}} (-1)^{\langle c, v \rangle} + \sum_{\substack{\deg v=0 \\ v \neq 0}} (-1)^{\langle c, v \rangle} + \sum_{\substack{\deg v=1 \\ v \in F_2^b}} (-1)^{\langle c, v \rangle} + \dots + \sum_{\substack{\deg v=b-1 \\ v \in F_2^b}} (-1)^{\langle c, v \rangle} \\
&= 1 + \sum_{v \in P_0^{**}} (-1)^{\langle c, v \rangle} + \sum_{v \in P_1} (-1)^{\langle c, v \rangle} + \dots + \sum_{v \in P_{b-1}} (-1)^{\langle c, v \rangle} \\
&= 1 + S(0, j) + S(1, j) + \dots + S(b-1, j).
\end{aligned}$$

Ön Teorem 3.2.3. $c = (c_0, c_1, \dots, c_{b-1}), v = (v_0, v_1, \dots, v_{b-1}) \in F_2^b$ ve $w_{RT}(c) = j$ olsun.

Bu takdirde, Hadamard fonksiyonu

$$\tilde{f}(c) = \sum_{v \in F_2^b} (-1)^{\langle c, v \rangle} z^{\lceil w_{RT}(v)/t \rceil} = V_j^{(t)}(z)$$

dır. Burada, $V_j^{(t)}(z) = 1 + \sum_{k=0}^{b-1} S(k, j) z^{\lceil (k+1)/t \rceil}$ dir.

İspat: Ön Teorem 3.2.2'yi kullanarak,

$$\begin{aligned}
\sum_{v \in F_2^b} (-1)^{\langle c, v \rangle} z^{\lceil w_{RT}(v)/t \rceil} &= \sum_{\substack{\deg v=0 \\ v=0}} (-1)^{\langle c, v \rangle} z^{\lceil 0/t \rceil} + \sum_{\substack{\deg v=0 \\ v \neq 0}} (-1)^{\langle c, v \rangle} z^{\lceil 1/t \rceil} \\
&\quad + \sum_{\substack{\deg v=1 \\ v \in F_2^b}} (-1)^{\langle c, v \rangle} z^{\lceil 2/t \rceil} + \dots + \sum_{\substack{\deg v=b-1 \\ v \in F_2^b}} (-1)^{\langle c, v \rangle} z^{\lceil b/t \rceil} \\
&= 1 + \sum_{v \in P_0^{**}} (-1)^{\langle c, v \rangle} z^{\lceil 1/t \rceil} + \sum_{v \in P_1} (-1)^{\langle c, v \rangle} z^{\lceil 2/t \rceil} + \dots + \sum_{v \in P_{b-1}} (-1)^{\langle c, v \rangle} z^{\lceil b/t \rceil} \\
&= 1 + S(0, j) z^{\lceil 1/t \rceil} + S(1, j) z^{\lceil 2/t \rceil} + \dots + S(b-1, j) z^{\lceil b/t \rceil} \\
&= 1 + \sum_{k=0}^{b-1} S(k, j) z^{\lceil (k+1)/t \rceil} = V_j^{(t)}(z).
\end{aligned}$$

sonucu elde edilir. Böylece Hadamard fonksiyonu elde edilmiş olur.

3.3. F_2 Sonlu Cismi Üzerinde M-spotty RT Ağırlık Sayacı için MacWilliams Özdeşliği

$\alpha_j = \left| \left\{ i : w_{RT}(c_i) = j, 1 \leq i \leq n \right\} \right|$ olsun. Yani, α_j bir kodsözde $0 \leq j \leq b$ olmak üzere, RT ağırlığı j olan parçaların sayısıdır. $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_b$ toplamları parçalardaki kod uzunluğuna eşittir. Yani, $\sum_{j=0}^b \alpha_j = n$ dir. RT ağırlık dağılım vektörü olan $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_b)$, bir c kodsöz için tek türlü belirlenir. Bu taktirde, c kodsözünün m-spotty RT ağırlığı,

$$w_{MRT}(c) = \sum_{j=0}^b \lceil j/t \rceil \alpha_j$$

olarak ifade edilir. $A_{(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_b)}$, $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_b)$ RT ağırlık dağılım vektörüne sahip kodsözlerin sayısını gösterebilir. Örneğin, $b = 3$ olmak üzere, $(111 \ 011 \ 010 \ 101 \ 000 \ 100)$ kodsözünü ele alalım. Kodsözün RT ağırlık dağılım vektörü $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (1, 1, 1, 3)$ dir. Bu yüzden, $A_{(1,1,1,3)}$ sayısı RT ağırlık dağılım vektörü $(1, 1, 1, 3)$ olan kodsözlerin sayısını verir.

Tanım 3.3.1. C m-spotty parça hata kontrol kodu için ağırlık sayacı aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$W_C(z) = \sum_{c \in C} z^{w_{MRT}(c)}.$$

$A_{(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_b)}$ parametresini kullanarak, $W_C(z)$ ağırlık sayacı aşağıdaki gibi de ifade edilebilir:

$$W_C(z) = \sum_{\substack{(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_b) \\ \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_b \geq 0 \\ \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_b = n}} A_{(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_b)} \prod_{j=0}^b \left(z^{\lceil j/t \rceil} \right)^{\alpha_j}.$$

Burada, z nin üssü olan ifade $\sum_{j=0}^b \lceil j/t \rceil \cdot \alpha_j$, kodsözün m-spotty RT ağırlığını

gösterir. Ayrıca, $\sum_{\substack{(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_b) \\ \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_b \geq 0 \\ \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_b = n}}$ toplam sembolü, $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_b \geq 0$ ve

$\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_b = n$ şartlarını sağlayan bütün $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_b)$ lerin üzerinden toplamını gösterir.

Örnek 3.3.1. $b = 4$ ve $t = 2$ olmak üzere, C lineer kodu aşağıdaki gibi verilsin:

$$C = \{0000 \ 0000 \ 0000, 1000 \ 1100 \ 0101, 0100 \ 0111 \ 1100, 1100 \ 1011 \ 1111\}.$$

Kodsözlerin C lineer kodunun ağırlık sayacına katkısı aşağıdaki gibidir:

$$c_1 = (0000 \ 0000 \ 0000) \rightarrow z^{\lceil 0/2 \rceil + \lceil 0/2 \rceil + \lceil 0/2 \rceil} = z^0,$$

$$c_2 = (1000 \ 1100 \ 0101) \rightarrow z^{\lceil 1/2 \rceil + \lceil 2/2 \rceil + \lceil 4/2 \rceil} = z^4,$$

$$c_3 = (0100 \ 0111 \ 1010) \rightarrow z^{\lceil 2/2 \rceil + \lceil 4/2 \rceil + \lceil 3/2 \rceil} = z^5,$$

$$c_4 = (1100 \ 1011 \ 1111) \rightarrow z^{\lceil 2/2 \rceil + \lceil 4/2 \rceil + \lceil 4/2 \rceil} = z^5.$$

Dolayısıyla 12 uzunluğunda C lineer kodunun m-spotty RT ağırlık sayacı

$$W_C(z) = 1 + z^4 + 2z^5$$

şeklindedir.

Örnek 3.3.2. Örnek 3.3.1 de verilen C lineer kodunu ele alalım. C lineer kodu için RT ağırlık dağılım kodsözleri sayısını belirleyelim. C lineer kodu için RT ağırlık dağılım vektörleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
c_1 &= (0000 \ 0000 \ 0000) \rightarrow (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (3, 0, 0, 0, 0), \\
c_2 &= (1000 \ 1100 \ 0101) \rightarrow (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (0, 1, 1, 0, 1), \\
c_3 &= (0100 \ 0111 \ 1010) \rightarrow (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (0, 0, 1, 1, 1), \\
c_4 &= (1100 \ 1011 \ 1111) \rightarrow (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (0, 0, 1, 0, 2).
\end{aligned}$$

Dolayısıyla RT ağırlık dağılım kodsözleri sayısı şu şekildedir:

$$\frac{A_{(3,0,0,0,0)}}{1} \frac{A_{(0,1,1,0,1)}}{1} \frac{A_{(0,0,1,1,1)}}{1} \frac{A_{(0,0,1,0,2)}}{1}.$$

Buradan ağırlık sayacı aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned}
W_C(z) &= A_{(3,0,0,0,0)} (z^{\lceil 0/2 \rceil})^3 (z^{\lceil 1/2 \rceil})^0 (z^{\lceil 2/2 \rceil})^0 (z^{\lceil 3/2 \rceil})^0 (z^{\lceil 4/2 \rceil})^0 \\
&\quad + A_{(0,1,1,0,1)} (z^{\lceil 0/2 \rceil})^0 (z^{\lceil 1/2 \rceil})^1 (z^{\lceil 2/2 \rceil})^1 (z^{\lceil 3/2 \rceil})^0 (z^{\lceil 4/2 \rceil})^1 \\
&\quad + A_{(0,0,1,1,1)} (z^{\lceil 0/2 \rceil})^0 (z^{\lceil 1/2 \rceil})^0 (z^{\lceil 2/2 \rceil})^1 (z^{\lceil 3/2 \rceil})^1 (z^{\lceil 4/2 \rceil})^1 \\
&\quad + A_{(0,0,1,0,2)} (z^{\lceil 0/2 \rceil})^0 (z^{\lceil 1/2 \rceil})^0 (z^{\lceil 2/2 \rceil})^1 (z^{\lceil 3/2 \rceil})^0 (z^{\lceil 4/2 \rceil})^2 \\
&= 1 + z^4 + 2z^5.
\end{aligned}$$

Örnek 3.3.1 de elde edilen ağırlık sayacı ile aynı olduğu görülebilir.

Aşağıdaki teorem, C kodunun ağırlık sayacı olan $W_C(z)$ ile kodun dik tümleyeni olan C^\perp kodunun ağırlık sayacı olan $W_{C^\perp}(z)$ arasındaki ilişkiyi vermektedir:

Teorem 3.3.1. C lineer kod olsun. C kodu ile dik tümleyen kodun m-spotty RT ağırlık sayacı arasındaki bağıntı aşağıdaki gibidir:

$$W_{C^\perp}(z) = \sum_{\substack{(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_b) \\ \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_b \geq 0 \\ \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_b = n}} A_{(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_b)}^\perp \prod_{j=0}^b (z^{\lceil j/t \rceil})^{\alpha_j} = \frac{1}{|C|} \sum_{\substack{(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_b) \\ \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_b \geq 0 \\ \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_b = n}} A_{(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_b)} \prod_{j=0}^b (V_j^{(t)}(z))^{\alpha_j}.$$

İspat: Tanım 3.1.5'te, $f(v) = \prod_{i=1}^n z^{\lceil w_{RT}(v_i)/t \rceil}$ alalım. Bu takdirde,

$$\begin{aligned} \tilde{f}(c) &= \sum_{v \in F_2^{nb}} (-1)^{\langle c, v \rangle} \prod_{i=1}^n z^{\lceil w_{RT}(v_i)/t \rceil} \\ &= \sum_{v \in F_2^{nb}} (-1)^{\langle c_1, v_1 \rangle + \langle c_2, v_2 \rangle + \dots + \langle c_n, v_n \rangle} \prod_{i=1}^n z^{\lceil w_{RT}(v_i)/t \rceil} \\ &= \sum_{v_1 \in F_2^b} \sum_{v_2 \in F_2^b} \dots \sum_{v_n \in F_2^b} \left(\prod_{i=1}^n (-1)^{\langle c_i, v_i \rangle} z^{\lceil w_{RT}(v_i)/t \rceil} \right) \\ &= \prod_{i=1}^n \left(\sum_{v_i \in F_2^b} (-1)^{\langle c_i, v_i \rangle} z^{\lceil w_{RT}(v_i)/t \rceil} \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada, $\sum_{v_i \in F_2^b} (-1)^{\langle c_i, v_i \rangle} z^{\lceil w_{RT}(v_i)/t \rceil}$ sonucu sabit olarak alınan c_i kodsözünün ağırlığı olan $w_{RT}(c_i)$ ağırlığına bağlıdır. Sabit olarak alınan c_i vektörünün RT ağırlığının $w_{RT}(c_i) = j$ olduğunu kabul edelim. Bu takdirde, Ön Teorem 3.2.3'ten

$$\sum_{v_i \in F_2^b} (-1)^{\langle c_i, v_i \rangle} z^{\lceil w_{RT}(v_i)/t \rceil} = V_j^{(t)}(z)$$

eşitliği elde edilir. Dolayısıyla, $\tilde{f}(c)$ fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$\tilde{f}(c) = \prod_{j=0}^b \left(V_j^{(t)}(z) \right)^{\alpha_j}.$$

Elde edilen son eşitlik

$$\sum_{v \in C^\perp} f(v) = \frac{1}{|C|} \sum_{c \in C} \tilde{f}(c)$$

eşitliğinde yerine yazılırsa aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$\sum_{v \in C^\perp} \prod_{j=0}^b \left(z^{\lceil j/t \rceil} \right)^{\alpha_j} = \frac{1}{|C|} \sum_{c \in C} \prod_{j=0}^b \left(V_j^{(t)}(z) \right)^{\alpha_j}.$$

Dolayısıyla, C kodunun m -spotty RT ağırlık sayacı ile dik tümleyeninin m -spotty RT ağırlık sayacı arasındaki bağıntı aşağıdaki gibi elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

$$\sum_{\substack{(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_b) \\ \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_b \geq 0 \\ \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_b = n}} A_{(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_b)}^\perp \prod_{j=0}^b \left(z^{\lceil j/t \rceil} \right)^{\alpha_j} = \frac{1}{|C|} \sum_{\substack{(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_b) \\ \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_b \geq 0 \\ \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_b = n}} A_{(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_b)} \prod_{j=0}^b \left(V_j^{(t)}(z) \right)^{\alpha_j}.$$

Örnek 3.3.3. $b = 4$ ve $t = 2$ olmak üzere,

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

uzunluğu 16 olan ikili C lineer kodunun üreteç matrisi olsun. C lineer kodu ile dik tümleyeni C^\perp kodunun m -spotty RT ağırlık sayaçlarını hesaplayalım. Bunun için her iki kodun kodsözlerini tespit etmek gerekir. C lineer kodunun kodsözleri Tablo 3.1'de görülmektedir. C^\perp kodunun kodsözleri bilgisayar programı kullanılarak elde edilmiştir ve kodların m -spotty RT ağırlık sayaçları sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$W_C(z) = 1 + 2z^4 + 2z^5 + 2z^6 + 3z^7 + 6z^8,$$

$$W_{C^\perp}(z) = 1 + z + 9z^2 + 35z^3 + 132z^4 + 388z^5 + 950z^6 + 1284z^7 + 1296z^8.$$

C kodundaki kodsözlerin RT ağırlık dağılım vektörleri ve $b = 4$ ve $t = 2$ değerlerine karşılık gelen $V_j^{(2)}$ ifadeleri, ana teoremi uygulamak ve gerekli işlemleri yapmak için Tablo 3.1'de verilmiştir. Teorem 3.3.1 ve Tablo 3.1 kullanılarak,

$$W_{C^\perp}(z) = \frac{1}{|C|} \sum_{\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 4} A_{(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)} \prod_{j=0}^4 (V_j^{(2)}(z))^{\alpha_j}$$

$$= 1 + z + 9z^2 + 35z^3 + 132z^4 + 388z^5 + 950z^6 + 1284z^7 + 1296z^8$$

elde edilir.

Tablo 3.1. Kodsözler ve kodsözlere karşılık gelen terimler

<u>Kodsözler-1</u>	<u>RT ağırlık dağılım vektörleri</u>	<u>Karşılık gelen $V_j^{(2)}$ ifadeleri</u>
(0000000000000000)	(4, 0, 0, 0, 0)	$(V_0^{(2)})^4$
(1000111100001010)	(1, 1, 0, 1, 1)	$(V_0^{(2)})(V_1^{(2)})(V_3^{(2)})(V_4^{(2)})$
(0100101001010101)	(0, 0, 1, 1, 2)	$(V_2^{(2)})(V_3^{(2)})(V_4^{(2)})^2$
(0010000100011111)	(0, 0, 0, 1, 3)	$(V_3^{(2)})(V_4^{(2)})^3$
(0001010101011001)	(0, 0, 0, 0, 4)	$(V_4^{(2)})^4$
(1100010101011111)	(0, 0, 1, 0, 3)	$(V_2^{(2)})(V_4^{(2)})^3$
(1010111000010101)	(0, 0, 0, 2, 2)	$(V_3^{(2)})^2 (V_4^{(2)})^2$
<u>Kodsözler-2</u>	<u>RT ağırlık dağılım vektörleri</u>	<u>Karşılık gelen $V_j^{(2)}$ ifadeleri</u>
(1001101001010011)	(0, 0, 0, 1, 3)	$(V_3^{(2)})(V_4^{(2)})^3$
(0110101101001010)	(0, 0, 1, 2, 1)	$(V_2^{(2)})(V_3^{(2)})^2 (V_4^{(2)})$
(0101111100001100)	(1, 0, 1, 0, 2)	$(V_0^{(2)})(V_2^{(2)})(V_4^{(2)})^2$
(0011010001000110)	(0, 0, 2, 1, 1)	$(V_2^{(2)})^2 (V_3^{(2)})(V_4^{(2)})$
(1110010001000000)	(1, 0, 2, 1, 0)	$(V_0^{(2)})(V_2^{(2)})^2 (V_3^{(2)})$
(1101000000000110)	(2, 0, 0, 1, 1)	$(V_0^{(2)})^2 (V_3^{(2)})(V_4^{(2)})$
(0111111000010011)	(0, 0, 0, 1, 3)	$(V_3^{(2)})(V_4^{(2)})^3$
(1011101101001100)	(0, 0, 2, 0, 2)	$(V_2^{(2)})^2 (V_4^{(2)})^2$
(1111000100011001)	(0, 0, 0, 0, 4)	$(V_4^{(2)})^4$

Tablo 3.1’de kullanılan $V_j^{(2)}$ polinomları Ön Teorem 3.2.3 kullanılarak aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

$$V_0^{(2)}(z) = 1 + 3z + 12z^2, V_1^{(2)}(z) = V_2^{(2)}(z) = 1 + 3z - 4z^2, V_3^{(2)}(z) = V_4^{(2)}(z) = 1 - z.$$

3.4. F_q Sonlu Cismi Üzerinde Tanım ve Teoremler

Bu kısımda ele alınan tanım ve teoremler, Kısım 3.1’de F_2 sonlu cismi üzerinde verilen tanım ve teoremlerin F_q sonlu cismi üzerine bir genellemesidir.

Tanım 3.4.1. [20] RT uzaklığı, F_q sonlu cismi üzerinde bir metriktir ve F_q sonlu cismi üzerinde aşağıdaki gibi tanımlanır:

F_q sonlu bir cisim, $V(n, q) = F_q^n$, F_q üzerinde n uzunluğundaki bütün vektörlerin kümesi ve $C \subset V(n, q)$ olsun. $c = (c_1, c_2, \dots, c_n) \in C$ kodsözünün RT ağırlığı,

$$w_{RT}(c) = \begin{cases} \max \{i : c_i \neq 0\} & , c \neq 0 \\ 0 & , c = 0 \end{cases}$$

olarak tanımlanır. $c, v \in C$ için $d_{RT}(c, v) = w_{RT}(c - v)$ dır.

d_{RT} uzaklığı, F_q sonlu cismi üzerinde bir metrik olduğundan Tanım 3.1.2 ve Tanım 3.1.3 F_q sonlu cisimine uyarlanabilir.

Tanım 3.4.2. $w_{RT}(e_i)$, e_i hata vektörünün F_q üzerinde RT ağırlığını göstermek üzere $w_{MRT}(e)$, m-spotty RT ağırlığı F_q üzerinde aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$w_{MRT}(e) = \sum_{i=0}^{n-1} \left[\frac{w_{RT}(e_i)}{t} \right].$$

Benzer şekilde, $d_{RT}(u_i, v_i)$, F_q üzerinde u ve v kodsözlerinin i inci parçaları arasındaki RT uzaklığını göstermek üzere, $d_{MRT}(u, v)$ fonksiyonu F_q üzerinde aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$d_{MRT}(u, v) = \sum_{i=0}^{n-1} \left[\frac{d_{RT}(u_i, v_i)}{t} \right].$$

C kodunun minimum m-spotty RT uzaklığı

$$d = \min_{\substack{u, v \in C \\ u \neq v}} d_{MRT}(u, v)$$

şeklindedir. Aynı zamanda F_q üzerinde verilen $d_{MRT}(u, v)$ fonksiyonu bir metrik belirtir.

Tanım 3.4.3. b parça uzunluğunu, n parça sayısını ve N verilen uzayın elemanlarının uzunluğunu göstermek üzere $N = nb$ eşitliği sağlansın. $V(nb, q) = F_q^{nb}$ vektör uzayı için $c, v \in V(nb, q)$ olmak üzere u ve v elemanlarının iç çarpımını aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$\langle c, v \rangle = \sum_{i=0}^{n-1} \langle c_i, v_i \rangle = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{b-1} c_{(i,j)} v_{(i,b-j+1)} \right).$$

Burada, $\langle c_i, v_i \rangle = \sum_{j=0}^{b-1} c_{(i,j)} v_{(i,b-j+1)}$, c_i ve v_i elemanlarının iç çarpımlarını, ayrıca $c_{(i,j)}$ ve $v_{(i,j)}$ sırasıyla c_i ve v_i elemanlarının j inci bitlerini göstermektedir.

Tanım 3.4.4. [5] f , F_q^n üzerinde tanımlı bir fonksiyon olsun. f fonksiyonun Hadamard fonksiyonu olan \tilde{f} aşağıdaki gibi tanımlanır:

$c \in F_q^n$ olmak üzere,

$$\tilde{f}(c) = \sum_{v \in F_q^n} \chi(\langle c, v \rangle) f(v)$$

dır. Burada, χ F_q üzerinde temel olmayan bir karakterdir.

Tanım 3.4.5. [5] p asal ve $q = p^m$ olmak üzere, α elemanı F_q sonlu cisminin bir primitif elemanı olsun. F_q sonlu cisminin bir β elemanı $\beta_i \in F_p$ olmak üzere,

$$\beta = \beta_0 + \beta_1 \alpha + \beta_2 \alpha^2 + \dots + \beta_{m-1} \alpha^{m-1}$$

tek türlü olarak yazılabilir. Sabit alınan bir $\beta = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{m-1})$ elemanı için her $\gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{m-1}) \in F_q$ olmak üzere F_q üzerinde kompleks değerli karakter fonksiyonu χ_β aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\chi_\beta(\gamma) = \xi^{\beta_0 \gamma_{m-1} + \beta_1 \gamma_{m-2} + \dots + \beta_{m-1} \gamma_0}.$$

Burada $\xi = e^{2\pi i/p}$ dır.

Örnek 3.4.1. $b = 8$ ve $t = 3$ olmak üzere e hata vektörü aşağıdaki gibi verilsin:

$$e = (00210040 \quad 21341100 \quad 41133112) \in F_5^{24}.$$

e_i , e hata vektörünün i inci parçasını göstermek üzere e hata vektörünün parçaları aşağıdaki gibidir:

$$e_0 = (00210040),$$

$$e_1 = (21341100),$$

$$e_2 = (41133112).$$

Burada $i = 0, 1, 2$ için $e_i \in F_5^8$ dir.

e_i parçalarının RT ağırlığı,

$$w_{RT}(e_0) = 7,$$

$$w_{RT}(e_1) = 6,$$

$$w_{RT}(e_2) = 8$$

bulunur. Dolayısıyla, e hata vektörünün m-spotty RT ağırlığı aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} w_{MRT}(e) &= \sum_{i=0}^2 \left\lceil \frac{w_{RT}(e_i)}{3} \right\rceil \\ &= \left\lceil \frac{w_{RT}(e_0)}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{w_{RT}(e_1)}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{w_{RT}(e_2)}{2} \right\rceil \\ &= \left\lceil \frac{7}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{6}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{8}{3} \right\rceil \\ &= 4 + 2 + 3 \\ &= 9. \end{aligned}$$

Örnek 3.4.2. $b = 8$ ve $t = 2$ olmak üzere $u, v \in F_3^{16}$ kodsözleri aşağıdaki gibi verilsin:

$$u = (21002100 \ 11112102),$$

$$v = (11210200 \ 20001010).$$

Bu takdirde parçaların RT uzaklıkları

$$d_{RT}(u_0, v_0) = d_{RT}(21002100, 11210200) = 6,$$

$$d_{RT}(u_1, v_1) = d_{RT}(11112102, 20001010) = 8$$

olarak elde edilir. Dolayısıyla u ve v kodsözleri arasındaki m-spotty RT uzaklığı

$$\begin{aligned}
d_{MRT}(u, v) &= \sum_{i=0}^1 \left\lceil \frac{d_{RT}(u_i, v_i)}{2} \right\rceil \\
&= \left\lceil \frac{d_{RT}(u_0, v_0)}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{d_{RT}(u_1, v_1)}{2} \right\rceil \\
&= \left\lceil \frac{6}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{8}{2} \right\rceil \\
&= 3 + 4 = 7
\end{aligned}$$

dır.

F_2 sonlu cismi üzerinde Hadamard fonksiyonunu belirlemede kolaylık sağlayan P_k kümeleri F_q sonlu cismi üzerine de benzer şekilde aşağıdaki gibi genelleştirilebilir:

Tanım 3.4.6. $V(n, q)$ bir vektör uzayı olsun.

$$P_k = \{v \in V(n, q) : \deg v(x) = k\}$$

olmak üzere, $V(n, q)$ uzayının bir ayrışımı P_k kümeleri ile ifade edilebilir. Yani, $I = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ için,

$$V(n, q) = \bigcup_{k \in I} P_k \text{ ve } i \neq j \text{ için } P_i \cap P_j = \emptyset$$

sağlanır. Hadamard fonksiyonu inşa edilirken derecesi sıfır olan polinomların oluşturduğu P_0 kümesi aşağıdaki gibi ifade edilecektir:

$$P_0 = \{v \in F_q^n : \deg v(x) = 0\}$$

olduğundan $P_0^* = \{00..00\}$ ve $P_0^{**} = \{v \in F_q^n : \deg v(x) = 0 \text{ ve } v \neq 0\}$ kümeleri için

$P_0 = P_0^* \cup P_0^{**}$ ifadesi kullanılacaktır.

3.5. F_q Sonlu Cismi Üzerinde Hadamard Fonksiyonunun İnşa Edilmesi

Tanım 3.4.4 ve Tanım 3.4.5 kullanılarak,

$$\tilde{f}(c) = \sum_{v \in F_q^n} \chi(\langle c, v \rangle) f(v)$$

Hadamard fonksiyonunun

$$\delta_1 = \sum_{v \in F_q^n} \chi(\langle c, v \rangle)$$

kısmı karakterize edilecektir. Tanım 3.4.6'da verilen P_k kümeleri ile δ_1 ifadesi aşağıdaki gibi yazılabilir:

c sabit bir eleman ve $c = (c_0, c_1, \dots, c_{n-3}, c_{n-2}, c_{n-1})$, $v = (v_0, v_1, v_2, \dots, v_{n-3}, v_{n-2}, v_{n-1})$ olmak üzere,

$$\delta_1 = \sum_{v \in F_q^n} \chi(\langle c, v \rangle) = \sum_{v \in P_0} \chi(\langle c, v \rangle) + \sum_{v \in P_1} \chi(\langle c, v \rangle) + \sum_{v \in P_2} \chi(\langle c, v \rangle) + \dots + \sum_{v \in P_{n-1}} \chi(\langle c, v \rangle)$$

elde edilir. Eşitliğin ilk toplamı olan $\sum_{v \in P_0} \chi(\langle c, v \rangle)$ toplamı için Tanım 3.4.6'da P_0

kümesi için bahsi geçen durum göz önüne alınarak toplam aşağıdaki gibi iki toplam olarak ifade edilebilir:

$$\sum_{v \in P_0} \chi(\langle c, v \rangle) = \sum_{v \in P_0^*} \chi(\langle c, v \rangle) + \sum_{v \in P_0^{**}} \chi(\langle c, v \rangle).$$

Dolayısıyla δ_1 toplamı aşağıdaki gibi son halini alır:

$$\delta_1 = \sum_{v \in P_0^*} \chi(\langle c, v \rangle) + \sum_{v \in P_0^{**}} \chi(\langle c, v \rangle) + \sum_{v \in P_1} \chi(\langle c, v \rangle) + \sum_{v \in P_2} \chi(\langle c, v \rangle) + \dots + \sum_{v \in P_{n-1}} \chi(\langle c, v \rangle).$$

δ_1 toplamındaki her toplam aşağıdaki gibi sıralansın:

$$\begin{aligned}
\sum_{v \in P_0^*} \chi(\langle c, v \rangle) &\rightarrow S_0^* \\
\sum_{v \in P_0^{**}} \chi(\langle c, v \rangle) &\rightarrow S_0 \\
\sum_{v \in P_1} \chi(\langle c, v \rangle) &\rightarrow S_1 \\
\sum_{v \in P_2} \chi(\langle c, v \rangle) &\rightarrow S_2 \\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
\sum_{v \in P_{n-1}} \chi(\langle c, v \rangle) &\rightarrow S_{n-1}.
\end{aligned}$$

i) $v \in P_0^*$ olduğundan, $v = (00..00)$ dır. Dolayısıyla, $\langle c, v \rangle = 0$ bulunur. Buradan $S_0^* = 1$ elde edilir.

Sonuç 3.5.1. $S_0^* = \{1, v = (00..00)..$

ii) $v \in P_0^{**}$ olsun. $v = v_0 \in F_q - \{0\}$ olduğundan $\langle c, v \rangle = v_0 c_{n-1}$ bulunur. $c_{n-1} \in F_q$ olduğundan, c_{n-1} elemanın durumu iki farklı şekilde ele alınabilir:

Eğer $c_{n-1} = 0$ ise,

$$S_0 = \sum_{v \in P_0^{**}} \chi(\langle c, v \rangle) = \sum_{v_0 \in F_q - \{0\}} \chi(v_0 c_{n-1}) = \sum_{v_0 \in F_q - \{0\}} \chi(0) = q - 1$$

elde edilir.

Eğer $c_{n-1} \neq 0$ ise, Teorem 1.4.1.1 kullanılarak,

$$S_0 = \sum_{v \in P_0^{**}} \chi(\langle c, v \rangle) = \sum_{v_0 \in F_q - \{0\}} \chi(v_0 c_{n-1}) = \sum_{a \in F_q - \{0\}} \chi(a) = -1$$

elde edilir.

$$\text{Sonuç 3.5.2. } S_0 = \begin{cases} q-1, & c_{n-1} = 0 \\ -1, & c_{n-1} \neq 0. \end{cases}$$

iii) $v \in P_1$ olduğundan $v_1 \neq 0$ olmak üzere $v(x) = v_0 + v_1x$ şeklindedir. Bu yüzden $\langle c, v \rangle = v_0c_{n-1} + v_1c_{n-2}$ bulunur.

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{v \in P_1} \chi(\langle c, v \rangle) = \sum_{v \in P_1} \chi(v_0c_{n-1} + v_1c_{n-2}) = \sum_{v \in P_1} \chi(v_0c_{n-1}) \chi(v_1c_{n-2}) \\ &= \sum_{v_0 \in F_q} \chi(v_0c_{n-1}) \sum_{\substack{v_1 \in F_q \\ v_1 \neq 0}} \chi(v_1c_{n-2}) \end{aligned}$$

elde edilir. (c_{n-2}, c_{n-1}) ikilisi için q^2 tane farklı durum vardır. Bu durumlar aşağıda verilen Sonuç 3.5.3 ile özetlenmektedir:

Sonuç 3.5.3.

$$S_1 = \begin{cases} q(q-1), & (c_{n-2}, c_{n-1}) = (0, 0) \\ -q, & (c_{n-2}, c_{n-1}) = (a, 0) \text{ ve } a \in F_q - \{0\} \\ 0, & (c_{n-2}, c_{n-1}) = (b, c) \text{ ve } b \in F_q, c \in F_q - \{0\}. \end{cases}$$

iv) $v \in P_2$ olduğundan $v_2 \neq 0$ olmak üzere $v(x) = v_0 + v_1x + v_2x^2$ şeklindedir. Bu yüzden $\langle c, v \rangle = v_0c_{n-1} + v_1c_{n-2} + v_2c_{n-3}$ bulunur. İç çarpım S_2 de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{v \in P_2} \chi(\langle c, v \rangle) = \sum_{v \in P_2} \chi(v_0c_{n-1} + v_1c_{n-2} + v_2c_{n-3}) \\ &= \sum_{v \in P_2} \chi(v_0c_{n-1}) \chi(v_1c_{n-2}) \chi(v_2c_{n-3}) \\ &= \sum_{v_0 \in F_q} \chi(v_0c_{n-1}) \sum_{v_1 \in F_q} \chi(v_1c_{n-2}) \sum_{\substack{v_2 \in F_q \\ v_2 \neq 0}} \chi(v_2c_{n-3}) \end{aligned}$$

elde edilir. $(c_{n-3}, c_{n-2}, c_{n-1})$ üçlüsü için q^3 tane farklı durum vardır. Bu durumlar aşağıda verilen Sonuç 3.5.4 ile özetlenmektedir:

Sonuç 3.5.4.

$$S_2 = \begin{cases} q^2(q-1), & (c_{n-3}, c_{n-2}, c_{n-1}) = (0, 0, 0) \\ -q^2, & (c_{n-3}, c_{n-2}, c_{n-1}) = (a, 0, 0) \text{ ve } a \in F_q - \{0\} \\ 0, & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

v) $v \in P_3$ olduğundan $v_3 \neq 0$ olmak üzere $v(x) = v_0 + v_1x + v_2x^2 + v_3x^3$ şeklindedir.

Bu yüzden $\langle c, v \rangle = v_0c_{n-1} + v_1c_{n-2} + v_2c_{n-3} + v_3c_{n-4}$ bulunur. Elde edilen değerler S_3 de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} S_3 &= \sum_{v \in P_3} (-1)^{\langle c, v \rangle} = \sum_{v \in P_3} \chi(v_0c_{n-1} + v_1c_{n-2} + v_2c_{n-3} + v_3c_{n-4}) \\ &= \sum_{v \in P_3} \chi(v_0c_{n-1}) \chi(v_1c_{n-2}) \chi(v_2c_{n-3}) \chi(v_3c_{n-4}) \\ &= \sum_{v_0 \in F_q} \chi(v_0c_{n-1}) \sum_{v_1 \in F_q} \chi(v_1c_{n-2}) \sum_{v_2 \in F_q} \chi(v_2c_{n-3}) \sum_{\substack{v_3 \in F_q \\ v_3 \neq 0}} \chi(v_3c_{n-4}) \end{aligned}$$

elde edilir. $(c_{n-4}, c_{n-3}, c_{n-2}, c_{n-1})$ dördlüsü için q^4 tane farklı durum vardır. Bu durumlar aşağıda verilen Sonuç 3.5.5 ile özetlenmektedir:

Sonuç 3.5.5.

$$S_3 = \begin{cases} q^3(q-1), & (c_{n-4}, c_{n-3}, c_{n-2}, c_{n-1}) = (0, 0, 0, 0) \\ -q^3, & (c_{n-4}, c_{n-3}, c_{n-2}, c_{n-1}) = (a, 0, 0, 0) \text{ ve } a \in F_q - \{0\} \\ 0, & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

S_0, S_1, S_2 ve S_3 durumları göz önüne alındığında diğer durumlar içinde benzer bir genel sonuç elde edilebilir. Daha sonra ispatı verilecek bu genel durumlar aşağıdaki gibidir:

Sonuç 3.5.6.

$$S_k = \begin{cases} q^k (q-1), & (c_{n-(k+1)}, c_{n-k}, c_{n-(k-1)}, \dots, c_{n-1}) = (0, 0, 0, \dots, 0) \\ -q^k, & (c_{n-(k+1)}, c_{n-k}, c_{n-(k-1)}, \dots, c_{n-1}) = (a, 0, 0, \dots, 0) \text{ ve } a \in F_q - \{0\} \\ 0, & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

Sonuç 3.5.6 aşağıdaki gibi de yorumlanabilir:

$$\text{Sonuç 3.5.7. } S_k = \begin{cases} q^k (q-1), & w_{RT}(c) < n-k \\ -q^k, & w_{RT}(c) = n-k \\ 0, & w_{RT}(c) > n-k. \end{cases}$$

Sonuç 3.5.6 veya Sonuç 3.5.7 aşağıdaki Ön Teorem 3.5.1 ile ifade edilip ispatlanacaktır. Aşağıda verilen Ön Teorem 3.5.1, bir b parçası için ifade edilecektir.

Ön Teorem 3.5.1. $c = (c_0, c_1, \dots, c_{b-1}), v = (v_0, v_1, \dots, v_{b-1}) \in F_q^b$ ve $w_{RT}(c) = j$ olmak üzere sabit bir k değeri için,

$$S^q(k, j) = \sum_{v \in P_k} \chi(\langle c, v \rangle) = \begin{cases} q^k (q-1), & j < b-k \\ -q^k, & j = b-k \\ 0, & j > b-k. \end{cases}$$

dır.

İspat: $c, v \in F_q^b$ ve $w_{RT}(c) = j$ olsun. Bu takdirde,

$$\begin{aligned}
S^q(k, j) &= \sum_{v \in P_k} \chi(\langle c, v \rangle) = \sum_{v \in P_k} \chi(c_{b-1}v_0 + c_{b-2}v_1 + c_{b-3}v_2 + \dots + c_{b-k+1}v_{k-2} + c_{b-k}v_{k-1} + c_{b-k-1}v_k) \\
&= \left(\sum_{v_0 \in F_q} \chi(c_{b-1}v_0) \right) \left(\sum_{v_1 \in F_q} \chi(c_{b-2}v_1) \right) \left(\sum_{v_2 \in F_q} \chi(c_{b-3}v_2) \right) \\
&\quad \dots \left(\sum_{v_{k-1} \in F_q} \chi(c_{b-k}v_{k-1}) \right) \left(\sum_{0 \neq v_k \in F_q} \chi(c_{b-k-1}v_k) \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. $S^q(k, j)$ için üç farklı durum söz konusudur:

i) Eğer $c_{b-k-1} \in F_q - \{0\}$ ve c elemanının son k tane bileşeni sıfır ise, (yani $c_{b-k}, c_{b-k+1}, \dots, c_{b-3}, c_{b-2}, c_{b-1}$) bu takdirde $j = w_{RT}(c) = b - k$ ve $S^q(k, j) = -q^k$ bulunur.

ii) Eğer $c_{b-k-1} = 0$ ve c elemanının son k tane bileşeni sıfır ise, bu takdirde $j = w_{RT}(c) < b - k$ ve $S^q(k, j) = (q - 1)q^k$ bulunur.

iii) Eğer c elemanının son k tane bileşeninden en az biri sıfır elemanından farklı ise, bu takdirde $j = w_{RT}(c) > b - k$ ve $S^q(k, j) = 0$ bulunur.

Dolayısıyla ispat tamamlanır.

Tanım 3.5.1. $\tilde{f}(c) = \sum_{v \in F_q^n} \chi(\langle c, v \rangle) f(v)$ Hadamard fonksiyonunda $f(v) = z^{\lceil w_{MRT}(v)/t \rceil}$

alınırsa, $\tilde{f}(c) = \sum_{v \in F_q^n} \chi(\langle c, v \rangle) z^{\lceil w_{MRT}(v)/t \rceil}$ şekline dönüşür.

Ön Teorem 3.5.2. $c = (c_0, c_1, \dots, c_{b-1})$ ve $v = (v_0, v_1, \dots, v_{b-1})$, F_q^b nin iki elemanı ve $w_{RT}(c) = j$ olsun. Bu takdirde,

$$\sum_{v \in F_q^b} \chi(\langle c, v \rangle) = 1 + S^q(0, j) + S^q(1, j) + \dots + S^q(b-1, j)$$

dır.

İspat:

$$\begin{aligned}
\sum_{v \in F_q^b} \chi(\langle c, v \rangle) &= \sum_{\substack{\deg v=0 \\ v=0}} \chi(\langle c, v \rangle) + \sum_{\substack{\deg v=0 \\ v \neq 0}} \chi(\langle c, v \rangle) + \sum_{\substack{\deg v=1 \\ v \in F_q^b}} \chi(\langle c, v \rangle) + \dots + \sum_{\substack{\deg v=b-1 \\ v \in F_q^b}} \chi(\langle c, v \rangle) \\
&= 1 + \sum_{v \in P_0^*} \chi(\langle c, v \rangle) + \sum_{v \in P_1} \chi(\langle c, v \rangle) + \dots + \sum_{v \in P_{b-1}} \chi(\langle c, v \rangle) \\
&= 1 + S^q(0, j) + S^q(1, j) + \dots + S^q(b-1, j).
\end{aligned}$$

Ön Teorem 3.5.3. $c = (c_0, c_1, \dots, c_{b-1}), v = (v_0, v_1, \dots, v_{b-1}) \in F_q^b$ ve $w_{RT}(c) = j$ olsun.

Bu takdirde,

$$\tilde{f}(c) = \sum_{v \in F_q^b} \chi(\langle c, v \rangle) z^{\lceil w_{RT}(v)/t \rceil} = V_j^{(q,t)}(z)$$

dır. Burada, $V_j^{(q,t)}(z) = 1 + \sum_{k=0}^{b-1} S^q(k, j) z^{\lceil (k+1)/t \rceil}$ dir.

İspat: Ön Teorem 3.5.2'yi kullanarak,

$$\begin{aligned}
\sum_{v \in F_q^b} \chi(\langle c, v \rangle) z^{\lceil w_{RT}(v)/t \rceil} &= \sum_{\substack{\deg v=0 \\ v=0}} \chi(\langle c, v \rangle) z^{\lceil 0/t \rceil} + \sum_{\substack{\deg v=0 \\ v \neq 0}} \chi(\langle c, v \rangle) z^{\lceil 1/t \rceil} \\
&\quad + \sum_{\substack{\deg v=1 \\ v \in F_q^b}} \chi(\langle c, v \rangle) z^{\lceil 2/t \rceil} + \dots + \sum_{\substack{\deg v=b-1 \\ v \in F_q^b}} \chi(\langle c, v \rangle) z^{\lceil b/t \rceil} \\
&= 1 + \sum_{v \in P_0^*} \chi(\langle c, v \rangle) z^{\lceil 1/t \rceil} + \sum_{v \in P_1} \chi(\langle c, v \rangle) z^{\lceil 2/t \rceil} + \dots + \sum_{v \in P_{b-1}} \chi(\langle c, v \rangle) z^{\lceil b/t \rceil} \\
&= 1 + S^q(0, j) z^{\lceil 1/t \rceil} + S^q(1, j) z^{\lceil 2/t \rceil} + \dots + S^q(b-1, j) z^{\lceil b/t \rceil} \\
&= 1 + \sum_{k=0}^{b-1} S^q(k, j) z^{\lceil (k+1)/t \rceil} = V_j^{(q,t)}(z)
\end{aligned}$$

sonucu elde edilir. Böylece Hadamard fonksiyonu elde edilmiş olur.

3.6. F_q Sonlu Cismi Üzerinde M-spotty RT Ağırlık Sayacı için MacWilliams Özdeşliği

F_2 sonlu cismi üzerinde m-spotty RT ağırlık sayaçları için MacWilliams özdeşliği kısmında verilen gösterimler ve tanımlar, bu kısımda da benzer biçimde kullanılabilir.

Örnek 3.6.1. $b=4$ ve $t=2$ olmak üzere, F_3 sonlu cismi üzerinde C lineer kodu aşağıdaki gibi verilsin:

$$C = \left\{ \begin{array}{l} 0000 \ 0000, 1020 \ 2121, 0120 \ 1011, 1110 \ 0102, 2010 \ 1212, \\ 0210 \ 2022, 2220 \ 0201, 2100 \ 2220, 1200 \ 1110 \end{array} \right\}.$$

Kodsözlerin C lineer kodunun ağırlık sayacına katkısı aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} c_1 &= (0000 \ 0000) \rightarrow z^{\lceil 0/2 \rceil + \lceil 0/2 \rceil} = z^0, \\ c_2 &= (1020 \ 2121) \rightarrow z^{\lceil 3/2 \rceil + \lceil 4/2 \rceil} = z^4, \\ c_3 &= (0120 \ 1011) \rightarrow z^{\lceil 3/2 \rceil + \lceil 4/2 \rceil} = z^4, \\ c_4 &= (1110 \ 0102) \rightarrow z^{\lceil 3/2 \rceil + \lceil 4/2 \rceil} = z^4, \\ c_5 &= (2010 \ 1212) \rightarrow z^{\lceil 3/2 \rceil + \lceil 4/2 \rceil} = z^4, \\ c_6 &= (0210 \ 2022) \rightarrow z^{\lceil 3/2 \rceil + \lceil 4/2 \rceil} = z^4, \\ c_7 &= (2220 \ 0201) \rightarrow z^{\lceil 3/2 \rceil + \lceil 4/2 \rceil} = z^4, \\ c_8 &= (2100 \ 2220) \rightarrow z^{\lceil 2/2 \rceil + \lceil 3/2 \rceil} = z^3, \\ c_9 &= (1200 \ 1110) \rightarrow z^{\lceil 2/2 \rceil + \lceil 3/2 \rceil} = z^3. \end{aligned}$$

Dolayısıyla C lineer kodunun ağırlık sayacı

$$W_C(z) = 1 + 2z^3 + 6z^4$$

dir.

Örnek 3.6.2. Örnek 3.6.1 de verilen C lineer kodunu ele alalım. C lineer kodu için RT ağırlık dağılım kodsözleri sayısını belirleyelim. C lineer kodu için RT ağırlık dağılım vektörleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
c_1 &= (0000 \ 0000) \rightarrow (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (2, 0, 0, 0, 0), \\
c_2 &= (1020 \ 2121) \rightarrow (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (0, 0, 0, 1, 1), \\
c_3 &= (0120 \ 1011) \rightarrow (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (0, 0, 0, 1, 1), \\
c_4 &= (1110 \ 0102) \rightarrow (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (0, 0, 0, 1, 1), \\
c_5 &= (2010 \ 1212) \rightarrow (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (0, 0, 0, 1, 1), \\
c_6 &= (0210 \ 2022) \rightarrow (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (0, 0, 0, 1, 1), \\
c_7 &= (2220 \ 0201) \rightarrow (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (0, 0, 0, 1, 1), \\
c_8 &= (2100 \ 2220) \rightarrow (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (0, 0, 1, 1, 0), \\
c_8 &= (2100 \ 2220) \rightarrow (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (0, 0, 1, 1, 0).
\end{aligned}$$

Dolayısıyla RT ağırlık dağılım kodsözleri sayısı şu şekildedir:

$$\frac{A_{(2,0,0,0,0)}}{1} + \frac{A_{(0,0,1,1,0)}}{2} + \frac{A_{(0,0,0,1,1)}}{6}.$$

Buradan ağırlık sayacı aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned}
W_C(z) &= A_{(2,0,0,0,0)} (z^{\lceil 0/2 \rceil})^2 (z^{\lceil 1/2 \rceil})^0 (z^{\lceil 2/2 \rceil})^0 (z^{\lceil 3/2 \rceil})^0 (z^{\lceil 4/2 \rceil})^0 \\
&\quad + A_{(0,0,1,1,0)} (z^{\lceil 0/2 \rceil})^0 (z^{\lceil 1/2 \rceil})^0 (z^{\lceil 2/2 \rceil})^1 (z^{\lceil 3/2 \rceil})^1 (z^{\lceil 4/2 \rceil})^0 \\
&\quad + A_{(0,0,0,1,1)} (z^{\lceil 0/2 \rceil})^0 (z^{\lceil 1/2 \rceil})^0 (z^{\lceil 2/2 \rceil})^0 (z^{\lceil 3/2 \rceil})^1 (z^{\lceil 4/2 \rceil})^1 \\
&= 1 + 2z^3 + 6z^4.
\end{aligned}$$

Örnek 3.6.1’de elde edilen ağırlık sayacı ile aynı olduğu görülür.

Aşağıdaki teorem, F_q sonlu cismi üzerinde m -spotty ağırlık sayacı için C kodunun ağırlık sayacı olan $W_C(z)$ ile kodun dik tümleyeni olan C^\perp kodunun ağırlık sayacı olan $W_{C^\perp}(z)$ arasındaki ilişkiyi vermektedir:

Teorem 3.6.1. C lineer kod olsun. C m -spotty parça hata kontrol kodu ile dik tümleyen kodu için MRT ağırlık sayaçları arasındaki ilişki şu şekildedir:

$$W_{C^\perp}(z) = \sum_{\substack{(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_b) \\ \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_b \geq 0 \\ \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_b = n}} A_{(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_b)}^\perp \prod_{j=0}^b \left(z^{\lceil j/t \rceil} \right)^{\alpha_j} = \frac{1}{|C|} \sum_{\substack{(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_b) \\ \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_b \geq 0 \\ \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_b = n}} A_{(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_b)} \prod_{j=0}^b \left(V_j^{(q,t)}(z) \right)^{\alpha_j}.$$

İspat: Tanım 3.4.5'te, $f(v) = \prod_{i=1}^n z^{\lceil w_{RT}(v_i)/t \rceil}$ alalım. Bu takdirde,

$$\begin{aligned} \tilde{f}(c) &= \sum_{v \in F_q^{nb}} \chi(\langle c, v \rangle) \prod_{i=1}^n z^{\lceil w_{RT}(v_i)/t \rceil} \\ &= \sum_{v \in F_q^{nb}} \chi(\langle c_1, v_1 \rangle + \langle c_2, v_2 \rangle + \dots + \langle c_n, v_n \rangle) \prod_{i=1}^n z^{\lceil w_{RT}(v_i)/t \rceil} \\ &= \sum_{v \in F_q^{nb}} \chi(\langle c_1, v_1 \rangle) \chi(\langle c_2, v_2 \rangle) \dots \chi(\langle c_n, v_n \rangle) \prod_{i=1}^n z^{\lceil w_{RT}(v_i)/t \rceil} \\ &= \sum_{v_1 \in F_q^b} \sum_{v_2 \in F_q^b} \dots \sum_{v_n \in F_q^b} \left(\prod_{i=1}^n \chi(\langle c_i, v_i \rangle) z^{\lceil w_{RT}(v_i)/t \rceil} \right) \\ &= \prod_{i=1}^n \left(\sum_{v_i \in F_q^b} \chi(\langle c_i, v_i \rangle) z^{\lceil w_{RT}(v_i)/t \rceil} \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada, $\sum_{v_i \in F_q^b} \chi(\langle c_i, v_i \rangle) z^{\lceil w_{RT}(v_i)/t \rceil}$ sonucu sabit olarak alınan c_i kodsözünün

ağırlığı olan $w_{RT}(c_i)$ ağırlığına bağlıdır. Kabul edelim ki sabit olarak alınan c_i

vektörünün RT ağırlığı $w_{RT}(c_i) = j$ olsun. Bu takdirde, Ön Teorem 3.5.3'ten

$$\sum_{v_i \in F_q^b} \chi(\langle c_i, v_i \rangle) z^{\lceil w_{RT}(v_i)/t \rceil} = V_j^{(q,t)}(z)$$

eşitliği elde edilir. Dolayısıyla, $\tilde{f}(c)$ fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$\tilde{f}(c) = \prod_{j=0}^b \left(V_j^{(q,t)}(z) \right)^{\alpha_j} .$$

Elde edilen son eşitlik

$$\sum_{v \in C^\perp} f(v) = \frac{1}{|C|} \sum_{c \in C} \tilde{f}(c)$$

eşitliğinde yerine yazılırsa aşağıdaki bağıntı elde edilir:

$$\sum_{v \in C^\perp} \prod_{j=0}^b \left(z^{\lceil j/t \rceil} \right)^{\alpha_j} = \frac{1}{|C|} \sum_{c \in C} \prod_{j=0}^b \left(V_j^{(q,t)}(z) \right)^{\alpha_j} .$$

Dolayısıyla, C kodunun MRT ağırlık sayacı ile dik tümleyeninin MRT ağırlık sayacı arasındaki bağıntı aşağıdaki gibi elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

$$\sum_{\substack{(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_b) \\ \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_b \geq 0 \\ \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_b = n}} A_{(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_b)}^\perp \prod_{j=0}^b \left(z^{\lceil j/t \rceil} \right)^{\alpha_j} = \frac{1}{|C|} \sum_{\substack{(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_b) \\ \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_b \geq 0 \\ \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_b = n}} A_{(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_b)} \prod_{j=0}^b \left(V_j^{(q,t)}(z) \right)^{\alpha_j} .$$

Örnek 3.6.3. Örnek 3.6.1’de verilen C lineer kodunu ele alalım. C lineer kodu ile dik tümleyeni C^\perp kodunun m-spotty RT ağırlık sayaçlarını hesaplayalım. C lineer kodunun kodsözleri Örnek 3.6.1 de ve C^\perp kodunun kodsözleri bilgisayar programı kullanılarak elde edilmiştir. C lineer kodunun ağırlık sayacı Örnek 3.6.1’de elde edilmiş olup aşağıdaki gibidir:

$$W_C(z) = 1 + 2z^3 + 6z^4 .$$

C^\perp kodunun m-spotty RT ağırlık sayacı

$$W_{C^\perp}(z) = 1 + 2z + 20z^2 + 130z^3 + 576z^4$$

elde edilir.

Teorem 3.6.1'in uygulanabilmesi için C kodundaki kodsözlerin RT ağırlık dağılım vektörlerinin sayısını ve $b=4$ ve $t=2$ değerlerine karşılık gelen $V_j^{(3,2)}$ ifadelerini hesaplamak gerekir. C kodundaki kodsözlerin RT ağırlık dağılım vektörleri sayısı Örnek 3.6.2 de hesaplanmıştır. Burada $b=4$ ve $t=2$ değerlerine karşılık gelen $V_j^{(3,2)}$ ifadelerini hesaplayalım. Ana teoremin elde edilmesi için gerekli olan $V_j^{(3,2)}$ polinomları $V_0^{(3,2)}, V_2^{(3,2)}, V_3^{(3,2)}$ ve $V_4^{(3,2)}$ şeklindedir. Bu polinomlar Ön Teorem 3.5.3 kullanılarak hesaplanır ve aşağıdaki gibi elde edilir:

$$V_0^{(3,2)} = 1 + 18z + 72z^2,$$

$$V_2^{(3,2)} = 1 + 8z - 9z^2,$$

$$V_3^{(3,2)} = 1 - z,$$

$$V_4^{(3,2)} = 1 - z.$$

Teorem 3.6.1'de elde edilen değerler yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} W_{C^\perp}(z) &= \frac{1}{|C|} \sum_{\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 4} A_{(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)} \prod_{j=0}^4 \left(V_j^{(3,2)}(z) \right)^{\alpha_j} \\ &= \frac{1}{9} \left[\left(V_0^{(3,2)} \right)^2 + 2 \left(V_2^{(3,2)} \right) \left(V_3^{(3,2)} \right) + 6 \left(V_3^{(3,2)} \right) \left(V_4^{(3,2)} \right) \right] \\ &= \frac{1}{9} (9 + 18z + 180z^2 + 1170z^3 + 5184z^4) \\ &= 1 + 2z + 20z^2 + 130z^3 + 576z^4 \end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla kod ile dik tümleyeni arasındaki özdeşlik sağlanmış olduğu görülür.

BÖLÜM 4. M-SPOTTY ROSENBLOOM-TSFASMAN AĞIRLIK SAYACI İÇİN MACWILLIAMS ÖZDEŞLİKLERİ – II

Bu bölümde, m-spotty RT ile ilgili tanımlar ve teoremler ilk önce $u^2 = 0$ olmak üzere $F_2 + uF_2$ halkası üzerinde verilecektir. $F_2 + uF_2$ üzerinde tanımlanan ağırlık sayacıları yardımıyla C lineer kodu ile dik tümleyeni arasında MacWilliams özdeşliği elde edilecektir. Daha sonra $F_2 + uF_2$ halkası için elde edilen sonuçlar $F_q + uF_q$ halkası üzerine genelleştirilecek ve bu halka üzerinde MacWilliams özdeşliği elde edilecektir. Daha sonraki kısımlarda, sırasıyla $F_2[u]/(u^s)$ ve $F_q[u]/(u^s)$ cebirsel yapıları üzerinde tanımlar ve teoremler, bu halkalar üzerinde MacWilliams özdeşliğini elde etmek için verilecektir. Bu halkalar sonlu Galois teorisinin bir kopyasını içeren doğal genellemelerdir ve son zamanlarda Kodlama teorisi araştırmaları üzerinde yoğun çalışmalar yapılmaktadır.

4.1. $R_2 = F_2 + uF_2$ Halkası Üzerinde Tanım ve Teoremler

Tanım 4.1.1. [21] $u^2 = 0$ olmak üzere, $R_2 = \{0, 1, u, 1 + u\}$ dır.

R_2 halkası bilinen toplama ve çarpma işlemlerine göre bir halkadır. Ayrıca, $u^2 = 0$ olmak üzere $F_2[u]/(u^2) \cong R_2$ dır.

Ön Teorem 4.1.1. [21] R_2 halkası temel ideal halkasıdır. Yani halkadaki idealler tek bir eleman tarafından üretilir.

Ön Teorem 4.1.2. [21] R_2 halkasının idealleri,

$$(0) = \{0\}, (u) = \{0, u\} \text{ ve } (1) = R_2$$

dır.

Tanım 4.1.2. [22] R_2 üzerinde uzunluğu n olan bir C lineer kod, R_2^n in R_2 - alt modülü olarak adlandırılır.

Bölüm 3'te F_2 ve F_q sonlu cisimleri üzerinde tanımlanan m-spotty RT ağırlığı, R_2 halkası üzerinde aşağıdaki gibi tanımlanır:

Tanım 4.1.3. $e \in R_2^n$ olmak üzere, e bir hata vektörü olsun. $0 \leq i \leq n-1$ için e_i , e hata vektörünün i inci parçasını temsil etsin. e hata vektöründeki t/b -hatalarının sayısı

$$w_{MRT}(e) = \sum_{i=0}^{n-1} \left[\frac{w_{RT}(e_i)}{t} \right]$$

dır. Burada $w_{RT}(e_i)$, e_i hata vektörünün R_2 üzerinde RT ağırlığını göstermektedir.

Benzer biçimde, m-spotty RT uzaklığı R_2 halkası üzerine aşağıdaki gibi genelleştirilebilir:

Tanım 4.1.4. C m-spotty parça hata kontrol kodunun u ve v kodsözleri için, m-spotty RT uzaklık fonksiyonu

$$d_{MRT}(u, v) = \sum_{i=0}^{n-1} \left[\frac{d_{RT}(u_i, v_i)}{t} \right]$$

dır. Burada $d_{RT}(u_i, v_i)$, R_2 üzerinde u ve v kodsözlerinin i inci parçaları arasındaki RT uzaklığını göstermektedir. Uzaklık fonksiyonu $d_{MRT}(u, v)$, R_2 üzerinde bir metrik belirtir.

Tanım 4.1.5. b parça uzunluğunu, n parça sayısını ve N verilen uzayın elemanlarının uzunluğunu göstermek üzere $N = nb$ eşitliği sağlansın. R_2^{nb} modülü için $c, v \in R_2^{nb}$ olmak üzere u ve v elemanlarının iç çarpımı aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$\langle c, v \rangle = \sum_{i=0}^{n-1} \langle c_i, v_i \rangle = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{b-1} c_{(i,j)} v_{(i,b-j+1)} \right).$$

Burada, $\langle c_i, v_i \rangle = \sum_{j=0}^{b-1} c_{(i,j)} v_{(i,b-j+1)}$, c_i ve v_i elemanlarının iç çarpımlarını, ayrıca $c_{(i,j)}$ ve $v_{(i,j)}$ sırasıyla c_i ve v_i elemanlarının j inci bitlerini göstermektedir.

Hadamard fonksiyonu, R_2 halkası için aşağıdaki gibi verilebilir:

Tanım 4.1.6. f , R_2^n üzerinde tanımlı bir fonksiyon olsun. f fonksiyonun Hadamard fonksiyonu olan \tilde{f} aşağıdaki gibi tanımlanır:

$c \in R_2^n$ olmak üzere,

$$\tilde{f}(c) = \sum_{v \in R_2^n} \chi(\langle c, v \rangle) f(v)$$

dır. Burada χ , R_2 üzerinde karakter fonksiyonunu temsil etmektedir. Bu karakter fonksiyonu aşağıdaki gibi verilebilir:

Tanım 4.1.7. $u^2 = 0$ olmak üzere, R_2 halkası için χ karakter fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

R_2 toplamsal bir grup ve $\mathbb{C} - \{0\}$ kompleks sayılar kümesi çarpımsal bir grup için $\chi : (R_2, +) \rightarrow (\mathbb{C} - \{0\}, \cdot)$ olmak üzere,

$$\chi(a+ub) = (-1)^{a+b}$$

dır. Verilen χ karakter fonksiyonu bir grup homomorfizmasıdır. Gerçekten, $\forall a+ub, c+ud \in R_2$ için,

$$\begin{aligned} \chi((a+ub)+(c+ud)) &= \chi((a+c)+u(b+d)) \\ &= (-1)^{(a+c)+(b+d)} \\ &= (-1)^{(a+b)+(c+d)} \\ &= (-1)^{a+b} (-1)^{c+d} \\ &= \chi(a+ub) \chi(c+ud). \end{aligned}$$

olduğundan χ karakter fonksiyonu bir grup homomorfizmadır.

Örnek 4.1.1. $b=16$ ve $t=3$ olmak üzere e hata vektörü aşağıdaki gibi verilsin:

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1+u & 1 & 0 & 0 & u & 0 & 1+u & 1+u & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1+u & 0 & 1+u & 1+u & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & u & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in R_2^{32}.$$

e_i , e hata vektörünün i inci parçasını göstermek üzere e hata vektörünün parçaları aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} e_0 &= (0 & 0 & 1+u & 1 & 0 & 0 & u & 0 & 1+u & 1+u & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0), \\ e_1 &= (1+u & 0 & 1+u & 1+u & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & u & 0 & 0 & 0 & 0 & 0). \end{aligned}$$

Burada $i=0,1$ için $e_i \in R_2^{16}$ dır.

e_i parçalarının RT ağırlığı,

$$w_{RT}(e_0) = 12,$$

$$w_{RT}(e_1) = 11$$

bulunur. Dolayısıyla, e hata vektörünün m-spotty RT ağırlığı aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned}
 w_{MRT}(e) &= \sum_{i=0}^1 \left\lceil \frac{w_{RT}(e_i)}{3} \right\rceil \\
 &= \left\lceil \frac{w_{RT}(e_0)}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{w_{RT}(e_1)}{3} \right\rceil \\
 &= \left\lceil \frac{12}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{11}{3} \right\rceil \\
 &= 4 + 4 \\
 &= 8.
 \end{aligned}$$

Örnek 4.1.2. $b=8$ ve $t=2$ olmak üzere $u, v \in R_2^{16}$ kodsözleri aşağıdaki gibi verilsin:

$$\begin{aligned}
 u &= (u \ 1+u \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ u \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1+u \ 1+u \ 0 \ 0), \\
 v &= (1+u \ u \ 1 \ 1 \ 0 \ u \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1+u \ 1+u).
 \end{aligned}$$

Bu takdirde parçaların RT uzaklıkları

$$\begin{aligned}
 d_{RT}(u_0, v_0) &= d_{RT}(u \ 1+u \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ u, 1+u \ u \ 1 \ 1 \ 0 \ u \ 0 \ 0) = 8, \\
 d_{RT}(u_1, v_1) &= d_{RT}(1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1+u \ 1+u \ 0 \ 0, 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1+u \ 1+u) = 8
 \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Dolayısıyla u ve v kodsözleri arasındaki m-spotty RT uzaklığı

$$\begin{aligned}
 d_{MRT}(u, v) &= \sum_{i=0}^1 \left\lceil \frac{d_{RT}(u_i, v_i)}{2} \right\rceil \\
 &= \left\lceil \frac{d_{RT}(u_0, v_0)}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{d_{RT}(u_1, v_1)}{2} \right\rceil \\
 &= \left\lceil \frac{8}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{8}{2} \right\rceil \\
 &= 4 + 4 = 8
 \end{aligned}$$

dır.

Bölüm 2’de farklı cebirsel yapılar için tanımlanan P_k kümeleri R_2 halkası üzerinde de benzer şekilde aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

Tanım 4.1.8. R_2^n modülü için

$$P_k = \{v \in R_2^n : \deg v(x) = k\}$$

olmak üzere, R_2^n modülünün bir ayrışımı P_k kümeleri ile ifade edilebilir. Yani, $I = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ için,

$$R_2^n = \bigcup_{k \in I} P_k \quad \text{ve } i \neq j \text{ için } P_i \cap P_j = \emptyset$$

sağlanır. Hadamard fonksiyonu inşa edilirken derecesi sıfır olan polinomların oluşturduğu P_0 kümesi aşağıdaki gibi ifade edilecektir:

$$P_0 = \{v \in R_2^n : \deg v(x) = 0\}$$

olduğundan $P_0^* = \{00..00\}$ ve $P_0^{**} = \{u0...00, 1+u0...00, 10...00\}$ kümeleri için $P_0 = P_0^* \cup P_0^{**}$ ifadesi kullanılacaktır.

4.2. $R_2 = F_2 + uF_2$ Halkası Üzerinde Hadamard Fonksiyonunun İnşa Edilmesi

Tanım 4.1.6’da verilen

$$\tilde{f}(c) = \sum_{v \in R_2^n} \chi(\langle c, v \rangle) f(v)$$

Hadamard fonksiyonu Tanım 4.1.8'de verilen P_k kümeleri ile aşağıdaki gibi karakterize edilebilir:

c sabit bir eleman olmak üzere,

$$c = (c_0, c_1, \dots, c_{n-3}, c_{n-2}, c_{n-1}), v = (v_0, v_1, v_2, \dots, v_{n-3}, v_{n-2}, v_{n-1})$$

olsun. Bu takdirde P_k kümeleri kullanılarak

$$\sum_{v \in R^n} \chi(\langle c, v \rangle) = \sum_{v \in P_0} \chi(\langle c, v \rangle) + \sum_{v \in P_1} \chi(\langle c, v \rangle) + \sum_{v \in P_2} \chi(\langle c, v \rangle) + \dots + \sum_{v \in P_{n-1}} \chi(\langle c, v \rangle)$$

elde edilir. P_0 kümesinin elemanları kullanılarak elde edilen toplam, Tanım 4.1.8'de P_0 kümesi için bahsi geçen durum göz önüne alınarak aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\sum_{v \in P_0} \chi(\langle c, v \rangle) = \sum_{v \in P_0^*} \chi(\langle c, v \rangle) + \sum_{v \in P_0^{**}} \chi(\langle c, v \rangle).$$

Son iki eşitlik birleştirilirse,

$$\begin{aligned} \sum_{v \in R^n} \chi(\langle c, v \rangle) &= \sum_{v \in P_0^*} \chi(\langle c, v \rangle) + \sum_{v \in P_0^{**}} \chi(\langle c, v \rangle) + \sum_{v \in P_1} \chi(\langle c, v \rangle) \\ &\quad + \sum_{v \in P_2} \chi(\langle c, v \rangle) + \dots + \sum_{v \in P_{n-1}} \chi(\langle c, v \rangle). \end{aligned}$$

elde edilir. Her bir toplam aşağıdaki gibi verilsin:

$$\sum_{v \in P_0^*} \chi(\langle c, v \rangle) \rightarrow S_0^*$$

$$\sum_{v \in P_0^{**}} \chi(\langle c, v \rangle) \rightarrow S_0$$

$$\sum_{v \in P_1} \chi(\langle c, v \rangle) \rightarrow S_1$$

$$\sum_{v \in P_2} \chi(\langle c, v \rangle) \rightarrow S_2$$

·
·
·

$$\sum_{v \in P_{n-1}} \chi(\langle c, v \rangle) \rightarrow S_{n-1}$$

i) $v \in P_0^*$ olduğundan, $v = (00..00)$ dır. Dolayısıyla, $\langle c, v \rangle = 0$ bulunur. Buradan $S_0^* = 1$ elde edilir.

Sonuç 4.2.1. $S_0^* = \{1, v = (00..00)..$

ii) $v \in P_0^{**}$ olsun. $v \in \{10..00, u0..00, 1+u0..00\}$ yani $v_0 \in \{1, u, 1+u\}$ dır. Bu durumda iç çarpımın alacağı değer $\langle c, v \rangle = v_0 c_{n-1}$ dır. İç çarpım toplamda yerine yazılırsa,

$$S_0 = \sum_{v \in P_0^{**}} \chi(\langle c, v \rangle) = \sum_{v_0 \in R_2 - \{0\}} \chi(v_0 c_{n-1}) = \chi(c_{n-1}) + \chi(u c_{n-1}) + \chi((1+u) c_{n-1})$$

elde edilir. $c_{n-1} \in R_2$ olduğundan, c_{n-1} elemanın durumunu aşağıdaki gibi irdeleyebiliriz:

Eğer $c_{n-1} = 0$ ise,

$$S_0 = \chi(0) + \chi(0) + \chi(0) = 3$$

elde edilir.

Eğer $c_{n-1} = 1$ ise, Tanım 4.1.7 kullanılarak,

$$S_0 = \chi(1) + \chi(u) + \chi(1+u) = -1$$

elde edilir.

Eğer $c_{n-1} = u$ ise, Tanım 4.1.7 kullanılarak,

$$S_0 = \chi(u) + \chi(0) + \chi(u) = -1$$

elde edilir. Son olarak eğer $c_{n-1} = 1+u$ ise,

$$S_0 = \chi(1+u) + \chi(u) + \chi(1) = -1$$

elde edilir.

Sonuç 4.2.2. $S_0 = \begin{cases} 3, & c_{n-1} = 0 \\ -1, & c_{n-1} \neq 0. \end{cases}$

iii) $v \in P_1$ olduğundan $v_1 \neq 0$ olmak üzere $v(x) = v_0 + v_1x$ şeklindedir. Bu yüzden

$\langle c, v \rangle = v_0c_{n-1} + v_1c_{n-2}$ bulunur. Buradan,

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{v \in R_2^2} \chi(\langle c, v \rangle) = \sum_{v_0 \in R_2} \chi(v_0c_{n-1}) \sum_{\substack{v_1 \in R_2 \\ v_1 \neq 0}} \chi(v_1c_{n-2}) \\ &= (\chi(0) + \chi(uc_{n-1}) + \chi(c_{n-1}) + \chi((1+u)c_{n-1})) (\chi(c_{n-2}) + \chi(uc_{n-2}) + \chi((1+u)c_{n-2})) \end{aligned}$$

elde edilir. (c_{n-2}, c_{n-1}) ikilisi için 16 tane farklı durum vardır. Bu durumlar aşağıdaki gibidir:

$$(c_{n-2}, c_{n-1}) = (0, 0) \rightarrow S_1 = 3 \cdot 2^2,$$

$$(c_{n-2}, c_{n-1}) = (1, 0) \rightarrow S_1 = -2^2,$$

$$(c_{n-2}, c_{n-1}) = (u, 0) \rightarrow S_1 = -2^2,$$

$$(c_{n-2}, c_{n-1}) = (1+u, 0) \rightarrow S_1 = -2^2,$$

$$(c_{n-2}, c_{n-1}) = (0, 1) \rightarrow S_1 = 0,$$

$$\begin{aligned}
(c_{n-2}, c_{n-1}) = (0, u) &\rightarrow S_1 = 0, \\
(c_{n-2}, c_{n-1}) = (0, 1+u) &\rightarrow S_1 = 0, \\
(c_{n-2}, c_{n-1}) = (1, 1) &\rightarrow S_1 = 0, \\
(c_{n-2}, c_{n-1}) = (u, 1) &\rightarrow S_1 = 0, \\
(c_{n-2}, c_{n-1}) = (1+u, 1) &\rightarrow S_1 = 0, \\
(c_{n-2}, c_{n-1}) = (u, u) &\rightarrow S_1 = 0, \\
(c_{n-2}, c_{n-1}) = (1+u, 1+u) &\rightarrow S_1 = 0, \\
(c_{n-2}, c_{n-1}) = (u, 1+u) &\rightarrow S_1 = 0, \\
(c_{n-2}, c_{n-1}) = (1+u, u) &\rightarrow S_1 = 0, \\
(c_{n-2}, c_{n-1}) = (1, u) &\rightarrow S_1 = 0, \\
(c_{n-2}, c_{n-1}) = (1, 1+u) &\rightarrow S_1 = 0.
\end{aligned}$$

Bu durumlar Sonuç 4.2.3 ile özetlenmektedir:

Sonuç 4.2.3.

$$S_1 = \begin{cases} 3 \cdot 2^2, & (c_{n-2}, c_{n-1}) = (0, 0) \\ -2^2, & (c_{n-2}, c_{n-1}) = (a, 0) \text{ ve } a \in R_2 - \{0\} \\ 0, & (c_{n-2}, c_{n-1}) = (b, c) \text{ ve } b \in R_2, c \in R_2 - \{0\}. \end{cases}$$

iv) $v \in P_2$ olduğundan $v_2 \neq 0$ olmak üzere $v(x) = v_0 + v_1x + v_2x^2$ şeklindedir. Bu yüzden $\langle c, v \rangle = v_0c_{n-1} + v_1c_{n-2} + v_2c_{n-3}$ bulunur. Buradan,

$$\begin{aligned}
S_2 &= \sum_{v \in R_2^3} \chi(\langle c, v \rangle) = \sum_{v_0 \in R_2} \chi(v_0c_{n-1}) \sum_{v_1 \in R_2} \chi(v_1c_{n-2}) \sum_{\substack{v_2 \in R_2 \\ v_2 \neq 0}} \chi(v_2c_{n-3}) \\
&= (\chi(0) + \chi(uc_{n-1}) + \chi(c_{n-1}) + \chi((1+u)c_{n-1})) \\
&\quad (\chi(0) + \chi(c_{n-2}) + \chi(uc_{n-2}) + \chi((1+u)c_{n-2})) (\chi(c_{n-3}) + \chi(uc_{n-3}) + \chi((1+u)c_{n-3}))
\end{aligned}$$

elde edilir. $(c_{n-3}, c_{n-2}, c_{n-1})$ ikilisi için 4^3 tane farklı durum vardır. Bu durumların bazıları aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
(c_{n-3}, c_{n-2}, c_{n-1}) &= (0, 0, 0) \rightarrow S_2 = 3 \cdot 2^4, \\
(c_{n-3}, c_{n-2}, c_{n-1}) &= (1, 0, 0) \rightarrow S_2 = -2^4, \\
(c_{n-3}, c_{n-2}, c_{n-1}) &= (u, 0, 0) \rightarrow S_2 = -2^4, \\
(c_{n-3}, c_{n-2}, c_{n-1}) &= (1+u, 0, 0) \rightarrow S_2 = -2^4, \\
(c_{n-3}, c_{n-2}, c_{n-1}) &= (0, 1, 1) \rightarrow S_2 = 0, \\
(c_{n-3}, c_{n-2}, c_{n-1}) &= (1, 1, u) \rightarrow S_2 = 0.
\end{aligned}$$

Bu durumların genel hali Sonuç 4.2.4 ile özetlenmektedir:

Sonuç 4.2.4.

$$S_2 = \begin{cases} 3 \cdot 2^4, & (c_{n-3}, c_{n-2}, c_{n-1}) = (0, 0, 0) \\ -2^4, & (c_{n-3}, c_{n-2}, c_{n-1}) = (a, 0, 0) \text{ ve } a \in \mathbb{R}_2 - \{0\} \\ 0, & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

v) $v \in P_3$ olduğundan $v_3 \neq 0$ olmak üzere $v(x) = v_0 + v_1x + v_2x^2 + v_3x^3$ şeklindedir.

Bu yüzden $\langle c, v \rangle = v_0c_{n-1} + v_1c_{n-2} + v_2c_{n-3} + v_3c_{n-4}$ bulunur. Buradan,

$$\begin{aligned}
S_3 &= \sum_{v_0 \in \mathbb{R}_2} \chi(v_0c_{n-1}) \sum_{v_1 \in \mathbb{R}_2} \chi(v_1c_{n-2}) \sum_{v_2 \in \mathbb{R}_2} \chi(v_2c_{n-3}) \sum_{\substack{v_3 \in \mathbb{R}_2 \\ v_3 \neq 0}} \chi(v_3c_{n-4}) \\
&= (\chi(0) + \chi(c_{n-1}) + \chi(uc_{n-1}) + \chi((1+u)c_{n-1})) \left(\begin{aligned} &\chi(0) + \chi(c_{n-2}) + \chi(uc_{n-2}) \\ &+ \chi((1+u)c_{n-2}) \end{aligned} \right) \\
&\quad \chi(0) + \chi(c_{n-3}) + \chi(uc_{n-3}) + \chi((1+u)c_{n-3}) (\chi(c_{n-1}) + \chi(uc_{n-1}) + \chi((1+u)c_{n-1}))
\end{aligned}$$

elde edilir. $(c_{n-4}, c_{n-3}, c_{n-2}, c_{n-1})$ ikilisi için 4^4 tane farklı durum vardır. Bu durumların bazıları aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
(c_{n-4}, c_{n-3}, c_{n-2}, c_{n-1}) &= (0, 0, 0, 0) \rightarrow S_3 = 3 \cdot 2^6, \\
(c_{n-4}, c_{n-3}, c_{n-2}, c_{n-1}) &= (1, 0, 0, 0) \rightarrow S_3 = -2^6, \\
(c_{n-4}, c_{n-3}, c_{n-2}, c_{n-1}) &= (u, 0, 0, 0) \rightarrow S_3 = -2^6,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (c_{n-4}, c_{n-3}, c_{n-2}, c_{n-1}) &= (1+u, 0, 0, 0) \rightarrow S_3 = -2^6, \\ (c_{n-4}, c_{n-3}, c_{n-2}, c_{n-1}) &= (0, 1, 1, u) \rightarrow S_3 = 0, \\ (c_{n-4}, c_{n-3}, c_{n-2}, c_{n-1}) &= (1, 1, u, 1+u) \rightarrow S_3 = 0. \end{aligned}$$

Bu durumların genel hali Sonuç 4.2.5 ile özetlenmektedir:

Sonuç 4.2.5.

$$S_3 = \begin{cases} 3 \cdot 2^6, & (c_{n-4}, c_{n-3}, c_{n-2}, c_{n-1}) = (0, 0, 0, 0) \\ -2^6, & (c_{n-4}, c_{n-3}, c_{n-2}, c_{n-1}) = (a, 0, 0, 0) \text{ ve } a \in R_2 - \{0\} \\ 0, & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

S_0 , S_1 , S_2 ve S_3 durumları göz önüne alındığında diğer durumlar içinde benzer bir genel sonuç elde edilebilir. Bu genel sonuç aşağıda Sonuç 4.2.6. ile verilmektedir:

Sonuç 4.2.6.

$$S_k = \begin{cases} 3 \cdot 2^{2k}, & (c_{n-(k+1)}, c_{n-k}, c_{n-(k-1)}, \dots, c_{n-1}) = (0, 0, 0, \dots, 0) \\ -2^{2k}, & (c_{n-(k+1)}, c_{n-k}, c_{n-(k-1)}, \dots, c_{n-1}) = (a, 0, 0, \dots, 0) \text{ ve } a \in R_2 - \{0\} \\ 0, & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

Sonuç 4.2.6, Kısım 4.2'de verilen diğer tüm sonuçlara bakıldığında aşağıdaki gibi de yorumlanabilir:

$$\text{Sonuç 4.2.7. } S_k = \begin{cases} 3 \cdot 2^{2k}, & w_{RT}(c) < n - k \\ -2^{2k}, & w_{RT}(c) = n - k \\ 0, & w_{RT}(c) > n - k. \end{cases}$$

Sonuç 4.2.6 veya Sonuç 4.2.7 aşağıdaki Ön Teorem 4.2.1 ile ifade edilip daha sonrasında ispatı verilecektir. Aşağıda verilen Ön Teorem 4.2.1, bir b parçası için yapılan işlemleri ifade etmektedir.

Ön Teorem 4.2.1. $c = (c_0, c_1, \dots, c_{b-1}), v = (v_0, v_1, \dots, v_{b-1}) \in R_2^b$ ve $w_{RT}(c) = j$ olmak üzere sabit bir k değeri için,

$$S(k, j) = \sum_{v \in P_k} \chi(\langle c, v \rangle) = \begin{cases} 3 \cdot 2^{2k}, & j < b - k \\ -2^{2k}, & j = b - k \\ 0, & j > b - k. \end{cases}$$

dır.

İspat: $c, v \in R_2^b$ ve $w_{RT}(c) = j$ olsun. Bu takdirde,

$$\begin{aligned} S(k, j) &= \sum_{v \in P_k} \chi(\langle c, v \rangle) = \sum_{v \in P_k} \chi(c_{b-1}v_0 + c_{b-2}v_1 + c_{b-3}v_2 + \dots + c_{b-k+1}v_{k-2} + c_{b-k}v_{k-1} + c_{b-k-1}v_k) \\ &= \left(\sum_{v_0 \in R_2} \chi(c_{b-1}v_0) \right) \left(\sum_{v_1 \in R_2} \chi(c_{b-2}v_1) \right) \left(\sum_{v_2 \in R_2} \chi(c_{b-3}v_2) \right) \\ &\quad \dots \left(\sum_{v_{k-1} \in R_2} \chi(c_{b-k}v_{k-1}) \right) \left(\sum_{0 \neq v_k \in R_2} \chi(c_{b-k-1}v_k) \right) \end{aligned}$$

elde edilir. $S(k, j)$ için üç farklı durum söz konusudur:

i) Eğer $c_{b-k-1} \in R_2 - \{0\}$ ve c elemanının son k tane bileşeni sıfır ise, (yani $c_{b-k}, c_{b-k+1}, \dots, c_{b-3}, c_{b-2}, c_{b-1}$) bu takdirde $j = w_{RT}(c) = b - k$ ve $S(k, j) = -2^{2k}$ bulunur.

ii) Eğer $c_{b-k-1} = 0$ ve c elemanının son k tane bileşeni sıfır ise, bu takdirde $j = w_{RT}(c) < b - k$ ve $S(k, j) = 3 \cdot 2^{2k}$ bulunur.

iii) Eğer c elemanının son k tane bileşeninden en az biri sıfır elemanından farklı ise, bu takdirde $j = w_{RT}(c) > b - k$ ve $S(k, j) = 0$ bulunur.

Dolayısıyla ispat tamamlanır.

Tanım 4.2.1. $\tilde{f}(c) = \sum_{v \in R_2^n} \chi(\langle c, v \rangle) f(v)$ Hadamard fonksiyonunda $f(v) = z^{\lceil w_{MRT}(v)/t \rceil}$

alınırsa, $\tilde{f}(c) = \sum_{v \in R_2^n} \chi(\langle c, v \rangle) z^{\lceil w_{MRT}(v)/t \rceil}$ şekline dönüşür.

Ön Teorem 4.2.2. $c = (c_0, c_1, \dots, c_{b-1})$ ve $v = (v_0, v_1, \dots, v_{b-1})$, R_2^b nin iki elemanı ve $w_{RT}(c) = j$ olsun. Bu takdirde,

$$\sum_{v \in R_2^b} \chi(\langle c, v \rangle) = 1 + S(0, j) + S(1, j) + \dots + S(b-1, j)$$

dır.

İspat:

$$\begin{aligned} \sum_{v \in R_2^b} \chi(\langle c, v \rangle) &= \sum_{\substack{\deg v=0 \\ v=0}} \chi(\langle c, v \rangle) + \sum_{\substack{\deg v=0 \\ v \neq 0}} \chi(\langle c, v \rangle) + \sum_{\substack{\deg v=1 \\ v \in R_2^b}} \chi(\langle c, v \rangle) + \dots + \sum_{\substack{\deg v=b-1 \\ v \in R_2^b}} \chi(\langle c, v \rangle) \\ &= 1 + \sum_{v \in P_0^{**}} \chi(\langle c, v \rangle) + \sum_{v \in P_1} \chi(\langle c, v \rangle) + \dots + \sum_{v \in P_{b-1}} \chi(\langle c, v \rangle) \\ &= 1 + S(0, j) + S(1, j) + \dots + S(b-1, j). \end{aligned}$$

Ön Teorem 4.2.3. $c = (c_0, c_1, \dots, c_{b-1})$, $v = (v_0, v_1, \dots, v_{b-1}) \in R_2^b$ ve $w_{RT}(c) = j$ olsun.

Bu takdirde,

$$\tilde{f}(c) = \sum_{v \in R_2^b} \chi(\langle c, v \rangle) z^{\lceil w_{RT}(v)/t \rceil} = V_j^{(t)}(z)$$

dir. Burada, $V_j^{(q,t)}(z) = 1 + \sum_{k=0}^{b-1} S(k, j) z^{\lceil (k+1)/t \rceil}$ dir.

İspat: Ön Teorem 4.2.2'yi kullanarak,

$$\begin{aligned}
\sum_{v \in R_2^b} \chi(\langle c, v \rangle) z^{\lceil w_{RT}(v)/t \rceil} &= \sum_{\substack{\deg v=0 \\ v=0}} \chi(\langle c, v \rangle) z^{\lceil 0/t \rceil} + \sum_{\substack{\deg v=0 \\ v \neq 0}} \chi(\langle c, v \rangle) z^{\lceil 1/t \rceil} \\
&\quad + \sum_{\substack{\deg v=1 \\ v \in R_2^b}} \chi(\langle c, v \rangle) z^{\lceil 2/t \rceil} + \dots + \sum_{\substack{\deg v=b-1 \\ v \in R_2^b}} \chi(\langle c, v \rangle) z^{\lceil b/t \rceil} \\
&= 1 + \sum_{v \in P_0^{**}} \chi(\langle c, v \rangle) z^{\lceil 1/t \rceil} + \sum_{v \in P_1} \chi(\langle c, v \rangle) z^{\lceil 2/t \rceil} \\
&\quad + \dots + \sum_{v \in P_{b-1}} \chi(\langle c, v \rangle) z^{\lceil b/t \rceil} \\
&= 1 + S(0, j) z^{\lceil 1/t \rceil} + S(1, j) z^{\lceil 2/t \rceil} + \dots + S(b-1, j) z^{\lceil b/t \rceil} \\
&= 1 + \sum_{k=0}^{b-1} S(k, j) z^{\lceil (k+1)/t \rceil} = V_j^{(t)}(z)
\end{aligned}$$

sonucu elde edilir. Böylece Hadamard fonksiyonu elde edilmiş olur.

4.3. $R_2 = F_2 + uF_2$ Halkası Üzerinde M-spotty RT Ağırlık Sayacı için MacWilliams Özdeşliği

Bölüm 3'te F_2 sonlu cismi üzerinde m-spotty RT ağırlık sayacı için MacWilliams özdeşliği kısmında verilen gösterimler ve tanımlar, bu kısımda da kullanılabilir.

Örnek 4.3.1. $b=2$ ve $t=2$ olmak üzere, R_2 halkası üzerinde C lineer kodu aşağıdaki gibi verilsin:

$$C = \left\{ \begin{array}{l} 0 \ 0 \ 0 \ 0, 0 \ u \ u \ 0, 1 \ 0 \ 0 \ 1, 1 \ u \ u \ 1, u \ 0 \ 0 \ u, \\ u \ u \ u \ u, 1+u \ 0 \ 0 \ 1+u, 1+u \ u \ u \ 1+u \end{array} \right\}.$$

Kodsözlerin C lineer kodunun ağırlık sayacına katkısı aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
c_1 &= (00 \ 00) \rightarrow z^{\lceil 0/2 \rceil + \lceil 0/2 \rceil} = z^0, \\
c_2 &= (0u \ u0) \rightarrow z^{\lceil 2/2 \rceil + \lceil 1/2 \rceil} = z^2, \\
c_3 &= (10 \ 01) \rightarrow z^{\lceil 1/2 \rceil + \lceil 2/2 \rceil} = z^2, \\
c_4 &= (1u \ u1) \rightarrow z^{\lceil 2/2 \rceil + \lceil 2/2 \rceil} = z^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_5 &= (u0 \ 0u) \rightarrow z^{\lceil 1/2 \rceil + \lceil 2/2 \rceil} = z^2, \\
c_6 &= (uu \ uu) \rightarrow z^{\lceil 2/2 \rceil + \lceil 2/2 \rceil} = z^2, \\
c_7 &= (1+u0 \ 01+u) \rightarrow z^{\lceil 2/2 \rceil + \lceil 2/2 \rceil} = z^2, \\
c_8 &= (1+uu \ u1+u) \rightarrow z^{\lceil 2/2 \rceil + \lceil 2/2 \rceil} = z^2.
\end{aligned}$$

Dolayısıyla C lineer kodunun ağırlık sayacı

$$W_C(z) = 1 + 7z^2$$

dır.

Örnek 4.3.2. Örnek 4.3.1’de verilen C lineer kodunu ele alalım. C lineer kodu için RT ağırlık dağılım kodsözleri sayısını belirleyelim. C lineer kodu için RT ağırlık dağılım vektörleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
c_1 &= (00 \ 00) \rightarrow (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) = (2, 0, 0), \\
c_2 &= (0u \ u0) \rightarrow (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) = (0, 1, 1), \\
c_3 &= (10 \ 01) \rightarrow (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) = (0, 1, 1), \\
c_4 &= (1u \ u1) \rightarrow (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) = (0, 0, 2), \\
c_5 &= (u0 \ 0u) \rightarrow (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) = (0, 1, 1), \\
c_6 &= (uu \ uu) \rightarrow (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) = (0, 0, 2), \\
c_7 &= (1+u0 \ 01+u) \rightarrow (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) = (0, 1, 1), \\
c_8 &= (1+uu \ u1+u) \rightarrow (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) = (0, 0, 2).
\end{aligned}$$

Dolayısıyla RT ağırlık dağılım kodsözleri sayısı şu şekildedir:

$$\frac{A_{(2,0,0)}}{1} \frac{A_{(0,1,1)}}{4} \frac{A_{(0,0,2)}}{3}.$$

Buradan ağırlık sayacı aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned}
W_C(z) &= A_{(2,0,0)} \left(z^{\lceil 0/2 \rceil} \right)^2 \left(z^{\lceil 1/2 \rceil} \right)^0 \left(z^{\lceil 2/2 \rceil} \right)^0 + A_{(0,1,1)} \left(z^{\lceil 0/2 \rceil} \right)^0 \left(z^{\lceil 1/2 \rceil} \right)^1 \left(z^{\lceil 2/2 \rceil} \right)^1 \\
&\quad + A_{(0,0,2)} \left(z^{\lceil 0/2 \rceil} \right)^0 \left(z^{\lceil 1/2 \rceil} \right)^0 \left(z^{\lceil 2/2 \rceil} \right)^2 \\
&= 1 + 7z^2.
\end{aligned}$$

Örnek 4.3.1’de elde edilen ağırlık sayacı ile aynı olduğu görülür.

Aşağıdaki teorem, $u^2 = 0$ olmak üzere R_2 halkası üzerinde tanımlanan m-spotty RT ağırlık sayacı için MacWilliams özdeşliğini vermektedir.

Teorem 4.3.1. C lineer kod olsun. C m-spotty parça hata kontrol kodu ile dik tümleyen kodu için m-spotty RT ağırlık sayacı arasındaki ilişki şu şekildedir:

$$W_{C^\perp}(z) = \sum_{\substack{(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_b) \\ \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_b \geq 0 \\ \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_b = n}} A_{(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_b)}^\perp \cdot \prod_{j=0}^b \left(z^{\lceil j/t \rceil} \right)^{\alpha_j} = \frac{1}{|C|} \sum_{\substack{(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_b) \\ \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_b \geq 0 \\ \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_b = n}} A_{(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_b)} \cdot \prod_{j=0}^b \left(V_j^{(t)}(z) \right)^{\alpha_j}.$$

İspat: Tanım 4.2.1’de, $f(v) = \prod_{i=1}^n z^{\lceil w_{RT}(v_i)/t \rceil}$ alalım. Bu takdirde,

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(c) &= \sum_{v \in R_2^{nb}} \chi(\langle c, v \rangle) \prod_{i=1}^n z^{\lceil w_{RT}(v_i)/t \rceil} \\
&= \sum_{v \in R_2^{nb}} \chi(\langle c_1, v_1 \rangle + \langle c_2, v_2 \rangle + \dots + \langle c_n, v_n \rangle) \prod_{i=1}^n z^{\lceil w_{RT}(v_i)/t \rceil} \\
&= \sum_{v \in R_2^{nb}} \chi(\langle c_1, v_1 \rangle) \chi(\langle c_2, v_2 \rangle) \dots \chi(\langle c_n, v_n \rangle) \prod_{i=1}^n z^{\lceil w_{RT}(v_i)/t \rceil} \\
&= \sum_{v_1 \in R_2^b} \sum_{v_2 \in R_2^b} \dots \sum_{v_n \in R_2^b} \left(\prod_{i=1}^n \chi(\langle c_i, v_i \rangle) z^{\lceil w_{RT}(v_i)/t \rceil} \right) \\
&= \prod_{i=1}^n \left(\sum_{v_i \in R_2^b} \chi(\langle c_i, v_i \rangle) z^{\lceil w_{RT}(v_i)/t \rceil} \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada, $\sum_{v_i \in R_2^b} \chi(\langle c_i, v_i \rangle) z^{\lceil w_{RT}(v_i)/t \rceil}$ sonucu sabit olarak alınan c_i kodsözünün ağırlığı olan $w_{RT}(c_i)$ ağırlığına bağlıdır. Kabul edelim ki sabit olarak alınan c_i vektörünün RT ağırlığı $w_{RT}(c_i) = j$ olsun. Bu takdirde, Ön Teorem 4.2.3'ten

$$\sum_{v_i \in R_2^b} \chi(\langle c_i, v_i \rangle) z^{\lceil w_{RT}(v_i)/t \rceil} = V_j^{(t)}(z)$$

eşitliği elde edilir. Dolayısıyla, $\tilde{f}(c)$ fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$\tilde{f}(c) = \prod_{j=0}^b \left(V_j^{(q,t)}(z) \right)^{\alpha_j} .$$

Elde edilen son eşitlik aşağıdaki eşitlikte yerine yazılırsa,

$$\sum_{v \in C^\perp} f(v) = \frac{1}{|C|} \sum_{c \in C} \tilde{f}(c)$$

elde edilir. Bu takdirde, aşağıdaki ilişki elde edilir:

$$\sum_{v \in C^\perp} \prod_{j=0}^b \left(z^{\lceil j/t \rceil} \right)^{\alpha_j} = \frac{1}{|C|} \sum_{c \in C} \prod_{j=0}^b \left(V_j^{(q,t)}(z) \right)^{\alpha_j} .$$

Dolayısıyla, C kodunun MRT ağırlık sayacı ile dik tümleyeninin m-spotty RT ağırlık sayacı arasındaki bağıntı aşağıdaki gibi elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

$$\sum_{\substack{(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_b) \\ \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_b \geq 0 \\ \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_b = n}} A_{(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_b)}^\perp \cdot \prod_{j=0}^b \left(z^{\lceil j/t \rceil} \right)^{\alpha_j} = \frac{1}{|C|} \sum_{\substack{(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_b) \\ \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_b \geq 0 \\ \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_b = n}} A_{(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_b)} \cdot \prod_{j=0}^b \left(V_j^{(t)}(z) \right)^{\alpha_j} .$$

Örnek 4.3.3. Örnek 4.3.1’de verilen C lineer kodunu ele alalım. C lineer kodu ile dik tümleyeni C^\perp kodunun m-spotty RT ağırlık sayaçlarını hesaplayalım. C lineer kodunun kodsözleri Örnek 4.3.1’de ve C^\perp kodunun kodsözleri ise aşağıda verilmektedir. C lineer kodunun ağırlık sayacı Örnek 4.3.1’de elde edilmiş olup aşağıdaki gibidir:

$$W_C(z) = 1 + 7z^2.$$

C^\perp kodunun kodsözleri Tanım 4.1.5’de verilen iç çarpıma göre aşağıdaki gibidir:

$$C^\perp = \left\{ \begin{array}{cccc} 0\ 0\ 0\ 0, & 1\ 0\ 0\ 1, & u\ 0\ 0\ u, & 1+u\ 0\ 0\ 1+u, \\ 0\ 1\ 1\ 0, & 1\ 1\ 1\ 1, & u\ 1\ 1\ u, & 1+u\ 1\ 1\ 1+u, \\ 0\ u\ u\ 0, & 1\ u\ u\ 1, & u\ u\ u\ u, & 1+u\ u\ u\ 1+u, \\ 0\ 1+u\ 1+u\ 0, & u\ u\ u\ 0, & 0\ 1\ 1\ u, & 0\ 0\ 0\ u, \\ u\ 0\ 0\ 0, & u\ 1\ 1\ 0, & 0\ u\ u\ u, & 1\ 0\ 0\ 1+u, \\ 1+u\ 0\ 0\ 1, & 1\ 1\ 1\ 1+u, & 1\ u\ u\ 1+u, & 1+u\ 1\ 1\ 1, \\ 1+u\ u\ u\ 1, & 1\ 1+u\ 1+u\ 1+u & 1+u\ 1+u\ 1+u\ 1, & u\ 1+u\ 1+u\ 0, \\ 0\ 1+u\ 1+u\ u, & u\ 1+u\ 1+u\ u, & 1\ 1+u\ 1+u\ 1, & 1+u\ 1+u\ 1+u\ 1+u \end{array} \right\}$$

Elde edilen dik tümleyenin ağırlık sayacı

$$W_{C^\perp}(z) = 1 + 2z + 29z^2$$

bulunur.

Teorem 4.3.1’in uygulanabilmesi için C kodundaki kodsözlerin RT ağırlık dağılım vektörlerinin sayısını ve $b=2$ ve $t=2$ değerlerine karşılık gelen $V_j^{(2)}$ ifadelerini hesaplamak gerekir. C kodundaki kodsözlerinin RT ağırlık dağılım vektörleri sayısı Örnek 4.3.2’de hesaplanmıştır. Burada $b=2$ ve $t=2$ değerlerine karşılık gelen $V_j^{(2)}$ ifadelerini hesaplayalım. $V_j^{(2)}$ polinomları Ön Teorem 4.3.3 kullanılarak aşağıdaki gibi elde edilir:

$$V_0^{(2)}(z) = 1 + 15z,$$

$$V_1^{(2)}(z) = 1 - z,$$

$$V_2^{(2)}(z) = 1 - z.$$

Teorem 4.3.1'de $V_j^{(2)}$ polinomları ve RT dağılım vektörleri sayıları yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} W_{C^\perp}(z) &= \frac{1}{|C|} \sum_{\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = 2} A_{(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)} \prod_{j=0}^2 (V_j^{(2)}(z))^{\alpha_j} \\ &= \frac{1}{8} \left[(V_0^{(2)})^2 + 4(V_1^{(2)})(V_2^{(2)}) + 3(V_2^{(2)}) \right] \\ &= \frac{1}{8} (8 + 16z + 232z^2) \\ &= 1 + 2z + 29z^2 \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla kod ile dik tümleyeni arasındaki özdeşlik sağlanmış olduğu görülür.

Aşağıdaki kısımda, $u^2 = 0$ olmak üzere $R_2 = F_2 + uF_2$ halkasının bir genellemesi olan $u^2 = 0$ olmak üzere $F_q + uF_q$ halkası için MacWilliams özdeşliği elde edilecektir.

4.4. $R_q = F_q + uF_q$ Halkası Üzerinde Tanım ve Teoremler

Bu kısımda p asal bir tam sayı ve $q = p^m$ olacak şekilde $u^2 = 0$ olmak üzere $R_q = F_{p^m} + uF_{p^m}$ halkası üzerinde tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 4.4.1. [21] $u^2 = 0$ olmak üzere, $R_q = \{a + bu : a, b \in F_q\}$ dır. R_q halkası bilinen toplama ve çarpma işlemlerine göre bir halkadır.

Ön Teorem 4.4.1. [21] R_q halkası temel ideal halkasıdır. Halkanın idealleri tek bir eleman tarafından üretilir. Halkanın ideali $I = (a)$ ise bu idealin elemanları $I = aR_q$ ile ifade edilir.

Ön Teorem 4.4.2. [21] R_q halkasının idealleri,

$$(0) = \{0\}, (u) \text{ ve } (1) = R_q$$

dir.

Tanım 4.4.2. [15] Teorem 1.4.1.1, R_q halkasının idealleri için aşağıdaki gibi yorumlanabilir:

χ karakter olmak üzere, R_q halkası aynı zamanda toplamsal bir grup olduğundan

$$\sum_{a \in (0)} \chi(a) = 1,$$

$$\sum_{a \in (u)} \chi(a) = 0,$$

$$\sum_{a \in R_q} \chi(a) = 0$$

yazılabilir.

Tanım 4.4.3. [22] R_q halkası üzerinde uzunluğu n olan bir C lineer kod, R_q^n in R_q -alt modülü olarak adlandırılır.

Daha önceki bölümlerde farklı cebirsel yapılar üzerinde tanımlanan m-spotty RT ağırlığı, m-spotty RT uzaklığı, iç çarpım, Hadamard fonksiyonu ve Hadamard fonksiyonunun inşası için gereken kümeler benzer biçimde bu kısımda R_q halkası için de aynen tanımlanabilir. Bu kısımda sadece R_q halkası için m-spotty RT ağırlığı,

m-spotty RT uzaklığı ve Hadamard fonksiyonunun inşası için gerekli olan kümeler tanımlanacaktır.

Tanım 4.4.4. $e \in R_q^n$ olmak üzere, e bir hata vektörü olsun. $0 \leq i \leq n-1$ için e_i , e hata vektörünün i inci parçasını temsil etsin. e hata vektöründeki t/b -hatalarının sayısı

$$w_{MRT}(e) = \sum_{i=0}^{n-1} \left[\frac{w_{RT}(e_i)}{t} \right]$$

dır. Burada $w_{RT}(e_i)$, e_i hata vektörünün R_q üzerinde RT ağırlığını göstermektedir.

Benzer biçimde, m-spotty RT uzaklığı R_q halkası üzerine aşağıdaki gibi genelleştirilebilir:

Tanım 4.4.5. C m-spotty parça hata kontrol kodunun u ve v kodsözleri için, m-spotty RT uzaklık fonksiyonu

$$d_{MRT}(u, v) = \sum_{i=0}^{n-1} \left[\frac{d_{RT}(u_i, v_i)}{t} \right]$$

dır. Burada $d_{RT}(u_i, v_i)$, R_q üzerinde u ve v kodsözlerinin i inci parçaları arasındaki RT uzaklığını göstermektedir. Uzaklık fonksiyonu $d_{MRT}(u, v)$, R_q üzerinde bir metrik belirtir.

Hadamard fonksiyonunun belirlenmesinde önemli bir rol oynayan P_k kümeleri R_q halkası üzerinde aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

Tanım 4.4.6. R_q^n modülü için

$$P_k = \{v \in R_q^n : \deg v(x) = k\}$$

olmak üzere, R_q^n modülünün bir ayrışımı P_k kümeleri ile ifade edilebilir. Yani, $I = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ için,

$$R_q^n = \bigcup_{k \in I} P_k \text{ ve } i \neq j \text{ için } P_i \cap P_j = \emptyset$$

sağlanır. Hadamard fonksiyonu inşa edilirken derecesi sıfır olan polinomların oluşturduğu P_0 kümesi aşağıdaki gibi ifade edilecektir:

$$P_0 = \{v \in R_q^n : \deg v(x) = 0\}$$

olduğundan $P_0^* = \{00..00\}$ ve $P_0^{**} = \{v \in R_q^n : \deg v(x) = 0 \text{ ve } v \neq 0\}$ kümeleri için $P_0 = P_0^* \cup P_0^{**}$ ifadesi kullanılacaktır.

4.5. $R_q = F_q + uF_q$ Halkası Üzerinde Hadamard Fonksiyonunun İnşa Edilmesi

Tanım 4.5.1. $u^2 = 0$ olmak üzere, R_q halkası için χ karakter fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

R_q toplamsal bir grup ve $\mathbb{C} - \{0\}$ kompleks sayılar kümesi çarpımsal bir grup olduğundan $\chi : (R_q, +) \rightarrow (\mathbb{C} - \{0\}, \cdot)$ olmak üzere $a + ub \in R_q$ için,

$$\chi(a + ub) = \xi^{a+b}$$

dır. Burada, $\xi = e^{2\pi i/p}$ dir. Verilen χ karakter fonksiyonu bir grup homomorfizmasıdır. Gerçekten, $\forall a + ub, c + ud \in R_q$ için,

$$\begin{aligned}\chi((a + ub) + (c + ud)) &= \chi((a + c) + u(b + d)) \\ &= (\xi)^{(a+c)+u(b+d)} \\ &= (\xi)^{(a+b)+u(c+d)} \\ &= (\xi)^{a+b} (\xi)^{u(c+d)} \\ &= \chi(a + ub) \chi(c + ud)\end{aligned}$$

olduğundan χ karakter fonksiyonu bir grup homomorfizmasıdır.

R_q halkası için Hadamard fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$\tilde{f}(c) = \sum_{v \in R_q^n} \chi(\langle c, v \rangle) f(v).$$

Hadamard fonksiyonu Tanım 4.4.6'da verilen P_k kümeleri ile aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

c sabit bir eleman olmak üzere,

$$c = (c_0, c_1, \dots, c_{n-3}, c_{n-2}, c_{n-1}), v = (v_0, v_1, v_2, \dots, v_{n-3}, v_{n-2}, v_{n-1})$$

olsun. Bu takdirde P_k kümeleri kullanılarak

$$\sum_{v \in R_q^n} \chi(\langle c, v \rangle) = \sum_{v \in P_0} \chi(\langle c, v \rangle) + \sum_{v \in P_1} \chi(\langle c, v \rangle) + \sum_{v \in P_2} \chi(\langle c, v \rangle) + \dots + \sum_{v \in P_{n-1}} \chi(\langle c, v \rangle)$$

elde edilir. P_0 kümesinin elemanları kullanılarak elde edilen toplam, Tanım 4.4.6'da P_0 kümesi için bahsi geçen durum göz önüne alınarak aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\sum_{v \in P_0} \chi(\langle c, v \rangle) = \sum_{v \in P_0^*} \chi(\langle c, v \rangle) + \sum_{v \in P_0^{**}} \chi(\langle c, v \rangle).$$

Son iki eşitlik birleştirilirse,

$$\begin{aligned} \sum_{v \in R_q^n} \chi(\langle c, v \rangle) &= \sum_{v \in P_0^*} \chi(\langle c, v \rangle) + \sum_{v \in P_0^{**}} \chi(\langle c, v \rangle) + \sum_{v \in P_1} \chi(\langle c, v \rangle) \\ &\quad + \sum_{v \in P_2} \chi(\langle c, v \rangle) + \dots + \sum_{v \in P_{n-1}} \chi(\langle c, v \rangle). \end{aligned}$$

elde edilir. Her bir toplam aşağıdaki gibi verilsin:

$$\begin{aligned} \sum_{v \in P_0^*} \chi(\langle c, v \rangle) &\rightarrow S_0^* \\ \sum_{v \in P_0^{**}} \chi(\langle c, v \rangle) &\rightarrow S_0 \\ \sum_{v \in P_1} \chi(\langle c, v \rangle) &\rightarrow S_1 \\ \sum_{v \in P_2} \chi(\langle c, v \rangle) &\rightarrow S_2 \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \sum_{v \in P_{n-1}} \chi(\langle c, v \rangle) &\rightarrow S_{n-1}. \end{aligned}$$

P_k kümelerinin tanımını kullanarak her bir değer için aşağıdaki durumlar elde edilir:

i) $v \in P_0^*$ olduğundan, $v = (00..00)$ dır. Dolayısıyla, $\langle c, v \rangle = 0$ bulunur. Buradan $S_0^* = 1$ elde edilir.

Sonuç 4.5.1. $S_0^* = \{1, v = (00..00)..$

ii) $v \in P_0^{**}$ olsun. $v = v_0 \in R_q - \{0\}$ olduğundan $\langle c, v \rangle = v_0 c_{n-1}$ bulunur. $c_{n-1} \in R_q$ olduğundan, c_{n-1} elemanının durumu iki farklı şekilde ele alınabilir:

Eğer $c_{n-1} = 0$ ise,

$$S_0 = \sum_{v \in P_0^*} \chi(\langle c, v \rangle) = \sum_{v_0 \in R_q - \{0\}} \chi(v_0 c_{n-1}) = \sum_{v_0 \in R_q - \{0\}} \chi(0) = (q-1)q = q^2 - 1$$

elde edilir.

Eğer $c_{n-1} \neq 0$ ise c_{n-1} elemanı için iki farklı inceleme durumu söz konusudur. Eğer $c_{n-1} \in (u)$ ise, bu takdirde Tanım 4.4.2 kullanılarak

$$S_0 = \sum_{v_0 \in R_q - \{0\}} \chi(v_0 c_{n-1}) = |(u)| \sum_{a \in (u)} \chi(a) - \chi(0) = -1$$

bulunur. Eğer $c_{n-1} \in R_q - \{0\}$ ve $c_{n-1} \notin (u)$ ise, bu takdirde Tanım 4.4.2 kullanılarak

$$S_0 = \sum_{v_0 \in R_q - \{0\}} \chi(v_0 c_{n-1}) = \sum_{\substack{a \in R_q - \{0\} \\ a \notin (u)}} \chi(a) = -1$$

elde edilir. $c_{n-1} \neq 0$ durumu için $S_0 = -1$ bulunur.

$$S_0 = \sum_{v \in P_0^*} \chi(\langle c, v \rangle) = \sum_{v_0 \in F_q - \{0\}} \chi(v_0 c_{n-1}) = \sum_{a \in F_q - \{0\}} \chi(a) = -1$$

elde edilir.

Sonuç 4.5.2.

$$S_0 = \begin{cases} q^2 - 1, & c_{n-1} = 0 \\ -1, & c_{n-1} \neq 0. \end{cases}$$

iii) $v \in P_1$ olduğundan $v_1 \neq 0$ olmak üzere $v(x) = v_0 + v_1x$ şeklindedir. Bu yüzden $\langle c, v \rangle = v_0c_{n-1} + v_1c_{n-2}$ bulunur.

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{v \in P_1} \chi(\langle c, v \rangle) = \sum_{v \in P_1} \chi(v_0c_{n-1} + v_1c_{n-2}) = \sum_{v \in P_1} \chi(v_0c_{n-1}) \chi(v_1c_{n-2}) \\ &= \sum_{v_0 \in R_q} \chi(v_0c_{n-1}) \sum_{v_1 \in R_q - \{0\}} \chi(v_1c_{n-2}) \end{aligned}$$

elde edilir. (c_{n-2}, c_{n-1}) ikilisi için q^4 tane farklı durum vardır. Bu durumlar aşağıda verilen Sonuç 4.5.3 ile özetlenmektedir:

Sonuç 4.5.3.

$$S_1 = \begin{cases} (q^2 - 1)q^2, & (c_{n-2}, c_{n-1}) = (0, 0) \\ -q^2, & (c_{n-2}, c_{n-1}) = (a, 0) \text{ ve } a \in R_q - \{0\} \\ 0, & (c_{n-2}, c_{n-1}) = (b, c) \text{ ve } b \in R_q, c \in R_q - \{0\}. \end{cases}$$

iv) $v \in P_2$ olduğundan $v_2 \neq 0$ olmak üzere $v(x) = v_0 + v_1x + v_2x^2$ şeklindedir. Bu yüzden $\langle c, v \rangle = v_0c_{n-1} + v_1c_{n-2} + v_2c_{n-3}$ bulunur. Bu değer S_2 de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{v \in P_2} \chi(\langle c, v \rangle) = \sum_{v \in P_2} \chi(v_0c_{n-1} + v_1c_{n-2} + v_2c_{n-3}) \\ &= \sum_{v \in P_2} \chi(v_0c_{n-1}) \chi(v_1c_{n-2}) \chi(v_2c_{n-3}) \\ &= \sum_{v_0 \in R_q} \chi(v_0c_{n-1}) \sum_{v_1 \in R_q} \chi(v_1c_{n-2}) \sum_{v_2 \in R_q - \{0\}} \chi(v_2c_{n-3}) \end{aligned}$$

elde edilir. $(c_{n-3}, c_{n-2}, c_{n-1})$ üçlüsü q^6 tane değer alır. Bu durumlar aşağıda verilen Sonuç 4.5.4 ile özetlenmektedir:

Sonuç 4.5.4.

$$S_2 = \begin{cases} (q^2 - 1)q^4, & (c_{n-3}, c_{n-2}, c_{n-1}) = (0, 0, 0) \\ -q^4, & (c_{n-3}, c_{n-2}, c_{n-1}) = (a, 0, 0) \text{ ve } a \in R_q - \{0\} \\ 0, & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

v) $v \in P_3$ olduğundan $v_3 \neq 0$ olmak üzere $v(x) = v_0 + v_1x + v_2x^2 + v_3x^3$ şeklindedir.

Bu yüzden $\langle c, v \rangle = v_0c_{n-1} + v_1c_{n-2} + v_2c_{n-3} + v_3c_{n-4}$ bulunur. Bu değer S_3 de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} S_3 &= \sum_{v \in P_3} (-1)^{\langle c, v \rangle} = \sum_{v \in P_3} \chi(v_0c_{n-1} + v_1c_{n-2} + v_2c_{n-3} + v_3c_{n-4}) \\ &= \sum_{v \in P_3} \chi(v_0c_{n-1}) \chi(v_1c_{n-2}) \chi(v_2c_{n-3}) \chi(v_3c_{n-4}) \\ &= \sum_{v_0 \in R_q} \chi(v_0c_{n-1}) \sum_{v_1 \in R_q} \chi(v_1c_{n-2}) \sum_{v_2 \in R_q} \chi(v_2c_{n-3}) \sum_{v_3 \in R_q - \{0\}} \chi(v_3c_{n-4}) \end{aligned}$$

elde edilir. $(c_{n-4}, c_{n-3}, c_{n-2}, c_{n-1})$ dörtlüsü q^8 tane değer alır. Bu durumlar aşağıda verilen Sonuç 4.5.5 ile özetlenmektedir:

Sonuç 4.5.5.

$$S_3 = \begin{cases} (q^2 - 1)q^6, & (c_{n-4}, c_{n-3}, c_{n-2}, c_{n-1}) = (0, 0, 0, 0) \\ -q^6, & (c_{n-4}, c_{n-3}, c_{n-2}, c_{n-1}) = (a, 0, 0, 0) \text{ ve } a \in R_q - \{0\} \\ 0, & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

S_0 , S_1 , S_2 ve S_3 durumları göz önüne alındığında diğer durumlar içinde benzer bir genel sonuç elde edilebilir. Daha sonra ispatı verilecek bu genel durumlar aşağıdaki gibidir:

Sonuç 4.5.6.

$$S_k = \begin{cases} (q^2 - 1)q^{2k}, & (c_{n-(k+1)}, c_{n-k}, c_{n-(k-1)}, \dots, c_{n-1}) = (0, 0, 0, \dots, 0) \\ -q^{2k}, & (c_{n-(k+1)}, c_{n-k}, c_{n-(k-1)}, \dots, c_{n-1}) = (a, 0, 0, \dots, 0) \text{ ve } a \in R_q - \{0\} \\ 0, & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

Sonuç 4.5.6 aşağıdaki gibi de yorumlanabilir:

Sonuç 4.5.7.

$$S_k = \begin{cases} (q^2 - 1)q^{2k}, & w_{RT}(c) < n - k \\ -q^{2k}, & w_{RT}(c) = n - k \\ 0, & w_{RT}(c) > n - k. \end{cases}$$

Sonuç 4.5.6 veya Sonuç 4.5.7 aşağıdaki Ön Teorem 4.5.1 ile ifade edilip ispatlanacaktır. Aşağıda verilen Ön Teorem 4.5.1, bir b parçası için ifade edilecektir.

Ön Teorem 4.5.1. $c = (c_0, c_1, \dots, c_{b-1}), v = (v_0, v_1, \dots, v_{b-1}) \in R_q^b$ ve $w_{RT}(c) = j$ olmak üzere sabit bir k değeri için,

$$S_q^R(k, j) = \sum_{v \in P_k} \chi(\langle c, v \rangle) = \begin{cases} (q^2 - 1)q^{2k}, & j < b - k \\ -q^{2k}, & j = b - k \\ 0, & j > b - k. \end{cases}$$

dır.

İspat: $c, v \in R_q^b$ ve $w_{RT}(c) = j$ olsun. Bu takdirde,

$$\begin{aligned}
S_q^R(k, j) &= \sum_{v \in P_k} \chi(\langle c, v \rangle) = \sum_{v \in P_k} \chi(c_{b-1}v_0 + c_{b-2}v_1 + c_{b-3}v_2 + \dots + c_{b-k+1}v_{k-2} + c_{b-k}v_{k-1} + c_{b-k-1}v_k) \\
&= \left(\sum_{v_0 \in R_q} \chi(c_{b-1}v_0) \right) \left(\sum_{v_1 \in R_q} \chi(c_{b-2}v_1) \right) \left(\sum_{v_2 \in R_q} \chi(c_{b-3}v_2) \right) \\
&\quad \dots \left(\sum_{v_{k-1} \in R_q} \chi(c_{b-k}v_{k-1}) \right) \left(\sum_{0 \neq v_k \in R_q} \chi(c_{b-k-1}v_k) \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. $S_q^R(k, j)$ için üç farklı durum söz konusudur:

i) Eğer $c_{b-k-1} \in R_q - \{0\}$ ve c elemanın son k tane bileşeni sıfır ise, (yani $c_{b-k}, c_{b-k+1}, \dots, c_{b-3}, c_{b-2}, c_{b-1}$) bu takdirde $j = w_{RT}(c) = b - k$ ve $S_q^R(k, j) = -q^{2k}$ bulunur.

ii) Eğer $c_{b-k-1} = 0$ ve c elemanın son k tane bileşeni sıfır ise, bu takdirde $j = w_{RT}(c) < b - k$ ve $S_q^R(k, j) = (q^2 - 1)q^{2k}$ bulunur.

iii) Eğer c elemanın son k tane bileşeninden en az biri sıfır elemanından farklı ise, bu takdirde $j = w_{RT}(c) > b - k$ ve $S_q^R(k, j) = 0$ bulunur.

Dolayısıyla ispat tamamlanır.

Tanım 4.5.2. $\tilde{f}(c) = \sum_{v \in R_q^n} \chi(\langle c, v \rangle) f(v)$ Hadamard fonksiyonunda $f(v) = z^{\lceil w_{MRT}(v)/t \rceil}$

alınırsa, $\tilde{f}(c) = \sum_{v \in R_q^n} \chi(\langle c, v \rangle) z^{\lceil w_{MRT}(v)/t \rceil}$ şekline dönüşür.

Ön Teorem 4.5.2. $c = (c_0, c_1, \dots, c_{b-1})$ ve $v = (v_0, v_1, \dots, v_{b-1})$, R_q^b nin iki elemanı ve $w_{RT}(c) = j$ olsun. Bu takdirde,

$$\sum_{v \in R_q^b} \chi(\langle c, v \rangle) = 1 + S(0, j) + S(1, j) + \dots + S(b-1, j)$$

dır.

İspat: $c = (c_0, c_1, \dots, c_{b-1})$ ve $v = (v_0, v_1, \dots, v_{b-1})$, R_q^b nin iki elemanı ve $w_{RT}(c) = j$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\begin{aligned} \sum_{v \in R_q^b} \chi(\langle c, v \rangle) &= \sum_{\substack{\deg v=0 \\ v=0}} \chi(\langle c, v \rangle) + \sum_{\substack{\deg v=0 \\ v \neq 0}} \chi(\langle c, v \rangle) + \sum_{\substack{\deg v=1 \\ v \in R_q^b}} \chi(\langle c, v \rangle) + \dots + \sum_{\substack{\deg v=b-1 \\ v \in R_q^b}} \chi(\langle c, v \rangle) \\ &= 1 + \sum_{v \in P_0^{**}} \chi(\langle c, v \rangle) + \sum_{v \in P_1} \chi(\langle c, v \rangle) + \dots + \sum_{v \in P_{b-1}} \chi(\langle c, v \rangle) \\ &= 1 + S_q^R(0, j) + S_q^R(1, j) + \dots + S_q^R(b-1, j). \end{aligned}$$

Ön Teorem 4.5.3. $c = (c_0, c_1, \dots, c_{b-1}), v = (v_0, v_1, \dots, v_{b-1}) \in R_q^b$ ve $w_{RT}(c) = j$ olsun.

Bu takdirde,

$$\tilde{f}(c) = \sum_{v \in R_q^b} \chi(\langle c, v \rangle) z^{\lceil w_{RT}(v)/t \rceil} = V_j^{(q,t)}(z)$$

dır. Burada, $V_j^{(q,t)}(z) = 1 + \sum_{k=0}^{b-1} S_q^R(k, j) z^{\lceil (k+1)/t \rceil}$ dir.

İspat: Ön Teorem 4.5.2'yi kullanarak,

$$\begin{aligned} \sum_{v \in R_q^b} \chi(\langle c, v \rangle) z^{\lceil w_{RT}(v)/t \rceil} &= \sum_{\substack{\deg v=0 \\ v=0}} \chi(\langle c, v \rangle) z^{\lceil 0/t \rceil} + \sum_{\substack{\deg v=0 \\ v \neq 0}} \chi(\langle c, v \rangle) z^{\lceil 1/t \rceil} \\ &\quad + \sum_{\substack{\deg v=1 \\ v \in R_q^b}} \chi(\langle c, v \rangle) z^{\lceil 2/t \rceil} + \dots + \sum_{\substack{\deg v=b-1 \\ v \in R_q^b}} \chi(\langle c, v \rangle) z^{\lceil b/t \rceil} \\ &= 1 + \sum_{v \in P_0^{**}} \chi(\langle c, v \rangle) z^{\lceil 1/t \rceil} + \sum_{v \in P_1} \chi(\langle c, v \rangle) z^{\lceil 2/t \rceil} + \dots + \sum_{v \in P_{b-1}} \chi(\langle c, v \rangle) z^{\lceil b/t \rceil} \\ &= 1 + S_q^R(0, j) z^{\lceil 1/t \rceil} + S_q^R(1, j) z^{\lceil 2/t \rceil} + \dots + S_q^R(b-1, j) z^{\lceil b/t \rceil} \\ &= 1 + \sum_{k=0}^{b-1} S_q^R(k, j) z^{\lceil (k+1)/t \rceil} = V_j^{(q,t)}(z) \end{aligned}$$

sonucu elde edilir. Böylece Hadamard fonksiyonu elde edilmiş olur.

4.6. $R_q = F_q + uF_q$ Halkası Üzerinde M-Spotty RT Ağırlık Sayacı için MacWilliams Özdeşliği

Bölüm 3'te F_2 sonlu cismi üzerinde m-spotty RT ağırlık sayacı için MacWilliams özdeşliği kısmında verilen gösterimler ve tanımlar, bu kısımda da kullanılabilir.

Örnek 4.6.1. $b = 3$, $t = 2$ ve $u^2 = 0$ olmak üzere,

$$F_3 + uF_3 = \{0, 1, 2, u, 2u, 1+u, 2+u, 2+2u, 1+2u\}$$

halkası üzerinde C lineer kodunun üreteç matrisi aşağıdaki gibi verilsin:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & u & 0 & 2+u \\ 0 & u & 0 & u & 0 & u \end{pmatrix}.$$

G üreteç matrisinin satırlarının lineer birleşimi, C lineer kodunun aşağıdaki kodsözlerini verir:

$$\begin{array}{lll} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0, & 1 & 2u & 0 & 0 & 0 & 2, & u & u & 0 & u & 0 & 2+u, \\ u & 0 & 0 & 0 & 0 & 2, & 2u & 0 & 0 & 0 & 0 & u, & 2 & 2u & 0 & u & 0 & 1+u, \\ 2u & u & 0 & u & 0 & 2u, & 0 & u & 0 & u & 0 & u, & u & 2u & 0 & 2u & 0 & 2+2u, \\ 0 & 2u & 0 & 2u & 0 & 2u, & 1 & 0 & 0 & u & 0 & 2+u, & 1 & u & 0 & 2u & 0 & 2+2u, \\ 2 & u & 0 & 0 & 0 & 1, & 1+u & 0 & 0 & u & 0 & 2, & 2+2u & 0 & 0 & 2u & 0 & 1, \\ 2u & 2u & 0 & 2u & 0 & 0, & 2 & 0 & 0 & 2u & 0 & 1+2u, & 2+u & 2u & 0 & u & 0 & 1, \\ 1+2u & u & 0 & 1+u & 0 & 2, & 2+u & 0 & 0 & 2u & 0 & 1+u, & 1+u & 2u & 0 & 0 & 0 & 2+2u, \\ 1+2u & 0 & 0 & 1 & 0 & 2+2u, & 2+2u & 2u & 0 & u & 0 & 1+2u, & 1+2u & 2u & 0 & 1+2u & 0 & 2+u, \\ 1+u & u & 0 & 2u & 0 & 2+u, & 2+u & u & 0 & 0 & 0 & 1+2u, & 2+2u & u & 0 & 0 & 0 & 1+u. \end{array}$$

Kodsözlerin C lineer kodunun ağırlık sayacına katkısı aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
c_1 &= (0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0) \rightarrow z^{\lceil 0/2 \rceil + \lceil 0/2 \rceil} = z^0, \\
c_2 &= (0\ u\ 0\ u\ 0\ u) \rightarrow z^{\lceil 2/2 \rceil + \lceil 3/2 \rceil} = z^3, \\
c_3 &= (0\ 2u\ 0\ 2u\ 0\ 2u) \rightarrow z^{\lceil 2/2 \rceil + \lceil 3/2 \rceil} = z^3, \\
c_4 &= (1\ 0\ 0\ u\ 0\ 2+u) \rightarrow z^{\lceil 1/2 \rceil + \lceil 3/2 \rceil} = z^3, \\
c_5 &= (1\ u\ 0\ 2u\ 0\ 2+2u) \rightarrow z^{\lceil 2/2 \rceil + \lceil 3/2 \rceil} = z^3, \\
c_6 &= (1\ 2u\ 0\ 0\ 0\ 2) \rightarrow z^{\lceil 2/2 \rceil + \lceil 3/2 \rceil} = z^3, \\
c_7 &= (2\ 0\ 0\ 2u\ 0\ 1+2u) \rightarrow z^{\lceil 1/2 \rceil + \lceil 3/2 \rceil} = z^3, \\
c_8 &= (2\ u\ 0\ 0\ 0\ 1) \rightarrow z^{\lceil 2/2 \rceil + \lceil 3/2 \rceil} = z^3, \\
c_9 &= (2\ 2u\ 0\ u\ 0\ 1+u) \rightarrow z^{\lceil 2/2 \rceil + \lceil 3/2 \rceil} = z^3, \\
c_{10} &= (u\ 0\ 0\ 0\ 0\ 2) \rightarrow z^{\lceil 1/2 \rceil + \lceil 3/2 \rceil} = z^3, \\
c_{11} &= (u\ u\ 0\ u\ 0\ 2+u) \rightarrow z^{\lceil 2/2 \rceil + \lceil 3/2 \rceil} = z^3, \\
c_{12} &= (u\ 2u\ 0\ 2u\ 0\ 2+2u) \rightarrow z^{\lceil 2/2 \rceil + \lceil 3/2 \rceil} = z^3, \\
c_{13} &= (1+u\ 0\ 0\ u\ 0\ 2) \rightarrow z^{\lceil 1/2 \rceil + \lceil 3/2 \rceil} = z^3, \\
c_{14} &= (1+u\ u\ 0\ 2u\ 0\ 2+u) \rightarrow z^{\lceil 2/2 \rceil + \lceil 3/2 \rceil} = z^3, \\
c_{15} &= (1+u\ 2u\ 0\ 0\ 0\ 2+2u) \rightarrow z^{\lceil 2/2 \rceil + \lceil 3/2 \rceil} = z^3, \\
c_{16} &= (2+u\ 0\ 0\ 2u\ 0\ 1+u) \rightarrow z^{\lceil 1/2 \rceil + \lceil 3/2 \rceil} = z^3, \\
c_{17} &= (2+u\ u\ 0\ 0\ 0\ 1+2u) \rightarrow z^{\lceil 2/2 \rceil + \lceil 3/2 \rceil} = z^3, \\
c_{18} &= (2+u\ 2u\ 0\ u\ 0\ 1) \rightarrow z^{\lceil 2/2 \rceil + \lceil 3/2 \rceil} = z^3, \\
c_{19} &= (2+2u\ 0\ 0\ 2u\ 0\ 1) \rightarrow z^{\lceil 1/2 \rceil + \lceil 3/2 \rceil} = z^3, \\
c_{20} &= (2+2u\ u\ 0\ 0\ 0\ 1+u) \rightarrow z^{\lceil 2/2 \rceil + \lceil 3/2 \rceil} = z^3, \\
c_{21} &= (2+2u\ 2u\ 0\ u\ 0\ 1+2u) \rightarrow z^{\lceil 2/2 \rceil + \lceil 3/2 \rceil} = z^3, \\
c_{22} &= (1+2u\ 0\ 0\ 1\ 0\ 2+2u) \rightarrow z^{\lceil 1/2 \rceil + \lceil 3/2 \rceil} = z^3, \\
c_{23} &= (1+2u\ u\ 0\ 1+u\ 0\ 2) \rightarrow z^{\lceil 2/2 \rceil + \lceil 3/2 \rceil} = z^3, \\
c_{24} &= (1+2u\ 2u\ 0\ 1+2u\ 0\ 2+u) \rightarrow z^{\lceil 2/2 \rceil + \lceil 3/2 \rceil} = z^3, \\
c_{25} &= (2u\ 0\ 0\ 0\ 0\ u) \rightarrow z^{\lceil 1/2 \rceil + \lceil 3/2 \rceil} = z^3, \\
c_{26} &= (2u\ u\ 0\ u\ 0\ 2u) \rightarrow z^{\lceil 2/2 \rceil + \lceil 3/2 \rceil} = z^3, \\
c_{27} &= (2u\ 2u\ 0\ 2u\ 0\ 0) \rightarrow z^{\lceil 2/2 \rceil + \lceil 3/2 \rceil} = z^3.
\end{aligned}$$

Dolayısıyla C lineer kodunun ağırlık sayacı aşağıdaki gibi elde edilir:

$$W_C(z) = 1 + 26z^3.$$

Örnek 4.6.2. Örnek 4.3.1’de verilen C lineer kodunu ele alalım. C lineer kodu için RT ağırlık dağılım kodsözleri sayısını belirleyelim. C lineer kodu için RT ağırlık dağılım vektörleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} c_1 &= (0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0) \rightarrow (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (2, 0, 0, 0), \\ c_2 &= (0\ u\ 0\ u\ 0\ u) \rightarrow (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0, 0, 1, 1), \\ c_3 &= (0\ 2u\ 0\ 2u\ 0\ 2u) \rightarrow (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0, 0, 1, 1), \\ c_4 &= (1\ 0\ 0\ u\ 0\ 2+u) \rightarrow (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0, 1, 0, 1), \\ c_5 &= (1\ u\ 0\ 2u\ 0\ 2+2u) \rightarrow (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0, 0, 1, 1), \\ c_6 &= (1\ 2u\ 0\ 0\ 0\ 2) \rightarrow (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0, 0, 1, 1), \\ c_7 &= (2\ 0\ 0\ 2u\ 0\ 1+2u) \rightarrow (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0, 1, 0, 1), \\ c_8 &= (2\ u\ 0\ 0\ 0\ 1) \rightarrow (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0, 0, 1, 1), \\ c_9 &= (2\ 2u\ 0\ u\ 0\ 1+u) \rightarrow (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0, 0, 1, 1), \\ c_{10} &= (u\ 0\ 0\ 0\ 0\ 2) \rightarrow (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0, 1, 0, 1), \\ c_{11} &= (u\ u\ 0\ u\ 0\ 2+u) \rightarrow (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0, 0, 1, 1), \\ c_{12} &= (u\ 2u\ 0\ 2u\ 0\ 2+2u) \rightarrow (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0, 0, 1, 1), \\ c_{13} &= (1+u\ 0\ 0\ u\ 0\ 2) \rightarrow (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0, 1, 0, 1), \\ c_{14} &= (1+u\ u\ 0\ 2u\ 0\ 2+u) \rightarrow (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0, 0, 1, 1), \\ c_{15} &= (1+u\ 2u\ 0\ 0\ 0\ 2+2u) \rightarrow (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0, 0, 1, 1), \\ c_{16} &= (2+u\ 0\ 0\ 2u\ 0\ 1+u) \rightarrow (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0, 1, 0, 1), \\ c_{17} &= (2+u\ u\ 0\ 0\ 0\ 1+2u) \rightarrow (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0, 0, 1, 1), \\ c_{18} &= (2+u\ 2u\ 0\ u\ 0\ 1) \rightarrow (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0, 0, 1, 1), \\ c_{19} &= (2+2u\ 0\ 0\ 2u\ 0\ 1) \rightarrow (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0, 1, 0, 1), \\ c_{20} &= (2+2u\ u\ 0\ 0\ 0\ 1+u) \rightarrow (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0, 0, 1, 1), \\ c_{21} &= (2+2u\ 2u\ 0\ u\ 0\ 1+2u) \rightarrow (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0, 0, 1, 1), \\ c_{22} &= (1+2u\ 0\ 0\ 1\ 0\ 2+2u) \rightarrow (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0, 1, 0, 1), \\ c_{23} &= (1+2u\ u\ 0\ 1+u\ 0\ 2) \rightarrow (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0, 0, 1, 1), \\ c_{24} &= (1+2u\ 2u\ 0\ 1+2u\ 0\ 2+u) \rightarrow (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0, 0, 1, 1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{25} &= (2u \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ u) \rightarrow (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0, 1, 0, 1), \\
c_{26} &= (2u \ u \ 0 \ u \ 0 \ 2u) \rightarrow (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0, 0, 1, 1), \\
c_{27} &= (2u \ 2u \ 0 \ 2u \ 0 \ 0) \rightarrow (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0, 0, 1, 1).
\end{aligned}$$

Dolayısıyla RT ağırlık dağılım kodsözleri sayısı şu şekildedir:

$$\frac{A_{(2,0,0,0)}}{1} \quad \frac{A_{(0,1,0,1)}}{8} \quad \frac{A_{(0,0,1,1)}}{18}.$$

Buradan ağırlık sayacı aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned}
W_C(z) &= A_{(2,0,0,0)} (z^{\lceil 0/2 \rceil})^2 (z^{\lceil 1/2 \rceil})^0 (z^{\lceil 2/2 \rceil})^0 (z^{\lceil 3/2 \rceil})^0 \\
&\quad + A_{(0,1,0,1)} (z^{\lceil 0/2 \rceil})^0 (z^{\lceil 1/2 \rceil})^1 (z^{\lceil 2/2 \rceil})^0 (z^{\lceil 3/2 \rceil})^1 \\
&\quad + A_{(0,0,1,1)} (z^{\lceil 0/2 \rceil})^0 (z^{\lceil 1/2 \rceil})^0 (z^{\lceil 2/2 \rceil})^1 (z^{\lceil 3/2 \rceil})^1 \\
&= 1 + 26z^3.
\end{aligned}$$

Örnek 4.6.1’de elde edilen ağırlık sayacı ile aynı olduğu görülür.

Aşağıdaki teorem, $u^2 = 0$ olmak üzere $F_q + uF_q$ halkası üzerinde tanımlanan m-spotty RT ağırlık sayacı için MacWilliams özdeşliğini vermektedir.

Teorem 4.3.1. C lineer kod olsun. C m-spotty parça hata kontrol kodu ile dik tümleyen kodu için m-spotty RT ağırlık sayacı arasındaki ilişki şu şekildedir:

$$W_{C^\perp}(z) = \sum_{\substack{(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_b) \\ \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_b \geq 0 \\ \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_b = n}} A_{(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_b)}^\perp \cdot \prod_{j=0}^b (z^{\lceil j/t \rceil})^{\alpha_j} = \frac{1}{|C|} \sum_{\substack{(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_b) \\ \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_b \geq 0 \\ \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_b = n}} A_{(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_b)} \cdot \prod_{j=0}^b (V_j^{(q,t)}(z))^{\alpha_j}.$$

İspat: Tanım 4.5.2’de, $f(v) = \prod_{i=1}^n z^{\lceil w_{RT}(v_i)/t \rceil}$ alalım. Bu takdirde,

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(c) &= \sum_{v \in R_q^{nb}} \chi(\langle c, v \rangle) \prod_{i=1}^n z^{\lceil w_{RT}(v_i)/t \rceil} \\
&= \sum_{v \in R_q^{nb}} \chi(\langle c_1, v_1 \rangle + \langle c_2, v_2 \rangle + \dots + \langle c_n, v_n \rangle) \prod_{i=1}^n z^{\lceil w_{RT}(v_i)/t \rceil} \\
&= \sum_{v \in R_q^{nb}} \chi(\langle c_1, v_1 \rangle) \chi(\langle c_2, v_2 \rangle) \dots \chi(\langle c_n, v_n \rangle) \prod_{i=1}^n z^{\lceil w_{RT}(v_i)/t \rceil} \\
&= \sum_{v_1 \in R_q^b} \sum_{v_2 \in R_q^b} \dots \sum_{v_n \in R_q^b} \left(\prod_{i=1}^n \chi(\langle c_i, v_i \rangle) z^{\lceil w_{RT}(v_i)/t \rceil} \right) \\
&= \prod_{i=1}^n \left(\sum_{v_i \in R_q^b} \chi(\langle c_i, v_i \rangle) z^{\lceil w_{RT}(v_i)/t \rceil} \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada, $\sum_{v_i \in R_q^b} \chi(\langle c_i, v_i \rangle) z^{\lceil w_{RT}(v_i)/t \rceil}$ sonucu sabit olarak alınan c_i kodsözünün ağırlığı olan $w_{RT}(c_i)$ ağırlığına bağlıdır. Kabul edelim ki sabit olarak alınan c_i vektörünün RT ağırlığı $w_{RT}(c_i) = j$ olsun. Bu takdirde, Ön Teorem 4.4.3'ten

$$\sum_{v_i \in R_q^b} \chi(\langle c_i, v_i \rangle) z^{\lceil w_{RT}(v_i)/t \rceil} = V_j^{(q,t)}(z)$$

eşitliği elde edilir. Dolayısıyla, $\tilde{f}(c)$ fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$\tilde{f}(c) = \prod_{j=0}^b \left(V_j^{(q,t)}(z) \right)^{\alpha_j}.$$

Elde edilen son eşitlik aşağıdaki eşitlikte yerine yazılırsa,

$$\sum_{v \in C^\perp} f(v) = \frac{1}{|C|} \sum_{c \in C} \tilde{f}(c)$$

elde edilir. Bu takdirde, aşağıdaki ilişki elde edilir:

$$\sum_{v \in C^\perp} \prod_{j=0}^b \left(z^{\lceil j/t \rceil} \right)^{\alpha_j} = \frac{1}{|C|} \sum_{c \in C} \prod_{j=0}^b \left(V_j^{(q,t)}(z) \right)^{\alpha_j}.$$

Dolayısıyla, C kodunun MRT ağırlık sayacı ile dik tümleyeninin m-spotty RT ağırlık sayacı arasındaki bağıntı aşağıdaki gibi elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

$$\sum_{\substack{(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_b) \\ \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_b \geq 0 \\ \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_b = n}} A_{(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_b)}^\perp \prod_{j=0}^b \left(z^{\lceil j/t \rceil} \right)^{\alpha_j} = \frac{1}{|C|} \sum_{\substack{(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_b) \\ \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_b \geq 0 \\ \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_b = n}} A_{(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_b)} \prod_{j=0}^b \left(V_j^{(q,t)}(z) \right)^{\alpha_j}.$$

Örnek 4.6.3. Örnek 4.6.1’de verilen C lineer kodunu ele alalım. C lineer kodu ile dik tümleyeni C^\perp kodunun m-spotty RT ağırlık sayaçlarını hesaplayalım. C lineer kodunun kodsözleri Örnek 4.6.1’de ve C^\perp kodunun kodsözleri ise aşağıda verilmektedir. C lineer kodunun ağırlık sayacı Örnek 4.6.1’de elde edilmiş olup aşağıdaki gibidir:

$$W_C(z) = 1 + 26z^3.$$

C^\perp kodunun kodsözlerinin ağırlık sayacı C++ programı yardımıyla aşağıdaki gibi bulunur:

$$W_{C^\perp}(z) = 1 + 28z + 238z^2 + 3864z^3 + 15552z^4.$$

Teorem 4.6.1’in uygulanabilmesi için C kodundaki kodsözlerin RT ağırlık dağılım vektörlerinin sayısını ve $b=3$ ve $t=2$ değerlerine karşılık gelen $V_j^{(3,2)}$ ifadelerini hesaplamak gerekir. C kodundaki kodsözlerinin RT ağırlık dağılım vektörleri sayısı Örnek 4.6.2’de hesaplanmıştır. Burada $b=3$ ve $t=2$ değerlerine karşılık gelen $V_j^{(3,2)}$ ifadelerini hesaplayalım. $V_j^{(3,2)}$ polinomları Ön Teorem 4.6.3 kullanılarak aşağıdaki gibi elde edilir:

$$V_0^{(3,2)}(z) = 1 + 80z + 648z^2,$$

$$V_1^{(3,2)}(z) = 1 + 80z - 81z^2,$$

$$V_2^{(3,2)}(z) = 1 - z,$$

$$V_3^{(3,2)}(z) = 1 - z.$$

Teorem 4.6.1'de $V_j^{(3,2)}$ polinomları ve RT dağılım vektörleri sayıları yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} W_{C^\perp}(z) &= \frac{1}{|C|} \sum_{\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2} A_{(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} \prod_{j=0}^3 (V_j^{(3,2)}(z))^{\alpha_j} \\ &= \frac{1}{27} \left[(V_0^{(2)})^2 + 8(V_1^{(3,2)})(V_3^{(3,2)}) + 18(V_2^{(2)})(V_3^{(3,2)}) \right] \\ &= \frac{1}{27} (27 + 756z + 6426z^2 + 104328z^3 + 419904z^4) \\ &= 1 + 28z + 238z^2 + 3864z^3 + 15552z^4 \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla kod ile dik tümleyeni arasındaki özdeşliğin sağlanmış olduğu görülür.

Aşağıdaki kısımda, ilk önce $u^s = 0$ ve $s \geq 1$ olmak üzere $F_2[u]/(u^s)$ halka yapısı ile ilgili tanımlar verilecektir. Daha sonra bu halka üzerinde m-spotty RT ağırlık ve uzaklık tanımı yapılacaktır. Bu halka için son olarak MacWilliams özdeşliği elde edilecektir.

4.7. $R_{2,s} = F_2[u]/(u^s)$ Halkası Üzerinde M-Spotty RT Ağırlık Sayacı için MacWilliams Özdeşliği

Tanım 4.7.1. [21] $s \geq 1$ pozitif bir tamsayı olmak üzere $R_{2,s} = F_2[u]/(u^s)$ bölüm halkasıdır.

Ön Teorem 4.7.1. [21] $R_{2,s}$ halkası temel ideal halkasıdır. Yani halkadaki idealler tek bir eleman tarafından üretilir.

Ön Teorem 4.7.2. [21] $R_{2,s}$ halkasının idealleri,

$$\{0\} = (0) \subset (u^{s-1}) \subset (u^{s-2}) \subset \dots \subset (u^2) \subset (u) \subset (1) = R_{2,s}$$

şeklinde olup (u) ideali $R_{2,s}$ halkasının tek maksimal idealidir. Ayrıca, (u) maksimal ideali dışındaki bütün elemanlar çarpmaya göre tersleri vardır. $v \in R_{2,s}$ ise

$$v = v_0 + v_1u + v_2u^2 + \dots + v_{s-1}u^{s-1}$$

olacak şekilde tek türlü belirli $0 \leq i \leq s-1$ için $v_i \in F_2$ vardır. Dolayısıyla, $v_0 \neq 0$ olan elemanlar çarpmaya göre tersleri vardır.

Teorem 4.7.1. [23] $R_{2,s} \cong F_2 + uF_2 + u^2F_2 + \dots + u^{s-1}F_2$ dir.

Tanım 4.7.2. [22] $R_{2,s}$ üzerinde uzunluğu n olan bir C lineer kod, $R_{2,s}^n$ in $R_{2,s}$ - alt modülü olarak adlandırılır.

Tanım 4.7.3. $e \in R_{2,s}^n$ olmak üzere, e bir hata vektörü olsun. $0 \leq i \leq n-1$ için e_i , e hata vektörünün i inci parçasını temsil etsin. e hata vektöründeki t/b -hatalarının sayısı

$$w_{MRT}(e) = \sum_{i=0}^{n-1} \left[\frac{w_{RT}(e_i)}{t} \right]$$

dir. Burada $w_{RT}(e_i)$, e_i hata vektörünün $R_{2,s}$ üzerinde RT ağırlığını göstermektedir.

Tanım 4.7.4. C m-spotty parça hata kontrol kodunun u ve v kodsözleri için, m-spotty RT uzaklık fonksiyonu

$$d_{MRT}(u, v) = \sum_{i=0}^{n-1} \left[\frac{d_{RT}(u_i, v_i)}{t} \right]$$

dır. Burada $d_{RT}(u, v)$, $R_{2,s}$ üzerinde u ve v kodsözlerinin i inci parçaları arasındaki RT uzaklığını göstermektedir. Uzaklık fonksiyonu $d_{MRT}(u, v)$, $R_{2,s}$ üzerinde bir metrik belirtir.

Tanım 4.7.5. b parça uzunluğunu, n parça sayısını ve N verilen uzayın elemanlarının uzunluğunu göstermek üzere $N = nb$ eşitliği sağlansın. $R_{2,s}^{nb}$ modülü için $c, v \in R_{2,s}^{nb}$ olmak üzere u ve v elemanlarının iç çarpımı aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$\langle c, v \rangle = \sum_{i=0}^{n-1} \langle c_i, v_i \rangle = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{b-1} c_{(i,j)} v_{(i,b-j+1)} \right).$$

Burada, $\langle c_i, v_i \rangle = \sum_{j=0}^{b-1} c_{(i,j)} v_{(i,b-j+1)}$, c_i ve v_i elemanlarının iç çarpımlarını, ayrıca $c_{(i,j)}$ ve $v_{(i,j)}$ sırasıyla c_i ve v_i elemanlarının j inci bitlerini göstermektedir.

Hadamard fonksiyonu, $R_{2,s}$ halkası için aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

Tanım 4.7.6. $u^s = 0$ olmak üzere, $R_{2,s}$ halkası için χ karakter fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$R_{2,s}$ toplamsal bir grup ve $\mathbb{C} - \{0\}$ kompleks sayılar kümesi çarpımsal bir grup olduğundan $\chi : (R_{2,s}, +) \rightarrow (\mathbb{C} - \{0\}, \cdot)$ olmak üzere $a_0 + a_1 u + \dots + a_{s-1} u^{s-1} \in R_{2,s}$ için,

$$\chi(a_0 + a_1 u + \dots + a_{s-1} u^{s-1}) = (-1)^{a_0 + a_1 + \dots + a_{s-1}}$$

dır. Verilen χ karakter fonksiyonu bir grup homomorfizmasıdır. Gerçekten, $\forall a_0 + a_1 u + \dots + a_{s-1} u^{s-1}, b_0 + b_1 u + \dots + b_{s-1} u^{s-1} \in R_{2,s}$ için,

$$\begin{aligned}
\chi \left(\begin{array}{l} (a_0 + a_1u + \dots + a_{s-1}u^{s-1}) \\ + (b_0 + b_1u + \dots + b_{s-1}u^{s-1}) \end{array} \right) &= \chi((a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)u + \dots + (a_{s-1} + b_{s-1})u^{s-1}) \\
&= (-1)^{(a_0+b_0)+(a_1+b_1)+\dots+(a_{s-1}+b_{s-1})} \\
&= (-1)^{(a_0+a_1+\dots+a_{s-1})+(b_0+b_1+\dots+b_{s-1})} \\
&= (-1)^{a_0+a_1+\dots+a_{s-1}} (-1)^{b_0+b_1+\dots+b_{s-1}} \\
&= \chi(a_0 + a_1u + \dots + a_{s-1}u^{s-1}) \chi(b_0 + b_1u + \dots + b_{s-1}u^{s-1})
\end{aligned}$$

olduğundan χ karakter fonksiyonu bir grup homomorfizmadır.

Tanım 4.7.7. f , $R_{2,s}^n$ üzerinde tanımlı bir fonksiyon olsun. f fonksiyonun Hadamard fonksiyonu olan \tilde{f} aşağıdaki gibi tanımlanır:

$c \in R_{2,s}^n$ olmak üzere,

$$\tilde{f}(c) = \sum_{v \in R_{2,s}^n} \chi(\langle c, v \rangle) f(v)$$

dır.

Tanım 4.7.8. $R_{2,s}^n$ modülü için

$$P_k = \{v \in R_{2,s}^n : \deg v(x) = k\}$$

olmak üzere, $R_{2,s}^n$ modülünün bir ayrışımı P_k kümeleri ile ifade edilebilir. Yani,

$I = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ için,

$$R_{2,s}^n = \bigcup_{k \in I} P_k \text{ ve } i \neq j \text{ için } P_i \cap P_j = \emptyset$$

sağlanır. Hadamard fonksiyonu inşa edilirken derecesi sıfır olan polinomların oluşturduğu P_0 kümesi aşağıdaki gibi ifade edilecektir:

$$P_0 = \{v \in R_{2,s}^n : \deg v(x) = 0\}$$

olduğundan $P_0^* = \{00..00\}$ ve $P_0^{**} = \{v \in R_{2,s}^n : \deg v(x) = 0 \text{ ve } v \neq 0\}$ kümeleri için

$$P_0 = P_0^* \cup P_0^{**} \text{ ifadesi kullanılacaktır.}$$

Ön Teorem 4.7.3. $c = (c_0, c_1, \dots, c_{b-1}), v = (v_0, v_1, \dots, v_{b-1}) \in R_{2,s}^b$ ve $w_{RT}(c) = j$ olmak üzere sabit bir k değeri için,

$$S_{2,s}^R(k, j) = \sum_{v \in P_k} \chi(\langle c, v \rangle) = \begin{cases} (2^s - 1)2^{sk}, & j < b - k \\ -2^{sk}, & j = b - k \\ 0, & j > b - k. \end{cases}$$

dır.

İspat: $c, v \in R_{2,s}^b$ ve $w_{RT}(c) = j$ olsun. Bu takdirde,

$$\begin{aligned} S_{2,s}^R(k, j) &= \sum_{v \in P_k} \chi(\langle c, v \rangle) = \sum_{v \in P_k} \chi(c_{b-1}v_0 + c_{b-2}v_1 + c_{b-3}v_2 + \dots + c_{b-k+1}v_{k-2} + c_{b-k}v_{k-1} + c_{b-k-1}v_k) \\ &= \left(\sum_{v_0 \in R_{2,s}} \chi(c_{b-1}v_0) \right) \left(\sum_{v_1 \in R_{2,s}} \chi(c_{b-2}v_1) \right) \left(\sum_{v_2 \in R_{2,s}} \chi(c_{b-3}v_2) \right) \\ &\quad \dots \left(\sum_{v_{k-1} \in R_{2,s}} \chi(c_{b-k}v_{k-1}) \right) \left(\sum_{0 \neq v_k \in R_{2,s}} \chi(c_{b-k-1}v_k) \right) \end{aligned}$$

elde edilir. $S_{2,s}^R(k, j)$ için üç farklı durum söz konusudur:

i) Eğer $c_{b-k-1} \in R_{2,s} - \{0\}$ ve c elemanının son k tane bileşeni sıfır ise, (yani $c_{b-k}, c_{b-k+1}, \dots, c_{b-3}, c_{b-2}, c_{b-1}$) bu takdirde $j = w_{RT}(c) = b-k$ ve $S_{2,s}^R(k, j) = -2^{sk}$ bulunur.

ii) Eğer $c_{b-k-1} = 0$ ve c elemanının son k tane bileşeni sıfır ise, bu takdirde $j = w_{RT}(c) < b-k$ ve $S_{2,s}^R(k, j) = (2^s - 1)2^{sk}$ bulunur.

iii) Eğer c elemanının son k tane bileşeninden en az biri sıfır elemanından farklı ise, bu takdirde $j = w_{RT}(c) > b-k$ ve $S_{2,s}^R(k, j) = 0$ bulunur.

Dolayısıyla ispat tamamlanır.

Tanım 4.7.9. $\tilde{f}(c) = \sum_{v \in R_{2,s}^n} \chi(\langle c, v \rangle) f(v)$ Hadamard fonksiyonunda,

$$f(v) = z^{\lceil w_{MRT}(v)/t \rceil}$$

alınırsa, $\tilde{f}(c) = \sum_{v \in R_{2,s}^n} \chi(\langle c, v \rangle) z^{\lceil w_{MRT}(v)/t \rceil}$ şekline dönüşür.

Ön Teorem 4.7.4. $c = (c_0, c_1, \dots, c_{b-1})$ ve $v = (v_0, v_1, \dots, v_{b-1})$, $R_{2,s}^b$ nin iki elemanı ve $w_{RT}(c) = j$ olsun. Bu takdirde,

$$\sum_{v \in R_{2,s}^b} \chi(\langle c, v \rangle) = 1 + S(0, j) + S(1, j) + \dots + S(b-1, j)$$

dır.

İspat:

$$\begin{aligned}
\sum_{v \in R_{2,s}^b} \chi(\langle c, v \rangle) &= \sum_{\substack{\deg v=0 \\ v=0}} \chi(\langle c, v \rangle) + \sum_{\substack{\deg v=0 \\ v \neq 0}} \chi(\langle c, v \rangle) + \sum_{\substack{\deg v=1 \\ v \in R_{2,s}^b}} \chi(\langle c, v \rangle) + \dots + \sum_{\substack{\deg v=b-1 \\ v \in R_{2,s}^b}} \chi(\langle c, v \rangle) \\
&= 1 + \sum_{v \in P_0^{**}} \chi(\langle c, v \rangle) + \sum_{v \in P_1} \chi(\langle c, v \rangle) + \dots + \sum_{v \in P_{b-1}} \chi(\langle c, v \rangle) \\
&= 1 + S_{2,s}^R(0, j) + S_{2,s}^R(1, j) + \dots + S_{2,s}^R(b-1, j).
\end{aligned}$$

Ön Teorem 4.7.5. $c = (c_0, c_1, \dots, c_{b-1}), v = (v_0, v_1, \dots, v_{b-1}) \in R_{2,s}^b$ ve $w_{RT}(c) = j$ olsun.

Bu takdirde,

$$\tilde{f}(c) = \sum_{v \in R_{2,s}^b} \chi(\langle c, v \rangle) z^{\lceil w_{RT}(v)/t \rceil} = V_j^{(2,t)}(z)$$

dır. Burada, $V_j^{(2,t)}(z) = 1 + \sum_{k=0}^{b-1} S_{2,s}^R(k, j) z^{\lceil (k+1)/t \rceil}$ dir.

İspat: Ön Teorem 4.7.4'ü kullanarak,

$$\begin{aligned}
\sum_{v \in R_{2,s}^b} \chi(\langle c, v \rangle) z^{\lceil w_{RT}(v)/t \rceil} &= \sum_{\substack{\deg v=0 \\ v=0}} \chi(\langle c, v \rangle) z^{\lceil 0/t \rceil} + \sum_{\substack{\deg v=0 \\ v \neq 0}} \chi(\langle c, v \rangle) z^{\lceil 1/t \rceil} \\
&\quad + \sum_{\substack{\deg v=1 \\ v \in R_{2,s}^b}} \chi(\langle c, v \rangle) z^{\lceil 2/t \rceil} + \dots + \sum_{\substack{\deg v=b-1 \\ v \in R_{2,s}^b}} \chi(\langle c, v \rangle) z^{\lceil b/t \rceil} \\
&= 1 + \sum_{v \in P_0^{**}} \chi(\langle c, v \rangle) z^{\lceil 1/t \rceil} + \sum_{v \in P_1} \chi(\langle c, v \rangle) z^{\lceil 2/t \rceil} + \dots + \sum_{v \in P_{b-1}} \chi(\langle c, v \rangle) z^{\lceil b/t \rceil} \\
&= 1 + S_{2,s}^R(0, j) z^{\lceil 1/t \rceil} + S_{2,s}^R(1, j) z^{\lceil 2/t \rceil} + \dots + S_{2,s}^R(b-1, j) z^{\lceil b/t \rceil} \\
&= 1 + \sum_{k=0}^{b-1} S_{2,s}^R(k, j) z^{\lceil (k+1)/t \rceil} = V_j^{(2,t)}(z)
\end{aligned}$$

sonucu elde edilir. Böylece Hadamard fonksiyonu elde edilmiş olur.

Aşağıdaki teorem, $R_{2,s}$ halkası üzerinde tanımlanan m-spotty RT ağırlık sayacı için MacWilliams özdeşliğini vermektedir.

Teorem 4.7.2. C lineer kod olsun. C m-spotty parça hata kontrol kodu ile dik tümleyen kodu için m-spotty RT ağırlık sayaçları arasındaki ilişki şu şekildedir:

$$W_{C^\perp}(z) = \sum_{\substack{(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_b) \\ \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_b \geq 0 \\ \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_b = n}} A_{(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_b)}^\perp \prod_{j=0}^b \left(z^{\lceil j/t \rceil} \right)^{\alpha_j} = \frac{1}{|C|} \sum_{\substack{(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_b) \\ \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_b \geq 0 \\ \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_b = n}} A_{(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_b)} \prod_{j=0}^b \left(V_j^{(2,t)}(z) \right)^{\alpha_j}.$$

İspat: Tanım 4.7.7’de, $f(v) = \prod_{i=1}^n z^{\lceil w_{RT}(v_i)/t \rceil}$ alalım. Bu takdirde,

$$\begin{aligned} \tilde{f}(c) &= \sum_{v \in R_{2,s}^{nb}} \chi(\langle c, v \rangle) \prod_{i=1}^n z^{\lceil w_{RT}(v_i)/t \rceil} \\ &= \sum_{v \in R_{2,s}^{nb}} \chi(\langle c_1, v_1 \rangle + \langle c_2, v_2 \rangle + \dots + \langle c_n, v_n \rangle) \prod_{i=1}^n z^{\lceil w_{RT}(v_i)/t \rceil} \\ &= \sum_{v \in R_{2,s}^{nb}} \chi(\langle c_1, v_1 \rangle) \chi(\langle c_2, v_2 \rangle) \dots \chi(\langle c_n, v_n \rangle) \prod_{i=1}^n z^{\lceil w_{RT}(v_i)/t \rceil} \\ &= \sum_{v_1 \in R_{2,s}^b} \sum_{v_2 \in R_{2,s}^b} \dots \sum_{v_n \in R_{2,s}^b} \left(\prod_{i=1}^n \chi(\langle c_i, v_i \rangle) z^{\lceil w_{RT}(v_i)/t \rceil} \right) \\ &= \prod_{i=1}^n \left(\sum_{v_i \in R_{2,s}^b} \chi(\langle c_i, v_i \rangle) z^{\lceil w_{RT}(v_i)/t \rceil} \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada, $\sum_{v_i \in R_{2,s}^b} \chi(\langle c_i, v_i \rangle) z^{\lceil w_{RT}(v_i)/t \rceil}$ sonucu sabit olarak alınan c_i

kodsözünün ağırlığı olan $w_{RT}(c_i)$ ağırlığına bağlıdır. Kabul edelim ki sabit olarak alınan c_i vektörünün RT ağırlığı $w_{RT}(c_i) = j$ olsun. Bu takdirde, Ön Teorem 4.7.5’ten

$$\sum_{v_i \in R_{2,s}^b} \chi(\langle c_i, v_i \rangle) z^{\lceil w_{RT}(v_i)/t \rceil} = V_j^{(2,t)}(z)$$

eşitliği elde edilir. Dolayısıyla, $\tilde{f}(c)$ fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$\tilde{f}(c) = \prod_{j=0}^b \left(V_j^{(2,t)}(z) \right)^{\alpha_j}.$$

Elde edilen son eşitlik aşağıdaki eşitlikte yerine yazılırsa,

$$\sum_{v \in C^\perp} f(v) = \frac{1}{|C|} \sum_{c \in C} \tilde{f}(c)$$

elde edilir. Bu takdirde, aşağıdaki ilişki elde edilir:

$$\sum_{v \in C^\perp} \prod_{j=0}^b \left(z^{\lceil j/t \rceil} \right)^{\alpha_j} = \frac{1}{|C|} \sum_{c \in C} \prod_{j=0}^b \left(V_j^{(2,t)}(z) \right)^{\alpha_j}.$$

Dolayısıyla, C kodunun MRT ağırlık sayacı ile dik tümleyeninin m-spotty RT ağırlık sayacı arasındaki bağıntı aşağıdaki gibi elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

$$\sum_{\substack{(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_b) \\ \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_b \geq 0 \\ \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_b = n}} A_{(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_b)}^\perp \prod_{j=0}^b \left(z^{\lceil j/t \rceil} \right)^{\alpha_j} = \frac{1}{|C|} \sum_{\substack{(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_b) \\ \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_b \geq 0 \\ \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_b = n}} A_{(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_b)} \prod_{j=0}^b \left(V_j^{(2,t)}(z) \right)^{\alpha_j}.$$

Aşağıdaki kısımda, $F_q[u]/(u^s)$ halkası üzerinde tanımlar ve teoremler, bu halka üzerinde MacWilliams özdeşliğini elde etmek için verilecektir.

4.8. $R_{q,s} = F_q[u]/(u^s)$ Halkası Üzerinde M-Spotty RT Ağırlık Sayacı için MacWilliams Özdeşliği

Ön Teorem 4.8.1. [21] $s \geq 1$ olmak üzere, $R_{q,s}$ halkası temel ideal halkasıdır. Yani halkadaki idealler tek bir eleman tarafından üretilir. $R_{q,s}$ halkasının idealleri,

$$\{0\} = (0) \subset (u^{s-1}) \subset (u^{s-2}) \subset \dots \subset (u^2) \subset (u) \subset (1) = R_{q,s}$$

şeklinde olup (u) ideali $R_{q,s}$ halkasının tek maksimal idealidir. Ayrıca, (u) maksimal ideali dışındaki bütün elemanlar çarpmaya göre tersleri vardır. $v \in R_{q,s}$ ise

$$v = v_0 + v_1u + v_2u^2 + \dots + v_{s-1}u^{s-1}$$

olacak şekilde tek türlü belirli $0 \leq i \leq s-1$ için $v_i \in F_q$ vardır. Dolayısıyla, $v_0 \neq 0$ olan elemanlar çarpmaya göre tersleri vardır.

Teorem 4.8.1. [23] $R_{q,s} \cong F_q + uF_q + u^2F_q + \dots + u^{s-1}F_q$ dir.

Tanım 4.8.1. [22] $R_{q,s}$ üzerinde uzunluğu n olan bir C lineer kod, $R_{q,s}^n$ in $R_{q,s}$ - alt modülü olarak adlandırılır.

Tanım 4.8.2. $e \in R_{q,s}^n$ olmak üzere, e bir hata vektörü olsun. $0 \leq i \leq n-1$ için e_i , e hata vektörünün i inci parçasını temsil etsin. e hata vektöründeki t/b -hatalarının sayısı

$$w_{MRT}(e) = \sum_{i=0}^{n-1} \left[\frac{w_{RT}(e_i)}{t} \right]$$

dir. Burada $w_{RT}(e_i)$, e_i hata vektörünün $R_{q,s}$ üzerinde RT ağırlığını göstermektedir.

Tanım 4.8.3. C m-spotty parça hata kontrol kodunun u ve v kodsözleri için, m-spotty RT uzaklık fonksiyonu

$$d_{MRT}(u, v) = \sum_{i=0}^{n-1} \left[\frac{d_{RT}(u_i, v_i)}{t} \right]$$

dır. Burada $d_{RT}(u_i, v_i)$, $R_{q,s}$ üzerinde u ve v kodsözlerinin i inci parçaları arasındaki RT uzaklığını göstermektedir. Uzaklık fonksiyonu $d_{MRT}(u, v)$, $R_{q,s}$ üzerinde bir metrik belirtir.

Tanım 4.8.4. b parça uzunluğunu, n parça sayısını ve N verilen uzayın elemanlarının uzunluğunu göstermek üzere $N = nb$ eşitliği sağlansın. $R_{q,s}^{nb}$ modülü için $c, v \in R_{q,s}^{nb}$ olmak üzere u ve v elemanlarının iç çarpımı aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$\langle c, v \rangle = \sum_{i=0}^{n-1} \langle c_i, v_i \rangle = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{b-1} c_{(i,j)} v_{(i,b-j+1)} \right).$$

Burada, $\langle c_i, v_i \rangle = \sum_{j=0}^{b-1} c_{(i,j)} v_{(i,b-j+1)}$, c_i ve v_i elemanlarının iç çarpımlarını, ayrıca $c_{(i,j)}$ ve $v_{(i,j)}$ sırasıyla c_i ve v_i elemanlarının j inci bitlerini göstermektedir.

Tanım 4.8.5. $u^s = 0$ olmak üzere, $R_{q,s}$ halkası için χ karakter fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$R_{q,s}$ toplamsal bir grup ve $\mathbb{C} - \{0\}$ kompleks sayılar kümesi çarpımsal bir grup olduğundan $\chi : (R_{q,s}, +) \rightarrow (\mathbb{C} - \{0\}, \cdot)$ olmak üzere $a_0 + a_1 u + \dots + a_{s-1} u^{s-1} \in R_{q,s}$ için,

$$\chi(a + ub) = (\xi)^{c_0 + c_1 + \dots + c_{s-1}}$$

dır. Burada, $\xi = e^{2\pi i/p}$ dir. Verilen χ karakter fonksiyonu bir grup homomorfizmasıdır. Gerçekten, $\forall a_0 + a_1 u + \dots + a_{s-1} u^{s-1}, b_0 + b_1 u + \dots + b_{s-1} u^{s-1} \in R_{q,s}$ için,

$$\begin{aligned}
\chi \left(\begin{array}{l} (a_0 + a_1u + \dots + a_{s-1}u^{s-1}) \\ + (b_0 + b_1u + \dots + b_{s-1}u^{s-1}) \end{array} \right) &= \chi((a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)u + \dots + (a_{s-1} + b_{s-1})u^{s-1}) \\
&= (\xi)^{(a_0+b_0)+(a_1+b_1)+\dots+(a_{s-1}+b_{s-1})} \\
&= (\xi)^{(a_0+a_1+\dots+a_{s-1})+(b_0+b_1+\dots+b_{s-1})} \\
&= (\xi)^{a_0+a_1+\dots+a_{s-1}} (\xi)^{b_0+b_1+\dots+b_{s-1}} \\
&= \chi(a_0 + a_1u + \dots + a_{s-1}u^{s-1}) \chi(b_0 + b_1u + \dots + b_{s-1}u^{s-1})
\end{aligned}$$

olduğundan χ karakter fonksiyonu bir grup homomorfizmadır.

Hadamard fonksiyonu, $R_{q,s}$ halkası için aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

Tanım 4.8.6. f , $R_{q,s}^n$ üzerinde tanımlı bir fonksiyon olsun. f fonksiyonun

Hadamard fonksiyonu olan \tilde{f} aşağıdaki gibi tanımlanır:

$c \in R_{q,s}^n$ olmak üzere,

$$\tilde{f}(c) = \sum_{v \in R_{q,s}^n} \chi(\langle c, v \rangle) f(v)$$

dır.

Tanım 4.8.7. $R_{q,s}^n$ modülü için

$$P_k = \{v \in R_{q,s}^n : \deg v(x) = k\}$$

olmak üzere, $R_{q,s}^n$ modülünün bir ayrışımı P_k kümeleri ile ifade edilebilir. Yani,

$I = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ için,

$$R_{q,s}^n = \bigcup_{k \in I} P_k \text{ ve } i \neq j \text{ için } P_i \cap P_j = \emptyset$$

sağlanır. Hadamard fonksiyonu inşa edilirken derecesi sıfır olan polinomların oluşturduğu P_0 kümesi aşağıdaki gibi ifade edilecektir:

$$P_0 = \{v \in R_{q,s}^n : \deg v(x) = 0\}$$

olduğundan $P_0^* = \{00..00\}$ ve $P_0^{**} = \{v \in R_{q,s}^n : \deg v(x) = 0 \text{ ve } v \neq 0\}$ kümeleri için

$P_0 = P_0^* \cup P_0^{**}$ ifadesi kullanılacaktır.

Ön Teorem 4.8.2. $c = (c_0, c_1, \dots, c_{b-1}), v = (v_0, v_1, \dots, v_{b-1}) \in R_{q,s}^b$ ve $w_{RT}(c) = j$ olmak üzere sabit bir k değeri için,

$$S_{q,s}^R(k, j) = \sum_{v \in P_k} \chi(\langle c, v \rangle) = \begin{cases} (q^s - 1)q^{sk}, & j < b - k \\ -q^{sk}, & j = b - k \\ 0, & j > b - k. \end{cases}$$

dır.

İspat: $c, v \in R_{q,s}^b$ ve $w_{RT}(c) = j$ olsun. Bu takdirde,

$$\begin{aligned} S_{q,s}^R(k, j) &= \sum_{v \in P_k} \chi(\langle c, v \rangle) = \sum_{v \in P_k} \chi(c_{b-1}v_0 + c_{b-2}v_1 + c_{b-3}v_2 + \dots + c_{b-k+1}v_{k-2} + c_{b-k}v_{k-1} + c_{b-k-1}v_k) \\ &= \left(\sum_{v_0 \in R_{q,s}} \chi(c_{b-1}v_0) \right) \left(\sum_{v_1 \in R_{q,s}} \chi(c_{b-2}v_1) \right) \left(\sum_{v_2 \in R_{q,s}} \chi(c_{b-3}v_2) \right) \\ &\quad \dots \left(\sum_{v_{k-1} \in R_{q,s}} \chi(c_{b-k}v_{k-1}) \right) \left(\sum_{0 \neq v_k \in R_{q,s}} \chi(c_{b-k-1}v_k) \right) \end{aligned}$$

elde edilir. $S_{q,s}^R(k, j)$ için üç farklı durum söz konusudur:

i) Eğer $c_{b-k-1} \in R_{q,s} - \{0\}$ ve c elemanının son k tane bileşeni sıfır ise, (yani $c_{b-k}, c_{b-k+1}, \dots, c_{b-3}, c_{b-2}, c_{b-1}$) bu takdirde $j = w_{RT}(c) = b - k$ ve $S_{q,s}^R(k, j) = -q^{sk}$ bulunur.

ii) Eğer $c_{b-k-1} = 0$ ve c elemanının son k tane bileşeni sıfır ise, bu takdirde $j = w_{RT}(c) < b - k$ ve $S_{q,s}^R(k, j) = (q^s - 1)q^{sk}$ bulunur.

iii) Eğer c elemanının son k tane bileşeninden en az biri sıfır elemanından farklı ise, bu takdirde $j = w_{RT}(c) > b - k$ ve $S_{q,s}^R(k, j) = 0$ bulunur.

Dolayısıyla ispat tamamlanır.

Tanım 4.8.8. $\tilde{f}(c) = \sum_{v \in R_{q,s}^n} \chi(\langle c, v \rangle) f(v)$ Hadamard fonksiyonunda,

$$f(v) = z^{\lceil w_{MRT}(v)/t \rceil}$$

alınırsa, $\tilde{f}(c) = \sum_{v \in R_{q,s}^n} \chi(\langle c, v \rangle) z^{\lceil w_{MRT}(v)/t \rceil}$ şekline dönüşür.

Ön Teorem 4.8.3. $c = (c_0, c_1, \dots, c_{b-1})$ ve $v = (v_0, v_1, \dots, v_{b-1})$, $R_{q,s}^b$ nin iki elemanı ve $w_{RT}(c) = j$ olsun. Bu takdirde,

$$\sum_{v \in R_{q,s}^b} \chi(\langle c, v \rangle) = 1 + S(0, j) + S(1, j) + \dots + S(b-1, j)$$

dır.

İspat:

$$\begin{aligned}
\sum_{v \in R_{q,s}^b} \chi(\langle c, v \rangle) &= \sum_{\substack{\deg v=0 \\ v=0}} \chi(\langle c, v \rangle) + \sum_{\substack{\deg v=0 \\ v \neq 0}} \chi(\langle c, v \rangle) + \sum_{\substack{\deg v=1 \\ v \in R_{q,s}^b}} \chi(\langle c, v \rangle) + \dots + \sum_{\substack{\deg v=b-1 \\ v \in R_{q,s}^b}} \chi(\langle c, v \rangle) \\
&= 1 + \sum_{v \in P_0^{**}} \chi(\langle c, v \rangle) + \sum_{v \in P_1} \chi(\langle c, v \rangle) + \dots + \sum_{v \in P_{b-1}} \chi(\langle c, v \rangle) \\
&= 1 + S_{q,s}^R(0, j) + S_{q,s}^R(1, j) + \dots + S_{q,s}^R(b-1, j).
\end{aligned}$$

Ön Teorem 4.8.4. $c = (c_0, c_1, \dots, c_{b-1}), v = (v_0, v_1, \dots, v_{b-1}) \in R_{q,s}^b$ ve $w_{RT}(c) = j$ olsun.

Bu takdirde,

$$\tilde{f}(c) = \sum_{v \in R_{q,s}^b} \chi(\langle c, v \rangle) z^{\lceil w_{RT}(v)/t \rceil} = V_j^{(q,t)}(z)$$

dir. Burada, $V_j^{(q,t)}(z) = 1 + \sum_{k=0}^{b-1} S_{q,s}^R(k, j) z^{\lceil (k+1)/t \rceil}$ dir.

İspat: Ön Teorem 4.8.3'ü kullanarak,

$$\begin{aligned}
\sum_{v \in R_{q,s}^b} \chi(\langle c, v \rangle) z^{\lceil w_{RT}(v)/t \rceil} &= \sum_{\substack{\deg v=0 \\ v=0}} \chi(\langle c, v \rangle) z^{\lceil 0/t \rceil} + \sum_{\substack{\deg v=0 \\ v \neq 0}} \chi(\langle c, v \rangle) z^{\lceil 1/t \rceil} \\
&\quad + \sum_{\substack{\deg v=1 \\ v \in R_{q,s}^b}} \chi(\langle c, v \rangle) z^{\lceil 2/t \rceil} + \dots + \sum_{\substack{\deg v=b-1 \\ v \in R_{q,s}^b}} \chi(\langle c, v \rangle) z^{\lceil b/t \rceil} \\
&= 1 + \sum_{v \in P_0^{**}} \chi(\langle c, v \rangle) z^{\lceil 1/t \rceil} + \sum_{v \in P_1} \chi(\langle c, v \rangle) z^{\lceil 2/t \rceil} + \dots + \sum_{v \in P_{b-1}} \chi(\langle c, v \rangle) z^{\lceil b/t \rceil} \\
&= 1 + S_{q,s}^R(0, j) z^{\lceil 1/t \rceil} + S_{q,s}^R(1, j) z^{\lceil 2/t \rceil} + \dots + S_{q,s}^R(b-1, j) z^{\lceil b/t \rceil} \\
&= 1 + \sum_{k=0}^{b-1} S_{q,s}^R(k, j) z^{\lceil (k+1)/t \rceil} = V_j^{(q,t)}(z)
\end{aligned}$$

sonucu elde edilir. Böylece Hadamard fonksiyonu elde edilmiş olur.

Aşağıdaki teorem, $R_{q,s}$ halkası üzerinde m-spotty RT ağırlık sayaçları için MacWilliams özdeşliğini vermektedir.

Teorem 4.8.2. C lineer kod olsun. C m-spotty parça hata kontrol kodu ile dik tümleyen kodu için m-spotty RT ağırlık sayaçları arasındaki ilişki şu şekildedir:

$$W_{C^\perp}(z) = \sum_{\substack{(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_b) \\ \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_b \geq 0 \\ \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_b = n}} A_{(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_b)}^\perp \prod_{j=0}^b \left(z^{\lceil j/t \rceil} \right)^{\alpha_j} = \frac{1}{|C|} \sum_{\substack{(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_b) \\ \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_b \geq 0 \\ \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_b = n}} A_{(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_b)} \prod_{j=0}^b \left(V_j^{(q,t)}(z) \right)^{\alpha_j}.$$

İspat: Tanım 4.8.8’de, $f(v) = \prod_{i=1}^n z^{\lceil w_{RT}(v_i)/t \rceil}$ alalım. Bu takdirde,

$$\begin{aligned} \tilde{f}(c) &= \sum_{v \in R_{q,s}^{nb}} \chi(\langle c, v \rangle) \prod_{i=1}^n z^{\lceil w_{RT}(v_i)/t \rceil} \\ &= \sum_{v \in R_{q,s}^{nb}} \chi(\langle c_1, v_1 \rangle + \langle c_2, v_2 \rangle + \dots + \langle c_n, v_n \rangle) \prod_{i=1}^n z^{\lceil w_{RT}(v_i)/t \rceil} \\ &= \sum_{v \in R_{q,s}^{nb}} \chi(\langle c_1, v_1 \rangle) \chi(\langle c_2, v_2 \rangle) \dots \chi(\langle c_n, v_n \rangle) \prod_{i=1}^n z^{\lceil w_{RT}(v_i)/t \rceil} \\ &= \sum_{v_1 \in R_{q,s}^b} \sum_{v_2 \in R_{q,s}^b} \dots \sum_{v_n \in R_{q,s}^b} \left(\prod_{i=1}^n \chi(\langle c_i, v_i \rangle) z^{\lceil w_{RT}(v_i)/t \rceil} \right) \\ &= \prod_{i=1}^n \left(\sum_{v_i \in R_{q,s}^b} \chi(\langle c_i, v_i \rangle) z^{\lceil w_{RT}(v_i)/t \rceil} \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada, $\sum_{v_i \in R_{q,s}^b} \chi(\langle c_i, v_i \rangle) z^{\lceil w_{RT}(v_i)/t \rceil}$ sonucu sabit olarak alınan c_i

kodsözünün ağırlığı olan $w_{RT}(c_i)$ ağırlığına bağlıdır. Sabit olarak alınan c_i

vektörünün RT ağırlığı $w_{RT}(c_i) = j$ olduğunu kabul edelim. Bu takdirde, Ön Teorem

4.8.4’ten

$$\sum_{v_i \in R_{q,s}^b} \chi(\langle c_i, v_i \rangle) z^{\lceil w_{RT}(v_i)/t \rceil} = V_j^{(q,t)}(z)$$

eşitliği elde edilir. Dolayısıyla, $\tilde{f}(c)$ fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$\tilde{f}(c) = \prod_{j=0}^b \left(V_j^{(q,t)}(z) \right)^{\alpha_j} .$$

Elde edilen son eşitlik aşağıdaki eşitlikte yerine yazılırsa,

$$\sum_{v \in C^\perp} f(v) = \frac{1}{|C|} \sum_{c \in C} \tilde{f}(c)$$

elde edilir. Bu takdirde, aşağıdaki ilişki elde edilir:

$$\sum_{v \in C^\perp} \prod_{j=0}^b \left(z^{\lceil j/t \rceil} \right)^{\alpha_j} = \frac{1}{|C|} \sum_{c \in C} \prod_{j=0}^b \left(V_j^{(q,t)}(z) \right)^{\alpha_j} .$$

Dolayısıyla, C kodunun MRT ağırlık sayacı ile dik tümleyeninin m-spotty RT ağırlık sayacı arasındaki bağıntı aşağıdaki gibi elde edilir ve ispat tamamlanmış olur:

$$\sum_{\substack{(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_b) \\ \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_b \geq 0 \\ \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_b = n}} A_{(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_b)}^\perp \prod_{j=0}^b \left(z^{\lceil j/t \rceil} \right)^{\alpha_j} = \frac{1}{|C|} \sum_{\substack{(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_b) \\ \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_b \geq 0 \\ \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_b = n}} A_{(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_b)} \prod_{j=0}^b \left(V_j^{(q,t)}(z) \right)^{\alpha_j} .$$

BÖLÜM 5. MATRİS KODLAR VE M-SPOTTY ROSENBLOOM-TSFASMAN AĞIRLIĞI

Bu bölümde matris lineer kodların kullanımına yönelik yeni bir yöntem sunulmaktadır. Halka üzerinde tanımlı lineer kodlardan matris lineer kodlara bir φ fonksiyonu tanımlanmaktadır. Bu fonksiyonun görüntü kümesi ile kodlama önerilmektedir. Ayrıca, matris lineer kodlarda parça hata tanımı verilmektedir. Matrislerde tanımlanan parça hata kavramı ile halka üzerinde Bölüm 4'te tanımlanan parça hata kavramlarının örtüştüğü gösterilmektedir. Matris lineer kodları ile yapılan kodlama sürecinde meydana gelen hataların kontrolü ve düzeltilmesi ise halka üzerindeki kodlara taşınarak gerçekleştirilmektedir. Bu yaklaşım sayesinde matris lineer kodlarında birçok ardışık hata halka kodlarında daha küçük parçalarda görüldüğünde, hata düzeltme kabiliyeti bu yöntem ile artırılmaktadır. Son olarak ise, matris kodlarda dik tümleyen kavramı yine halkalardaki kodlarda tanımlanan dik tümleyenin görüntüsü olarak φ -dik kavramı tanımlanarak verilmektedir. Dolayısıyla, diklik testi halkalardaki eşi kullanılarak gerçekleşir. Son olarak ise, \tilde{C} ve \tilde{C}^\perp matris lineer kodlarının eşlerinin (φ altındaki görüntülerinin) ne zaman birbirinin dik tümleyeni olacağı tespit edilmekte ve bu durumlara örnek verilmektedir.

5.1. Matris Kodlar

Hata kontrol kodlarının bir sınıfı olan matris kodları, iletişim sistemlerinde ve bilgi depolamayı sağlayan sistemlerde geniş bir kullanım alanına sahiptir [25-28]. Geniş kullanım alanına sahip olmalarının önemli bir sebebi, blok yapılarının avantajı ve kolay kodlama ve dekodlamaya sahip olmalarıdır. Matris kod kavramı ilk olarak Elias tarafından tanımlanmıştır [29]. 1960'da geliştirilen ilk matris kodlar, iki boyutlu satır ve sütun denetimlerine sahip dizin hücrelerinden inşa edilen Gilbert kodlarıdır [30]. Daha sonra 1965'te Neumann, Gilbert kodları üzerinde düzeltilbilir

ardışık uzunluklar için sınır şartları çalışması yapmıştır [31]. 1971’de Bahl ve Chien, Neumann’ın çalışması üzerinde düzeltmeler yaptıktan sonra Neumann tarafından elde edilen sonuçları yüksek boyutlu Gilbert kodları için genelleştirmiştir [32]. Ayrıca, Burton ve Weldon tarafından da ardışık uzunluklar üzerine sınır şartları çalışmaları yapılmıştır [33]. Ardışık hata düzelten matris kodlarını oluşturmak için Gilbert kodlarının genelleştirilmesi Farrel ve Hopkins’in çalışmaları sonucu elde edilmiştir [34]. Matris kodları ile ardışık hata düzelten kodlar teorisinin ilişkilendirilmesi ile ilgili birçok çalışma yapılmıştır [35-41]. Matris kodlarının kolay bir kodlama ve dekodlamaya sahip olması uygulanabilirliğini farklı alanlarda da göstermektedir. Bunlardan bazıları, optik okuyucularda ve DNA hibridizasyonlarında matris kodlarının uygulanmasıdır [42,43].

Bu kısımda matris kodlar ile ilgili bazı tanımlar verilecektir.

Tanım 5.1.1. [2] R bir halka olmak üzere, elemanları R halkasından alınan $m \times n$ tipindeki bütün matrislerin kümesi $Mat_{m \times n}(R)$ ile gösterilir ve aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$Mat_{m \times n}(R) = \left\{ A = (a_{ij}) \mid a_{ij} \in R, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n \right\}.$$

Tanım 5.1.2. [2] Matrislerde bilinen toplama işlemi ve bir skalerle çarpma işlemine göre $Mat_{m \times n}(R)$ bir R -modüldür.

Tanım 5.1.3. [24] \tilde{C} , R -alt modül olmak üzere, $\tilde{C} \subset Mat_{m \times n}(R)$ ile verilen \tilde{C} lineer kodu matris lineer kod olarak adlandırılır.

Örnek 5.1.1. $\tilde{C} \subset Mat_{2 \times 2}(F_3)$ matris lineer kodu, $v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ve $v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

vektörleri tarafından üretilen bir \tilde{C} kodu kısaca

$$\tilde{C} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

ile gösterilir.

Bu takdirde \tilde{C} matris lineer kodunun kodsözleri, v_1 ve v_2 vektörlerinin lineer toplamları olarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\tilde{C} = \{ \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 : \alpha_1, \alpha_2 \in F_3; v_1, v_2 \in \text{Mat}_{2 \times 2}(F_3) \}.$$

\tilde{C} matris lineer kodunun elemanları aşağıdaki şekilde elde edilir:

α_1	α_2	\tilde{C} matris lineer kodunun elemanları ($\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$)
0	0	$0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
1	0	$1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
0	1	$0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
1	1	$1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
2	0	$2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
0	2	$0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
2	1	$2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
1	2	$1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
2	2	$2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Elde edilen \tilde{C} matris lineer kodunun elemanları aşağıdaki gibidir:

$$\tilde{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

5.2. Matris Kodlar için M-Spotty RT Ağırlığı ve MacWilliams Özdeşliği

\tilde{C} matris lineer kodu için parça hatası, m-spotty parça kontrol kodları için verilen parça hatalarına benzer bir biçimde genelleştirilebilir. Örneğin, bir matris kodsöz için m-spotty parça hatası, Şekil 5.1'deki gibi ifade edilebilir. 3×6 tipindeki matris kodsözün (Şekil 5.1A) a_{22} bileşeninde hata meydana geldiğini (Şekil 5.1B) ve hataya neden olan etkinin özelliğine göre a_{22} bileşenin yakın komşuluklarında da değişikliğe neden olabileceği varsayılabilir. Bu değişiklik a_{22} bileşenin bulunduğu sütunda veya yakın sütunlarda meydana gelebilir. Bu komşuluklar, Şekil 5.1C'de işaretlenmiştir.

$$\begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{0} & 1 & 1 & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{0} & 1 & 1 & 1 \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} \end{array}$$

Şekil 5.1. Matris lineer kodlarda m-spotty parça hatası

Bu tanım dikkatle incelendiğinde, bir satırlı matrisler durumu orijinal m-spotty parça hatası tanımına denk gelmektedir.

Matris lineer kodlar için m-spotty RT ağırlığı aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

Tanım 5.2.1. \tilde{C} bir matris lineer kod olsun. \tilde{C} matris lineer kodunun c matris kodsözü için $1 \leq i \leq b$ olmak üzere, A_i , i inci sütunu göstermek üzere, RT ağırlığı aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$w_{RT}(c) = \begin{cases} \max\{i : A_i \neq 0\}, & c \neq 0 \\ 0, & c = 0. \end{cases}$$

Bu takdirde, m-spotty RT ağırlığı önceki bölümlerdeki tanımlara benzer biçimde aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

Tanım 5.2.2. E bir matris hata vektörü olsun. $0 \leq i \leq n-1$ olmak üzere E_i , E matris hata vektörünün i inci parçasını temsil etsin. E matris hata vektöründeki t/b -hatalarının sayısı $w_{MRT}(E)$ ile gösterilir ve aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$w_{MRT}(E) = \sum_{i=0}^{n-1} \left[\frac{w_{RT}(E_i)}{t} \right]$$

Burada $w_{RT}(E_i)$, E_i matris hata vektörünün F_q üzerinde RT ağırlığını göstermektedir.

Sonuç 5.2.1. [20] $Mat_{m \times n}(R)$ uzayında $m=1$ alınırsa, Tanım 5.2.2 sütunlar için tanımlanan RT ağırlığına eşit olur.

Örnek 5.2.1. $n=t=2$ olsun.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

matris hata vektörünün m-spotty RT ağırlığı aşağıdaki gibi elde edilir:

$$E_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

olmak üzere,

$$w_{RT}(E_0) = 1,$$

$$w_{RT}(E_1) = 2$$

bulunur. Dolayısıyla, E matris hata vektörünün m-spotty RT ağırlığı

$$w_{MRT}(E) = \sum_{i=0}^{n-1} \left[\frac{w_{RT}(E_i)}{t} \right] = \left[\frac{w_{RT}(E_0)}{2} \right] + \left[\frac{w_{RT}(E_1)}{2} \right] = \left[\frac{1}{2} \right] + \left[\frac{2}{2} \right] = 2$$

bulunur.

Bölüm 4'te yapılan çalışmalardan faydalanmak amacıyla, Şekil 5.1 ele alındığında her sütun özel bir sonlu halkanın bir elemanına karşılık getirilebilir. Örneğin, Şekil 5.1C'de her sütun Bölüm 4'te ele alınan $F_2[u]/(u^3)$ sonlu halkasının bir elemanı ile birebir eşleştirilebilir. Bu eşleme $f: Mat_{3 \times 1}(F_2) \rightarrow F_2[u]/(u^3)$ fonksiyonu aracılığıyla bir matris kodsöz ile $F_2[u]/(u^3)$ sonlu halkasının bir elemanı olan

$$f \left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \right) = a_1 + a_2u + a_3u^2$$

şeklinde tanımlanır. Bu durumda, yukarıda verilen f fonksiyonu yardımıyla, $g: Mat_{3 \times 6}(F_2) \rightarrow F_2^6[u]/(u^3)$ olmak üzere Şekil 5.1C'de verilen matris kodsöz aşağıdaki gibi resmedilir:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow [1, u, u^2, 1+u+u^2, 1+u+u^2, u+u^2].$$

g fonksiyonunun tersi yukarıda verilen eşlemeye göre kolayca görüldüğünden, bu fonksiyon φ ile gösterilecektir. Yani yukarıda verilen eşlemeye göre $\varphi = g^{-1}$ dir.

Tanım 5.2.3. $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ olmak üzere, $F_q^n[u]/(u^s)$ sonlu halkasının bir elemanı olsun. c elemanına karşılık gelen matris elemanı aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$\begin{aligned} c_1 &= c_{10} + c_{11}u + c_{12}u^2 + \dots + c_{1,s-1}u^{s-1}, \\ c_2 &= c_{20} + c_{21}u + c_{22}u^2 + \dots + c_{2,s-1}u^{s-1}, \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ c_n &= c_{n0} + c_{n1}u + c_{n2}u^2 + \dots + c_{n,s-1}u^{s-1} \end{aligned}$$

olsun. Bu taktirde,

$\varphi : F_q^n[u]/(u^s) \rightarrow Mat_{s \times n}(F_q)$ olmak üzere,

$$c = (c_1, c_2, \dots, c_n) \rightarrow \varphi(c) = \begin{bmatrix} c_{10} & c_{20} & \cdot & \cdot & \cdot & c_{n0} \\ c_{11} & c_{21} & \cdot & \cdot & \cdot & c_{n1} \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & & \cdot \\ c_{1,s-1} & c_{2,s-1} & \cdot & \cdot & \cdot & c_{n,s-1} \end{bmatrix}$$

şeklinde bir fonksiyon tanımlanabilir.

Aşağıdaki örnek, yukarıda tanımlanan φ fonksiyonu aracılığıyla matris lineer kodları ile halka üzerindeki lineer kodlar arasında yapılan eşleme sonucunda kodlama sürecinde meydana gelen hataların kontrolü ve düzeltilmesini göstermektedir. Bu yaklaşım sayesinde matris lineer kodlarında birçok ardışık hata halka kodlarında daha küçük parçalarda görüldüğünde, hata düzeltme kabiliyeti bu yöntem ile artırılmaktadır.

Örnek 5.2.2. C , $u^2 = 0$ olmak üzere $F_2 + uF_2$ halkası üzerinde tanımlı bir lineer kod olsun. C lineer kodunun elemanları aşağıdaki gibi verilsin:

$$C = \{000000, 10u11+uu, u00uu0, 1+u0u1+u1u\}.$$

$b = t = 2$ olsun. Bu takdirde, C lineer kodunun minimum m-spotty RT uzaklığı,

$$w_{MRT}(C) = d_{MRT}(C) = 3$$

dır. Yani, C lineer kodu ağırlığı 1 olan bütün hataları düzeltir. m-spotty RT ağırlığı göz önüne alındığında ağırlığı 1 olan hata vektör sayısı bir parça için 15 dir. Bu hata vektörleri sınıf liderleri ele alınarak aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} 100000+C &= \{100000, 00u11+uu, 1+u00uu0, u0u1+u1u\}, \\ 010000+C &= \{010000, 11u11+uu, u10uu0, 1+u1u1+u1u\}, \\ u00000+C &= \{u00000, 1+u0u11+uu, 000uu0, 10u1+u1u\}, \\ 0u0000+C &= \{0u0000, 1uu11+uu, uu0uu0, 1+uu1+u1u\}, \\ 1+u00000+C &= \{1+u00000, u0u11+uu, 100uu0, 00u1+u1u\}, \\ 01+u00000+C &= \left\{ \begin{array}{l} 01+u0000, 11+uu11+uu, u1+u0uu0, \\ 1+u1+uu1+u1u \end{array} \right\}, \\ 110000+C &= \{110000, 01u11+uu, 1+u10uu0, u1u1+u1u\}, \\ 1u00000+C &= \{1u0000, 0uu11+uu, 1+uu0uu0, uu1+u1u\}, \\ 11+u00000+C &= \left\{ \begin{array}{l} 11+u0000, 01+uu11+uu, 1+u1+u0uu0, \\ u1+uu1+u1u \end{array} \right\}, \\ u100000+C &= \{u10000, 1+u1u11+uu, 010uu0, 11u1+u1u\}, \\ uu00000+C &= \{uu0000, 1+uuu11+uu, 0u0uu0, 1uu1+u1u\}, \\ u1+u00000+C &= \left\{ \begin{array}{l} u1+u0000, 1+u1+uu11+uu, 01+u0uu0, \\ 11+uu1+u1u \end{array} \right\}, \\ 1+u100000+C &= \{1+u10000, u1u11+uu, 110uu0, 01u1+u1u\}, \\ 1+uu00000+C &= \{1+uu0000, uu11+uu, 1u0uu0, 0uu1+u1u\}, \\ 1+u1+u00000+C &= \left\{ \begin{array}{l} 1+u1+u0000, u1+uu11+uu, 11+u0uu0, \\ 01+uu1+u1u \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

φ fonksiyonu yardımıyla, C lineer koduna karşılık gelen \tilde{C} matris lineer kodu aşağıdaki gibidir:

$$\tilde{C} = \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right], \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right], \\ \left[\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right], \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{array} \right\}.$$

Tanım 5.2.2’de matris lineer kodlarda verilen m-spotty RT ağırlığına göre, \tilde{C} matris lineer kodunun minimum m-spotty RT uzaklığı

$$w_{MRT}(\tilde{C}) = d_{MRT}(\tilde{C}) = 3$$

dır. Yani, \tilde{C} lineer kodu ağırlığı 1 olan bütün hataları düzeltir. Ama \tilde{C} kodunun bir b parçası için ağırlığı 1 olan hata vektör sayısı bir parça için 63 tür. Bu sayede matris lineer kodlarda birçok ardışık hata halka kodlarında daha küçük parçalarda görüldüğünde, hata düzeltme kabiliyeti bu yöntem ile arttırılabilir.

Önerme 5.2.1. $C, F_q[u]/(u^s)$ halkası üzerinde tanımlı bir lineer kod ise bu taktirde $\varphi(C) = \tilde{C}, F_q$ üzerinde tanımlı bir matris lineer koddur.

İspat: $\varphi: F_q^n[u]/(u^s) \rightarrow Mat_{s \times n}(F_q)$ olmak üzere; Tanım 5.2.1’de tanımlanan φ fonksiyonu bir lineer dönüşüm ve lineer dönüşümün görüntüsü bir alt uzay olduğundan $\varphi(C) = \tilde{C}, Mat_{s \times n}(F_q)$ uzayının bir alt uzayıdır. Yani $\varphi(C) = \tilde{C}, F_q$ üzerinde tanımlı bir matris lineer koddur.

Önerme 5.2.1’in tersi doğru değildir. Örneğin,

$$\tilde{C} = \left\{ \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right], \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right] \right\}$$

matrisi lineer kodu ele alalım. Bu matris lineer kodunu veren $F_2 + uF_2$ üzerinde tanımlı C kodu aşağıdaki gibidir:

$$C = \{00, 1u\}.$$

Dolayısıyla, C kodu lineer bir kod değildir.

Önerme 5.2.1'in tersinin doğru olmaması yani ters görüntüsü alındığında $F_q[u]/(u^s)$ halkası üzerinde tanımlı her zaman bir lineer kod bulunamaması durumundan dolayı bundan sonra verilecek tanımlar ve teoremlerde C , $F_q[u]/(u^s)$ üzerinde tanımlı bir lineer kod olarak alınacaktır. Çünkü yapılan çalışmalarda lineer kavramı önemli olduğundan ancak bu durum \tilde{C} kodunun lineer olmasını garanti etmektedir.

$F_q[u]/(u^s)$ halkasının cebirsel yapısının bazı özellikleri ile ilgili tanımlar Bölüm 4'te ele alınmıştı. Burada, matris lineer kodlar ve $F_q[u]/(u^s)$ halkası üzerindeki lineer kodlar arasında bir eşleme yapılacağından aşağıda $F_q[u]/(u^s)$ halkası üzerinde lineer kodların üreteç polinomu ve eşlik denetim matrisi ile ilgili tanımlar verilecektir.

Teorem 5.2.1. [44] $F_q[u]/(u^s)$ halkası üzerindeki sıfırdan farklı bir C kodun üreteç matrisi

$$G = \begin{bmatrix} I_{k_1} & A_{12} & A_{13} & \cdot & \cdot & \cdot & A_{1,s-1} & A_{1s} \\ 0 & uI_{k_2} & uA_{23} & \cdot & \cdot & \cdot & uA_{2,s-1} & uA_{2s} \\ 0 & 0 & u^2I_{k_3} & \cdot & \cdot & \cdot & u^2A_{3,s-1} & u^2A_{3s} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & u^{s-1}I_{k_s} & u^{s-1}A_{ss} \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Burada, I_{k_i} matrisleri tipleri $k_i \times k_i$ olan birim matrisleri ve 0 ise ilgili tipteki sıfır matrisini temsil etmektedir. $A_{1,j+1}, A_{2,j+1}, \dots, A_{j,j+1}$ matrislerinin bileşenleri $F_q[u]/(u^s)$ halkasının içindeki bir kopyası olan R_j halkasındandır. Ayrıca, C kodun eleman sayısı $q^{sk_1+(s-1)k_2+\dots+k_s}$ dir.

Teorem 5.2.2. [45] Uygun permütasyon işlemleri yapıldıktan sonra, $u^2 = 0$ olmak üzere $F_2 + uF_2$ üzerinde tanımlı sıfırdan farklı bir C lineer kodunun üreteç matrisi,

$$G = \begin{bmatrix} I_{k_1} & A & B \\ 0 & uI_{k_2} & uD \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Burada, I_{k_1} ve I_{k_2} matrisleri sırasıyla $k_1 \times k_1$ ve $k_2 \times k_2$ tipindeki birim matrisleri, A ve B matrisleri $F_2 + uF_2$ üzerinde matrisleri ve D matrisi ise F_2 üzerinde matrisleri göstermektedir. Ayrıca, C lineer kodunun eleman sayısı $4^{k_1} 2^{k_2}$ dir.

Teorem 5.2.3. [46] $u^2 = 0$ olmak üzere, $F_2 + uF_2$ üzerinde tanımlı sıfırdan farklı bir C lineer kodunun eşlik denetim matrisi,

$$H = \begin{bmatrix} B^t + D^t A^t & D^t & I_{n-k_1-k_2} \\ uA^t & uI_{k_2} & 0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

Teorem 5.2.3'te verilen H eşlik denetim matrisi, nokta iç çarpımı temel alınarak elde edilmiş bir matristir. Halbuki önceki bölümlerde temel alınan iç çarpım farklı olduğundan parça sayısı bir olarak alınırsa H eşlik denetim matrisinin satırları farklı olarak elde edilir. Aşağıdaki tanımlamayı verdikten sonra önceki bölümlerde kullanılan iç çarpıma göre H eşlik denetim matrisi elde edilebilir.

Tanım 5.2.4. $c = (c_1, c_2, c_3, \dots, c_{b-1}, c_b)$ elemanı için c elemanının tersiniri

$$c_R = (c_b, c_{b-1}, \dots, c_3, c_2, c_1)$$

ile gösterilir.

Sonuç 5.2.2. $u^2 = 0$ olmak üzere, $F_2 + uF_2$ üzerinde tanımlı sıfırdan farklı bir C lineer kodunun RT metriğine göre eşlik denetim matrisi,

$$H_R = \begin{bmatrix} (B^t + D^t A^t & D^t & I_{n-k_1-k_2})_R \\ (uA^t & uI_{k_2} & 0)_R \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

Tanım 5.2.5. $C, F_q[u]/(u^s)$ üzerinde sıfırdan farklı bir lineer kod ve C^\perp , C lineer kodun dik tümleyeni olsun. $\varphi(C^\perp) = \tilde{C}^\perp$ matris lineer koduna $\varphi(C) = \tilde{C}$ matris lineer kodunun φ dik tümleyeni denir.

Tanım 5.2.5'te verilen kodlar arasında aşağıdaki gibi bir ilişki kurulabilir:

$$\begin{array}{ccc} C & \leftrightarrow & C^\perp \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ \tilde{C} & & \tilde{C}^\perp. \end{array}$$

Şekil 5.2. Kodlar ve dik tümleyenleri arasındaki ilişki

Şekil 5.2'de verilen kodlar ve dik tümleyenleri arasındaki ilişkiyi gösteren şemada, önceki bölümlerde verilen iç çarpıma göre matris lineer kodların kendisi ve dik tümleyenleri arasında doğrudan bir ilişki kurulması mümkün değildir. Bu yüzden, matris lineer kodlar arasında MacWilliams özdeşliğini elde etmek için aşağıdaki yöntem kullanılabilir:

$F_q[u]/(u^s)$ halkası üzerinde verilen C lineer kodu ve dik tümleyeni C^\perp , Tanım 5.2.3'te tanımlanan fonksiyon ile F_q üzerindeki \tilde{C} ve \tilde{C}^\perp matris lineer kodlarına karşılık gelir. F_q üzerinde elde edilen \tilde{C} ve \tilde{C}^\perp matris lineer kodları arasında MacWilliams özdeşliğini elde etme problemi, tanımlanan fonksiyon aracılığıyla C lineer kodu ve dik tümleyeni arasındaki MacWilliams özdeşliğini elde etme problemine dönüşür. $F_q[u]/(u^s)$ halkası üzerinde verilen bir lineer kodun dik tümleyeni arasındaki ilişki Bölüm 4'te elde edildiğinden matris lineer kodlar için MacWilliams özdeşliği elde edilmiş olur.

Bölüm 3 ve Bölüm 4'te verilen iç çarpıma göre, \tilde{C} matris lineer kodu verildiğinde φ -dik tümleyeni olan \tilde{C}^\perp matris lineer kodunu doğrudan elde etmek zor olduğundan aşağıda \tilde{C} ve \tilde{C}^\perp matris lineer kodlarının ne zaman birbirinin dik tümleyeni olacağı tespit edilmektedir.

Önerme 5.2.2. A ve B , sırasıyla \tilde{C} ve \tilde{C}^\perp matris lineer kodlarının elemanları olmak üzere aşağıdaki gibi verilsin:

$$A = [A_1, A_2, \dots, A_s]^t, \quad B = [B_1, B_2, \dots, B_s]^t.$$

$i \in \{1, 2, \dots, s\}$ olmak üzere, A_i ve B_i 'ler A ve B matrisinin satırlarını göstermektedir.

• , nokta iç çarpımını göstermek üzere,

$$D_1 = \{F \in \text{Mat}_{s \times t}(F_q) : A_1 \bullet (B_1)_R = 0\},$$

$$D_2 = \{F \in \text{Mat}_{s \times t}(F_q) : A_1 \bullet (B_2)_R + A_2 \bullet (B_1)_R = 0\},$$

$$D_3 = \{F \in \text{Mat}_{s \times t}(F_q) : A_1 \bullet (B_3)_R + A_2 \bullet (B_2)_R + A_3 \bullet (B_1)_R = 0\},$$

.

.

.

$$D_s = \{F \in \text{Mat}_{s \times t}(F_q) : A_1 \bullet (B_s)_R + A_2 \bullet (B_{s-1})_R + \dots + A_s \bullet (B_1)_R = 0\}$$

kümeleri için \tilde{C} matris lineer kodunun dik tümleyeni

$$\tilde{C}^\perp = D_1 \cap D_2 \cap \dots \cap D_s$$

ile bulunur.

İspat: C , $F_q[u]/(u^s)$ üzerinde tanımlı bir lineer kod olsun. C^\perp , C lineer kodunun dik tümleyeni ise bu takdirde her $c \in C$ için $v \in C^\perp$ olacak şekilde $\langle c, v \rangle = 0$ şartını sağlamalıdır.

$c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$, $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} c_1 &= c_{10} + c_{11}u + c_{12}u^2 + \dots + c_{1,s-1}u^{s-1}, & v_1 &= v_{10} + v_{11}u + v_{12}u^2 + \dots + v_{1,s-1}u^{s-1}, \\ c_2 &= c_{20} + c_{21}u + c_{22}u^2 + \dots + c_{2,s-1}u^{s-1}, & v_2 &= v_{20} + v_{21}u + v_{22}u^2 + \dots + v_{2,s-1}u^{s-1}, \\ &\cdot & &\cdot \\ &\cdot & &\cdot \\ &\cdot & &\cdot \\ c_n &= c_{n0} + c_{n1}u + c_{n2}u^2 + \dots + c_{n,s-1}u^{s-1}, & v_n &= v_{n0} + v_{n1}u + v_{n2}u^2 + \dots + v_{n,s-1}u^{s-1} \end{aligned}$$

şeklinde olsun. Gerekli düzenlemeler yapıldıktan sonra,

$$\begin{aligned} \langle c, v \rangle &= c \cdot v_R = c_1 \cdot v_n + c_2 \cdot v_{n-1} + \dots + c_n \cdot v_1 \\ &= A_1 \cdot (B_1)_R + (A_1 \cdot (B_2)_R + A_2 \cdot (B_1)_R)u + (A_1 \cdot (B_3)_R + A_2 \cdot (B_2)_R + A_3 \cdot (B_1)_R)u^2 + \\ &\quad \dots + (A_1 \cdot (B_s)_R + A_2 \cdot (B_{s-1})_R + \dots + A_s \cdot (B_1)_R)u^{s-1} \end{aligned}$$

elde edilir. İç çarpımın sıfır olması ve φ fonksiyonun tanımından dolayı,

$$\begin{aligned} D_1 &= \left\{ F \in \text{Mat}_{s \times t}(F_q) : A_1 \cdot (B_1)_R = 0 \right\}, \\ D_2 &= \left\{ F \in \text{Mat}_{s \times t}(F_q) : A_1 \cdot (B_2)_R + A_2 \cdot (B_1)_R = 0 \right\}, \end{aligned}$$

$$D_3 = \{F \in Mat_{s \times t}(F_q) : A_1 \cdot (B_3)_R + A_2 \cdot (B_2)_R + A_3 \cdot (B_1)_R = 0\},$$

.

.

$$D_s = \{F \in Mat_{s \times t}(F_q) : A_1 \cdot (B_s)_R + A_2 \cdot (B_{s-1})_R + \dots + A_s \cdot (B_1)_R = 0\}$$

ve

$$\tilde{C}^\perp = D_1 \cap D_2 \cap \dots \cap D_s$$

elde edilir.

Örneğin,

$$\tilde{C}^\perp = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \end{bmatrix} : x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \in F_2 \right\}$$

olmak üzere; her $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_5 \end{bmatrix} \in \tilde{C}$ için

$$D_1 = \{F \in Mat_{2 \times 3}(F_2) : a_3 x_1 + a_2 x_2 + a_1 x_3 = 0\},$$

$$D_2 = \{F \in Mat_{2 \times 3}(F_2) : a_6 x_1 + a_5 x_2 + a_4 x_3 + a_3 x_4 + a_2 x_5 + a_1 x_6 = 0\}$$

olacak şekilde $D_1 \cap D_2$ kümesi \tilde{C}^\perp matris lineer kümesinin elemanlarını verir.

Aşağıdaki örnek, verilen \tilde{C} matris lineer kodunun ağırlık sayacı ile φ -dik tümleyeni olan \tilde{C}^\perp matris lineer kodunun ağırlık sayacı arasında olan ilişkiyi göstermektedir:

Örnek 5.2.3. $b = 2$, $t = 2$ ve $u^2 = 0$ olmak üzere, $F_2 + uF_2$ üzerinde üreteç matrisi

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & u & u & 0 \end{bmatrix}$$

olan C lineer kodunu ele alalım. C lineer kodunun elemanları aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} c_1 &= (00 \ 00), & c_5 &= (u0 \ 0u), \\ c_2 &= (0u \ u0), & c_6 &= (uu \ uu), \\ c_3 &= (10 \ 01), & c_7 &= (1+u0 \ 01+u), \\ c_4 &= (1u \ u1), & c_8 &= (1+uu \ u1+u). \end{aligned}$$

$\varphi: F_2^4[u]/(u^2) \rightarrow Mat_{2 \times 4}(F_2)$ fonksiyonu aracılığıyla $i \in \{1, 2, \dots, 8\}$ olmak üzere her c_i kodsözü, \tilde{C} matris lineer kodunun $\varphi(c_i)$ kodsözlerine karşılık gelir. \tilde{C} matris lineer kodunun elemanları aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} c_1 &= (0 \ 0 \ 0 \ 0) & \rightarrow \varphi(c_1) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ c_2 &= (0 \ u \ u \ 0) & \rightarrow \varphi(c_2) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \\ c_3 &= (1 \ 0 \ 0 \ 1) & \rightarrow \varphi(c_3) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ c_4 &= (1 \ u \ u \ 1) & \rightarrow \varphi(c_4) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \\ c_5 &= (u \ 0 \ 0 \ u) & \rightarrow \varphi(c_5) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ c_6 &= (u \ u \ u \ u) & \rightarrow \varphi(c_6) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \\ c_7 &= (1+u \ 0 \ 0 \ 1+u) & \rightarrow \varphi(c_7) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ c_8 &= (1+u \ u \ u \ 1+u) & \rightarrow \varphi(c_8) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Dolayısıyla,

$$\tilde{C} = \{\varphi(c_1), \varphi(c_2), \varphi(c_3), \dots, \varphi(c_8)\}$$

dır. \tilde{C} matris lineer kodu aşağıdaki gibi de ifade edilebilir:

$$\tilde{C} = \{a\varphi(c_2) + b\varphi(c_3) + c\varphi(c_5) : a, b, c, d \in F_2\}.$$

C lineer kodunun C^\perp dik tümleyeni, dik tümleyen tanımı kullanılarak aşağıdaki gibi elde edilir:

Her $c \in C$ için önceki bölümlerde tanımlanan iç çarpıma göre $\langle c, v \rangle = 0$ şartı sağlanmalıdır. Dolayısıyla, $c = (c_1^\perp, c_2^\perp, c_3^\perp, c_4^\perp)$ olmak üzere C^\perp kodunun elemanları aşağıdaki şartları sağlar:

$$\begin{aligned} c_2^\perp + c_3^\perp &= 0, \\ uc_1^\perp + uc_4^\perp &= 0. \end{aligned}$$

Son eşitlikleri sağlayan C^\perp kodunun $c = (c_1^\perp, c_2^\perp, c_3^\perp, c_4^\perp)$ elemanları aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{array}{cccc} 0\ 0\ 0\ 0, & 1\ 0\ 0\ 1, & 0\ 1+u\ 1+u\ 0, & 1+u\ 0\ 0\ 1, \\ 0\ 1\ 1\ 0, & u\ 0\ 0\ u, & 0\ 1+u\ 1+u\ u, & 1+u\ u\ u\ 1, \\ 0\ u\ u\ 0, & 0\ 0\ 0\ u, & 1\ 1+u\ 1+u\ 1+u, & 1+u\ 1\ 1\ 1, \\ u\ 0\ 0\ 0, & 1\ 0\ 0\ 1+u, & 1\ 1+u\ 1+u\ 1, & 1+u\ 0\ 0\ 1+u, \\ 1\ 1\ 1\ 1, & u\ 1\ 1\ u, & u\ 1+u\ 1+u\ u, & 1+u\ 1\ 1\ 1+u, \\ 1\ u\ u\ 1, & u\ u\ u\ u, & u\ 1+u\ 1+u\ 0, & 1+u\ u\ u\ 1+u, \\ u\ u\ u\ 0, & 0\ 1\ 1\ u, & 1\ 1\ 1\ 1+u, & 1+u\ 1+u\ 1+u\ 1, \\ u\ 1\ 1\ 0, & 0\ u\ u\ u, & 1\ u\ u\ 1+u, & 1+u\ 1+u\ 1+u\ 1+u. \end{array}$$

Bu takdirde, C^\perp kodunun üreteç matrisi

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & u & u & u \end{pmatrix}$$

dır.

Benzer şekilde, $\varphi: F_2^4[u]/(u^2) \rightarrow \text{Mat}_{2 \times 4}(F_2)$ fonksiyonu aracılığıyla $i \in \{1, 2, \dots, 32\}$ olmak üzere C^\perp lineer kodunun her c_i^\perp kodsözü, \tilde{C}^\perp matris lineer kodunun $\varphi(c_i^\perp)$ kodsözlerine karşılık gelir. \tilde{C}^\perp matris lineer kodunun elemanları aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} c_1^\perp &= (0 \ 0 \ 0 \ 0) & \rightarrow \varphi(c_1^\perp) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ c_2^\perp &= (0 \ 1 \ 1 \ 0) & \rightarrow \varphi(c_2^\perp) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ c_3^\perp &= (0 \ u \ u \ 0) & \rightarrow \varphi(c_3^\perp) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \\ c_4^\perp &= (0 \ 1+u \ 1+u \ 0) & \rightarrow \varphi(c_4^\perp) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \\ c_5^\perp &= (u \ 0 \ 0 \ 0) & \rightarrow \varphi(c_5^\perp) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ c_6^\perp &= (1+u \ 0 \ 0 \ 1) & \rightarrow \varphi(c_6^\perp) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ c_7^\perp &= (1+u \ u \ u \ 1) & \rightarrow \varphi(c_7^\perp) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \\ c_8^\perp &= (0 \ 1+u \ 1+u \ u) & \rightarrow \varphi(c_8^\perp) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \\ c_9^\perp &= (1 \ 0 \ 0 \ 1) & \rightarrow \varphi(c_9^\perp) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ c_{10}^\perp &= (1 \ 1 \ 1 \ 1) & \rightarrow \varphi(c_{10}^\perp) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{11}^\perp &= (1 \ u \ u \ 1) & \rightarrow \varphi(c_{11}^\perp) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \\
c_{12}^\perp &= (u \ u \ u \ 0) & \rightarrow \varphi(c_{12}^\perp) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \\
c_{13}^\perp &= (u \ 1 \ 1 \ 0) & \rightarrow \varphi(c_{13}^\perp) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
c_{14}^\perp &= (1 \ 1 \ 1 \ 1+u) & \rightarrow \varphi(c_{14}^\perp) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\
c_{15}^\perp &= (1 \ 1+u \ 1+u \ 1+u) & \rightarrow \varphi(c_{15}^\perp) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \\
c_{16}^\perp &= (u \ 1+u \ 1+u \ u) & \rightarrow \varphi(c_{16}^\perp) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \\
c_{17}^\perp &= (u \ 0 \ 0 \ u) & \rightarrow \varphi(c_{17}^\perp) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\
c_{18}^\perp &= (u \ 1 \ 1 \ u) & \rightarrow \varphi(c_{18}^\perp) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\
c_{19}^\perp &= (u \ u \ u \ u) & \rightarrow \varphi(c_{19}^\perp) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \\
c_{20}^\perp &= (0 \ 1 \ 1 \ u) & \rightarrow \varphi(c_{20}^\perp) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\
c_{21}^\perp &= (0 \ u \ u \ u) & \rightarrow \varphi(c_{21}^\perp) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \\
c_{22}^\perp &= (1 \ u \ u \ 1+u) & \rightarrow \varphi(c_{22}^\perp) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \\
c_{23}^\perp &= (1+u \ 1+u \ 1+u \ 1) & \rightarrow \varphi(c_{23}^\perp) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \\
c_{24}^\perp &= (1 \ 1+u \ 1+u \ 1) & \rightarrow \varphi(c_{24}^\perp) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \\
c_{25}^\perp &= (1+u \ 0 \ 0 \ 1+u) & \rightarrow \varphi(c_{25}^\perp) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\
c_{26}^\perp &= (1+u \ 1 \ 1 \ 1+u) & \rightarrow \varphi(c_{26}^\perp) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\
c_{27}^\perp &= (1+u \ u \ u \ 1+u) & \rightarrow \varphi(c_{27}^\perp) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{28}^\perp &= (0 \ 0 \ 0 \ u) & \rightarrow \varphi(c_{28}^\perp) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\
c_{29}^\perp &= (1 \ 0 \ 0 \ 1+u) & \rightarrow \varphi(c_{29}^\perp) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\
c_{30}^\perp &= (1+u \ 1 \ 1 \ 1) & \rightarrow \varphi(c_{30}^\perp) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
c_{31}^\perp &= (u \ 1+u \ 1+u \ 0) & \rightarrow \varphi(c_{31}^\perp) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \\
c_{32}^\perp &= (1+u \ 1+u \ 1+u \ 1+u) & \rightarrow \varphi(c_{32}^\perp) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

\tilde{C}^\perp matris lineer kodu aşağıdaki gibi de ifade edilebilir:

$$\tilde{C}^\perp = \left\{ a\varphi(c_2^\perp) + b\varphi(c_3^\perp) + c\varphi(c_9^\perp) + d\varphi(c_{17}^\perp) + e\varphi(c_{21}^\perp) : a, b, c, d, e \in F_2 \right\}.$$

Tanım 5.2.2 göz önünde bulundurularak \tilde{C} matris lineer kodu ile φ -dik tümleyeni olan \tilde{C}^\perp matris lineer kodunun ağırlık sayaçları aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned}
W_{\tilde{C}}(z) &= 1 + 7z, \\
W_{\tilde{C}^\perp}(z) &= 1 + 2z + 29z^2.
\end{aligned}$$

$u^2 = 0$ olmak üzere $F_2 + uF_2$ sonlu halkası üzerinde tanımlı C ve C^\perp lineer kodlarının ağırlık sayaçları aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned}
W_C(z) &= 1 + 7z, \\
W_{C^\perp}(z) &= 1 + 2z + 29z^2.
\end{aligned}$$

Elde edilen ağırlık sayaçlarından, $u^2 = 0$ olmak üzere $F_2 + uF_2$ sonlu halkası üzerinde tanımlı C lineer kodu ile F_2 üzerinde tanımlı $\varphi(C) = \tilde{C}$ matris lineer kodunun ağırlık sayaçlarının aynı olduğu görülür. Benzer şekilde, $F_2 + uF_2$ sonlu

halkası üzerinde tanımlı C^\perp lineer kodu ile F_2 üzerinde tanımlı $\varphi(C^\perp) = \tilde{C}^\perp$ matris lineer kodunun ağırlık sayaçları birbirine eşittir.

Ağırlık sayaçları arasındaki bu eşitlik, \tilde{C} ve \tilde{C}^\perp matris lineer kodlarının ağırlık sayaçlarını birbirine bağlayan MacWilliams özdeşliğinin C ve C^\perp lineer kodlarının ağırlık sayaçlarını birbirine bağlayan MacWilliams özdeşliği ile elde edilebileceğini gösterir. Yani, C ve C^\perp lineer kodlarının ağırlık sayaçlarını birbirine bağlayan MacWilliams özdeşliği elde edilirse, \tilde{C} ve \tilde{C}^\perp matris lineer kodlarının ağırlık sayaçlarını birbirine bağlayan MacWilliams özdeşliği elde edilmiş olur. Dolayısıyla, ilk önce sonlu halka üzerinde tanımlı C ve C^\perp lineer kodlarının ağırlık sayaçları arasındaki ilişkiyi veren MacWilliams özdeşliğini göstermek gerekir. Bölüm 4'te $u^2 = 0$ olmak üzere $F_2 + uF_2$ sonlu halkası üzerinde tanımlı lineer kodların kendisi ve dik tümleyeninin m-spotty RT ağırlık sayaçları için MacWilliams özdeşliği elde edilmişti. Teorem 4.3.1 kullanılarak aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

$V_j^{(2)}$ polinomları ve RT ağırlık dağılım vektörleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} V_0^{(2)}(z) &= 1 + 15z, & \frac{A_{(2,0,0)}}{1} & \frac{A_{(0,1,1)}}{4} & \frac{A_{(0,0,2)}}{3} \\ V_1^{(2)}(z) &= 1 - z, \\ V_2^{(2)}(z) &= 1 - z, \end{aligned}$$

Elde edilen bu polinomlar ve RT ağırlık dağılım vektörleri Teorem 4.3.1'de yerine yazılırsa aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$\begin{aligned} W_{C^\perp}(z) &= \frac{1}{|C|} \sum_{\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = 2} A_{(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)} \prod_{j=0}^2 (V_j^{(2)}(z))^{\alpha_j} \\ &= \frac{1}{8} \left[(V_0^{(2)})^2 + 4(V_1^{(2)})(V_2^{(2)}) + 3(V_2^{(2)}) \right] \\ &= \frac{1}{8} (8 + 16z + 232z^2) \\ &= 1 + 2z + 29z^2. \end{aligned}$$

Elde edilen bu sonuç, $F_2 + uF_2$ halkası üzerinde tanımlı C lineer kodu ile dik tümleyenini C^\perp lineer kodunun m-spotty RT ağırlık sayaçları için MacWilliams özdeşliğinin sağlandığını gösterir. Dolayısıyla, sonlu halkalar üzerinde tanımlı lineer kodlar yardımıyla \tilde{C} ve \tilde{C}^\perp matris lineer kodlarının m-spotty RT ağırlık sayaçları için MacWilliams özdeşliği elde edilmiş olur.

Aşağıdaki örnek, Önerme 5.2.2'nin bir uygulamasıdır:

Örnek 5.2.4. Örnek 5.2.3'teki verilen \tilde{C} matris lineer kodu için Önerme 5.2.2'yi kullanarak \tilde{C}^\perp matris lineer kodunu elde edelim. Önerme 5.2.2 kullanılarak \tilde{C}^\perp matris lineer kodunu tespit etmek oldukça zor bir iştir. Çünkü matris lineer kodun boyutu arttıkça Önerme 5.2.2'den dik tümleyeninin elemanlarını bulmak zorlaşır. Dolayısıyla, Şekil 5.2 de kodlar ve dik tümleyenleri arasında verilen ilişkiden kodun boyutu çok büyük olduğunda \tilde{C}^\perp matris lineer kodunun elemanları sonlu halkalar üzerinde tanımlı C^\perp lineer kodu yardımıyla daha kolay elde edilebilir.

Örnek 5.2.3'teki \tilde{C} matris lineer kodu aşağıdaki elemanlar tarafından üretilir:

$$\tilde{C} = \left\langle \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right], \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right], \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \right\rangle.$$

$$B = \left[\begin{array}{cccc} c_1^\perp & c_2^\perp & c_3^\perp & c_4^\perp \\ c_5^\perp & c_6^\perp & c_7^\perp & c_8^\perp \end{array} \right] \in \tilde{C}^\perp$$

olmak üzere, A ve B sırasıyla \tilde{C} ve \tilde{C}^\perp matris lineer kodlarının elemanları ve A_i ve B_i sırasıyla A ve B matris elemanlarının i inci satırlarını göstermek üzere, Önerme 5.2.2 kullanılarak aşağıdaki D_1 ve D_2 kümeleri elde edilir:

$$D_1 = \left\{ \begin{bmatrix} c_1^\perp & c_2^\perp & c_3^\perp & c_4^\perp \\ c_5^\perp & c_6^\perp & c_7^\perp & c_8^\perp \end{bmatrix} : c_1^\perp + c_4^\perp = 0 \right\},$$

$$D_2 = \left\{ \begin{bmatrix} c_1^\perp & c_2^\perp & c_3^\perp & c_4^\perp \\ c_5^\perp & c_6^\perp & c_7^\perp & c_8^\perp \end{bmatrix} : c_1^\perp + c_4^\perp = 0, c_2^\perp + c_3^\perp = 0, c_5^\perp + c_8^\perp = 0 \right\}.$$

Önerme 5.2.2'den $D_1 \cap D_2 = \tilde{C}^\perp$ dir ve $D_1 \cap D_2 = D_2$ olduğundan $D_2 = \tilde{C}^\perp$ elde edilir.

$i \in \{1, 2, \dots, 8\}$ için $c_i^\perp \in F_2$ olmak üzere,

$$c_1^\perp + c_4^\perp = 0 \rightarrow c_1^\perp = c_4^\perp,$$

$$c_2^\perp + c_3^\perp = 0 \rightarrow c_2^\perp = c_3^\perp,$$

$$c_5^\perp + c_8^\perp = 0 \rightarrow c_5^\perp = c_8^\perp$$

şartlarını sağlayan $B = \begin{bmatrix} c_1^\perp & c_2^\perp & c_3^\perp & c_4^\perp \\ c_5^\perp & c_6^\perp & c_7^\perp & c_8^\perp \end{bmatrix}$ matris elemanlarının Örnek 5.2.3'te

verilen \tilde{C}^\perp matris lineer kodu ile aynı olduğu görülür. Yukarıda \tilde{C}^\perp matris lineer kodunun elemanlarını elde etme işlemlerinden görülecektir ki, matris lineer kodunun boyutu büyüdükçe işlemler artacak ve elemanların tespiti zorlaşacaktır.

BÖLÜM 6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bilgisayar hafıza sistemlerinde önemli bir yere sahip olan ve hata kontrol kodlarının bir sınıfı olan m-spotty parça hata kontrol kodları için m-spotty Rosenbloom-Tsfasman metriği adı verilen yeni bir metrik tanımlanarak sonlu cebirsel yapılar üzerinde MacWilliams özdeşlikleri elde edilmiştir. Ayrıca, beşinci bölümde m-spotty Rosenbloom-Tsfasman metriği ile matris kodlar arasında bir ilişki kurulmuştur. Kurulan bu ilişki sayesinde, matris kodların hata düzeltme kabiliyetinin daha iyi olduğu tespitine varılmıştır.

İleriye dönük çalışmalarda, üçüncü ve dördüncü bölümlerde elde edilen MacWilliams özdeşlikleri, yeni metrikler tanımlanarak farklı cebirsel yapılar üzerinde de elde edilebilir. Tanımlanan yeni metrikler ile beşinci bölümde ele alınan matris kodları ile yeni tanımlanan m-spotty ağırlıkları arasında bir ilişki kurulabilir.

KAYNAKLAR

- [1] FRALEIGH, J. B., A First course in abstract algebra, Addison-Wesley, 2003.
- [2] DUMMIT, S.D., FOOTE, R.M., Abstract algebra, John Wiley & Sons, Inc., 2004.
- [3] ÇALLIALP, F., Örneklerle Soyut Cebir, Sakarya Üniversitesi Yayınları No:16, Sakarya, 1995.
- [4] PLESS, V., Introduction to the Theory of Error Correcting Codes, Wiley Inter-Science, 1998.
- [5] MACWILLIAMS, F.J., SLOANE, N.J., The Theory of Error-Correcting Codes, North-Holland, 1977.
- [6] BLAHUT, R.E., Theory and Practice of Error Control Codes, Addison-Wesley, 1984.
- [7] BERLEKAMP, E.R., Algebraic Coding Theory, Aegean Park Press, 1984.
- [8] PETERSON, W.W., WELDON JR., E.J., Error Correcting Codes, MIT Press, 1972.
- [9] LIN, S., COSTELLO JR., D.J., Error Control Coding, Pearson Prentice Hall, 2004.
- [10] FUJIWARA, E., Code Design for Dependable Systems: Theory and Practical Applications, Wiley&Sons, Inc., 2006.
- [11] UMAMESAN, G., FUJIWARA, E., A class of random multiple bits in a byte error correcting and single byte error detecting ($S_{t/b}EC - SbED$) codes. IEEE Trans. Comput. 2003; 52(7): 835-847.
- [12] SUZUKI, K., KANEKO, K., FUJIWARA, E., MacWilliams identity for m-spotty weight enumerator. IEICE Trans. Fundamentals. 2010; E93-A(2):526-531.

- [13] KASHIYAMA, T., FUJIWARA, E., A general class of byte error control codes for s-spotty byte errors. Proc. Int. Symp. Inform. Theory and Its Applications. Italy, 2004; pp.1297-1302.
- [14] SUZUKI, K., KASHIYAMA, T., FUJIWARA, E., A general class of byte error control codes for m-spotty byte errors. IEICE Trans. Fundamentals. 2007; E90-A(7):1418-1427.
- [15] ROMAN, S., Coding and Information Theory, Springer-Verlag, 1992.
- [16] MACWILLIAMS, F., MALLOWS, C., SLOANE, N., Generalizations of Gleason's theorem on weight enumerators of self-dual codes. 1972; 18(6):794-805.
- [17] RAO T., FUJIWARA E., Error Control Coding for Computer Systems, Prentice-Hall, 1989.
- [18] SIAP, I., MacWilliams identity for m-spotty Lee weight enumerators. Applied Mathematics Letter. 2010; 23(1):13-16.
- [19] ÖZEN, M., ŞİAP, V., The MacWilliams identity for m-spotty weight enumerator of linear codes over finite fields. Computer and Mathematics with Applications. 2011; 61(4):1000-1004.
- [20] ROSENBLOOM, M.Y., TSFASMAN, M.A., Codes for the m-metric. Problems of Information Transmission. 1997; 33(1): 45-52.
- [21] McDonald, B. R., Finite Rings with Identity, N-Y, 1974.
- [22] SIAP, I., Linear codes over $F_2 + uF_2$ and their complete weight enumerators. Codes and Designs – Proc. of a conference honoring Professor Dijen K. Ray-Chaudhuri on the occasion of his 65th birthday. USA, 2000; pp. 259-272.
- [23] DOUGHERTY, S., GABORIT, P., HARADA, M., SOLE, P., Type II codes over $F_2 + uF_2$. IEEE Trans. Inform. Theory. 1999; 45(4):1250-1254.
- [24] SIAP, I., A MacWilliams type identity. Turk. J. Math. 2002; 26:465-473.
- [25] BLAUM, M., FARRELL, P.G., VAN TILBORG, H.C.A., Handbook of Coding Theory, Elsevier Science B.V., 1998.
- [26] BLAUM, M., ROTH, R.M., On lowest-density MDS codes. IEEE Trans. Inform. Theory. 1999; 45(1): 46-59.
- [27] XU, L., BRUCK, J., X-code: MDS array codes with optimal encoding. IEEE Trans. Inform. Theory. 1999; 45(1): 272-276.

- [28] XU, L., BRUCK, J., WAGNER, D., Low density MDS codes and factors of complete graphs. *IEEE Trans. Inform. Theory.* 1999; 45(1): 1871-1826.
- [29] ELIAS, P., Error-free coding. *Trans. IRE Professional Group Inform. Theory.* 1954; IT-4: 29-37.
- [30] GILBERT, E.N., A problem in binary encoding. *Proc. Symp. Appl. Math.* 1960; 10: 291-297.
- [31] NEUMANN, P.G., A note on Gilbert burst-correcting codes. *IEEE Trans. Inform. Theory.* 1965; IT-11: 377-384.
- [32] BAHL, CHEN, Single- and multiple-burst-correcting properties of a class of cyclic product codes. *IEEE Trans. Inform. Theory.* 1971; IT-17: 594-600.
- [33] BURTON, H.O., WELDON, E.J., Cyclic product codes. *IEEE Trans. Inform. Theory.* 1965; IT-11: 433-439.
- [34] FARRELL, P.G., HOPKINS, S.J., Burst-error-correcting array codes. *The Ratio and Electronic Engineer.* 1982; 52: 188-192.
- [35] BLAUM, M., FARRELL, P.G., VAN TILBORG, A class of burst error-correcting array codes. *IEEE Trans. Inform. Theory.* 1986; IT-32: 836-839.
- [36] ZHANG, W., WOLF, J.K., A class of binary burst error-correcting quasi-cyclic product codes. *IEEE Trans. Inform. Theory.* 1988; 34: 463-479.
- [37] BLAUM, M., FARRELL, P.G., VAN TILBORG, Multiple burst error-correcting array codes. *IEEE Trans. Inform. Theory.* 1988; 34: 1061-1066.
- [38] BLAUM, M., A family of efficient burst error-correcting array codes. *IBM Internal Res. Rep.* 1989.
- [39] ZHANG, Z., Limiting efficiencies of burst-correcting array codes. *IEEE Trans. Inform. Theory.* 1991; 37: 976-981.
- [40] SIVARAJAN, K.N., McELIECE, R.J., VAN TILBORG, H.C.A., Burst-error-correcting and detecting codes. *IEEE Int. Symp. Inform. Theory.* 1990; 14-19.
- [41] GOODMAN, R.M., McELIECE, R.J., SAYANO, M., Phased burst error-correcting array codes. *IEEE Trans. Inform. Theory.* 1993; 39: 684-693.

- [42] MITKAS, P.A., Error detection and correction for optical memories. New York: Final Technical Report, Rome Laboratory, Air Force Matrial Command, Rome, 1997.
- [43] GUNDERSON, K.L., KRUGLYAK, S., GARCIA, F., KERMANI, ZHAO, C., CHE, D., Decoding randomly ordered DNA arrays. *Genome Research*. 2004; 14: 870-877.
- [44] CALDERBANK, A.R., SLOANE, N.J.A., Modular and p-adic cyclic codes. *Designs, Codes and Cryptography*. 1995; 6: 21-35.
- [45] BONNECAZE, A., UDAYA, P., Cyclic codes and self dual codes over $F_2 + uF_2$. *IEEE Trans. Inform. Theory*. 1999; 4: 1250-1255.
- [46] WAN, Z., WAN, C., Quaternary codes, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, 1997.

ÖZGEÇMİŞ

Vedat ŞİAP, 20.04.1981'de Makedonya'da doğdu. İlkokul ve lise eğitimini Bayrampaşa'da, ortaokul eğitimini Eyüp'te tamamladı. 1999 yılında Yabancı dil ağırlıklı Rıfat Canayakın Lisesi'nden mezun oldu. 1999 yılında başladığı Gaziosmanpaşa Üniversitesi Matematik bölümünü 2003 yılında bölüm üçüncüsü olarak bitirdi. 2003 – 2006 yılları arasında özel bir dersanede Matematik öğretmeni olarak çalıştı. 2005 – 2008 yılları arasında Sakarya Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Programını tamamladı. 2006 – 2007 yılları arasında Japonya Milli Eğitim Bakanlığı bursu olan Monbukagakusho bursu ile Japonya'nın Sendai şehrinde Yüksek lisans eğitimine devam etti. 2008 yılında Sakarya Üniversitesi Matematik Anabilim Dalında doktora eğitimine başladı. 2009 yılında Sakarya Üniversitesi Matematik bölümünde başladığı araştırma görevliliğine halen devam etmektedir. Evli ve bir çocuk babasıdır.