T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ RİESZ FARK DİZİ UZAYLARININ BAZI TOPOLOJİK VE GEOMETRİK ÖZELLİKLERİ

DOKTORA TEZİ

Mustafa KAYIKÇI

Enstitü Anabilim Dalı	**:**	**MATEMATİK**
Tez Danışmanı	**:**	**Prof. Dr. Metin BAŞARIR**

Şubat 2010

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ RİESZ FARK DİZİ UZAYLARININ BAZI TOPOLOJİK VE GEOMETRİK ÖZELLİKLERİ

DOKTORA TEZİ

Mustafa KAYIKÇI

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Bu tez 05 / 02 /2010 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Fatih NURAY Jüri Başkanı	**Prof. Dr. Metin BAŞARIR Üye**	**Prof. Dr. Ekrem SAVAŞ Üye**
Doç. Dr. Vatan KARAKAYA Üye		**Doç. Dr. Mehmet ÖZEN Üye**

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın başlangıcından ve tamamlanmasına kadar büyük payı bulunan, yardımlarını esirgemeyen hocam Prof. Dr. Metin BAŞARIR'a teşekkür eder, saygılar sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$A=(a_{nk})$	: Sonsuz matris
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
c	: Kompleks terimli yakınsak diziler uzayı
K	: Reel veya kompleks sayıların bir cismi
l_∞	: Kompleks terimli sınırlı diziler uzayı
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
w	: Kompleks terimli diziler uzayı

ÖZET

Anahtar kelimeler: Riesz dizi uzayı, α,β Duali, (β) Özelliği, Matris dönüşümleri.

Üç bölüm olarak hazırlanan bu tezin birinci bölümünde daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı temel tanım ve teoremler verildi.

İkinci bölümde, Riesz ve B^m matrisi yardımıyla tanımlanan $r^q\left(p,B^m\right)$ dizi uzayı tanımlandı. Tanımlanan bu dizi uzayının tam paranormlu lineer metrik uzay olduğu ve $l(p)$ uzayı ile lineer izomorfik olduğu gösterildi. $r^q\left(p,B^m\right)$ dizi uzayının Schauder bazı ve α,β dualleri bulundu. Ayrıca (β) geometrik özelliği incelendi.

Üçüncü bölümde $r_\infty^q\left(p,B^m\right), r_c^q\left(p,B^m\right)$ ve $r_0^q\left(p,B^m\right)$ dizi uzayları tanımlandı. Tanımlanan bu dizi uzaylarının tam paranormlu lineer metrik uzay olduğu ve sırasıyla $l_\infty(p)$, $c(p)$ ve $c_0(p)$ uzaylarına lineer izomorfik olduğu gösterildi. $r_\infty^q\left(p,B^m\right), r_c^q\left(p,B^m\right)$ ve $r_0^q\left(p,B^m\right)$ dizi uzaylarının α,β,γ dualleri bulundu. $r_0^q\left(p,B^m\right)$ ve $r_c^q\left(p,B^m\right)$ uzaylarının Schauder bazları verildi.

SOME TOPOLOGICAL AND GEOMETRIC PROPERTIES OF GENERALIZED RIESZ DIFFERENCE SEQUENCE SPACES

SUMMARY

Key Words: Riesz sequence space, α, β Duals, (β) Property, Matrix transformations.

This thesis consists of four chapters. In the first chapter, some fundamental definitions and theorems will be used in the later chapters were given.

In the second chapter $r^q\left(p, B^m\right)$ sequence space defined by Riesz matrix and B^m was introduced. It was shown that this sequence space was total paranormed linear metric space and linear isomorphic to $l(p)$. Schauder base and α, β duals of $r^q\left(p, B^m\right)$ sequence space were defined. Besides, (β) geometric property of this sequence space was examined.

In the third chapter $r_\infty^q\left(p, B^m\right), r_c^q\left(p, B^m\right)$ and $r_0^q\left(p, B^m\right)$ sequence spaces were defined. It was shown that these sequence spaces were total paranormed linear metric spaces and linear isomorphic to $l_\infty(p)$, $c(p)$ and $c_0(p)$, respectively. α, β, γ duals of $r_\infty^q\left(p, B^m\right), r_c^q\left(p, B^m\right)$ and $r_0^q\left(p, B^m\right)$ sequence spaces were investigated. Also Schauder bases of $r_c^q\left(p, B^m\right)$ and $r_0^q\left(p, B^m\right)$ sequence spaces were given.

BÖLÜM 1. TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER

1.1. Temel Kavramlar ve Teoremler

Bu bölümde, diğer bölümlerde kullanılacak olan tanımlar ve teoremler verilecektir.

Tanım 1.1.1.[1] $X \neq \varnothing$ ve $K = \mathbb{R}$ veya $K = \mathbb{C}$ olmak üzere

$$+ : X \times X \to X \qquad\qquad . : K \times X \to X$$
$$(x, y) \to x + y \qquad\qquad (\alpha, x) \to \alpha x$$

ikili işlemleri $\forall \alpha, \beta \in K$ ve $\forall x, y, z \in X$ için

1) $x + y = y + x$

2) $(x + y) + z = x + (y + z)$

3) $\forall x \in X$ için $x + e = e + x = x$ olacak şekilde bir $e \in X$ vardır.

4) $\forall x \in X$ için $x + (-x) = (-x) + x$ olacak şekilde bir $-x \in X$ vardır.

5) $1.x = x$

6) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

7) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

8) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$

şartlarını sağlıyorsa $(X, +, .)$ üçlüsüne, K üzerinde bir lineer uzay(vektör uzayı) denir.

Tanım 1.1.2.[1] Boş olmayan bir X kümesi ve bir

$$d : X \times X \to \mathbb{R}^+$$
$$(x, y) \to d(x, y)$$

dönüşümü verilsin. Eğer bu d dönüşümü $\forall x, y, z \in X$ için

(M1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(M2) $d(x, y) = d(y, x)$

(M3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (üçgen eşitsizliği)

özelliklerini sağlıyorsa X üzerinde uzaklık fonksiyonu ya da metrik adını alır ve bu durumda (X, d) ikilisine bir metrik uzay denir.

Tanım 1.1.3.[1] Bir (X, d) metrik uzayındaki her Cauchy dizisi X içinde bir limite sahipse, bu (X, d) metrik uzayına tam metrik uzay denir.

Tanım 1.1.4.[1] X, K cismi ($K = \mathbb{R}$ veya $K = \mathbb{C}$) üzerinde bir lineer uzay olsun.

$$\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}^+$$
$$x \to \|x\|$$

dönüşümü $\forall x, y \in X$ ve $\forall \alpha \in K$ için

(N1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

(N2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$

(N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (üçgen eşitsizliği) özelliklerini sağlıyorsa X üzerinde norm adını alır ve bu durumda $(X,\|.\|)$ ikilisine bir normlu vektör uzayı adı verilir.

Tanım 1.1.5.[1] Bir $(X,\|.\|)$ normlu uzayındaki her Cauchy dizisi X içinde bir limite sahipse, bu $(X,\|.\|)$ normlu uzayına tam normlu uzay veya Banach uzayı denir.
X bir Banach uzayı olmak üzere,
$B(X)=\{x\in X:\|x\|\leq 1\}$
kümesine X uzayının kapalı birim yuvarı,
$S(X)=\{x\in X:\|x\|=1\}$
kümesine ise, X uzayının birim küresi denir.

Tanım 1.1.6.[1] $A:X\to Y$ lineer operatörü verilsin.

$$\text{Çek}A=\{x\in X: Ax=0\}$$

kümesine A operatörünün sıfır uzayı veya çekirdeği denir.

Teorem 1.1.7.[1] A lineer operatörünün bire-bir olması için gerek yeter şart $\text{Çek}A=\{0\}$ olmasıdır.

Tanım 1.1.8.[1] X bir lineer uzay, $g:X\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun.

(P1) $g(\theta)=0$

(P2) $g(x)=g(-x)$

(P3) $g(x+y)\leq g(x)+g(y)$

(P4) $\lambda\to\lambda_0$, $x\to x_0$ için $\lambda x\to\lambda_0 x_0$

ise g ye bir paranorm denir. Paranormlu bir (X,g) uzayı g paranormu ile bilikte bir lineer uzaydır.

Tanım 1.1.9.[1] Bir (X,g) paranormlu uzayında alınan her Cauchy dizisi bu uzayın bir noktasına yakınsıyorsa (X,g) uzayına tam paranormlu uzay denir.

Tanım 1.1.10.[1] Aynı skaler cisim üzerinde tanımlanan iki lineer uzay arasındaki f fonksiyonu eğer bijektif(birebir ve örten) ve lineer bir dönüşüm ise f fonksiyonuna izomorfizm denir.

İki lineer uzay arasında bir izomorfizm varsa bu iki lineer uzay izomorfiktir(veya lineer olarak izomorfiktir) denir.

Tanım 1.1.11.[1] Üzerinde d metriği tanımlanmış X lineer uzayında toplama ve skalerle çarpma işlemleri sürekli iseler bu durumda X lineer metrik uzaydır denir.

Burada toplama işleminin sürekliliği $f : X \times X \to X$, $(x, y) \to f(x, y) = x + y$ şeklinde tanımlanmış f fonksiyonunun $X \times X$ üzerinde sürekli olması demektir. Aynı şekilde skaler ile çarpma işleminin sürekliliği $f : K \times X \to X$, $(\alpha, x) \to f(\alpha, x) = \alpha x$ şeklinde tanımlanmış f fonksiyonunun $K \times X$ üzerinde sürekli olması demektir.

1.2. Dizi Uzayları ve Matris Dönüşümleri

Tanım 1.2.1.[1] $K = \mathbb{R}$ veya $K = \mathbb{C}$ olmak üzere

$$w = \{x = (x_k) \in w : x : \mathbb{N} \to K, k \to x_k = (x_k)\}$$

kümesine bütün dizilerin kümesi denir. w kümesi,

$$((x_k),(y_k)) \to (x_k + y_k) \text{ ve } (\lambda,(x_k)) \to (\lambda x_k)$$

ikili işlemleri ile K üzerinde bir vektör uzayıdır. w' nın herhangi bir alt vektör uzayına bir dizi uzayı denir.

Örnek 1.2.2.

$$l_\infty = \left\{ x = (x_k) \in w : \sup |x_k| < \infty \right\},$$

$$c = \left\{ x = (x_k) \in w : \lim_{k\to\infty} x_k \text{ var} \right\},$$

$$c_0 = \left\{ x = (x_k) \in w : \lim_{k\to\infty} x_k = 0 \right\},$$

$$bs = \left\{ x = (x_k) \in w : \sup_n \left| \sum_{k=0}^{n} x_k \right| < \infty \right\},$$

$$cs = \left\{ x = (x_k) \in w : \left(\sum_{k=0}^{n} x_k \right) \in c \right\},$$

$$l_p = \left\{ x = (x_k) \in w : \sum_k |x_k|^p < \infty \right\}, \ (1 \le p < \infty)$$

$$bv = \left\{ x = (x_k) \in w : |x_0| + \sum_k |x_k - x_{k+1}| < \infty \right\}$$

uzayları birer dizi uzayıdırlar.

Tanım 1.2.3.[2] λ ve μ iki dizi uzayı ve $A = (a_{nk})$ $(n,k = 0,1,2,...)$ reel ya da kompleks sayıların bir sonsuz matrisi olsun. Her bir $n \in \mathbb{N}$ için $A_n(x) = \sum_k a_{nk} x_k$ yakınsak ise $Ax = (A_n(x))$ yazılır. Eğer $x = (x_k)$ iken $Ax = (A_n(x)) \in \mu$ ise o zaman A' ya λ dizi uzayından μ dizi uzayına bir matris dönüşümüdür denir ve bu durum $A : \lambda \to \mu$ olarak gösterilir. Ax dizisine de x' in A-dönüşümü denir.

$(\lambda : \mu)$ ile $A : \lambda \to \mu$ şeklindeki bütün A matrislerinin kümesi, $(\lambda : \mu : p)$ ile de limit ya da toplamı koruyan $A : \lambda \to \mu$ şeklindeki bütün A matrislerinin kümesi gösterilecektir. $(\lambda : \mu : p) \subset (\lambda : \mu)$ olduğu açıktır.

Tanım 1.2.4.[2] $A=(a_{nk})$ reel ya da kompleks sayıların bir sonsuz matrisi olsun. $\forall n=0,1,2,...$ için $A_n(x)=\sum_k a_{nk}x_k$ mevcut(yakınsak) ve $\lim_{n\to\infty} A_n(x)=l\in\mathbb{C}$ ise $x=(x_k)$ dizisine *l* sayısına *A*-toplanabilirdir denir. Bu durum x ' in *A*-limiti *l*' dir diye ifade edilir ve $A-\lim_{n\to\infty} x_n=l$ olarak gösterilir.

Tanım 1.2.5.[2] $A=(a_{nk})$ reel ya da kompleks sayıların bir sonsuz matrisi olsun. $k>n$ olan $\forall n,k\in\mathbb{N}$ için $a_{nk}=0$ ise $A=(a_{nk})$ matrisine üçgensel matris denir. $A=(a_{nk})$ üçgensel matrisinde $\forall n\in\mathbb{N}$ için $a_{nn}\neq 0$ ise A' ya normal matris denir.

Teorem 1.2.6.[2] $\forall A\in(c,c)$ olması için gerek ve yeter şart

(i) $\sup_{n\in\mathbb{N}}\sum_{k=0}^{n}|a_{nk}|<\infty$

(ii) Bazı $\alpha\in\mathbb{C}$ ler için $\lim_{n\to\infty}\sum_k a_{nk}x_k=\alpha$

(iii) Her bir $k\in\mathbb{N}$ için $\lim_{n\to\infty} a_{nk}=\alpha_k$

olmasıdır.

Tanım1.2.7.[2] Teorem 1.2.6. daki şartları sağlayan bir matrise koruyucu (conservative) matris denir.

Teorem 1.2.8.[2] $A\in(c,c,p)$ olması için gerek ve yeter şart

(i) $\sup_{n\in\mathbb{N}}\sum_{k=0}^{n}|a_{nk}|<\infty$

(ii) Her bir $k\in\mathbb{N}$ için $\lim_{n\to\infty} a_{nk}=0$

(iii) $\lim_{n\to\infty}\sum_k a_{nk}=1$

olmasıdır.

Tanım 1.2.9.[2] Teorem 1.2.8. deki şartları sağlayan bir matrise Toeplitz matrisi veya regüler matris denir. Bu tip matrisler kısaca T-matrisi olarak gösterilirler.

Tanım 1.2.10.[2] $q=(q_k)$ pozitif reel sayıların bir dizisi ve $Q_n=\sum_{k=0}^{n} q_k$, $(n\in\mathbb{N})$ olsun. O zaman $\forall n,k\in\mathbb{N}$ için

$$r^q{}_{nk}=\begin{cases}\dfrac{q_k}{Q_n}, & (0\le k\le n)\\ 0, & (k>n)\end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $R^q=\left(r^q{}_{nk}\right)$ matrisine Riesz matrisi denir.

$R^q=\left(r^q{}_{nk}\right)$ matrisinin regüler olması için gerek ve yeter şart $n\to\infty$ iken $Q_n\to\infty$ olmasıdır.

Tanım 1.2.11.[2] $\forall n,k\in\mathbb{N}$ için

$$\delta_{nk}=\begin{cases}(-1)^{n-k}, & (n-1\le k\le n)\\ 0, & (0\le k\le n\,\text{veya}\,k>n)\end{cases}$$

ve

$$d_{nk}=\begin{cases}(-1)^{n-k}, & (n\le k\le n+1)\\ 0, & (0\le k\le n\,\text{veya}\,k>n+1)\end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $\Delta^{(1)}=(\delta_{nk})$ ve $\Delta^{1}=(d_{nk})$ matrislerine sırasıyla geri ve ileri fark matrisleri denir.

Tanım 1.2.12.[2] Herhangi bir sabit $m\in\mathbb{N}$ ve $\forall n,k\in\mathbb{N}$ için

$$\delta_{nk} = \begin{cases} (-1)^{n-k}\binom{m}{n-k}, & \left(\max\{0,n-m\} \le k \le n\right) \\ 0, & \left(0 \le k < \max\{0,n-m\} \text{ veya } k > n\right) \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $\Delta^m = \left(\Delta^m_{nk}\right) = \left(\delta_{nk}\right)$ matrisine *m*. mertebeden fark matrisi denir.

Tanım 1.2.13.[1,3] λ bir normlu dizi uzayı olsun ve (b_n) dizisi verilsin. $\forall x \in \lambda$ için

$$\lim_{n\to\infty} \left\| x - (\alpha_0 b_0 + \alpha_1 b_1 + ... + \alpha_n b_n) \right\|$$

olacak şekilde bir tek (α_n) skalerler dizisi varsa (b_n)' e λ dizi uzayının bir Schauder bazı(kısaca bazı) denir ve bu durumda $x = \sum_k \alpha_k b_k$ yazılır.

Tanım 1.2.14.[3] λ bir dizi uzayı olmak üzere bir A sonsuz matrisinin λ uzayındaki matris bölgesi(domain) olan λ_A kümesi

$$\lambda_A = \left\{ x = (x_k) \in w : Ax \in \lambda \right\}$$

olarak tanımlanır.

Bir A matrisinin λ dizi uzayına kısıtlanmasıyla elde edilen λ_A yeni dizi uzayı, genelde orijinal λ uzayının genişlemesi ya da daralması olmasına rağmen bazı durumlarda bu uzaylar örtüşmezler.

Tanım 1.2.15.[3] λ ve μ dizi uzayları için $S(\lambda,\mu)$ kümesi

$$S(\lambda,\mu) = \left\{ z = (z_k) \in w : \forall x \in \lambda, xz = (x_k z_k) \in \mu \right\}$$

olarak tanımlansın. Bu $S(\lambda,\mu)$ kümesi yardımı ile λ uzayının α, β ve γ -dualleri olan $\lambda^\alpha, \lambda^\beta$ ve λ^γ kümeleri,

$$\lambda^\alpha = S(\lambda, l_1),\ \lambda^\beta = S(\lambda, cs) \text{ ve } \lambda^\gamma = S(\lambda, bs)$$

olarak tanımlanır.

Örnek 1.2.16. $bv_0 = bv \cap c_0$ olmak üzere

$cs = bv^{\alpha} = bv_0^{\alpha} = bs^{\alpha} = l$

$cs^{\beta} = bv, bv^{\beta} = cs, bv_0^{\beta} = bs, bs^{\beta} = bv_0$

$cs^{\gamma} = bv, bv^{\gamma} = cs, bv_0^{\gamma} = bs, bs^{\gamma} = bv$

dir.

Teorem 1.2.17.[3] λ ve μ iki dizi uzayı ve $\eta \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$ olsun. O zaman $\lambda^{\alpha} \subseteq \lambda^{\beta} \subseteq \lambda^{\gamma}$ ve $\lambda \subset \mu$ ise $\lambda^{\eta} \supset \mu^{\eta}$ dir.

BÖLÜM 2. $r^q\left(p,B^m\right)$ DİZİ UZAYININ BAZI TOPOLOJİK VE GEOMETRİK ÖZELLİKLERİ

2.1. $r^q\left(p,B^m\right)$ Dizi Uzayı

(q_k) pozitif reel sayıların dizisi ve $Q_n=\sum_{k=0}^{n} q_k \quad \left(n\in\mathbb{N}\right)$ olsun. $R^q=\left(r_{nk}^q\right)$ Riesz üçgensel matrisi

$$r_{nk}^q=\begin{cases}\dfrac{q_k}{Q_n}, & \left(0\le k\le n\right)\\ 0, & \left(k>n\right)\end{cases}$$

şeklindedir. Bu matris kullanılarak Riesz dizi uzayı Altay ve Başar[4] tarafından

$$r^q\left(p\right)=\left\{x=\left(x_k\right)\in w:\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{1}{Q_k}\sum_{j=0}^{k}q_jx_j\right|^{p_k}<\infty\right\}$$

şeklinde tanımlanmıştır. (Burada w tüm diziler uzayı ve $0<p_k\le H=\sup_k p_k<\infty$ dir.) Bu dizi uzayı Δ fark matrisi kulanılarak M. Başarır and M. Öztürk[5] tarafından Riesz fark dizi uzayına genişletilmiştir. Δ fark matrisinin genelleştirilmiş şekli olan $B=\left(b_{nk}\right)$ matrisi Altay ve Başar[4] tarafından

$$b_{nk}=\begin{cases}r, & \left(k=n\right)\\ s, & \left(k=n-1\right)\\ 0, & \left(0\le k<n-1\right)\ veya\ \left(k>n\right)\end{cases}$$

olarak tanımlandı.

Buna bağlı olarak genelleştirilmiş B^m matrisi kullanılarak

$$r^q\left(p,B^m\right)=\left\{x=\left(x_k\right)\in w:\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{1}{Q_k}\sum_{n=0}^{k-1}\left[\sum_{i=n}^{k}\binom{m}{i-n}r^{m-i+n}s^{i-n}q_i x_n\right]+\frac{r^m}{Q_k}q_k x_k\right|^{p_k}<\infty\right\}$$

dizi uzayı tanımlanıp, bu uzayın bazı topolojik ve geometrik özellikleri bu bölümde araştırılacaktır. Burada her $k,n\in N, r,s,m\in N-\{0\}$ için $B^m=\left(b_{nk}^m\right)$ matrisi

$$b_{nk}^m=\begin{cases}\binom{m}{n-k}r^{m-n+k}s^{n-k}, & \left(\max\{0,n-m\}\le k\le n\right)\\ 0, & \left(0\le k<\max\{0,n-m\}\right) \text{ veya } \left(k>n\right)\end{cases}$$

ve

$$y_n(q)=\left(R^qB^mx\right)_n=\frac{1}{Q_n}\sum_{k=0}^{n-1}\left[\sum_{i=k}^{n}\binom{m}{i-k}r^{m-i+k}s^{i-k}q_i x_k\right]+\frac{r^m}{Q_n}q_n x_n$$

şeklindedir.

Burada $r=1,s=-1$ alınması durumunda $B^m=\left(b_{nk}^m\right)$ matrisi $\Delta^m=\left(\Delta_{nk}^m\right)$ matrisine, ayrıca $m=1$ olması durumunda yukarıdaki dizi uzayı

$$r^q\left(p,B\right)=\left\{x=\left(x_k\right)\in w:\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{1}{Q_k}\left[\sum_{j=0}^{k-1}\left(q_j r+q_{j+1}s\right)x_j+q_k r x_k\right]\right|^{p_k}<\infty\right\}$$

dizi uzayına dönüşür.

$B^m=\left(b_{nk}^m\right)$ matrisinin toplanabilme bölgesi için elde edeceğimiz sonuçlar $\Delta^m=\left(\Delta_{nk}^m\right)$ matrisinin toplanabilme bölgesi için elde edilmiş sonuçlara göre daha genel olacaktır.

Bu bölümdeki amacımız $r^q\left(p\right)$ dizi uzayındaki dizilerin B^m matrisi altındaki dönüşüm dizileri olan, $r^q\left(p,B^m\right)$ Riesz fark dizi uzayının bu uzaydaki paranorma göre bazı geometrik ve topolojik özelliklerini incelemek olacaktır.

Şimdi de teoremlerimizi ispatlamak için gerekli olan lemmaları verelim.

Lemma2.1.1.[6] (i) Her $k\in\mathbb{N}$ için $1<p_k\le H<\infty$ olsun. Bu durumda $A\in\left(l\left(p\right)\,:\,l_1\right)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sup_{K\in\mathbf{F}}\sum_{k=0}^{\infty}\left|\sum_{n\in K}a_{nk}K^{-1}\right|^{p_k'}<\infty$$

olacak şekilde $K>1$ tamsayısının olmasıdır.

(ii) Her $k\in\mathbb{N}$ için $0<p_k\le 1$ olsun. Bu durumda $A\in\left(l\left(p\right)\,:\,l_1\right)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sup_{K\in\mathbf{F}}\sup_{k\in\mathbb{N}}\left|\sum_{n\in K}a_{nk}\right|^{p_k}<\infty$$

olmasıdır.

Lemma2.1.2.[7] (i) Her $k\in\mathbb{N}$ için $1<p_k\le H<\infty$ olsun. Bu durumda $A\in\left(l\left(p\right)\,:\,l_\infty\right)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\sum_{k=0}^{\infty}\left|a_{nk}K^{-1}\right|^{p_k'}<\infty$$

olacak şekilde $K>1$ tamsayısının olmasıdır.

(ii) Her $k\in\mathbb{N}$ için $0<p_k\leq 1$ olsun. Bu durumda $A\in\left(l(p):l_\infty\right)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sup_{n,k\in\mathbb{N}}\left|a_{nk}\right|^{p_k}<\infty$$

olmasıdır.

Lemma2.1.3.[7] Her $k\in\mathbb{N}$ için $1<p_k\leq H<\infty$ olsun. Bu durumda $A\in\left(l(p):c\right)$ olması için gerek ve yeter şart Lemma2.1.2 nin (i) ve (ii) şartlarının sağlanması ve her $k\in\mathbb{N}$ için $\lim_{n\to\infty}a_{nk}=\beta_k$ olmasıdır.

2.2. $r^q\left(p,B^m\right)$ Dizi Uzayının Bazı Topolojik Özellikleri

Teorem2.2.1. $r^q\left(p,B^m\right)$ uzayı

$$g(x)=\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{1}{Q_k}\sum_{j=0}^{k-1}\left[\sum_{i=j}^{k}\binom{m}{i-j}r^{m-i+j}s^{i-j}q_ix_j\right]+\frac{r^mq_k}{Q_k}x_k\right|^{p_k}\right)^{\frac{1}{M}}$$

paranormu ile tam paranormlu lineer metrik uzaydır. Burada $M=\max\left(1,H=\sup_k p_k\right)$ dir.

İspat: $r^q\left(p,B^m\right)$ uzayının skaler ile çarpmaya ve koordinat toplamına göre lineerliği, $u,v\in r^q\left(p,B^m\right)$ için sağlanan aşağıdaki eşitsizliklerden elde edilir.

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left|\left(R^qB^mu\right)_k+\left(R^qB^mv\right)_k\right|^{p_k}\right)^{\frac{1}{M}}\leq\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left|\left(R^qB^mu\right)_k\right|^{p_k}\right)^{\frac{1}{M}}+\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left|\left(R^qB^mv\right)_k\right|^{p_k}\right)^{\frac{1}{M}}$$

ve her bir $\alpha\in\mathbb{R}$ için

$|\alpha|^{p_k} \le \max\left\{1,|\alpha|^M\right\}$ dir.

Açıktır ki her $u \in r^q\left(p,B^m\right)$ için $g\left(\theta\right)=0$ ve $g\left(-u\right)=g\left(u\right)$ dir. $u_k,v_k \in r^q\left(p,B^m\right)$ olsun,

$$g\left(u+v\right)=\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{1}{Q_k}\sum_{j=0}^{k-1}\left[\sum_{i=j}^{k}\binom{m}{i-j}r^{m-i+j}s^{i-j}q_i\left(u_j+v_j\right)\right]+\frac{r^m q_k}{Q_k}\left(u_k+v_k\right)\right|^{p_k}\right)^{\frac{1}{M}}$$

$$\le\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{1}{Q_k}\sum_{j=0}^{k-1}\left[\sum_{i=j}^{k}\binom{m}{i-j}r^{m-i+j}s^{i-j}q_i\left(u_j\right)\right]+\frac{r^m q_k}{Q_k}u_k\right|^{p_k}\right)^{\frac{1}{M}}$$

$$+\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{1}{Q_k}\sum_{j=0}^{k-1}\left[\sum_{i=j}^{k}\binom{m}{i-j}r^{m-i+j}s^{i-j}q_i\left(v_j\right)\right]+\frac{r^m q_k}{Q_k}v_k\right|^{p_k}\right)^{\frac{1}{M}}$$

$$g\left(u+v\right)\le g\left(u\right)+g\left(v\right).$$

Yukarıdaki eşitsizlikler g nin alt toplamsallığını ve $g\left(\alpha u\right)\le \max\left\{1,|\alpha|\right\}g\left(u\right)$ olduğunu gösterir.

$r^q\left(p,B^m\right)$ uzayının elemanlarının herhangi bir $\left\{x^n\right\}$ dizisi

$$g\left(x^n-x\right)\to 0$$

olacak şekilde alalım ve $\lambda_n \to \lambda$ olacak şekilde herhangi bir skalerler dizisi $\left(\lambda_n\right)$ olsun. Bu durumda

$$g\left(x^n\right)\le g\left(x\right)+g\left(x^n-x\right)$$

eşitsizliğinden g nin alt toplamsallığı elde edilir. $\left\{g\left(x^n\right)\right\}$ dizisi sınırlı olduğundan

$g\left(\lambda_n x^n-\lambda x\right)=$

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{1}{Q_k}\sum_{j=0}^{k-1}\left[\sum_{i=j}^{k}\binom{m}{i-j}r^{m-i+j}s^{i-j}q_i\left(\lambda_n x_j^n-\lambda x_j\right)\right]+\frac{r^m q_k}{Q_k}\left(\lambda_n x_k^n-\lambda x_k\right)\right|^{p_k}\right)^{\frac{1}{M}}$$

$$\leq |\lambda_n - \lambda| \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{1}{Q_k} \sum_{j=0}^{k-1} \left[\sum_{i=j}^{k} \binom{m}{i-j} r^{m-i+j} s^{i-j} q_i \left(x_j^n \right) \right] + \frac{r^m q_k}{Q_k} x_k^n \right|^{p_k} \right)^{\frac{1}{M}}$$

$$+|\lambda| \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{1}{Q_k} \sum_{j=0}^{k-1} \left[\sum_{i=j}^{k} \binom{m}{i-j} r^{m-i+j} s^{i-j} q_i \left(x_j^n - x_j \right) \right] + \frac{r^m q_k}{Q_k} \left(x_k^n - x_k \right) \right|^{p_k} \right)^{\frac{1}{M}}$$

$$\leq |\lambda_n - \lambda| g\left(x^n\right) + |\lambda| g\left(x^n - x\right)$$

ifadesi $n \to \infty$ iken sıfıra gider. Bu da skaler ile çarpımın sürekli olduğunu gösterir. Böylece g nin $r^q\left(p, B^m\right)$ uzayında bir paranorm olduğu gösterilmiş olur.

Şimdi de $r^q\left(p, B^m\right)$ uzayının tamlığını ispatlayalım. $\left\{x^i\right\}$ dizisi $r^q\left(p, B^m\right)$ uzayında herhangi bir Cauchy dizisi olsun. Burada $x^i = \left\{x_k^i\right\} \in r^q\left(p, B^m\right)$ dir. Bu durumda verilen $\varepsilon > 0$ için bir $n_0(\varepsilon)$ pozitif tamsayısı vardır öyleki her $i, j \geq n_0(\varepsilon)$ için

$$g\left(x^i - x^j\right) < \varepsilon$$

dir.

g nin tanımını kullanarak seçilmiş her bir $k \in \mathbb{N}$ ve $i, j \geq n_0(\varepsilon)$ için

$$\left| \left(R^q B^m x^i\right)_k - \left(R^q B^m x^j\right)_k \right| \leq \left[\sum_{k=0}^{\infty} \left| \left(R^q B^m x^i\right)_k - \left(R^q B^m x^j\right)_k \right|^{p_k} \right]^{\frac{1}{M}} < \varepsilon$$

elde edilir ve bu durumda seçilmiş her bir $k \in \mathbb{N}$ için

$$\left\{ \left(R^q B^m x^0\right)_k, \left(R^q B^m x^1\right)_k, \ldots \right\}$$

dizisi bir Cauchy dizisidir. $\mathbb{R}$ tam olduğundan, bu dizi yakınsar, öyleyse $i \to \infty$ iken $\left(R^q B^m x^i\right)_k \to \left(R^q B^m x\right)_k$ yazılabilir. Böylece $\left(R^q B^m x\right)_0, \left(R^q B^m x\right)_1, \ldots$, bu sonsuz çokluktaki limitleri kullanarak $\left\{ \left(R^q B^m x\right)_0, \left(R^q B^m x\right)_1, \ldots \right\}$ dizisini tanımlayabiliriz.

Her $i, j \geq n_0(\varepsilon)$ için

$$\sum_{k=0}^{p}\left|\left(R^qB(r,s)^{(m)}x^i\right)_k-\left(R^qB(r,s)^{(m)}x^j\right)_k\right|^{p_k}\leq\left[g\left(x^i-x^j\right)\right]^M<\varepsilon^M$$

eşitsizliği her bir $p\in\mathbb{N}$ için sağlanır.

Herhangi bir $i\geq n_0(\varepsilon)$ alalım ve yukarıdaki eşitsizlikte $j\to\infty$ a sonrada $p\to\infty$ a götürürsek $g\left(x^i-x\right)\leq\varepsilon$ elde edilir. Son olarak $\varepsilon=1$ alırsak $i\geq n_0(1)$ olur.

Her bir $p\in\mathbb{N}$ için Minkowski eşitsizliğinden

$$\left[\sum_{k=0}^{n}\left|\left(R^qB^mx^i\right)_k\right|^{p_k}\right]^{\frac{1}{M}}\leq g\left(x^i-x\right)+g\left(x^i\right)\leq 1+g\left(x^i\right)$$

elde edilir. Bu da $x\in r^q\left(p,B^m\right)$ demektir. Her $i\geq n_0(\varepsilon)$ için $g\left(x^i-x\right)\leq\varepsilon$ olduğundan $i\to\infty$ iken $x^i\to x$ dir. Böylece $r^q\left(p,B^m\right)$ uzayının tam olduğu gösterilmiş olur.

Teorem2.2.2. $\sum_{i=j}^{k}\binom{m}{i-j}r^{m-i+j}s^{i-j}q_i\neq 0$ olmak üzere $r^q\left(p,B^m\right)$ fark dizi uzayı $l(p)$ uzayı ile lineer izomorfiktir. Burada $0<p_k\leq H<\infty$ dir.

İspat: Teoremin ispatı için $0<p_k\leq H<\infty$ için $r^q\left(p,B^m\right)$ ve $l(p)$ uzayları arasında lineer bijeksiyon olduğunu göstermeliyiz.

$$y_k=\frac{1}{Q_k}\sum_{j=0}^{k-1}\left[\sum_{i=j}^{k}\binom{m}{i-j}r^{m-i+j}s^{i-j}q_ix_j\right]+\frac{r^m}{Q_k}q_kx_k$$

notasyonu yardımı ile $r^q\left(p,B^m\right)$ uzayından $l(p)$ uzayına T dönüşümü $x\mapsto y=Tx$ olacak şekilde tanımlansın. T lineer bir dönüşümdür, dahası; aşikardır ki $Tx=\theta$ olduğunda $x=\theta$ dir ve buradan T nin birebir olduğu bulunmuş olur.

$y\in l(p)$ olsun ve $x=(x_k)$ dizisi

$$x_k=\sum_{n=0}^{k-1}\left[\sum_{i=n}^{n+1}(-1)^{k-n}\frac{s^{k-i}}{r^{m+k-i}}\binom{m+k-i-1}{k-i}\frac{1}{q_i}Q_n y_n\right]+\frac{Q_k}{r^m q_k}y_k \quad (k\in\mathbb{N})$$

olacak şekilde tanımlansın. O zaman

$$g(x)=\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{1}{Q_k}\sum_{j=0}^{k-1}\left[\sum_{i=j}^{k}\binom{m}{i-j}r^{m-i+j}s^{i-j}q_i x_j\right]+\frac{r^m}{Q_k}q_k x_k\right|^{p_k}\right)^{\frac{1}{M}}$$

$$=\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left|\sum_{j=0}^{k}\delta_{kj}y_j\right|^{p_k}\right)^{\frac{1}{M}}$$

$$=\left(\sum_{k=0}^{\infty}|y_k|^{p_k}\right)^{\frac{1}{M}}=g_1(y)<\infty$$

burada

$$\delta_{kj}=\begin{cases}1, k=j\\ 0, k\neq j\end{cases}$$

dir ve $g_1(y)$, $l(p)$ uzayında bir paranormdur. Böylece $x\in r^q\left(p,B^m\right)$ elde edilir. Sonuç olarak, T örtendir ve paranorm korunur. Böylece, T lineer bijeksiyondur. Bu da $r^q\left(p,B^m\right)$ ve $l\left(p\right)$ uzaylarının lineer izomorfik olduğunu gösterir.

$r^q\left(p,B^m\right)$ uzayının Schauder bazı ile ilgili aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem2.2.3. $b_n^{(k)}(q)=\begin{cases}\sum_{i=k}^{k+1}(-1)^{n-k}\frac{s^{n-i}}{r^{m+n-i}}\binom{m+n-i-1}{n-i}, & (n<k)\\ \frac{Q_k}{r^m q_k}, & (n=k)\\ 0, & (k>n)\end{cases}$ olmak üzere $\left\{b^{(k)}(q)\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ dizisi $r^q\left(p,B^m\right)$ uzayı için Schauder bazıdır ve $x\in r^q\left(p,B^m\right)$ için $x=\sum_{k=0}^{\infty}\mu_k(q)b^k(q)$ gösterilişi tek türlü belirlidir. Burada her $k\in\mathbb{N}$ ve $0<p_k\leq H<\infty$ için $\mu_k(q)=\left(R^q B^m x\right)_k$ dir.

İspat: İspat [5, teorem5] ten elde edilebilir.

$r^q\left(p,B^m\right)$ uzayının α *ve* β dualleri aşağıdaki teoremlerde tanımlanır.

Teorem2.2.4. (i) Her bir $k\in\mathbb{N}$ için $1<p_k\le H<\infty$ olmak üzere $\left[r^q\left(p,B^m\right)\right]^\alpha=Q_1(p)$ dir. Burada

$$Q_1(p)=\bigcup_{K>1}\left\{a=(a_k)\in w:\right.$$
$$\left.\sup_{N\in F}\sum_{k=0}^{\infty}\left|\sum_{n\in N}\left[\sum_{i=k}^{k+1}(-1)^{n-k}\frac{s^{n-i}}{r^{m+n-i}}\binom{m+n-i-1}{n-i}\frac{1}{q_i}a_nQ_k+\frac{a_n}{r^mq_n}Q_k\right]K^{-1}\right|^{p_k'}<\infty\right\}$$

dir.

(ii) Her bir $k\in\mathbb{N}$ için $0<p_k\le 1$ olmak üzere $\left[r^q\left(p,B^m\right)\right]^\alpha=Q_2(p)$ dir. Burada

$$Q_2(p)=\bigcup_{K>1}\left\{a=(a_k)\in w:\right.$$
$$\left.\sup_{N\in F}\sup_{k\in N}\left|\sum_{n\in N}\left[\sum_{i=k}^{k+1}(-1)^{n-k}\frac{s^{n-i}}{r^{m+n-i}}\binom{m+n-i-1}{n-i}\frac{1}{q_i}a_nQ_k+\frac{a_n}{r^mq_n}Q_k+\frac{a_n}{r^mq_n}Q_n\right]K^{-1}\right|^{p_k}<\infty\right\}$$

dir.

İspat: (i) $a=(a_k)\in w$ olsun.

$$y_k=\frac{1}{Q_k}\sum_{j=0}^{k-1}\left[\sum_{i=j}^{k}\binom{m}{i-j}r^{m-i+j}s^{i-j}q_ix_j\right]+\frac{1}{Q_k}q_kx_k$$

ve her $k,n\in\mathbb{N}$ için

$$u_{nk}=\begin{cases}\sum_{i=k}^{k+1}(-1)^{n-k}\frac{s^{k-i}}{r^{m+k-i}}\binom{m+n-i-1}{n-i}\frac{1}{q_i}a_nQ_k, & (0\le k\le n-1)\\ \frac{a_nQ_n}{r^mq_n} & ,\ (k=n)\\ 0 & ,\ (k>n)\end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $U=(u_{nk})$ matrisi için $y=(y_k)\in l(p)$ olmak üzere $Uy\in l_1$

olması için gerek ve yeter şart $x=(x_k)\in r^q(p,B^m)$ olmak üzere $ax=(a_n x_n)\in l_1$ olmasıdır. Lemma2.1.1 den

$$\left[r^q\left(p,B^m\right)\right]^{\alpha}=Q_1\left(p\right)$$

bulunur.

(ii) Bu ispat (i) nin ispatına benzer şekilde elde edilir.

Teorem2.2.5. (i) Her bir $k\in\mathbb{N}$ için $1<p_k\le H<\infty$ olmak üzere $\left[r^q\left(p,B^m\right)\right]^{\beta}=Q_3\left(p\right)\bigcap cs$ dir. Burada

$$Q_3\left(p\right)=\bigcup_{K>1}\Bigg\{a=\left(a_k\right)\in w:$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left|\left[\left(\frac{a_k}{r^m q_k}+\sum_{i=k}^{k+1}(-1)^{n-k}\frac{s^{n-i}}{r^{m+n-i}}\binom{m+n-i-1}{n-i}\frac{1}{q_i}\sum_{j=k+1}^{n}a_j\right)Q_k\right]K^{-1}\right|^{p_k'}<\infty\Bigg\}$$

dir.

(ii) Her bir $k\in\mathbb{N}$ için $0<p_k\le 1$ olmak üzere $\left[r^q\left(p,B^m\right)\right]^{\beta}=Q_4\left(p\right)\bigcap cs$ dir. Burada

$$Q_4\left(p\right)=\bigcup_{K>1}\Bigg\{a=\left(a_k\right)\in w:$$

$$\sup_{k\in N}\left|\left[\left(\frac{a_k}{r^m q_k}+\sum_{i=k}^{k+1}(-1)^{n-k}\frac{s^{n-i}}{r^{m+n-i}}\binom{m+n-i-1}{n-i}\frac{1}{q_i}\sum_{j=k+1}^{n}a_j\right)Q_k\right]\right|^{p_k}<\infty\Bigg\}$$

dir.

İspat: (i) Eğer $k,n\in\mathbb{N}$ için

$$t_{nk}=\begin{cases}\left(\frac{a_k}{r^m q_k}+\sum\limits_{i=k}^{k+1}(-1)^{n-k}\frac{s^{n-i}}{r^{m+n-i}}\binom{m+n-i-1}{n-i}\frac{1}{q_i}\sum\limits_{j=k+1}^{n}a_j\right)Q_k\,, & (0\le k\le n)\\ 0\,, & (k>n)\end{cases}$$

olacak şekilde $T=\left(t_{nk}\right)$ matrisini alırsak; $x=\left(x_k\right)\in r^q\left(p,B^m\right)$ olmak üzere

$ax=(a_n x_n)\in cs$ olması için gerek ve yeter şart $y=(y_k)\in l(p)$ olmak üzere $Ty\in c$ olmasıdır. Böylece Lemma2.1.3 ten

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left\|\left[\left(\frac{a_k}{r^m q_k}+\sum_{i=k}^{k+1}(-1)^{n-k}\frac{s^{n-i}}{r^{m+n-i}}\binom{m+n-i-1}{n-i}\frac{1}{q_i}\sum_{j=k+1}^{n}a_j\right)Q_k\right]K^{-1}\right|^{p_k'}<\infty$$

elde edilir ve $\lim_n t_{nk}$ limitleri var olduğundan

$$\left[r^q\left(p,B^m\right)\right]^{\beta}=Q_3(p)\cap cs$$

dir.

(ii) Bu ispat (i) nin ispatına benzer şekilde Lemma2.1.2 ve Lemma2.1.3 ün ikinci kısımlarından elde edilir.

$r^q\left(p,B^m\right)$ uzayından l_∞ sınırlı diziler uzayına matris dönüşümlerini gözönüne alalım. Bu teorem, [4] deki Teorem6 gibi ispatlanabilir.

Teorem2.2.6. (i) Her $k\in\mathbb{N}$ için $1<p_k\le H<\infty$ olmak üzere $A\in\left(r^q\left(p,B^m\right):l_\infty\right)$ olması için gerek ve yeter şart

$$Q(K)=\sup_{n\in N}\sum_{k=0}^{\infty}\left\|\left[\left(\frac{a_k}{r^m q_k}+\sum_{i=k}^{k+1}(-1)^{n-k}\frac{s^{n-i}}{r^{m+n-i}}\binom{m+n-i-1}{n-i}\frac{1}{q_i}\sum_{j=k+1}^{n}a_j\right)Q_k\right]K^{-1}\right|^{p_k'}<\infty$$

ve $\{a_{nk}\}_{k\in N}\in cs$ olacak şekilde K>1 tamsayısı olmasıdır.

(ii) Her $k\in\mathbb{N}$ için $0<p_k\le 1$ olmak üzere $A\in\left(r^q\left(p,B^m\right);l_\infty\right)$ olması için gerek ve yeter şart her bir $n\in\mathbb{N}$ için

$$\sup_{n,k\in N}\left\|\left[\left(\frac{a_{nk}}{r^m q_k}+\sum_{i=k}^{k+1}(-1)^{n-k}\frac{s^{n-i}}{r^{m+n-i}}\binom{m+n-i-1}{n-i}\frac{1}{q_i}\sum_{j=k+1}^{n}a_{nj}\right)Q_k\right]\right\|^{p_k}<\infty \text{ ve } \{a_{nk}\}_{k\in N}\in cs$$

olmasıdır.

2.3. $r^q\left(p,B^m\right)$ Dizi Uzayının (β) Özelliği

Önceki bölümde $r^q\left(p,B^m\right)$ dizi uzayının tam paranormlu uzay olduğu gösterildi. Buradaki paranorm her $x=(x_n)\in r^q\left(p,B^m\right)$ için ve $M=\max\left\{1, H=\sup_k p_k\right\}$ olmak üzere

$$g(x)=\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{1}{Q_k}\sum_{j=0}^{k-1}\left[\sum_{i=j}^{k}\binom{m}{i-j}r^{m-i+j}s^{i-j}q_i x_j\right]+\frac{r^m q_k}{Q_k}x_k\right|^{p_k}\right)^{\frac{1}{M}}$$

dir. $g(x)=0$ iken $x=0$ oluyorsa g paranormuna total paranorm denir ve her total paranormlu uzay $d(x,y)=g(x-y)$ metriği ile lineer metrik uzay olur. Açıktır ki $r^q\left(p,B^m\right)$ uzayı total paranormlu uzaydır.

Bu bölümde, $r^q\left(p,B^m\right)$ uzayının bazı topolojik özellikleri araştırılacaktır. Bir paranormlu uzayda (β) özelliğinin tanımını verip ispatlayacağız.

Burada $i\in\mathbb{N}$ ve $x=(x_n)\in r^q\left(p,B^m\right)$ için $x_{|i}=\left(x(1),x(2),...,x(i),0,0,...\right)$ ve $x_{|\mathbb{N}-i}=\left(0,0,...,0,x(i+1),x(i+2),...\right)$ notasyonlarını kullanacağız.

Şimdi bir lineer metrik uzayda (β) özelliğinin tanımını verelim.

Tanım2.3.1. Eğer her bir $\varepsilon>0$ ve $r>0$ için $\delta>0$ vardır öyleki her bir $x\in B(0,r)$ elemanı ve $B(0,r)$ daki her bir (x_n) dizisi ve $m\neq n$ için $d(x_n,x_m)\geq\varepsilon$ olmak üzere $d\left(\frac{x+x_k}{2},0\right)\leq r-\delta$ olacak şekilde k indeksi varsa (X,d) lineer metrik uzayı (β) özelliğine sahiptir denir.

Lemma2.3.2. Eğer $\liminf_{k\to\infty} p_k > 0$ ise o zaman her $L>0$ ve $\varepsilon > 0$ için $\delta = \delta(\varepsilon, L) > 0$ vardır öyleki $d^M(u,0) \le L$ ve $d^M(v,0) \le \delta$ olmak üzere

$$-\varepsilon < d^M(u+v,0) + d^M(u,0) < \varepsilon \quad \text{ve } d^M(u+v,0) < d^M(u,0) + \varepsilon$$

dir.

İspat: $\varepsilon > 0$ ve $L > 0$ verilsin. $0 < \alpha_0 < \liminf_{k\to\infty} p_k$ ve $\alpha_0 < 1$ olsun her $k \ge k_0$ için $0 < \alpha_0 \le p_k$ olacak şekilde $k_0 \in \mathbb{N}$ vardır. $\alpha = \min\{p_k \ : \ k = 1,2,...,k_0;\ \alpha_0\}$ olsun. Her $k \in \mathbb{N}$ için $\alpha \le p_k$ dir. Her $u \in r^q(p, B^m)$ için

$$d^M(2u,0) \le K_0 d^M(u,0)$$

olacak şekilde $K_0 \ge 2$ sayısı vardır. $\beta = \left(\frac{2^\alpha \varepsilon}{2K_0 L}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ diyelim. Her $u \in r^q(p, B^m)$ için

$$d^M\left(\frac{2}{\beta}u, 0\right) \le K_1 d^M(u,0)$$

olacak şekilde $K_1 \ge K_0$ vardır. $\delta = \left(\frac{2^\alpha \varepsilon}{2\beta^\alpha K_1}\right)$ diyelim. Kabul edelim ki $d^M(u,0) \le L$ ve $d^M(v,0) \le \delta$ olsun.

$x_{|i} = (x(1), x(2), ..., x(i), 0, ...)$ ve $x_{|\mathbb{N}-i} = (0,0,...,0,x(i+1),x(i+2),...)$ notasyonlarıyla $A = \{k \in \mathbb{N} - i \ : \ p_k < 1\}$ ve $C = \{k \in \mathbb{N} - i \ : \ p_k \ge 1\}$ olsun. Her $p_k \ge 1$ için $f(t) = |t|^{p_k}$ fonksiyonunun konveksliği kullanılarak $p_k < 1$ ve $0 < \beta^{p_k} < \beta^\alpha$ için $(a+b)^{p_k} \le a^{p_k} + b^{p_k}$ olduğundan (burada $\beta \in (0,1)$ and $k \in \mathbb{N}$ dir)

$$d^M(u+v,0) = d^M\left[(1-\beta)u + \beta\left(u + \beta^{-1}v\right), 0\right]$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \left| R^q B^m \left[(1-\beta)u(i) + \beta\left(u(i) + \beta^{-1}v(i)\right)\right]\right|^{p_i}$$

$$\le \sum_{i=0}^{\infty} \left| R^q B^m \left[(1-\beta)u(i)\right] + R^q B^m \left[\beta\left(u(i) + \beta^{-1}v(i)\right)\right]\right|^{p_i}$$

$$= \sum_{i\in A} \left| R^q B^m \left[(1-\beta)u(i)\right] + R^q B^m \left[\beta\left(u(i) + \beta^{-1}v(i)\right)\right]\right|^{p_i} +$$

$$+\sum_{i\in C}\left|R^qB^m\left[(1-\beta)u(i)\right]+R^qB^m\left[\beta\left(u(i)+\beta^{-1}v(i)\right)\right]\right|^{p_i}$$

$$\le(1-\beta)\sum_{i\in A}\left|R^qB^mu(i)\right|^{p_i}+\sum_{i\in A}\left|R^qB^m\beta\left[u(i)+\beta^{-1}v(i)\right]\right|^{p_i}$$

$$+(1-\beta)\sum_{i\in C}\left|R^qB^mu(i)\right|^{p_i}+\sum_{i\in C}\left|R^qB^m\beta\left[u(i)+\beta^{-1}v(i)\right]\right|^{p_i}$$

$$\le\sum_{i\in A}\left|R^qB^mu(i)\right|^{p_i}+\beta^\alpha\sum_{i\in A}\left|R^qB^m\left[u(i)+\beta^{-1}v(i)\right]\right|^{p_i}$$

$$+\sum_{i\in C}\left|R^qB^mu(i)\right|^{p_i}+\beta^\alpha\sum_{i\in C}\left|R^qB^m\left[u(i)+\beta^{-1}v(i)\right]\right|^{p_i}$$

$$\le\sum_{i=0}^{\infty}\left|R^qB^mu(i)\right|^{p_i}+\beta^\alpha\sum_{i=0}^{\infty}\left|R^qB^m\left[u(i)+\beta^{-1}v(i)\right]\right|^{p_i}$$

$$\le d^M(u,0)+\beta^\alpha\sum_{i=0}^{\infty}\left|2^{-1}\left(2R^qB^m\left[u(i)+\beta^{-1}v(i)\right]\right)\right|^{p_i}$$

$$\le d^M(u,0)+\beta^\alpha\sum_{i\in A}\left|2^{-1}\left(2R^qB^m\left[u(i)+\beta^{-1}v(i)\right]\right)\right|^{p_i}$$

$$+\beta^\alpha\sum_{i\in C}\left|2^{-1}\left(2R^qB^m\left[u(i)+\beta^{-1}v(i)\right]\right)\right|^{p_i}$$

$$\le d^M(u,0)+\beta^\alpha\sum_{i\in A}\left|2^{-1}\left[\left(2R^qB^mu(i)\right)+\left(2R^qB^m\beta^{-1}v(i)\right)\right]\right|^{p_i}$$

$$+\beta^\alpha\sum_{i\in C}\left|2^{-1}\left[\left(2R^qB^mu(i)\right)+\left(2R^qB^m\beta^{-1}v(i)\right)\right]\right|^{p_i}$$

$$\le d^M(u,0)+\beta^\alpha\sum_{i\in A}\left|2^{-1}\left[2R^qB^mu(i)\right]\right|^{p_i}+\beta^\alpha\sum_{i\in A}\left|2^{-1}\left[2R^qB^m\beta^{-1}v(i)\right]\right|^{p_i}$$

$$+\left(\frac{1}{2}\beta\right)^\alpha\sum_{i\in C}\left|2R^qB^mu(i)\right|^{p_i}+\left(\frac{1}{2}\beta\right)^\alpha\sum_{i\in C}\left|2R^qB^m\beta^{-1}v(i)\right|^{p_i}$$

$$\le d^M(u,0)+\left(\frac{1}{2}\beta\right)^\alpha\sum_{i=0}^{\infty}\left|2R^qB^mu(i)\right|^{p_i}+\left(\frac{1}{2}\beta\right)^\alpha\sum_{i=0}^{\infty}\left|2R^qB^m\beta^{-1}v(i)\right|^{p_i}$$

$$\le d^M(u,0)+\frac{1}{2^\alpha}\frac{2^\alpha\varepsilon}{2K_0L}d^M(2u,0)+\frac{1}{2^\alpha}\beta^\alpha d^M\left(2\beta^{-1}v,0\right)$$

$$\le d^M(u,0)+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{1}{2^\alpha}\beta^\alpha K_1\frac{2^\alpha\varepsilon}{2\beta^\alpha K_1}$$

$$\Rightarrow d^M(u+v,0)\le d^M(u,0)+\varepsilon$$

elde edilir.

Lemma 2.3.3. Eğer $\liminf_{n\to\infty} p_n > 1$ ise o zaman her bir $x\in r^q(p,B^m)$ için $k_0\in\mathbb{N}$ vardır ve $\theta\in(0,1)$ öyleki $k\ge k_0$ olmak üzere her $k\in\mathbb{N}$ için

$$d^M\left(\frac{x_{|\mathbb{N}-k}}{2},0\right)\le\frac{(1-\theta)}{2}d^M\left(x_{|\mathbb{N}-k},0\right)$$

dir.

İspat: $1<\alpha<\liminf_{n\to\infty} p_n$ olacak şekilde α bir reel sayı olsun. Bu durumda $k_0\in\mathbb{N}$ vardır öyleki her $k\ge k_0$ için $\alpha\le p_k$ dir. $\left(\frac{1}{2}\right)^\alpha<\frac{1-\theta}{2}$ olacak şekilde $\theta\in(0,1)$ bir reel sayı olsun. Bu durumda her bir $x\in r^q(p,B^m)$ ve $k\ge k_0$ için

$$\begin{aligned}
d^M\left(\frac{x_{|\mathbb{N}-k}}{2},0\right)&=\sum_{i=k+1}^{\infty}\left|\frac{R^qB^mx(i)}{2}\right|^{p_i}\\
&\le\left(\frac{1}{2}\right)^\alpha\sum_{i=k+1}^{\infty}\left|R^qB^mx(i)\right|^{p_i}\\
&\le\frac{(1-\theta)}{2}\sum_{i=k+1}^{\infty}\left|R^qB^mx(i)\right|^{p_i}\\
&=\frac{(1-\theta)}{2}d^M\left(x_{|\mathbb{N}-k},0\right)
\end{aligned}$$

olur.

Teorem2.3.4. Eğer $p_k\ge 1$ ise, o zaman $r^q(p,B^m)$ uzayı (β) özelliğine sahiptir.

İspat: $m\ne n$ için $d(x_n,x_m)\ge\varepsilon$ olmak üzere $\varepsilon>0$ ve $(x_n)\subset B(0,r)$ olsun. $0<\varepsilon_0<\varepsilon^M$ alalım. $\varepsilon^M-\delta\ge\varepsilon_0$ olacak şekilde $\delta>0$ vardır. $x\in B(0,r)$ olsun. Her bir $j\in\mathbb{N}$ için $(x_n(j))_{n=1}^{\infty}$ dizisi sınırlı olduğundan diagonal yöntemi kullanarak her bir $q\in\mathbb{N}$ için (x_n) dizisinin bir (x_{n_a}) alt dizisini $1\le j\le q$ olmak üzere her $j\in\mathbb{N}$ için $x_{n_a}(j)$ yakınsak olacak şekilde bulabiliriz. Her $1\le j\le q$ için $(x_{n_a}(j))$ bir

Cauchy dizisi olduğundan her $n_a, n_b \geq t_q$ için

$$\sum_{k=0}^{q}\left|\left(R^q B^m x_{n_a}(k)\right)-\left(R^q B^m x_{n_b}(k)\right)\right|^{p_k} = \sum_{k=0}^{q}\left|R^q B^m\left(x_{n_a}(k)-x_{n_b}(k)\right)\right|^{p_k} < \delta$$

olacak şekilde $t_q \in \mathbb{N}$ vardır.

Bu durumda

$$\varepsilon < d\left(x_{n_a}, x_{n_b}\right) = \left(\sum_{k=0}^{\infty}\left|R^q B^m\left(x_{n_a}(k)-x_{n_b}(k)\right)\right|^{p_k}\right)^{\frac{1}{M}}$$

$$\varepsilon^M \leq \sum_{k=0}^{q}\left|R^q B^m\left(x_{n_a}(k)-x_{n_b}(k)\right)\right|^{p_k} + \sum_{k=q+1}^{\infty}\left|R^q B^m\left(x_{n_a}(k)-x_{n_b}(k)\right)\right|^{p_k}$$

$$\varepsilon^M \leq \delta + \sum_{k=q+1}^{\infty}\left|R^q B^m\left(x_{n_a}(k)-x_{n_b}(k)\right)\right|^{p_k}$$

olduğu görülür.

Bu yüzden her bir $q \in \mathbb{N}$ için $t_q \in \mathbb{N}$ vardır öyleki her $n_a, n_b \geq t_q$ için

$$d^M\left(x_{n_a|\mathbb{N}-q}, x_{n_b|\mathbb{N}-q}\right) \geq \varepsilon^M - \delta \geq \varepsilon_0$$

olur.

Böylece, $\sigma_1 < \sigma_2 < \ldots$ olmak üzere $\left(\sigma_q\right)_{q=1}^{\infty}$ pozitif sayı dizisi vardır öyleki her $q \in \mathbb{N}$ için

$$d^M\left(x_{\sigma_q|\mathbb{N}-q}, 0\right) = \sum_{k=q+1}^{\infty}\left|R^q B^m\left(x_{\sigma_q}(k)\right)\right|^{p_k} \geq \frac{\varepsilon_0}{2}$$

olur. Lemma2.3.3 den $q_0 \in \mathbb{N}$ ve $\theta \in (0,1)$ vardır öyleki her $u \in r^q\left(p, B^m\right)$ ve $q \geq q_0$ için

$$d^M\left(\frac{u_{|\mathbb{N}-q}}{2}, 0\right) \leq \frac{(1-\theta)}{2} d^M\left(u_{|\mathbb{N}-q}, 0\right)$$

olur. δ_0 Lemma2.3.2 e karşılık gelen bir reel sayı,

$$\varepsilon = \frac{\theta}{4} \cdot \frac{\varepsilon_0}{2}$$

ve $L = r^M$ olsun. Yani $d^M(u,0) \leq r^M$ ve $d^M(v,0) \leq \delta_0$ olmak üzere

$$d^M(u+v,0) < d^M(u,0) + \frac{\theta}{4}.\frac{\varepsilon_0}{2}$$

olsun. $x \in B(0,r)$ olduğundan $d^M(x,0) \le r^M$ olur. $q \ge q_0$ olsun öyleki

$$d^M\left(x_{|\mathbb{N}-q},0\right) \le \delta_0$$

sağlansın. $u = x_{\sigma_q}{}_{|\mathbb{N}-q}$ ve $v = x_{|\mathbb{N}-q}$ yazalım. Bu durumda

$$d^M\left(\frac{u}{2},0\right) = d^M\left(\frac{x_{\sigma_q}{}_{|\mathbb{N}-q}}{2},0\right) = \sum_{k=q+1}^{\infty}\left|R^q B^m\left(x_{\sigma_q}(k)\right)\right|^{p_k} < r^M$$

ve

$$d^M\left(\frac{v}{2},0\right) = d^M\left(x_{|\mathbb{N}-q},0\right) = \sum_{k=q+1}^{\infty}\left|R^q B^m x(k)\right|^{p_k} < \delta_0$$

olsun. Buradan

$$\begin{aligned}
d^M\left(\frac{u+v}{2},0\right) &= \sum_{k=q+1}^{\infty}\left|\frac{R^q B^m\left(x_{\sigma_q}(k)+x(k)\right)}{2}\right|^{p_k} \\
&\le \sum_{k=q+1}^{\infty}\left|\frac{R^q B^m x_{\sigma_q}(k)+R^q B^m x(k)}{2}\right|^{p_k} \\
&\le d^M\left(\frac{u}{2},0\right)+\frac{\theta}{4}.\frac{\varepsilon_0}{2} \\
&\le \frac{(1-\theta)}{2} d^M(u,0)+\frac{\theta}{4}.\frac{\varepsilon_0}{2}
\end{aligned}$$

$$d^M\left(\frac{u+v}{2},0\right) = \frac{(1-\theta)}{2}\sum_{k=q+1}^{\infty}\left|R^q B^m x_{\sigma_q}(k)\right|^{p_k} + \frac{\theta}{4}.\frac{\varepsilon_0}{2}$$

olur. Son ifadeden ve $f(t) = |t|^{p_k}$ fonksiyonunun konveksliğinden $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere bazı $\delta > 0$ için

$$\begin{aligned}
d^M\left(\frac{x+x_{\sigma_q}}{2},0\right) &= \sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{R^q B^m\left(x_{\sigma_q}(k)+x(k)\right)}{2}\right|^{p_k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{R^q B^m x_{\sigma_q}(k)+R^q B^m x(k)}{2}\right|^{p_k}
\end{aligned}$$

$$\le \sum_{k=0}^{q}\left|\frac{R^qB^m x_{\sigma_q}(k)+R^qB^m x(k)}{2}\right|^{p_k} + \sum_{k=q+1}^{\infty}\left|\frac{R^qB^m x_{\sigma_q}(k)+R^qB^m x(k)}{2}\right|^{p_k}$$

$$\le \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{q}\left|R^qB^m x(k)\right|^{p_k} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{q}\left|R^qB^m x_{\sigma_q}(k)\right|^{p_k}$$

$$+\frac{(1-\theta)}{2}\sum_{k=q+1}^{\infty}\left|R^qB^m x_{\sigma_q}(k)\right|^{p_k} + \frac{\theta}{4}.\frac{\varepsilon_0}{2}$$

$$\le \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{q}\left|R^qB^m x(k)\right|^{p_k} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left|R^qB^m x_{\sigma_q}(k)\right|^{p_k}$$

$$-\frac{\theta}{2}\sum_{k=q+1}^{\infty}\left|R^qB^m x_{\sigma_q}(k)\right|^{p_k} + \frac{\theta}{4}.\frac{\varepsilon_0}{2}$$

$$\le \frac{r^M}{2}+\frac{r^M}{2}-\frac{\theta}{2}.\frac{\varepsilon_0}{2}+\frac{\theta}{4}.\frac{\varepsilon_0}{2}$$

$$\le r^M - \frac{\theta}{4}.\frac{\varepsilon_0}{2}$$

elde edilir. Buradan $d^M\left(\frac{x+x_{\sigma_q}}{2},0\right) \le \left(r^M - \frac{\theta}{4}.\frac{\varepsilon_0}{2}\right)^{\frac{1}{M}}$ bulunur. Böylece

$$d^M\left(\frac{x+x_{\sigma_q}}{2},0\right) \le r-\delta$$

elde edilir. Böylece $r^q\left(p,B^m\right)$ dizi uzayının (β) özelliğine sahip olduğu görülür.

BÖLÜM 3. $r_{\infty}^{q}\left(p,B^{m}\right), r_{c}^{q}\left(p,B^{m}\right)$ VE $r_{0}^{q}\left(p,B^{m}\right)$ DİZİ UZAYLARI

Bu bölümde ikinci bölümde tanımlanan

$$y_n\left(q\right)=\left(R^qB^mx\right)_n=\frac{1}{Q_n}\sum_{k=0}^{n-1}\left[\sum_{i=k}^{n}\binom{m}{i-k}r^{m-i+k}s^{i-k}q_ix_k\right]+\frac{r^m}{Q_n}q_nx_n$$

dönüşümü yardımıyla $r_{\infty}^{q}\left(p,B^{m}\right), r_{c}^{q}\left(p,B^{m}\right)$ ve $r_{\infty}^{q}\left(p,B^{m}\right)$ dizi uzayları tanımlanıp, bu dizi uzaylarının bazı topolojik özellikleri incelenecektir.

3.1. $r_{\infty}^{q}\left(p,B^{m}\right), r_{c}^{q}\left(p,B^{m}\right)$ ve $r_{0}^{q}\left(p,B^{m}\right)$ Dizi Uzayları

$$r_{\infty}^{q}\left(p,B^{m}\right)=\left\{x=\left(x_j\right)\in w: y_k\left(q\right)\in l_{\infty}\left(p\right)\right\},$$

$$r_{c}^{q}\left(p,B^{n}\right)=\left\{x=\left(x_j\right)\in w: y_k\left(q\right)\in c\left(p\right)\right\},$$

$$r_{0}^{q}\left(p,B^{m}\right)=\left\{x=\left(x_j\right)\in w: y_k\left(q\right)\in c_0\left(p\right)\right\}.$$

Burada $m=1$ olması durumunda yukarıdaki dizi uzayları sırasıyla

$$r_{\infty}^{q}\left(p,B\right)=\left\{x=\left(x_j\right)\in w: \frac{1}{Q_k}\left[\sum_{j=0}^{k-1}\left(q_jr+q_{j+1}s\right)x_j+q_krx_k\right]\in l_{\infty}\left(p\right)\right\},$$

$$r_{c}^{q}\left(p,B\right)=\left\{x=\left(x_j\right)\in w: \frac{1}{Q_k}\left[\sum_{j=0}^{k-1}\left(q_jr+q_{j+1}s\right)x_j+q_krx_k\right]\in c\left(p\right)\right\},$$

$$r_{0}^{q}\left(p,B\right)=\left\{x=\left(x_j\right)\in w: \frac{1}{Q_k}\left[\sum_{j=0}^{k-1}\left(q_jr+q_{j+1}s\right)x_j+q_krx_k\right]\in c_0\left(p\right)\right\}$$

dizi uzaylarına dönüşür.

Bu bölümde $r_c^q\left(p,B^m\right)$, $r_0^q\left(p,B^m\right)$ ve $r_\infty^q\left(p,B^m\right)$ dizi uzaylarının topolojik özellikleri araştırılacaktır.

3.2. $r_\infty^q\left(p,B^m\right), r_c^q\left(p,B^m\right)$ ve $r_0^q\left(p,B^m\right)$ Dizi Uzaylarının Özellikleri

Teorem3.2.1. $r_\infty^q\left(p,B^m\right), r_c^q\left(p,B^m\right)$ ve $r_0^q\left(p,B^m\right)$ uzayları g_B paranormu ile tam lineer metrik uzaylardır. Burada

$$g_B(x)=\sup_{k\in\mathbb{N}}\left|\frac{1}{Q_k}\sum_{j=0}^{k-1}\left[\sum_{i=j}^{k}\binom{m}{i-j}r^{m-i+j}s^{i-j}q_i x_j\right]+\frac{r^m q_k}{Q_k}x_k\right|^{\frac{p_k}{M}}$$

dir. g_B, $\inf p_k>0$ olmak üzere $r_\infty^q\left(p,B^m\right)=r_\infty^q\left(B^m\right)$ ve $r_c^q\left(p,B^m\right)=r_c^q\left(B^m\right)$ dir ve $r_\infty^q(p,B^m)$ ve $r_c^q(p,B^m)$ uzayları için bir paranormdur.

İspat: $r_0^q\left(p,B^m\right)$ uzayı için ispat yapılacaktır. $r_0^q\left(p,B^m\right)$ uzayının skaler ile çarpmaya ve koordinat toplamına göre lineerliği, her $u,v\in r_0^q\left(p,B^m\right)$ için sağlanan aşağıdaki eşitsizliklerden elde edilir.

$$\begin{aligned}\sup_{k\in\mathbb{N}}&\left|\frac{1}{Q_k}\left[\sum_{j=0}^{k-1}\left[\sum_{i=j}^{k}\binom{m}{i-j}r^{m-i+j}s^{i-j}q_i\left(u_j+v_j\right)\right]+\frac{r^m q_k}{Q_k}\left(u_k+v_k\right)\right]\right|^{\frac{p_k}{M}}\\&\leq\sup_{k\in\mathbb{N}}\left|\frac{1}{Q_k}\left[\sum_{j=0}^{k-1}\left[\sum_{i=j}^{k}\binom{m}{i-j}r^{m-i+j}s^{i-j}q_i u_j\right]+\frac{r^m q_k}{Q_k}u_k\right]\right|^{\frac{p_k}{M}}\\&+\sup_{k\in\mathbb{N}}\left|\frac{1}{Q_k}\left[\sum_{j=0}^{k-1}\left[\sum_{i=j}^{k}\binom{m}{i-j}r^{m-i+j}s^{i-j}q_i v_j\right]+\frac{r^m q_k}{Q_k}v_k\right]\right|^{\frac{p_k}{M}}\end{aligned}$$

ve her $\alpha\in\mathbb{R}$ için

$$\left|\alpha_k\right|^{p_k}\leq\max\left\{1,\left|\alpha\right|^M\right\}$$

dir. Her $u\in r_0^q\left(p,B^m\right)$ için $g_B(\theta)=0$ ve $g_B(-x)=g_B(x)$ dir. Bu iki eşitsizlikten g_B nin alt toplamsallığı ve

$$g_B\left(\alpha u\right)\leq\max\left\{1,\left|\alpha\right|\right\}g_B\left(u\right)$$

elde edilir. $g_B\left(x^n-x\right)\to 0$ olacak şekilde $r_0^q\left(p,B^m\right)$ uzayının elemanlarının bir dizisi $\{x^n\}$ ve $\lambda_n \to \lambda$ olacak şekilde (λ_n) skalerler dizisi olsun. Bu durumda

$$g_B(x^n) \le g_B(x) + g_B(x^n - x)$$

eşitsizliğinden g_B nin alt toplamsallığı elde edilir. $\{g_B(x^n)\}$ sınırlıdır ve $n \to \infty$ iken

$$g_B(\lambda_n x^n - \lambda x) = \sup_{k\in\mathbb{N}} \left| \frac{1}{Q_k} \left[\sum_{j=0}^{k-1} \left[\sum_{i=j}^{k} \binom{m}{i-j} r^{m-i+j} s^{i-j} q_i \left(\lambda_n x_j^n - \lambda x_j \right) \right] + \frac{r^m q_k}{Q_k} \left(\lambda_n x_k^n - \lambda x_k \right) \right] \right|^{\frac{p_k}{M}}$$

$$\le |\lambda_n - \lambda| \sup_{k\in\mathbb{N}} \left| \frac{1}{Q_k} \left[\sum_{j=0}^{k-1} \left[\sum_{i=j}^{k} \binom{m}{i-j} r^{m-i+j} s^{i-j} q_i x_j^n \right] + \frac{r^m q_k}{Q_k} x_k^n \right] \right|^{\frac{p_k}{M}}$$

$$+ |\lambda| \sup_{k\in\mathbb{N}} \left| \frac{1}{Q_k} \left[\sum_{j=0}^{k-1} \left[\sum_{i=j}^{k} \binom{m}{i-j} r^{m-i+j} s^{i-j} q_i \left(x_j^n - x_j \right) \right] + \frac{r^m q_k}{Q_k} \left(x_k^n - x_k \right) \right] \right|^{\frac{p_k}{M}}$$

$$\le |\lambda_n - \lambda| g_B(x^n) + |\lambda| g_B(x^n - x)$$

olur.Son ifade sıfıra gider. Skaler ile çarpımın sürekliliği gösterilmiş olur. Ayrıca g_B nin $r_0^q(p, B^m)$ uzayı için bir paranorm olduğu görülür.

$r_0^q(p, B^m)$ uzayının tamlığını ispatlıyalım. $\{x^i\}$ dizisi $r_0^q(p, B^m)$ uzayında bir Cauchy dizisi olsun (burada $x^i = \{x_k^i\} = \{x_0^i, x_1^i, x_2^i, ...\} \in r_0^q(p, B^m)$ dir). Bu durumda verilen $\varepsilon > 0$ için $n_0(\varepsilon)$ sayısı vardır öyleki her $i, j \ge n_0(\varepsilon)$ için

$$g_B(x^i - x^j) < \varepsilon$$

olur. Eğer g_B nin tanımını kullanırsak seçilen her bir $k \in \mathbb{N}$ için aşağıdaki sonucu elde ederiz. $i, j \ge n_0(\varepsilon)$ için

$$\left| \left(R^q B^m x^i\right)_k - \left(R^q B^m x^j\right)_k \right| \le \sup_{k\in\mathbb{N}} \left| \left(R^q B^m x^i\right)_k - \left(R^q B^m x^j\right)_k \right|^{\frac{p_k}{M}} < \varepsilon$$

dir. Buradan seçilen her bir $k \in \mathbb{N}$ için

$$\left\{ \left(R^q B^m x^0\right)_k, \left(R^q B^m x^1\right)_k, \left(R^q B^m x^2\right)_k, ... \right\}$$

dizisi elemanları reel sayılar olan bir Cauchy dizisi olur. $\mathbb{R}$ tam olduğundan bu dizi yakınsar ve $i \to \infty$ iken $\left(R^q B^m x^i\right)_k \to \left(R^q B^m x\right)_k$ yazılabilir. Sonsuz çokluktaki bu limitlerden

$$\left\{\left(R^q B^m x\right)_0, \left(R^q B^m x\right)_1, \left(R^q B^m x\right)_2, ...\right\}$$

dizisi tanımlanır. Eşitsizlikte $j \to \infty$ iken seçilen her $k \in \mathbb{N}$ ve $i \geq n_0(\varepsilon)$ için

$$\left|\left(R^q B^m x^i\right)_k - \left(R^q B^m x\right)_k\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

dir. $x^i = \left\{x_k^{(i)}\right\} \in r_0^q\left(p, B^m\right)$ olduğundan her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\left|\left(R^q B^m x^i\right)_k\right|^{\frac{p_k}{M}} < \frac{\varepsilon}{2}$$

olur. Buradan her $i \geq n_0(\varepsilon)$ için

$$\left|\left(R^q B^m x\right)_k\right|^{\frac{p_k}{M}} \leq \left|\left(R^q B^m x\right)_k - \left(R^q B^m x^i\right)_k\right|^{\frac{p_k}{M}} + \left|\left(R^q B^m x^i\right)_k\right|^{\frac{p_k}{M}} < \varepsilon$$

elde edilir. Bu da $R^q B^m x$ in $c_0(p)$ uzayına ait olduğunu gösterir. $\left\{x^i\right\}$ keyfi bir Cauchy dizisi olduğundan $r_0^q\left(p, B^m\right)$ tamdır.

Teorem3.2.2. $rq_j \neq sq_{j+1}$ olsun. Bu durumda $r_\infty^q\left(p, B^m\right)$, $r_c^q\left(p, B^m\right)$ve $r_0^q\left(p, B^m\right)$ dizi uzayları sırasıyla $l_\infty(p)$, $c(p)$ve $c_0(p)$ uzaylarına lineer izomorfiktir. Burada $0 < p_k \leq H < \infty$ dir.

İspat: $r_\infty^q\left(p, B^m\right)$ uzayını ele alalım. Teoremi ispatlamak için $r_\infty^q\left(p, B^m\right)$ ve $l_\infty(p)$ uzayları arasında lineer, birebir ve örten bir tasvir olduğunu göstermeliyiz.

$$y_k = \frac{1}{Q_n} \sum_{k=0}^{n-1} \left[\sum_{i=k}^{n} \binom{m}{i-k} r^{m-i+k} s^{i-k} q_i x_k \right] + \frac{r^m}{Q_n} q_n x_n$$

ifadesi $r_\infty^q\left(p, B^m\right)$uzayından $l_\infty(p)$ uzayına bir T dönüşümü $x \mapsto y = Tx$ olarak tanımlansın. T lineer bir dönüşümdür ve üstelik $Tx = \theta$ olduğunda $x = \theta$ olduğundan T birebirdir. $y = (y_k) \in l_\infty(p)$ olsun ve $x = (x_k)$ dizisi her $k \in \mathbb{N}$ için

$$x_k = \sum_{n=0}^{k-1} \left[\sum_{i=n}^{n+1} (-1)^{k-n} \frac{s^{k-i}}{r^{m+k-i}} \binom{m+k-i-1}{k-i} \frac{1}{q_i} Q_n y_n \right] + \frac{Q_k}{r^m q_k} y_k$$

olacak şekilde tanımlansın. Bu durumda

$$g_B(x) = \sup_{k\in\mathbb{N}} \left| \frac{1}{Q_k} \sum_{j=0}^{k-1} \left[\sum_{i=j}^{k} \binom{m}{i-j} r^{m-i+j} s^{i-j} q_i x_j \right] + \frac{r^m q_k}{Q_k} x_k \right|^{\frac{p_k}{M}}$$

$$= \sup_{k\in\mathbb{N}} \left| \sum_{j=0}^{k} \delta_{kj} y_j \right|^{\frac{p_k}{M}} = \sup_{k\in\mathbb{N}} |y_k|^{\frac{p_k}{M}} = g_1(y) < \infty$$

dir. Burada

$$\delta_{kj} = \begin{cases} 1 \ , \ k = j \\ 0 \ , \ k \neq j \end{cases}$$

dir. Böylece $x \in r_\infty^q\left(p, B^m\right)$ bulunur. Sonuç olarak T örtendir ve paranormu korur. Böylece T lineer, birebir ve örtendir. $r_\infty^q\left(p, B^m\right)$ ve $l_\infty(p)$ uzaylarının lineer izomorfik olduğu gösterilmiş olur.

Teorem3.2.3. $R_1(p), R_2(p), R_3(p), R_4(p), R_5(p)$ ve $R_6(p)$ uzayları şu şekilde tanımlansın:

$$R_1(p) = \bigcap_{K>1} \left\{ a = (a_k) \in w \ : \ \sup_{N\in\mathcal{F}} \sum_n \left| \sum_{i\in N} \left[\sum_{k=i}^{i+1} (-1)^{k-i} \frac{s^{n-k}}{r^{m+n-k}} \binom{m+n-k-1}{n-k} \frac{1}{q_k} Q_i a_i + \frac{Q_n a_n}{r^m q_n} \right] K^{\frac{1}{p_k}} \right| < \infty \right\},$$

$$R_2(p) = \bigcap_{K>1} \left\{ a = (a_k) \in w \ : \ \sum_k \left| \left(\nabla(k,q) \sum_{i=k+1}^{n} a_i \right) Q_k \right| K^{\frac{1}{p_k}} < \infty \ \text{ve} \ \left(\frac{a_k Q_k}{r.q_k} K^{\frac{1}{p_k}} \right) \in c_0 \right\},$$

$$R_3(p) = \bigcap_{K>1} \left\{ a = (a_k) \in w \ : \ \sum_k \left| \left(\nabla(k,q) \sum_{i=k+1}^{n} a_i \right) Q_k \right| K^{\frac{1}{p_k}} < \infty \,\text{ve}\, \left\{ \left(\nabla(k,q) \sum_{i=k+1}^{n} a_i \right) Q_n \right\} \in l_\infty \right\},$$

$$R_4(p) = \bigcup_{K>1} \left\{ a = (a_k) \in w \ : \ \sup_{N\in\mathcal{F}} \sum_n \left| \sum_{k\in N} \left[(-1)^{n-k} \left(\frac{s^{n-k-1}}{r^{n-k} q_{k+1}} + \frac{s^{n-k}}{r^{n-k+1} q_k} \right) Q_k a_n + \frac{Q_n a_n}{r.q_n} \right] K^{\frac{-1}{p_k}} \right| < \infty \right\},$$

$$R_5(p) = \left\{ a = (a_k) \in w \ : \ \sum_n \left| \sum_k \left[(-1)^{n-k} \left(\frac{s^{n-k-1}}{r^{n-k} q_{k+1}} + \frac{s^{n-k}}{r^{n-k+1} q_k} \right) Q_k a_n + \frac{Q_n a_n}{r.q_n} \right] \right| < \infty \right\}$$

ve

$$R_6(p)=\bigcup_{K>1}\left\{a=(a_k)\in w\ :\ \sum_k\left|\left(\nabla(k,q)\sum_{i=k+1}^{n}a_i\right)Q_k\right|K^{\frac{-1}{p_k}}<\infty\right\}.$$

Burada

$$\nabla(k,q)=\frac{a_k}{r.q_k}+(-1)^{n-k}\left(\frac{s^{n-k-1}}{r^{n-k}q_{k+1}}+\frac{s^{n-k}}{r^{n-k+1}q_k}\right)$$

dir. Bu durumda

$$\left\{r_\infty^q\left(p,B^m\right)\right\}^\alpha=R_1(p)\quad\left\{r_\infty^q\left(p,B^m\right)\right\}^\beta=R_2(p)\quad\left\{r_\infty^q\left(p,B^m\right)\right\}^\gamma=R_3(p),$$

$$\{r_c^q(p,B^m)\}^\alpha=R_4(p)\cap R_5(p)\quad\{r_c^q(p,B^m)\}^\beta=R_6(p)\cap cs\quad\{r_c^q(p,B^m)\}^\gamma=R_6(p)\cap B^m s,$$

$$\left\{r_0^q\left(p,B^m\right)\right\}^\alpha=R_4(p)\quad\left\{r_0^q\left(p,B^m\right)\right\}^\beta=\left\{r_0^q\left(p,B^m\right)\right\}^\gamma=R_6(p)$$

dir.

İspat: $r_\infty^q\left(p,B^m\right)$ uzayı için ispat vereceğiz. $a=(a_n)\in w$ olsun. Bu durumda $k,n\in\mathbb{N}$ için

$$y_k=\frac{1}{Q_k}\left[\sum_{j=0}^{k-1}(q_j.r+q_{j+1}.s)x_j+q_k.r.x_k\right]$$

$$a_n x_n=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-k}\left(\frac{s^{n-k-1}}{r^{n-k}q_{k+1}}+\frac{s^{n-k}}{r^{n-k+1}q_k}\right)a_nQ_ky_k+\frac{a_nQ_ny_n}{r.q_n}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}u_{nk}y_k=(Uy)_n;$$

dir. Burada $U=(u_{nk})$ şu şekilde tanımlanmıştır:

$$u_{nk}=\begin{cases}(-1)^{n-k}\left(\frac{s^{n-k-1}}{r^{n-k}q_{k+1}}+\frac{s^{n-k}}{r^{n-k+1}q_k}\right)a_nQ_k & ,\ (0\le k\le n-1)\\ \frac{a_nQ_n}{r.q_n} & ,\ (k=n)\\ 0 & ,\ (k>n)\end{cases}.$$

Böylece $x=(x_k)\in r_\infty^q(p,B^m)$ olmak üzere $ax=(a_nx_n)\in l_1$ olması için gerek ve yeter şart $y=(y_k)\in l_\infty(p)$ olmak üzere $Uy\in l_1$ olmasıdır. Lemma2.1.1 den istenen yani $\left[r^q(p,B^m)\right]^\alpha=R_1(p)$ elde edilir.

Aşağıdaki denklemi göz önüne alalım;

$$\sum_{k=0}^{n}a_kx_k=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\nabla(k,q)\sum_{i=k+1}^{n}a_i\right)Q_ky_k+\frac{a_kQ_ky_k}{r.q_k}$$

$$=(Vy)_n,(n\in\mathbb{N});$$

burada $V=(v_{nk})$ her $k,n\in\mathbb{N}$ için

$$v_{nk}=\begin{cases}\left(\nabla(k,q)\sum_{i=k+1}^{n}a_i\right)Q_k & ,\ (0\le k\le n-1)\\ \frac{a_kQ_k}{r.q_k} & ,\ (k=n)\\ 0 & ,\ (k>n)\end{cases}$$

şeklindedir. Böylece $x=(x_k)\in r_\infty^q(p,B^m)$ olmak üzere $ax=(a_kx_k)\in cs$ olması için gerek ve yeter şart $y=(y_k)\in l_\infty(p)$ olmak üzere $Vy\in c$ olmasıdır. Bu yüzden Lemma2.1.3 ten

$$\sum_k\left|\left(\nabla(k,q)\sum_{i=k+1}^{n}a_i\right)Q_k\right|K^{\frac{1}{p_k}}<\infty$$

ve

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k Q_k}{r.q_k} K^{\frac{1}{p_k}} = 0$$

olduğundan $\left[r^q\left(p,B^m\right)\right]^\beta = R_2\left(p\right)$ dir.

Diğer taraftan, $x = (x_k) \in r_\infty^q(p,B^m)$ olmak üzere $ax = \left(a_k x_k\right) \in bs$ olması için gerek ve yeter şart $y = \left(y_k\right) \in l_\infty\left(p\right)$ olmak üzere $Vy \in l_\infty$ olmasıdır. Lemma2.1.2 den $[r^q(p,B^m)]^\gamma = R_3(p)$ bulunur. Bu da ispatı tamamlar.

$r_0^q(p,B^m)$ ve $r_c^q(p,B^m)$ uzaylarının bazlarını verelim.

Teorem3.2.4. Her $k \in \mathbb{N}$ ve $0 < p_k \le H < \infty$ için $\mu_k\left(t\right) = \left(R^q B^m x\right)_k$ olsun. Seçilen her $k \in \mathbb{N}$ için $r_0^q(p,B^m)$ uzayının elemanlarından oluşan $b^{(k)}\left(q\right) = \left\{b_n^{(k)}\left(q\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisini

$$b_n^{(k)}(q) = \begin{cases} (-1)^{n-k}\left(\dfrac{s^{n-k-1}}{r^{n-k}q_{k+1}} + \dfrac{s^{n-k}}{r^{n-k+1}q_k}\right)Q_k & , \ (x0 \le n \le k-1) \\ \dfrac{Q_k}{r.q_k} & , \ (k = n) \\ 0 & , \ \left(n > k-1\right) \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda

(a) $\left\{b^{(k)}\left(q\right)\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ dizisi $r_0^q(p,B^m)$ uzayı için bir bazdır ve herhangi bir $x \in r_0^q(p,B^m)$ nin $x = \sum_k \mu_k\left(q\right) b^{(k)}\left(q\right)$

şeklinde tek türlü bir gösterilişi vardır.

(b) $\left\{e, b^{(k)}\left(q\right)\right\}$ kümesi $r_c^q\left(p,B^m\right)$ uzayı için bir bazdır ve herhangi bir $x \in r_c^q(p,B^m)$ in $x = le + \sum_k \left|\mu_k\left(q\right) - l\right| b^{(k)}\left(q\right)$

şeklindeki gösterilişi tek türlü belirlidir. Burada $l = \lim_{k\to\infty} \left(R^q B^m x \right)_k$ dir.

İspat: $0 < p_k \le H < \infty$ için $R^q B^m b^{(k)}(q) = e^{(k)} \in c_0(p)$, $(k \in \mathbb{N}$ için$)$ olduğundan $\left\{ b^{(k)}(q) \right\} \subset r_0^q \left(p, B^m \right)$ dir. Burada $e^{(k)}$ k inci terimi 1 diğer terimleri sıfır olan bir dizidir.

$x \in r_0^q(p, B^m)$ verilmiş olsun. Negatif olmayan her m için

$$x^{[m]} = \sum_{k=0}^{m} \mu_k(q) b^{(k)}(q)$$

yazabiliriz. Sonra,

$$R^q B^m x^{[m]} = \sum_{k=0}^{m} \mu_k(q) R^q B^m b^{(k)}(q) = \sum_{k=0}^{m} (R^q B^m)_k e^{(k)}$$

ve

$$\left(R^q \left(x - x^{[m]} \right) \right)_i = \begin{cases} 0 & , \quad (0 \le i \le m) \\ \left(R^q B^m x \right)_i & , \quad (i > m) \end{cases} ; (i, m \in \mathbb{N})$$

olur. $\varepsilon > 0$ verilsin. Bu durumda m_0 tamsayısı vardır öyleki her $m \ge m_0$ için

$$\sup_{i \ge m} |(R^q B^m x)_i|^{\frac{p_k}{M}} < \frac{\varepsilon}{2}$$

dir. Buradan her $m \ge m_0$ için

$$g_B(x - x^{[m]}) = \sup_{i \ge m} |(R^q B^m x)_i|^{\frac{p_k}{M}} \le \sup_{i \ge m_0} |(R^q B^m x)_i|^{\frac{p_k}{M}} < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

olur. Bu da $x \in r_0^q \left(p, B^m \right)$ olduğu ispatlanmış olur.

Gösterimin tekliğini göstermek için kabul edelim ki

$$x = \sum_k \lambda_k(q) b^{(k)}(q)$$

şeklinde gösterilsin. T, $r_0^q\left(p,B^m\right)$ uzayından $c_0\left(p\right)$ uzayına lineer dönüşüm olduğundan süreklidir ve

$$(R^q B^m x)_n = \sum_k \lambda_k(q)\{R^q B^m b^{(k)}(q)\}_n = \sum_k \lambda_k(q) e_n^{(k)} = \lambda_n(q);\ n \in \mathbb{N}$$

olur. Bu ise her $n \in \mathbb{N}$ için $\left(R^q B^m x\right)_n = \mu_k\left(q\right)$ ile çelişir. Buradan $x \in r_0^q(p,B^m)$ in gösteriminin tek türlü olduğu gösterilmiş olur. Teoremin (a) kısmı ispatlanmış olur.

(b) $\left\{b^{(k)}\left(q\right)\right\} \subset r_0^q\left(p,B^m\right)$ ve $e \in c$ olduğundan $\left\{e,b^{(k)}\left(q\right)\right\} \subset r_c^q\left(p,B^m\right)$ kapsama bağıntısı doğrudur. $x \in r_c^q\left(p,B^m\right)$ olsun. O zaman Teorem3.2.4 (b) yi sağlayan l tek türlü belirlidir. $u = x - le$ seçilmiş olmak üzere $u \in r_0^q\left(p,B^m\right)$ dir. x in gösteriminin Teorem3.2.4 (a) da verilen temsil teoreminin yardımıyla tek türlü belirli olduğu gösterilmiş olur. Bu da teoremin (b) kısmını ispatlar.

Şimdi de $r_\infty^q\left(p,B^m\right), r_c^q\left(p,B^m\right)$ ve $r_0^q\left(p,B^m\right)$ uzaylarından l_∞ ve c uzaylarına matris dönüşümlerini karakterize edelim. Bu teoremler [15] teki Teorem4.4 ve Teorem4.5 gibi ispatlanabilir.

Teorem3.2.5.
(i) $A \in \left(r_\infty^q\left(p,B^m\right) : l_\infty\right)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{nk}}{q_k} Q_k M^{\frac{1}{p_k}} = 0, \left(\forall n, M \in \mathbb{N}\right) \tag{3.2.1}$$

ve

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_k \left| \nabla\left(k,q\right) \sum_{i=k+1}^{n} a_{ni} \right| Q_k M^{\frac{1}{p_k}} < \infty, \left(\forall M \in \mathbb{N}\right) \tag{3.2.2}$$

olmasıdır.

(ii) $A \in \left(r_c^q\left(p,B^m\right) : l_\infty\right)$ olması için gerek ve yeter şart (3.2.1),

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_k \left| \left(\nabla\left(k,q\right) \sum_{i=k+1}^{n} a_{ni} \right) Q_k \right| M^{\frac{1}{p_k}} = 0, \left(\exists M \in \mathbb{N}\right) \tag{3.2.3}$$

ve

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\sum_k\left|\left(\nabla(k,q)\sum_{i=k+1}^{n}a_{ni}\right)Q_k\right|<\infty \tag{3.2.4}$$

olmasıdır.

(iii) $A\in\left(r_0^q\left(p,B^m\right)\,:\,l_\infty\right)$ olması için gerek ve yeter şart $(3.2.1)$ ve $(3.2.3)$ ün sağlanmasıdır.

Teorem3.2.6. (i) $A\in\left(r_\infty^q\left(p,B^m\right)\,:\,c\right)$ olması için gerek ve yeter şart $(3.2.1)$,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\sum_k\left|\left(\nabla(k,q)\sum_{i=k+1}^{n}a_{ni}\right)Q_k\right|M^{\frac{1}{p_k}}<\infty,\left(\forall M\in\mathbb{N}\right) \tag{3.2.5}$$

ve

$$\exists(\alpha_k)\subset\mathbb{R}\text{ such that }\lim_{n\to\infty}\left[\sum_k\left|\left(\nabla(k,q)\sum_{i=k+1}^{n}a_{ni}\right)Q_k-\alpha_k\right|M^{\frac{1}{p_k}}\right]=0, \tag{3.2.6}$$

$\left(\forall M\in\mathbb{N}\right)$ olmasıdır.

(ii) $A\in\left(r_c^q\left(p,B^m\right)\,:\,c\right)$ olması için gerek ve yeter şart $(3.2.1),(3.2.3)$,

$$\exists\alpha\in\mathbb{R}\text{ such that }\lim_{n\to\infty}\left|\left(\nabla(k,q)\sum_{i=k+1}^{n}a_{ni}\right)Q_k-\alpha\right|=0\,, \tag{3.2.7}$$

$$\exists(\alpha_k)\subset\mathbb{R}\text{ such that }\lim_{n\to\infty}\left|\left(\nabla(k,q)\sum_{i=k+1}^{n}a_{ni}\right)Q_k-\alpha_k\right|=0,\left(\forall k\in\mathbb{N}\right) \tag{3.2.8}$$

ve

$$\exists(\alpha_k)\subset\mathbb{R}\text{ such that }\sup_{n\in\mathbb{N}}L\sum_k\left|\left(\nabla(k,q)\sum_{i=k+1}^{n}a_{ni}\right)Q_k-\alpha_k\right|M^{\frac{-1}{p_k}}<\infty, \tag{3.2.9}$$

$\left(\forall L,\exists M\in\mathbb{N}\right)$ olmasıdır.

(iii) $A\in\left(r_0^q\left(p,B^m\right)\,:\,c\right)$ olması için gerek ve yeter şart $(3.2.1),(3.2.3),(3.2.8)$ ve $(3.2.9)$ un sağlanmasıdır.

BÖLÜM 4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

İkinci bölümde Riesz matrisi yardımıyla tanımlanan $r^q\left(p,B^m\right)$ fark dizi uzayı tanımlandı. Tanımlanan bu dizi uzayının tam paranormlu lineer metrik uzay olduğu ve $l\left(p\right)$ uzayı ile lineer izomorfik olduğu gösterildi. $r^q\left(p,B^m\right)$ dizi uzayının Schauder bazı ve α,β dualleri bulundu. Ayrıca $\left(\beta\right)$ geometrik özelliği incelendi.

Üçüncü bölümde $r_\infty^q\left(p,B^m\right), r_c^q\left(p,B^m\right)$ ve $r_0^q\left(p,B^m\right)$ dizi uzayları tanımlandı. Tanımlanan bu dizi uzaylarının tam paranormlu lineer metrik uzay olduğu ve sırasıyla $l_\infty\left(p\right)$, $c\left(p\right)$ ve $c_0\left(p\right)$ uzaylarına lineer izomorfik olduğu gösterildi. $r_\infty^q\left(p,B^m\right), r_c^q\left(p,B^m\right)$ ve $r_0^q\left(p,B^m\right)$ dizi uzaylarının α,β,γ dualleri bulundu. $r_0^q\left(p,B^m\right)$ ve $r_c^q\left(p,B^m\right)$ uzaylarının Schauder bazları verildi.

İkinci ve üçüncü bölümlerde $B^m=\left(b_{nk}^m\right)$ fark matrisi yardımıyla tanımlanan Riesz dizi uzaylarının bazı geometrik ve topolojik özellikleri incelenerek daha önce elde edilmiş sonuçlar genelleştirilmiştir. Böylece $B^m=\left(b_{nk}^m\right)$ matrisinin indirgenmesi ile oluşan ve daha önce çalışılmış Riesz dizi uzaylarının daha iyi anlaşılmasına katkıda bulunulmuştur.

Bundan sonraki araştırmalarda; tanımlanan $r^q\left(p,B^m\right)$, $r_\infty^q\left(p,B^m\right)$, $r_c^q\left(p,B^m\right)$ ve $r_0^q\left(p,B^m\right)$ dizi uzaylarının diğer özellikleri çalışılabilecek problemlerdir.

KAYNAKLAR

[1] MADDOX, I. J., Elements of Functional Analysis, Cambridge Univ. Pres., 1970.

[2] PETERSEN, G. M., Regular Matrix Transformations, McGraw-Hill, 1966.

[3] KAMPTHAN, P. K., GUPTA, M., Sequence Spaces and Series, Marcel Dekker Inc., New York, 1981.

[4] ALTAY, B., BAŞAR, F., On the paranormed Riesz sequence spaces of non-absolute type, South Asian Bull. Math., 26(5), 701-715, 2002.

[5] BAŞARIR, M., ÖZTÜRK, M., On the Riesz difference sequence space, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 57, 377-389, 2008.

[6] GROSSE-ERDMANN, K. G., Matrix transformations between the sequence spaces and related matrix tranformations, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 180, 223-238, 1993.

[7] LASCARIDES, C. G., MADDOX, I. J., Matrix transformations between some classes of sequences, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 64, 335-340, 1968.

[8] BAŞARIR, M., KAYIKÇI M., On the generalized B^m-Riesz difference sequence space and $\beta-$property, Journal of Inequalities and Applications, 385029, 1-18, 2009.

[9] MADDOX, I. J., Pranormed sequence spaces generated by infinite matrices, Proceedings of the Cambridge philosophical society, 64, 335-340, 1968.

[10] KHOMPURNGSON, K., Geometric properties of some paranormed sequence spaces, M.S. thesis, Chang Mai University, Chang Mai, Thailand, 2004.

[11] ÇOLAK, R., ET, M., On some generalized difference sequence spaces and related matrix transformations, Hokkaido mathematical journal, 26, 483-492, 1997.

[12] BAŞARIR, M., NURAY, F., Paranormed difference sequence spaces generated by infinite matrices, Pure and applied mathematika sciences, 34,

87-90, 1991.

[13] POLAT, H., BAŞARIR, M., New taylor difference sequence spaces of order m, International mathematical journal, 5, 211-223, 2004.

[14] ET, M., BAŞARIR, M., On some new generalized difference sequence spaces, Periodica mathematica hungarica, 35, 169-175, 1997.

[15] ALTAY, B., BAŞAR, F., Some paranormed Riesz sequence spaces of non-absolute type, South asian bull. math., 30, 591-608, 2008.

ÖZGEÇMİŞ

Mustafa KAYIKÇI, 1971 de Düzce' de doğdu. İlk, orta ve lise eğitimini Düzce'de lisans öğrenimini ise 1996 yılında İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde tamamladı. Yüksek lisansını Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik EABD da 2003 yılında tamamladı. Halen Düzce Üniversitesi Düzce Meslek Yüksek Okulu'nda görevini sürdürmektedir.

SOME TOPOLOGICAL AND GEOMETRIC PROPERTIES OF GENERALIZED RIESZ DIFFERENCE SEQUENCE SPACES

Mustafa KAYIKÇI

SUMMARY

Key Words: Riesz sequence space, α,β Duals, (β) Property, Matrix transformations.

This thesis consists of four chapters. In the first chapter, some fundamental definitions and theorems will be used in the later chapters were given.

In the second chapter $r^q\left(p,B^m\right)$ sequence space defined by Riesz matrix and B^m was introduced. It was shown that this sequence space was total paranormed linear metric space and linear isomorphic to $l\left(p\right)$. Schauder base and α,β duals of $r^q\left(p,B^m\right)$ sequence space were defined. Besides, (β) geometric property of this sequence space was examined.

In the third chapter $r_\infty^q\left(p,B^m\right), r_c^q\left(p,B^m\right)$ and $r_0^q\left(p,B^m\right)$ sequence spaces were defined. It was shown that these sequence spaces were total paranormed linear metric space and linear isomorphic to $l_\infty\left(p\right)$, $c\left(p\right)$ and $c_0\left(p\right)$, respectively. α,β,γ duals of $r_\infty^q\left(p,B^m\right), r_c^q\left(p,B^m\right)$ and $r_0^q\left(p,B^m\right)$ sequence spaces were investigated. Also Schauder bases of $r_c^q\left(p,B^m\right)$ and $r_0^q\left(p,B^m\right)$ sequence spaces were given.

GENELLEŞTİRİLMİŞ RİESZ FARK DİZİ UZAYLARININ BAZI TOPOLOJİK VE GEOMETRİK ÖZELLİKLERİ

Mustafa KAYIKÇI

ÖZET

Anahtar kelimeler: Riesz dizi uzayı, α,β Duali, (β) Özelliği, Matris dönüşümleri.

Üç bölüm olarak hazırlanan bu tezin birinci bölümünde daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı temel tanım ve teoremler verildi.

İkinci bölümde Riesz ve B^m matrisi yardımıyla tanımlanan $r^q\left(p,B^m\right)$ dizi uzayı tanımlandı. Tanımlanan bu dizi uzayının tam paranormlu lineer metrik uzay olduğu ve $l\left(p\right)$ uzayı ile lineer izomorfik olduğu gösterildi. $r^q\left(p,B^m\right)$ dizi uzayının Schauder bazı ve α,β dualleri bulundu. Ayrıca (β) geometrik özelliği incelendi.

Üçüncü bölümde $r_\infty^q\left(p,B^m\right), r_c^q\left(p,B^m\right)$ ve $r_0^q\left(p,B^m\right)$ dizi uzayları tanımlandı. Tanımlanan bu dizi uzaylarının tam paranormlu lineer metrik uzay olduğu ve sırasıyla $l_\infty\left(p\right)$, $c\left(p\right)$ ve $c_0\left(p\right)$ uzaylarına lineer izomorfik olduğu gösterildi. $r_\infty^q\left(p,B^m\right), r_c^q\left(p,B^m\right)$ ve $r_0^q\left(p,B^m\right)$ dizi uzaylarının α,β,γ dualleri bulundu. $r_0^q\left(p,B^m\right)$ ve $r_c^q\left(p,B^m\right)$ uzaylarının Schauder bazları verildi.