T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ FİBONACCİ VE LUCAS DİZİLERİ VE BAZI UYGULAMALARI

DOKTORA TEZİ

Bahar DEMİRTÜRK

Enstitü Anabilim Dalı	**:**	**MATEMATİK**
Tez Danışmanı	**:**	**Prof. Dr. Refik KESKİN**

Mayıs 2010

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ FİBONACCİ VE LUCAS DİZİLERİ VE BAZI UYGULAMALARI

DOKTORA TEZİ

Bahar DEMİRTÜRK

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Bu tez 24 / 05 /2010 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Refik KESKİN Jüri Başkanı	Prof. Dr. Halis AYGÜN Üye	Doç. Dr. Mehmet BEKTAŞOĞLU Üye
Yrd. Doç. Dr. Serpil HALICI Üye	Yrd. Doç. Dr. Yücel TÜRKER ULUTAŞ Üye	

ÖNSÖZ

Bu tez konusunun seçiminde ve çalışmalarım boyunca, değerli görüş ve katkılarıyla beni yönlendiren saygıdeğer hocam Prof. Dr. Refik KESKİN'e teşekkürü bir borç bilirim. Ayrıca bu uzun süreçte beni hep destekleyen ve yanımda olan eşim Semih BİTİM'e, manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan anne ve babama yürekten teşekkür ederim.

Bu çalışma, Sakarya Üniversitesi tarafından 2008-50-02-012 numaralı FBDTEZ projesi olarak Bilimsel Araştırma Projeleri kapsamında desteklenmiştir.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\{F_n\}$	: Fibonacci dizisi
F_n	: n. Fibonacci sayısı
$\{L_n\}$	: Lucas dizisi
L_n	: n. Lucas sayısı
$\{U_n\}$	: Genelleştirilmiş Fibonacci dizisi
U_n	: Genelleştirilmiş n. Fibonacci sayısı
$\{V_n\}$	: Genelleştirilmiş Lucas dizisi
V_n	: Genelleştirilmiş n. Lucas sayısı
$\{u_n\}$	: Genelleştirilmiş Fibonacci dizisi
u_n	: Genelleştirilmiş n. Fibonacci sayısı
$\{v_n\}$	: Genelleştirilmiş Lucas dizisi
v_n	: Genelleştirilmiş n. Lucas sayısı
(a,b)	: a ve b tamsayılarının en büyük ortak böleni
$a \mid b$	: a tamsayısı b tamsayısını böler
$\lvert A \rvert = \det A$	: A matrisinin determinantı

ÖZET

Anahtar kelimeler: Fibonacci sayıları, Lucas sayıları, Genelleştirilmiş Fibonacci sayıları, Genelleştirilmiş Lucas sayıları, Diophantine denklemleri

Bu çalışmanın amacı, Fibonacci ve Lucas dizilerinin genelleştirmeleri olan $\{U_n\}$, $\{V_n\}$ ve $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ dizilerini incelemek ve bu dizilerin özelliklerini kullanarak bazı Diophantine denklemlerinin tüm tamsayı çözümlerini araştırmaktır.

İlk bölümde, Fibonacci ve Lucas dizilerinin tanımları verildi. Ayrıca bu sayı dizilerinin elemanlarının bölünebilme özellikleri ispatlandı.

İkinci bölümde genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas dizilerinin tanımları verildi. Genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas dizileriyle ilgili bilinen özdeşliklerin yanında, bazı yeni özdeşliklerin de verildiği teoremler ispatlandı. Daha sonra genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayıları ile bazı Diophantine denklemlerinin tüm tamsayı çözümleri arasındaki bağlantılar karakterize edildi.

Üçüncü bölümde $\{U_n\}$, $\{V_n\}$ ve $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ dizilerinin elemanlarının bölünebilme özellikleri ispatlandı.

Dördüncü bölümde ise, elemanları genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayıları olan matrisler kullanılarak bazı özdeşlikler elde edildi. Bu özdeşliklerden hareketle, farklı Diophantine denklemlerinin tüm tamsayı çözümlerinin elde edildiği teoremler verildi.

GENERALIZED FIBONACCI AND LUCAS SEQUENCES AND THEIR APPLICATONS

SUMMARY

Key Words: Fibonacci numbers, Lucas numbers, Generalized Fibonacci numbers, Generalized Lucas numbers, Diophantine equations

The aim of this study is to observe the sequences $\{U_n\}$, $\{V_n\}$ and $\{u_n\}$, $\{v_n\}$, which are the generalizations of the Fibonacci and Lucas sequences and to investigate all solutions of some Diophantine equations, by using properties of these sequences.

In the first section, definitions of the Fibonacci and Lucas sequences are given. Furthermore, the divisibility properties of the elements of these number sequences are proved.

In the second section, generalizations of the Fibonacci and Lucas sequences are defined. Some new identities related to the generalized Fibonacci and Lucas sequences are proved. Furthermore, relations between the generalized Fibonacci and Lucas sequences and all integer solutions of some Diophantine equations are characterized.

In the third section, the divisibility properties of the sequences $\{U_n\}$, $\{V_n\}$ and $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ are proved.

Finally, in the fourth section, by using the matrices which have the elements of the generalized Fibonacci and Lucas numbers, some identities are obtained. By considering these identities, all integer solutions of different Diophantine equations are obtained in some theorems.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Bu kısımda Fibonacci ve Lucas sayılarının tanımları verilecek ve bunlarla ilgili bölünebilme teoremleri ispatlanacaktır.

$\{F_n\}$ Fibonacci dizisi, $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ başlangıç değerlerine ve her $n \geq 2$ için $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ tekrarlama bağıntısına sahip tamsayıların dizisi olarak tanımlanır. Burada F_n ye n. Fibonacci sayısı denir.

$\{L_n\}$ Lucas dizisi, $L_1 = 1, L_2 = 3$ başlangıç değerlerine ve her $n \geq 2$ için $L_{n+1} = L_n + L_{n-1}$ tekrarlama bağıntısına sahip tamsayıların dizisi olarak tanımlanır. L_n ye n. Lucas sayısı denir.

F_n ve L_n sayıları arasında $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$ bağıntısı mevcuttur. Ayrıca $F_0 = 0$ ve $L_0 = 2$ olmak üzere, $n > 0$ için $F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n$ ve $L_{-n} = (-1)^n L_n$ dir [14], [32].

$x^2 - x - 1 = 0$ karakteristik denkleminin kökleri $\alpha = \left(1+\sqrt{5}\right)/2$ ve $\beta = \left(1-\sqrt{5}\right)/2$ olmak üzere, her $n \in \mathbb{Z}$ için

$$F_n = \left(\alpha^n - \beta^n\right)/\left(\alpha - \beta\right), \qquad L_n = \alpha^n + \beta^n \tag{1.1}$$

dir. Yukarıda (1.1) ile verilen bağıntılar Binet Formülleri olarak adlandırılır. Fibonacci ve Lucas sayılarıyla ilgili birçok özdeşlik, bu formüller kullanılarak elde edilmektedir. $\{F_n\}$ ve $\{L_n\}$ dizileri ile ilgili detaylı bilgi için [14], [15], [32], [39] ve [45] numaralı kaynaklara bakılabilir.

Fibonacci ve Lucas sayılarıyla ilgili özdeşlik ve toplam bulma, çoğu matematikçinin ilgi duyduğu bir alan olmuştur. Bunun için de tümevarım, Binet formülleri, matrisler hatta domino taşları bile birer araç olarak kullanılmıştır [3], [6] [20], [25], [31], [35], [43], [44].

[26] numaralı kaynakta, matrisler kullanılarak elde edilen toplamlar, aşağıda şu şekilde sıralanabilir. $n \in \mathbb{N}$ ve $m,\ r \in \mathbb{Z}$ olmak üzere,

$$5^n F_{2nm+r} = \sum_{j=0}^{2n} \binom{2n}{j} L_m^j L_{m-1}^{2n-j} F_{j+r}\,, \tag{1.2}$$

$$5^{n+1} F_{(2n+1)m+r} = \sum_{j=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{j} L_m^j L_{m-1}^{2n+1-j} L_{j+r}\,, \tag{1.3}$$

$$5^n L_{2nm+r} = \sum_{j=0}^{2n} \binom{2n}{j} L_m^j L_{m-1}^{2n-j} L_{j+r}\,, \tag{1.4}$$

$$5^n L_{(2n+1)m+r} = \sum_{j=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{j} L_m^j L_{m-1}^{2n+1-j} F_{j+r}\,, \tag{1.5}$$

$$F_{mn+r} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} F_m^j F_{m-1}^{n-j} F_{j+r} \tag{1.6}$$

dir. Bu bölümde (1.2)-(1.6) özdeşliklerinde verilen toplamlar kullanılarak Fibonacci ve Lucas sayılarıyla ilgili üç bölünebilme teoremi ispatlanacaktır.

Fibonacci ve Lucas sayılarının bölünebilme özellikleri Carlitz tarafından [7] numaralı kaynakta ispatlanmıştır. Hoggat, [14] numaralı kaynakta, $F_m \mid F_n$ olması için gerekli ve yeterli şartın $m \mid n$ olduğunu, ayrıca $L_m \mid F_n$ olması için gerekli ve yeterli şartın $m \mid n$ ve n/m nin çift tamsayı olduğunu göstermiştir. [32] numaralı kaynakta ise Koshy, $F_m \mid F_n$ olması için gerekli ve yeterli şartın $m \mid n$ olduğunu, tümevarım ve bölme algoritması kullanarak ispatlamıştır. Ayrıca [45] numaralı kaynakta Vajda, $m \mid n$ ise $F_m \mid F_n$ olduğunu, $m \mid n$ ve n/m tek tamsayı ise $L_m \mid L_n$ olduğunu ve bunlara ek olarak $m \mid n$ ve n/m çift tamsayı ise $L_m \mid F_n$ olduğunu ispatlamıştır. Bu nedenle bütünlük sağlaması açısından Teorem 1.1, Teorem 1.2 ve Teorem 1.3'de Fibonacci ve Lucas sayılarının bölünebilme özelliklerinin ispatları, (1.2)-(1.6)'daki toplamlar kullanılarak farklı yoldan ispatlanacaktır. Ayrıca $F_n \mid L_m$ olması için gerekli ve yeterli şartların verildiği teorem, Hilton, Pedersen ve Somer tarafından [11] numaralı kaynakta tam olarak ispatlandığı için, burada bu teoremin sadece ifadesine yer verilecektir.

Aşağıdaki önermeler Fibonacci ve Lucas sayılarının bölünebilme özelliklerinin ispatlarında kullanılacağı için burada verilecektir. Bu önermelerde verilen özellikler Fibonacci ve Lucas sayıları için temel bilgiler sayılabileceğinden ispatları verilmeyecektir.

Önerme 1.1. Her $n \in \mathbb{N}$ için $L_n \geq F_n$ dir.

Önerme 1.2. $\{F_n\}_{n\geq 2}$ dizisi monoton artandır.

Önerme 1.3. $\{L_n\}_{n\geq 0}$ dizisi monoton artandır.

Önerme 1.4. Her $n \in \mathbb{N}$ için $(F_n, F_{n+1}) = 1$ ve $(L_n, L_{n+1}) = 1$ dir [12], [32].

Önerme 1.5. Her $n \in \mathbb{N}$ için $(L_n, 5) = 1$ dir [32], [45].

Teorem 1.1. $m,\ k \in \mathbb{N}$ ve $m \geq 2$ olmak üzere $L_m \mid F_k$ olması için gerekli ve yeterli şart $m \mid k$ ve k/m nin çift tamsayı olmasıdır [7], [14].

İspat. $m \mid k$ ve k/m çift tamsayı olsun. Bu durumda $k = 2mn$ olan n doğal sayısı vardır. (1.2)'de verilen toplam formülünde $r = 0$ alınır ve $F_0 = 0$ olduğu kullanılırsa,

$$5^n F_{2mn} = \sum_{j=0}^{2n} \binom{2n}{j} L_m^j L_{m-1}^{2n-j} F_j = L_m \sum_{j=1}^{2n} \binom{2n}{j} L_m^{j-1} L_{m-1}^{2n-j} F_j$$

olur. Böylece $L_m \mid 5^n F_{2mn}$ bulunur. Ayrıca Önerme 1.5'e göre $(L_m, 5) = 1$ olduğundan $(L_m, 5^n) = 1$ dir. Dolayısıyla $L_m \mid F_{2mn}$ olur. Yani $L_m \mid F_k$ dır. O halde $m \mid k$ ve k/m çift tamsayı ise $L_m \mid F_k$ dır.

Şimdi de $L_m \mid F_k$ olsun. $m \mid k$ ve k/m nin çift tamsayı olduğunu gösterelim. Aksine $m \nmid k$ olduğunu kabul edelim. Yani $k = mq + r$, $0 < r < m$ olsun. Eğer q çift tamsayı ise $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere, $q = 2n$ yazılabilir. Böylece $k = 2mn + r$ olup, (1.2) toplam formülünden,

$$5^n F_{2nm+r} = \sum_{j=0}^{2n} \binom{2n}{j} L_m^j L_{m-1}^{2n-j} F_{j+r} = L_{m-1}^{2n} F_r + L_m \sum_{j=1}^{2n} \binom{2n}{j} L_m^{j-1} L_{m-1}^{2n-j} F_{j+r} \qquad (1.7)$$

bulunur. $L_m \mid F_k$ olduğundan $L_m \mid F_{2mn+r}$ dir. Dolayısıyla $L_m \mid 5^n F_{2mn+r}$ olur. Bu durumda (1.7) toplam formülünden $L_m \mid L_{m-1}^{2n} F_r$ bulunur. Ayrıca $\left(L_m, L_{m-1}\right) = 1$ olduğundan $\left(L_m, L_{m-1}^{2n}\right) = 1$ dir. Böylece $L_m \mid F_r$ olur. Dolayısıyla $L_m \le F_r$ olduğu görülür. Ancak Önerme 1.1 ve Önerme 1.2'ye göre $0 < r < m$ olduğundan $F_r \le F_m < L_m$ dir. Bu, $L_m \le F_r$ olmasına aykırıdır. O halde q çift tamsayı değildir. Şu halde q tek tamsayıdır. Bu durumda, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $q = 2n+1$ yazılabilir. Buradan $k = \left(2n+1\right)m + r$ olur. Şu halde (1.3) toplam formülünden,

$$\begin{aligned} 5^{n+1} F_{(2n+1)m+r} &= \sum_{j=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{j} L_m^j L_{m-1}^{2n+1-j} L_{j+r} \\ &= L_{m-1}^{2n+1} L_r + L_m \sum_{j=1}^{2n+1} \binom{2n+1}{j} L_m^{j-1} L_{m-1}^{2n+1-j} L_{j+r} \end{aligned} \qquad (1.8)$$

yazılabilir. $L_m \mid F_k$ olduğundan $L_m \mid F_{(2n+1)m+r}$ olur. Dolayısıyla $L_m \mid 5^{n+1} F_{(2n+1)m+r}$ dir.

Böylece (1.8) toplam formülünden $L_m \mid L_{m-1}^{2n+1} L_r$ elde edilir. Buna ek olarak $\left(L_m, L_{m-1}\right) = 1$ olduğundan $\left(L_m, L_{m-1}^{2n+1}\right) = 1$ olduğu göz önüne alınırsa $L_m \mid L_r$, yani $L_m \leq L_r$ bulunur. Bu ise mümkün değildir. Çünkü $0 < r < m$ olduğundan Önerme 1.3'e göre $L_r < L_m$ dir. Dolayısıyla $m \mid k$ dır.

Şimdi de k/m nin tek tamsayı olduğunu kabul edelim. Yani $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $k = \left(2n+1\right)m$ olsun. Dolayısıyla $L_m \mid F_{(2n+1)m}$ olur. Ayrıca (1.3)'de verilen toplam formülüne göre,

$$5^{n+1} F_{(2n+1)m} = 2L_{m-1}^{2n+1} + L_m \sum_{j=1}^{2n+1} \binom{2n+1}{j} L_m^{j-1} L_{m-1}^{2n+1-j} L_j$$

olduğundan, $L_m \mid 2L_{m-1}^{2n+1}$ bulunur. Şu halde $\left(L_m, L_{m-1}^{2n+1}\right) = 1$ olduğu kullanılırsa, $L_m \mid 2$ olduğu görülür. Dolayısıyla $L_m = 2$ veya $L_m = 1$, yani $m = 0$ veya $m = 1$ olmalıdır. Bu ise $m \geq 2$ olması ile çelişir. O halde k/m tek tamsayı olamaz. Böylece, $L_m \mid F_k$ ise $m \mid k$ ve k/m çift tamsayıdır.■

Teorem 1.2. m, $k \in \mathbb{N}$ ve $m \geq 2$ olmak üzere $L_m \mid L_k$ olması için gerekli ve yeterli şart $m \mid k$ ve k/m nin tek tamsayı olmasıdır [7], [14].

İspat. $m \mid k$ ve k/m tek tamsayı yani $k/m = 2n+1$, $n \in \mathbb{N}$ olsun. Dolayısıyla $k = \left(2n+1\right)m$ olur. (1.5) de verilen toplam formülünde $r = 0$ alınırsa

$$5^n L_{(2n+1)m} = \sum_{j=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{j} L_m^j L_{m-1}^{2n+1-j} F_j = L_m \sum_{j=1}^{2n+1} \binom{2n+1}{j} L_m^{j-1} L_{m-1}^{2n+1-j} F_j \tag{1.9}$$

bulunur. Bu durumda, (1.9)'daki toplam formülünden $L_m \mid 5^n L_{(2n+1)m}$ olduğu görülür. Ayrıca Önerme 1.5'e göre $(L_m, 5^n) = 1$ olduğu göz önüne alınırsa $L_m \mid L_{(2n+1)m}$ bulunur. Yani $L_m \mid L_k$ dır.

Şimdi $L_m \mid L_k$ olsun. $m \mid k$ ve k/m nin tek tamsayı olduğunu gösterelim. Aksine $m \nmid k$ olduğunu kabul edelim. Yani $k = mq + r$, $0 < r < m$ olsun. Eğer q çift ise $k = 2mn + r$ olup (1.4) toplam formülünden,

$$5^n L_{2nm+r} = \sum_{j=0}^{2n} \binom{2n}{j} L_m^j L_{m-1}^{2n-j} L_{j+r} = L_{m-1}^{2n} L_r + L_m \sum_{j=1}^{2n} \binom{2n}{j} L_m^{j-1} L_{m-1}^{2n-j} L_{j+r} \tag{1.10}$$

bulunur. $L_m \mid L_k$ olduğundan $L_m \mid L_{2mn+r}$ olur. Buradan $L_m \mid 5^n L_{2mn+r}$ yazılabilir. Böylece (1.10) toplam formülünden $L_m \mid L_{m-1}^{2n} L_r$ olduğu görülür. Ayrıca Önerme 1.4'e göre $\left(L_m, L_{m-1}\right) = 1$ olduğundan $\left(L_m, L_{m-1}^{2n}\right) = 1$ olur. Şu halde $L_m \mid L_r$ bulunur. Dolayısıyla $L_m \le L_r$ dir. Ancak $0 < r < m$ olduğundan Önerme 1.3'den dolayı $L_r < L_m$ olur. Bu ise $L_m \le L_r$ olmasına aykırıdır.

Eğer q tek tamsayı ise, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $q = 2n + 1$ yazılabilir. Buradan $k = \left(2n+1\right)m + r$ olur. (1.5)'de verilen toplam formülünden,

$$5^n L_{(2n+1)m+r} = \sum_{j=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{j} L_m^j L_{m-1}^{2n+1-j} F_{j+r} = L_{m-1}^{2n+1} F_r + L_m \sum_{j=1}^{2n+1} \binom{2n+1}{j} L_m^{j-1} L_{m-1}^{2n+1-j} F_{j+r}$$

yazılabilir. $L_m \mid L_k$ olduğundan $L_m \mid L_{(2n+1)m+r}$ dir. Böylece $L_m \mid 5^n L_{(2n+1)m+r}$ elde edilir. Dolayısıyla $L_m \mid L_{m-1}^{2n+1} F_r$ dir. Buradan da $\left(L_m, L_{m-1}^{2n+1}\right) = 1$ olduğu kullanılarak $L_m \mid F_r$ bulunur. Böylece $L_m \le F_r$ olur. Halbuki, $0 < r < m$ olduğundan Önerme 1.1 ve Önerme 1.2'ye göre $F_r \le F_m < L_m$ dir. Bu ise $L_m \le F_r$ olmasına aykırıdır. O halde q tek tamsayı da olamaz. Dolayısıyla $m \nmid k$ kabulümüz yanlıştır. Yani $m \mid k$ dır.

Şimdi $L_m \mid L_k$ fakat k/m çift tamsayı olsun. Yani $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $k = 2nm$ olsun. (1.4) eşitliğinde $r = 0$ alınır ve $L_0 = 2$ olduğu kullanılırsa,

$$\begin{aligned} 5^n L_{2nm} &= \sum_{j=0}^{2n} \binom{2n}{j} L_m^j L_{m-1}^{2n-j} L_j \\ &= 2L_{m-1}^{2n} + L_m \sum_{j=1}^{2n} \binom{2n}{j} L_m^{j-1} L_{m-1}^{2n-j} L_j \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $L_m \mid 2L_{m-1}^{2n}$ olur. $\left(L_m, L_{m-1}\right) = 1$ olduğundan $\left(L_m, L_{m-1}^{2n}\right) = 1$ dir. Buradan $L_m \mid 2$ bulunur. Fakat $m \geq 2$ olduğundan, bu mümkün değildir. O halde k/m çift tamsayı olamaz. Böylece $L_m \mid L_k$ ise $m \mid k$ ve k/m tek tamsayıdır.■

Teorem 1.3. $m, n \in \mathbb{N}$ ve $m \geq 3$ olsun. Bu durumda $F_m \mid F_n$ olması için gerekli ve yeterli şart $m \mid n$ olmasıdır [7], [14], [32].

İspat. İlk olarak $m \mid n$ olsun. Dolayısıyla $q \in \mathbb{Z}$ olmak üzere, $n = mq$ olup (1.6)'da verilen toplam formülünden $F_m \mid F_{mq}$ bulunur. Yani $F_m \mid F_n$ dir.

Şimdi de $F_m \mid F_n$ fakat $m \nmid n$ olsun. O halde $0 < r < m$ olmak üzere $n = mq + r$ yazılabilir. (1.6)'daki toplam formülünden,

$$F_n = F_{mq+r} = \sum_{j=0}^{q} \binom{q}{j} F_m^j F_{m-1}^{q-j} F_{j+r} = F_{m-1}^q F_r + F_m \sum_{j=1}^{q} \binom{q}{j} F_m^{j-1} F_{m-1}^{q-j} F_{j+r} \qquad (1.11)$$

olur. $F_m \mid F_n$ olduğundan, (1.11)'deki eşitlikten $F_m \mid F_{m-1}^q F_r$ bulunur. Önerme 1.4'e göre $\left(F_m, F_{m-1}\right) = 1$ olduğundan, $\left(F_m, F_{m-1}^q\right) = 1$ dir. Böylece $F_m \mid F_r$ elde edilir. Dolayısıyla $F_m \leq F_r$ dir. Halbuki $0 < r < m$ ve $m \geq 3$ olduğundan, Önerme 1.2'ye göre $F_r < F_m$ dir. O halde kabulümüz yanlıştır. Yani $m \mid n$ dir.■

Teorem 1.4. $m, n \in \mathbb{N}$ olsun. Bu durumda $F_n \mid L_m$ olması için gerekli ve yeterli şartlar:

i) $n = 1$ veya $n = 2$

ii) $n = 3$ ve $3|m$

iii) $n = 4$ ve $m = 4t + 2$, $t \in \mathbb{Z}$

olmasıdır [11].

BÖLÜM 2. GENELLEŞTİRİLMİŞ FİBONACCİ VE LUCAS DİZİLERİ VE BAZI DİOPHANTİNE DENKLEMLERİ

Horadam, [17] numaralı kaynakta, $a,\ b,\ p,\ q \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $W_0 = a,\ W_1 = b$ başlangıç koşullarıyla, her $n \geq 2$ için

$$W_n = W_n(a,b;p,q) = pW_{n-1} - qW_{n-2} \tag{2.1}$$

tekrarlama bağıntısına sahip $\{W_n\}$ dizisini tanımlamıştır. Bu dizide α ve β, $\{W_n\}$ dizisiyle ilgili $\lambda^2 - p\lambda + q = 0$ karakteristik denkleminin kökleri ve $A = b - a\beta,\ B = b - a\alpha$ olmak üzere, $p^2 - 4q \neq 0$ ise $W_n = \dfrac{A\alpha^n - B\beta^n}{\alpha - \beta}$ dir [19].

Bu bölümde, Horadam'ın tanımladığı $\{W_n\}$ dizisinin iki özel durumu olan genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas dizileri; $\{U_n\}$, $\{V_n\}$ ve $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ dizilerinin tanımları ve bu dizilerle ilgili temel teoremler verilecektir. Bu diziler [27], [29], [34], [37], [38] ve [46] numaralı kaynaklarda da ele alınmıştır.

$p \geq 1$ bir tamsayı olmak üzere, genelleştirilmiş Fibonacci dizisi $\{U_n\}$ ve genelleştirilmiş Lucas dizisi $\{V_n\}$ sırasıyla, $U_n = W_n(0,1;p,-1)$ ve $V_n = W_n(2,p;p,-1)$ olarak tanımlanır. Burada $U_0 = 0,\ U_1 = 1$ başlangıç değerleri ve her $n \geq 2$ için $U_n = pU_{n-1} + U_{n-2}$ olduğu ve $V_0 = 2$, $V_1 = p$ olmak üzere, her $n \geq 2$ için $V_n = pV_{n-1} + V_{n-2}$ olduğu görülebilir. U_n ve V_n değerlerine sırasıyla, genelleştirilmiş n. Fibonacci sayısı ve genelleştirilmiş n. Lucas sayısı denir. Ayrıca her $n \in \mathbb{N}$ için $U_{-n} = (-1)^{n+1}U_n$ ve $V_{-n} = (-1)^n V_n$ olarak tanımlanır. $V_n = U_{n-1} + U_{n+1}$ olduğu, $\{U_n\}$ ve $\{V_n\}$ dizilerinin tanımlarından elde edilebilir. $\{U_n\}$ ve $\{V_n\}$ dizileri,

$p=1$ için sırasıyla, Fibonacci ve Lucas dizilerine, $p=2$ için sırasıyla, Pell ve Pell-Lucas dizilerine karşılık gelmektedir.

$p \geq 3$ bir tamsayı olmak üzere, genelleştirilmiş Fibonacci dizisi $\{u_n\}$ ve genelleştirilmiş Lucas dizisi $\{v_n\}$ sırasıyla, $u_n = W_n(0,1;p,1)$ ve $v_n = W_n(2,p;p,1)$ olarak tanımlanır. Burada $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ olmak üzere her $n \geq 2$ için $u_n = pu_{n-1} - u_{n-2}$ olduğu ve $v_0 = 2,\ v_1 = p$ olmak üzere her $n \geq 2$ için $v_n = pv_{n-1} - v_{n-2}$ olduğu görülebilir. u_n ve v_n değerlerine sırasıyla, genelleştirilmiş n. Fibonacci sayısı ve genelleştirilmiş n. Lucas sayısı denir. Ayrıca her $n \in \mathbb{N}$ için $u_{-n} = -u_n$ ve $v_{-n} = v_n$ olarak tanımlanır. $v_n = u_{n+1} - u_{n-1}$ olduğu, $\{u_n\}$ ve $\{v_n\}$ dizilerinin tanımlarından elde edilebilir. $\{U_n\}$, $\{V_n\}$ ve $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ dizileri ile ilgili daha fazla bilgi için [16], [25], [38], [40], [41] ve [42] numaralı kaynaklara bakılabilir.

Diophantus 3. yüzyılda, Arithmetica isimli 13 ciltlik kitabında, tek çözüme ve sonsuz çözüme sahip denklemlerin çözümlerini bulmayı içeren 150 problemi ortaya koymuştur. Bu kitapta verilen bütün denklemlere Diophantine denklemleri denilmiştir. a ve b sıfırdan farklı tamsayılar ve a ile b nin en büyük ortak böleni d olmak üzere $ax+by=d$ denklemi lineer Diophantine denklemi olarak adlandırılır. Ayrıca $x^n + y^n = z^n$ denklemi de bir Diophantine denklemidir. Bu denklem $n=2$ için sonsuz sayıda (x,y,z) çözümüne sahiptir ve bu (x,y,z) üçlülerine Pisagor üçlüleri denir. Diophantine denklemlerinin bir özel hali, n karesiz bir tamsayı, x ve y tamsayılar olmak üzere $x^2 - ny^2 = 1$ denklemidir. Bu denklem 8. yüzyılda Brahmagupta tarafından çalışılmıştır. Daha sonra 12. yüzyılda Bhaskara ve 14. yüzyılda Narayana bu denklemin genel çözümlerini bulmuşlardır. Bu denklemde $n=2$ alındığında (x,y) çözümleri, Pell ve Pell-Lucas sayıları olmaktadır [1], [49]. x ve y değişkenlerine sahip ikinci dereceden en genel Diophantine denklemi, $a,\ c,\ k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $ax^2 + cy^2 = k$ biçimindedir.

Lucas, x ve y ardışık Fibonacci sayıları ise, (x,y) ikilisinin $x^2 - xy - y^2 = \mp 1$ hiperbolü üzerinde bulunduğunu söylemiştir [9]. [47] numaralı kaynakta ise

Wasteels, $x^2 - xy - y^2 = \mp 1$ denkleminin tüm tamsayı çözümlerinin ardışık Fibonacci sayıları olduğunu ispatlamıştır. Jones, [21] numaralı kaynakta, ${F_{n+1}}^2 - F_{n+1}F_n - {F_n}^2 = (-1)^n$ olduğunu tümevarımla göstererek, x ve y ler pozitif tamsayılar ve $x^2 - xy - y^2 = \mp 1$ ise $x = F_n$ ve $y = F_{n-1}$ olacak biçimde pozitif n tamsayısının mevcut olduğunu ispatlamıştır. Daha sonra Jones, [22] numaralı kaynakta, herhangi bir pozitif y tamsayısının bir Lucas sayısı olması için gerekli ve yeterli şartın, $x^2 - xy - y^2 = \mp 5$ olacak biçimde bir pozitif x tamsayısının mevcut olması gerektiğini ispatlamıştır. Ayrıca Vajda, [45] numaralı kaynakta, $x^2 - xy - y^2 = \mp 1$ denklemlerinin çözümlerinin, $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $(x, y) = (F_n, F_{n-1})$ biçiminde olduğunu ve bundan yararlanarak $u^2 - 5v^2 = \mp 4$ denklemlerinin çözümlerinin de $(u, v) = (L_n, F_n)$ biçiminde olduğunu göstermiştir. Bu çalışmanın ikinci bölümünde de, $x^2 - xy - y^2 = \mp 1$ ve $x^2 - xy - y^2 = \mp 5$ denklemlerinin tüm tamsayı çözümlerinin, $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere, sırasıyla $(x, y) = \mp(F_n, F_{n-1})$ ve $(x, y) = \mp(L_n, L_{n-1})$ biçiminde olduğu, Sonuç 2.2 ve Sonuç 2.5'de verilmiştir.

W_n ve W_{n+1} ler, (2.1) ile verilen tekrarlama bağıntısını sağlayan $\{W_n\}$ dizisinin elemanları olmak üzere, $(x, y) = (W_n, W_{n+1})$ ikililerinin

$$qx^2 + y^2 - pxy + eq^n = 0 \qquad (2.2)$$

denklemini sağladığını, Horadam [18] numaralı kaynakta göstermiştir. Ayrıca p ve q ya göre bu denklemlerin belirttiği konikleri incelemiştir. Bergum ise [4] numaralı kaynakta, Horadam'ın verdiği denklemleri genelleştirerek, p ve q nun farklı değerleri için bazı konikleri ele almıştır. [23] numaralı kaynakta, Jones ve Kiss, Horadam'ın [18] ve Bergum'un [4] numaralı kaynaklarda ele aldığı koniklerin geometrik özelliklerini incelemişlerdir.

McDaniel, [34] numaralı kaynakta, $q = \mp 1$ ise (2.2) ile verilen denklemin, $(x, y) = (W_n, W_{n+1})$ noktaları dışında çözümünün olmadığını ispatlamıştır. Böylece

Jones'un [21] ve [22] numaralı kaynaklarda verdiği sonuçları genelleştirmiştir. Ayrıca McDaniel, $x^2-\left(p^2+4\right)y^2=\mp 4$ denklemlerinin çözümlerinin, $n\in\mathbb{Z}$ olmak üzere $\left(x,y\right)=\left(V_n,U_n\right)$ biçiminde olduğunu ve $x^2-\left(p^2-4\right)y^2=4$ denkleminin çözümlerinin, $n\in\mathbb{Z}$ olmak üzere $\left(x,y\right)=\left(v_n,u_n\right)$ biçiminde olduğunu göstermiştir.

Kimberling, [30] numaralı kaynakta, koordinatları Fibonacci sayıları olan sonsuz çoklukta noktadan geçen tüm hiperbolleri, n pozitif tamsayı olmak üzere;

$$x^2+\left(-1\right)^{n+1}L_nxy+\left(-1\right)^n y^2+F_n^2=0 \tag{2.3}$$

ve

$$x^2+\left(-1\right)^{n+1}L_nxy+\left(-1\right)^n y^2-F_n^2=0 \tag{2.4}$$

biçiminde sınıflandırmıştır. Bu hiperbolleri de "Fibonacci Hiperbolleri" olarak adlandırmıştır. Ancak Kimberling, bu hiperbollerin geçtiği bütün pozitif tamsayı noktalarının $\left(F_m,F_r\right)$ şeklindeki Fibonacci sayı çiftleri olduğunu ispatlamamıştır. Brandt ise [5] numaralı kaynakta, bu soruyu ele alarak n nin çift tamsayı olması durumunda (2.3) denkleminin bir çözümünün $\left(1,F_{n-1}\right)$ biçiminde olduğunu göstermiştir ve (2.3) ve (2.4)'deki denklemlerin tüm pozitif $\left(x,y\right)$ çözümlerinin Fibonacci sayıları olduğunu iddia etmiştir. Dolayısıyla, katsayıları Fibonacci ve Lucas sayıları olan $ax^2+bxy+cy^2=k$ biçimindeki Diophantine denklemlerinin araştırılması, bir ilgi alanı oluşturmuştur.

Jones [24] numaralı kaynakta, $x^2-\left(p^2\mp 4\right)y^2=\mp 4$, $x^2-\left(p^2\mp 1\right)y^2=\mp 4$, $x^2-\left(p^2\mp 1\right)y^2=\mp 1$ ve $x^2-\left(p^2\mp 4\right)y^2=\mp 1$ denklemlerinin çözümlerinin olup olmadığını, çözümleri varsa ne olduğunu araştırmıştır. İspatladığı teoremlerde Fermat'ın sonsuz azalanlar metodunu kullanmıştır.

[2] numaralı kaynakta, Andreescu ve Andrica, $x^2+y^2+1=xyz$ Diophantine denkleminin tüm çözümlerinin Fibonacci sayıları olduğunu göstermiştir. Ayrıca $k>2$ olmak üzere $x^2-\left(k^2-4\right)y^2=-1$ denkleminin çözümünün olması için gerekli ve yeterli şartın $k=3$ olduğunu ispatlamıştır.

[8] numaralı kaynakta ise Demirtürk ve Keskin, bilinen $x^2-L_nxy-y^2=\mp1$, $x^2-L_nxy+\left(-1\right)^n y^2=\mp5$ Diophantine denklemlerinin ve $x^2-5F_nxy-5\left(-1\right)^n y^2=\mp1$, $x^2-L_{2n}xy+y^2=\mp5F_n^2$, $x^2-L_{2n}xy+y^2=\mp F_n^2$, $x^2-L_{2n}xy+y^2=\mp L_n^2$, $x^2-L_{2n}xy+y^2=\mp5L_n^2$ Diophantine denklemlerinin tüm tamsayı çözümlerini tespit etmişlerdir.

Bu çalışmada, k bir tamsayı ve a, b, c tamsayıları, Fibonacci, Lucas veya genelleştirilmiş Fibonacci, genelleştirilmiş Lucas sayıları olmak üzere, ikinci dereceden Diophantine denklemi olan $ax^2+bxy+cy^2=k$ biçimindeki denklemlerin tüm $\left(x,y\right)$ çözümlerinin bulunması problemi üzerinde durulacaktır.

Bu bölümde, $\{U_n\}$, $\{V_n\}$ ve $\left\{u_n\right\}$, $\left\{v_n\right\}$ genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas dizilerinin özellikleri incelendikten sonra, literatürde mevcut olmayan,

$$V_n^2-(p^2+4)V_nU_{n+1}+(p^2+4)U_{n+1}^2=(-1)^{n+1}p^2,$$
$$V_{n+1}^2-(p^2+4)V_{n+1}U_n+(p^2+4)U_n^2=(-1)^n p^2,$$
$$v_{n+1}^2-(p^2-4)v_{n+1}u_n-(p^2-4)u_n^2=p^2$$

ve

$$v_n^2-(p^2-4)v_nu_{n+1}-(p^2-4)u_{n+1}^2=p^2$$

özdeşlikleri ispatlarıyla birlikte verileceklerdir. Daha sonra, [18], [34], [37] ve [46] numaralı kaynaklarda çözümleri belirlenmiş olan,

$$x^2 - pxy - y^2 = \mp 1,$$
$$x^2 - pxy + y^2 = 1,$$
$$x^2 - pxy - y^2 = \mp(p^2 + 4)$$

ve

$$x^2 - pxy + y^2 = -(p^2 - 4)$$

denklemlerinin tüm tamsayı çözümlerinin verildiği teoremler farklı yollardan ispatlanacaktır. Ayrıca,

$$x^2 - (p^2 + 4)xy + (p^2 + 4)y^2 = \mp p^2$$

ve

$$x^2 - (p^2 - 4)xy - (p^2 - 4)y^2 = p^2$$

Diophantine denklemlerinin tüm tamsayı çözümleri tespit edilecektir.

2.1. Genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas Dizileri $\{U_n\}$ ve $\{V_n\}$ ile İlgili Temel Teoremler, Özdeşlikler ve Bazı Diophantine Denklemleri

$\{U_n\}$ dizisinin karakteristik denklemi $x^2 - px - 1 = 0$ olup bu denklemin kökleri $\alpha = \left(p + \sqrt{p^2 + 4}\right)/2$ ve $\overline{\alpha} = \beta = \left(p - \sqrt{p^2 + 4}\right)/2$ dir. Burada $\alpha\beta = -1$, $\alpha^2 = p\alpha + 1$ ve $\alpha + \beta = p$ dir.

$a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{Z}$ olmak üzere, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ kümesi, [48] numaralı kaynakta,

$$(a,b)(c,d) = (pac + ad + bc, ac + bd) \tag{2.5}$$

ile tanımlanan çarpma işlemi ve

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$$

toplama işlemi ile birlikte ele alınsın. Buradan

$$(a,b)(c,d)=(pac+ad+bc,ac+bd)=(pca+cb+da,ca+db)=(c,d)(a,b)$$

olduğu kolaylıkla görülebilir. Ayrıca, $+$ işleminin birim elemanı $(0,0)$ ve (2.5)'de verilen çarpma işleminin birim elemanı $(0,1)$ dir. Böylece $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ nin, birim elemanı $(0,1)$ olan değişmeli bir halka olduğu görülür.

$\alpha=\left(p+\sqrt{p^2+4}\right)/2$ olmak üzere $\mathbb{Z}[\alpha]=\{a\alpha+b : a,\ b\in\mathbb{Z}\}$ olsun. Bu takdirde $\mathbb{Z}[\alpha]$, $\mathbb{Q}(\sqrt{p^2+4})$ reel kuadratik cisminin cebirsel tamsayılar halkasının bir alt halkasıdır ve eğer p^2+4 karesiz bir tamsayı ise $\mathbb{Z}[\alpha]$, $\mathbb{Q}(\sqrt{p^2+4})$ reel kuadratik cisminin cebirsel tamsayılar halkasına eşittir.

Şimdi $\phi : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}[\alpha]$, $\phi\big((a,b)\big)=a\alpha+b$ ile verilen bir fonksiyon tanımlansın. Her $a,\ b,\ c,\ d\in\mathbb{Z}$ için,

$$\begin{aligned}(a\alpha+b)(c\alpha+d)&=\alpha^2ac+\alpha(ad+bc)+bd\\&=\left(p\alpha+1\right)ac+\alpha(ad+bc)+bd\\&=(pac+ad+bc)\alpha+ac+bd\end{aligned}$$

ve

$$(a\alpha+b)+(c\alpha+d)=(a+c)\alpha+b+d$$

olduğundan, ϕ bir halka homomorfizması olur. Ayrıca ϕ, birebir ve örten olduğundan bir halka izomorfizmasıdır.

Önerme 2.1. $\alpha x+y$ nin, $\mathbb{Z}[\alpha]$ halkasında bir birim olması için gerekli ve yeterli şart $-x^2+pxy+y^2=\mp 1$ olmasıdır.

İspat. $\alpha x+y$, $\mathbb{Z}[\alpha]$ halkasında bir birim olsun. Bu durumda $(\alpha x+y)(\alpha z+r)=1$ olacak biçimde $z,\ r\in\mathbb{Z}$ vardır. Böylece $(\bar{\alpha}x+y)(\bar{\alpha}z+r)=1$ olur. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}1&=(\alpha x+y)(\alpha z+r)(\bar{\alpha}x+y)(\bar{\alpha}z+r)\\&=(\alpha x+y)(\bar{\alpha}x+y)(\alpha z+r)(\bar{\alpha}z+r)\\&=\left(-x^2+pxy+y^2\right)\left(-z^2+pzr+r^2\right)\end{aligned}$$

yazılabilir. O halde $-x^2+pxy+y^2=\mp 1$ elde edilir.

Tersine, eğer $-x^2+pxy+y^2=\mp 1$ ise $\mp 1=-x^2+pxy+y^2=(\alpha x+y)\left(\overline{\alpha}x+y\right)$ dir. O halde $\alpha x+y$, $\mathbb{Z}[\alpha]$ halkasında bir birimdir.

Şimdi Diophantine denklemlerinin çözümünde kullanılacak olan aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 2.1.1. $\mathbb{Z}[\alpha]$ halkasının birimlerinin kümesi $\left\{\mp\alpha^n \mid n\in\mathbb{Z}\right\}$ dir.

İspat: Teoremin ispatı için $\mathbb{Z}[\alpha]$ halkasında her $\omega\geq 1$ biriminin, $n\geq 0$ olmak üzere α^n biçiminde olduğunu göstermek yeterli olacaktır. İlk olarak $1<\omega<\alpha$ olacak biçimde bir ω biriminin olmadığını gösterelim. Bunun için de, $\mathbb{Z}[\alpha]$ halkasında $1<\omega<\alpha$ olacak biçimde bir $\omega=\alpha x+y$ biriminin olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\alpha x+y$ bir birim olduğundan, $-x^2+pxy+y^2=(\alpha x+y)\left(\overline{\alpha}x+y\right)=\mp 1$ olur. Buradan $|\alpha x+y|\left|\overline{\alpha}x+y\right|=1$ elde edilir. $\left|(\alpha x+y)\left(\overline{\alpha}x+y\right)\right|=1$ ve $1<\alpha x+y$ olduğundan $\left|\overline{\alpha}x+y\right|<1$ dir. Dolayısıyla $-1<\overline{\alpha}x+y<1$ olur. Böylece

$0 < x(\alpha + \overline{\alpha}) + 2y$, yani $0 < px + 2y$ elde edilir.

Diğer taraftan $-1 < -\overline{\alpha}x - y < 1$ ve $1 < \alpha x + y$ olduğundan $0 < x(\alpha - \overline{\alpha}) = (\sqrt{p^2+4})x$ elde edilir. Şu halde $x > 0$ dır. Böylece $1 < \alpha x + y < \alpha$ olduğundan $y < \alpha - \alpha x = \alpha(1-x) \leq 0$ bulunur. Yani $y < 0$ dır. Ayrıca $pxy + y^2 = \mp 1 + x^2 \geq 0$ olduğundan $y\left(px + y\right) \geq 0$ olur. Dolayısıyla, $y < 0$ olduğundan $px + y \leq 0$ bulunur. Böylece $0 < px + 2y$ ve $px + y \leq 0$ eşitsizliklerinden $y = \left(px + 2y\right) - \left(px + y\right) > 0$ olduğu görülür. Bu ise $y < 0$ olması ile çelişir.

Şimdi $\omega > 1$ bir birim ve $\omega \neq \alpha$ olsun. Eğer her $n \geq 2$ için $\omega \neq \alpha^n$ ise $\alpha^m < \omega < \alpha^{m+1}$ olan bir $m \geq 2$ doğal sayısı vardır. Böylece $1 < \omega / \alpha^m < \alpha$ ve ω / α^m, $\mathbb{Z}[\alpha]$ halkasında bir birim olur. Fakat bu mümkün değildir. Dolayısıyla $\omega = \alpha^n$ olacak biçimde $n \geq 2$ doğal sayısı vardır. Böylece, eğer $\omega \geq 1$ bir birim ise, $n \geq 0$ olmak üzere $\omega = \alpha^n$ olduğu görülür.■

$\mathbb{Z}[\alpha]$ halkasının birimleri, $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $\mp\alpha^n$ biçiminde olduğundan $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ halkasının birimleri de $\phi^{-1}\left(\mp\alpha^n\right)$ biçimindedir. ϕ fonksiyonunun tanımından, $\phi\left((1,0)\right) = 1\cdot\alpha + 0 = \alpha$ ve $\phi^{-1}(\alpha) = (1,0)$ dır. Buradan

$$\phi^{-1}(\mp\alpha^n) = \mp\phi^{-1}(\alpha^n) = \mp\left(\phi^{-1}(\alpha)\right)^n = \mp(1,0)^n$$

olur. Böylece $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ halkasının bütün birimleri, $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere, $\mp(1,0)^n$ biçimindedir.

Şimdi de ispatı tümevarımla yapılacak olan bir teorem verilsin.

Teorem 2.1.2. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\left(1,0\right)^n = \left(U_n, U_{n-1}\right)$ ve $\left(1,0\right)^{-n} = \left((-1)^{n+1}U_n, (-1)^n U_{n+1}\right)$ dir.

İspat. $n=1$ için $\left(1,0\right)=\left(U_1,U_0\right)$ dır. Şimdi $\left(1,0\right)^m=\left(U_m,U_{m-1}\right)$ olduğunu kabul edelim. Buradan

$$\left(1,0\right)^{m+1}=\left(1,0\right)^m\left(1,0\right)=\left(U_m,U_{m-1}\right)\left(1,0\right)=\left(pU_m+U_{m-1},U_m\right)=\left(U_{m+1},U_m\right)$$

bulunur. Dolayısıyla her $n\in\mathbb{N}$ için $\left(1,0\right)^n=\left(U_n,U_{n-1}\right)$ dir.

Yukarıda yaptığımız gibi tümevarımla, her $n\in\mathbb{N}$ için $\left(1,0\right)^{-n}=\left((-1)^{n+1}U_n,(-1)^nU_{n+1}\right)$ olduğu gösterilebilir. $n=1$ için $\left(1,0\right)^{-1}=(1,-p)=\left(U_{-1},U_{-2}\right)$ dir. Şimdi $\left(1,0\right)^{-m}=\left((-1)^{m+1}U_m,(-1)^mU_{m+1}\right)$ olsun. Böylece

$$\begin{aligned}\left(1,0\right)^{-(m+1)}&=\left(1,0\right)^{-m}\left(1,0\right)^{-1}=\left((-1)^{m+1}U_m,(-1)^mU_{m+1}\right)\left(1,-p\right)\\&=((-1)^mU_{m+1},(-1)^{m+1}(pU_{m+1}+U_m))\\&=((-1)^mU_{m+1},(-1)^{m+1}U_{m+2})\end{aligned}$$

olur. Sonuç olarak, her $n\in\mathbb{N}$ için

$$\left(1,0\right)^{-n}=\left((-1)^{n+1}U_n,(-1)^nU_{n+1}\right)$$

bulunur.■

Teorem 2.1.2'ye göre, her $n\in\mathbb{N}$ için

$$\left(1,0\right)^{-n}=\left(\left(-1\right)^{n+1}U_n,\left(-1\right)^nU_{n+1}\right)=\left(U_{-n},U_{-n-1}\right)$$

yazılabilir. Dolayısıyla her $n\in\mathbb{Z}$ için $(1,0)^n=\left(U_n,U_{n-1}\right)$ dir.

Teorem 2.1.2 ve $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ halkasının $\left(0,1\right)$ birim elemanlı, değişmeli bir halka olduğu kullanılarak, $x,\ y \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$\left(x,0\right)^n = \left(x^n U_n, x^n U_{n-1}\right) \tag{2.6}$$

ve

$$\left(0,y\right)^n = \left(0,y^n\right) \tag{2.7}$$

olduğu görülür. Şimdi (2.6) ve (2.7) eşitlikleri göz önüne alınarak aşağıdaki önerme verilebilir.

Önerme 2.2. $x,\ y \in \mathbb{Z}$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$\left(x,y\right)^n = \left(\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x^j y^{n-j}U_j, \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x^j y^{n-j}U_{j-1}\right)$$

dir.

İspat. (2.6) ve (2.7) eşitlikleri kullanılarak,

$$\begin{aligned}
\left(x,y\right)^n &= \left(\left(x,0\right)+\left(0,y\right)\right)^n = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\left(x,0\right)^j\left(0,y\right)^{n-j} \\
&= \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\left(x^j U_j, x^j U_{j-1}\right)\left(0,y^{n-j}\right) \\
&= \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\left(x^j y^{n-j}U_j, x^j y^{n-j}U_{j-1}\right) \\
&= \left(\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x^j y^{n-j}U_j, \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x^j y^{n-j}U_{j-1}\right)
\end{aligned}$$

bulunur. ■

Yukarıdaki önermeden faydalanarak aşağıdaki teorem verilebilir. Bu teoremdeki özdeşlikler [38] numaralı kaynakta mevcut olup ispatları burada farklı yoldan elde edilecektir.

Teorem 2.1.3. $m,\ r \in \mathbb{Z}$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$U_{mn+r} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} U_m^j U_{m-1}^{n-j} U_{j+r} \text{ ve } U_{mn+r-1} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} U_m^j U_{m-1}^{n-j} U_{j+r-1}$$

dir [38].

İspat. Önerme 2.2'den faydalanarak

$$\begin{aligned} x^{mn} &= \left(x^m\right)^n = \left(U_m, U_{m-1}\right)^n \\ &= \left(\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} U_m^j U_{m-1}^{n-j} U_j, \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} U_m^j U_{m-1}^{n-j} U_{j-1} \right) \end{aligned}$$

yazılabilir. Ayrıca $x^{mn+r} = (U_{mn+r}, U_{mn+r-1})$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} (U_{mn+r}, U_{mn+r-1}) = x^{mn+r} &= x^{mn} x^r \\ &= \left(\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} U_m^j U_{m-1}^{n-j} U_j, \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} U_m^j U_{m-1}^{n-j} U_{j-1} \right) (U_r, U_{r-1}) \\ &= \left(\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} U_m^j U_{m-1}^{n-j} U_{j+r}, \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} U_m^j U_{m-1}^{n-j} U_{j+r-1} \right) \end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$U_{mn+r} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} U_m^j U_{m-1}^{n-j} U_{j+r}$$

ve

$$U_{mn+r-1} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} U_m^j U_{m-1}^{n-j} U_{j+r-1}$$

toplamları elde edilir. ■

Şimdi Cassini Özdeşliği olarak bilinen ve farklı yoldan ispatlanacak olan özdeşlik aşağıda verilsin.

Teorem 2.1.4. (Cassini Özdeşliği) Her $n \in \mathbb{Z}$ için $U_n^2 - pU_nU_{n-1} - U_{n-1}^2 = (-1)^{n+1}$ dir.

İspat. Eğer $n = 0$ ise iddia doğrudur. Şimdi $n > 0$ ve $x = (1,0)$ olsun. Teorem 2.1.2'ye göre $x^n = (1,0)^n = (U_n, U_{n-1})$ ve $x^{-n} = (1,0)^{-n} = \left((-1)^{n+1} U_n, (-1)^n U_{n+1}\right)$ olduğundan,

$$\begin{aligned}(0,1) = x^n x^{-n} &= (U_n, U_{n-1})\left((-1)^{n+1} U_n, (-1)^n U_{n+1}\right) \\ &= \left((-1)^n \left(-pU_n^2 + U_nU_{n+1} - U_nU_{n-1}\right), (-1)^n \left(-U_n^2 + U_{n-1}U_{n+1}\right)\right)\end{aligned}$$

bulunur. Buradan $U_n^2 - U_{n-1}U_{n+1} = (-1)^{n+1}$ elde edilir. Bu özdeşlikte $U_{n+1} = pU_n + U_{n-1}$ olduğu kullanılırsa, $U_n^2 - pU_nU_{n-1} - U_{n-1}^2 = (-1)^{n+1}$ bulunur.

Eğer $n < 0$ ise U_n ve U_{n-1} tanımlarından faydalanarak $U_n^2 - pU_nU_{n-1} - U_{n-1}^2 = (-1)^{n+1}$ olduğu görülebilir. O halde, her $n \in \mathbb{Z}$ için $U_n^2 - pU_nU_{n-1} - U_{n-1}^2 = (-1)^{n+1}$ dir. ■

[17], [38] ve [40] numaralı kaynaklarda da mevcut olan özdeşliklerin ispatı, aşağıdaki önermede farklı yoldan verilecektir.

Önerme 2.3. Her $n \in \mathbb{Z}$ için $\alpha^n = \alpha U_n + U_{n-1}$ ve $\beta^n = \beta U_n + U_{n-1}$ dir [17], [38], [40].

İspat. $\phi((1,0))=\alpha$ olduğundan $\phi\left((1,0)^n\right)=\left(\phi((1,0))\right)^n=\alpha^n$ dir. Ayrıca ϕ fonksiyonunun tanımından,

$$\phi\left((1,0)^n\right)=\phi((U_n,U_{n-1}))=\alpha U_n+U_{n-1}$$

olur. Böylece

$$\alpha^n=\alpha U_n+U_{n-1} \tag{2.8}$$

bulunur. $\alpha\beta=-1$ olduğundan,

$$\begin{aligned}\beta^n&=\left(-\alpha^{-1}\right)^n=(-1)^n\alpha^{-n}=(-1)^n\left(\alpha U_{-n}+U_{-n-1}\right)\\&=(-1)^n\left(\alpha(-1)^{n+1}U_n+(-1)^nU_{n+1}\right)=-\alpha U_n+U_{n+1}\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\beta^n=-\alpha U_n+U_{n+1} \tag{2.9}$$

dir. Bu denklemde $\alpha=p-\beta$ olduğu kullanılırsa,

$$\beta^n=\beta U_n+U_{n-1} \tag{2.10}$$

bulunur. ■

(2.8), (2.9) ve (2.10) eşitliklerinden,

$$V_n=\alpha^n+\beta^n \quad \text{ve} \quad U_n=\left(\alpha^n-\beta^n\right)/\sqrt{p^2+4} \tag{2.11}$$

elde edilir. (2.11)'de verilen bu özdeşliklere Binet formülleri denir ve bu formüller kullanılarak, her $n \in \mathbb{Z}$ için $V_n = U_{n-1} + U_{n+1} = 2U_{n+1} - pU_n$ olduğu görülebilir.

Önerme 2.3'den faydalanarak, üçüncü bölümde kullanılmak üzere aşağıdaki özdeşlikler verilebilir. Önerme 2.4, Sonuç 2.1, Önerme 2.6 ve Teorem 2.1.5'deki özdeşlikler [38] ve [42] numaralı kaynaklarda mevcut olup, burada farklı yoldan ispatları verilecektir.

Önerme 2.4. Her $m, n \in \mathbb{Z}$ için $U_{n+m} = U_n U_{m+1} + U_{n-1} U_m$ ve $V_{n+m} = U_n V_{m+1} + U_{n-1} V_m$ dir [38], [42].

İspat. $x = (1,0)$ olsun. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}\left(U_{n+m}, U_{n+m-1}\right) = x^{n+m} &= x^n x^m \\ &= (1,0)^n (1,0)^m = \left(U_n, U_{n-1}\right)\left(U_m, U_{m-1}\right) \\ &= \left(U_n U_{m+1} + U_{n-1} U_m, U_n U_m + U_{n-1} U_{m-1}\right)\end{aligned}$$

olur. Böylece

$$U_{n+m} = U_n U_{m+1} + U_{n-1} U_m$$

ve

$$U_{n+m-1} = U_n U_m + U_{n-1} U_{m-1}$$

özdeşlikleri bulunur. Bu iki özdeşlikten,

$$\begin{aligned}U_{n+m+1} &= pU_{n+m} + U_{n+m-1} \\ &= U_n\left(pU_{m+1} + U_m\right) + U_{n-1}\left(pU_m + U_{m-1}\right) \\ &= U_n U_{m+2} + U_{n-1} U_{m+1}\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} V_{n+m} &= U_{n+m-1} + U_{n+m+1} \\ &= U_n\left(U_m + U_{m+2}\right) + U_{n-1}\left(U_{m-1} + U_{m+1}\right) \\ &= U_n V_{m+1} + U_{n-1} V_m \end{aligned}$$

elde edilir. ■

Şimdi de Teorem 2.1.4 kullanılarak ispatlanan bir sonuç verilsin.

Sonuç 2.1. Her $n \in \mathbb{Z}$ için $V_n^2 - (p^2+4)U_n^2 = 4\left(-1\right)^n$ dir [38], [42].

İspat. Teorem 2.1.4'e göre,

$$U_{n+1}^2 - pU_{n+1}U_n - U_n^2 = \left(-1\right)^n \tag{2.12}$$

yazılabilir. (2.12) özdeşliğinin her iki tarafı 4 ile çarpılırsa,

$$\left(2U_{n+1} - pU_n\right)^2 - (p^2+4)U_n^2 = 4\left(-1\right)^n$$

olur. $2U_{n+1} - pU_n = V_n$ olduğundan,

$$V_n^2 - (p^2+4)U_n^2 = 4\left(-1\right)^n \tag{2.13}$$

elde edilir. ■

Önerme 2.5. $x = (1,0)$ olsun. Bu durumda her $n \in \mathbb{Z}$ için, $(2,-p)x^n = (V_n, V_{n-1})$ dir.

İspat.

$$x^{n+1} + x^{n-1} = (U_{n+1}, U_n) + (U_{n-1}, U_{n-2}) = (V_n, V_{n-1})$$

ve

$$x^{n+1}+x^{n-1}=x^{n}(x+x^{-1})=x^{n}\left((1,0)+(1,-p)\right)=(2,-p)x^{n}$$

olup buradan istenilen elde edilir. ■

Önerme 2.6. Her $m,\ n\in\mathbb{Z}$ için $(p^{2}+4)U_{n+m}=V_{n}V_{m+1}+V_{n-1}V_{m}$ dir [38].

İspat. $x=(1,0)$ olsun. Önerme 2.5'e göre $(2,-p)x^{n}=(V_{n},V_{n-1})$ ve $(2,-p)x^{m}=(V_{m},V_{m-1})$ yazılabilir. Bu iki eşitlik taraf tarafa çarpılırsa,

$$(2,-p)x^{n}(2,-p)x^{m}=(V_{n},V_{n-1})(V_{m},V_{m-1})=\left(V_{n}V_{m+1}+V_{n-1}V_{m},V_{n}V_{m}+V_{n-1}V_{m-1}\right)$$

ve ayrıca

$$(2,-p)x^{n}(2,-p)x^{m}=\left(0,p^{2}+4\right)x^{n+m}=\left(\left(p^{2}+4\right)U_{n+m},\left(p^{2}+4\right)U_{n+m-1}\right)$$

olur. Yukarıda bulunan bu iki eşitlikten,

$$(p^{2}+4)U_{n+m}=V_{n}V_{m+1}+V_{n-1}V_{m} \tag{2.14}$$

elde edilir. ■

Teorem 2.1.5. Her $n\in\mathbb{Z}$ için $V_{n}^{2}-pV_{n}V_{n-1}-V_{n-1}^{2}=(-1)^{n}(p^{2}+4)$ dir [38].

İspat. $(2,-p)x^{n}=(V_{n},V_{n-1})$ olduğundan,

$$(2,-p)x^{-n}=(V_{-n},V_{-n-1})=\left((-1)^{n}V_{n},(-1)^{n+1}V_{n+1}\right)$$

olur. Buradan

$$(0,p^2+4)=(2,-p)x^n(2,-p)x^{-n}=(V_n,V_{n-1})(V_{-n},V_{-n-1})$$
$$=(V_n,V_{n-1})\left((-1)^nV_n,(-1)^{n+1}V_{n+1}\right)=\left(0,(-1)^n(V_n^2-V_{n+1}V_{n-1})\right)$$

elde edilir. Dolayısıyla $p^2+4=(-1)^n(V_n^2-V_{n+1}V_{n-1})$ dir. Bu eşitlikte $V_{n+1}=pV_n+V_{n-1}$ olduğu kullanılırsa,

$$V_n^2-pV_nV_{n-1}-V_{n-1}^2=(-1)^n(p^2+4) \tag{2.15}$$

bulunur.■

Şimdi de yukarıda verilen önerme ve teoremlerden faydalanarak, bazı Diophantine denklemleri ve bunların çözümlerini verelim. Aşağıdaki teoremin ispatı Teorem 2.1.4 kullanılarak yapılacaktır.

Teorem 2.1.6. $x^2-pxy-y^2=\mp 1$ denkleminin tüm tamsayı çözümleri, $n\in\mathbb{Z}$ olmak üzere $(x,y)=\mp(U_n,U_{n-1})$ biçimindedir [46].

İspat. Teorem 2.1.4'e göre $(x,y)=\mp(U_n,U_{n-1})$ ikililerinin $x^2-pxy-y^2=\mp 1$ denklemini sağladığı görülür. Şimdi $x^2-pxy-y^2=\mp 1$ olsun. Bu durumda $\alpha x+y$, $\mathbb{Z}[\alpha]$ halkasında bir birimdir. O halde $\alpha x+y=\mp\alpha^n$ olacak biçimde bir n tamsayısı vardır. Böylece

$$(x,y)=\phi^{-1}(\alpha x+y)=\phi^{-1}(\mp\alpha^n)=\mp(\phi^{-1}(\alpha))^n=\mp(1,0)^n=\mp(U_n,U_{n-1})$$

olur. ■

$p=1$ olduğunda Teorem 2.1.6'nın bir sonucu şu şekilde verilebilir.

Sonuç 2.2. $x^2-xy-y^2=\mp 1$ denkleminin tüm tamsayı çözümleri, $n\in\mathbb{Z}$ olmak üzere $(x,y)=\mp(F_n,F_{n-1})$ biçimindedir [21].

Sonuç.2.3. $x^2 - pxy - y^2 = -1$ denkleminin tüm tamsayı çözümleri, $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $(x, y) = \mp(U_{2n}, U_{2n-1})$ biçimindedir. $x^2 - pxy - y^2 = 1$ denkleminin tüm tamsayı çözümleri, $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $(x, y) = \mp(U_{2n+1}, U_{2n})$ biçimindedir [34], [46].

Sonuç 2.4. $x^2 - pxy - y^2 = \mp 1$ denkleminin negatif olmayan tüm tamsayı çözümleri, $n \geq 0$ olmak üzere $(x, y) = (U_n, U_{n-1})$ biçimindedir [34], [46].

İspat. x ve y negatif olmayan tamsayılar olmak üzere $x^2 - pxy - y^2 = \mp 1$ olsun. Bu durumda $\alpha x + y \geq 1$ olup $\alpha x + y$ birim olduğundan, $\alpha x + y = \alpha^n$ olacak biçimde $n \geq 0$ vardır. Buradan $\alpha x + y = \alpha^n = \alpha U_n + U_{n-1}$ bulunur ve böylece $(x, y) = (U_n, U_{n-1})$ olduğu görülür. ■

Teorem 2.1.7. $u^2 - (p^2 + 4)v^2 = \mp 4$ denkleminin negatif olmayan tüm tamsayı çözümleri, $n \geq 0$ olmak üzere $(u, v) = (V_n, U_n)$ biçimindedir [24].

İspat. Eğer $(u, v) = (V_n, U_n)$ ise Sonuç 2.1'e göre $u^2 - (p^2 + 4)v^2 = \mp 4$ olur. Şimdi x ve y negatif olmayan tamsayılar olmak üzere $u^2 - (p^2 + 4)v^2 = \mp 4$ olduğunu kabul edelim. Buradan $u^2 - p^2v^2$ nin bir çift tamsayı olduğu görülür. Dolayısıyla u ve pv aynı anda çift veya aynı anda tek olmalıdır. Şu halde $x = (u + pv)/2$ ve $y = v$ alınırsa,

$$x^2 - pxy - y^2 = \frac{(u + pv)^2 - 2pv(u + pv) - 4v^2}{4} = \frac{u^2 - (p^2 + 4)v^2}{4} = \mp 1$$

bulunur. Böylece $n \geq 0$ olmak üzere $x = (u + pv)/2 = U_{n+1}$ ve $v = y = U_n$ olur. Dolayısıyla $u = 2x - pv = 2U_{n+1} - pU_n = V_n$ olup $(u, v) = (V_n, U_n)$ elde edilir. ■

Aşağıdaki teoremde verilen denklemlerin pozitif tamsayı çözümleri, [18] numaralı kaynakta Horadam tarafından tespit edilmiştir. Burada ise bu denklemlerin tüm tamsayı çözümleri verilecektir.

Teorem 2.1.8. p^2+4 karesiz bir tamsayı olsun. Bu durumda $x^2-pxy-y^2=\mp(p^2+4)$ denkleminin tüm tamsayı çözümleri, $n\in\mathbb{Z}$ olmak üzere $(x,y)=\mp(V_n,V_{n-1})$ biçimindedir.

İspat. Eğer $(x,y)=\mp(V_n,V_{n-1})$ ise bu durumda (2.15) özdeşliğinden $x^2-pxy-y^2=\mp(p^2+4)$ elde edilir. Şimdi $x^2-pxy-y^2=\mp(p^2+4)$ olduğunu kabul edelim. Buradan $(2x-py)^2-(p^2+4)y^2=\mp4(p^2+4)$ yazılabilir. (p^2+4) karesiz olduğundan, bu son eşitlikten $(p^2+4)\,|\,2x-py$ elde edilir. Benzer şekilde $y^2+pxy-x^2=\mp(p^2+4)$ olduğundan $(2y+px)^2-(p^2+4)x^2=\mp4(p^2+4)$ yazılabilir. Böylece $(p^2+4)\,|\,2y+px$ olduğu görülür. Dolayısıyla, eğer

$$u=(2y+px)/(p^2+4)\text{ ve }v=(2x-py)/(p^2+4) \tag{2.16}$$

alınırsa,

$$\begin{aligned}u^2-puv-v^2&=\left(\frac{2y+px}{p^2+4}\right)^2-k\left(\frac{2y+px}{p^2+4}\right)\left(\frac{2x-py}{p^2+4}\right)-\left(\frac{2x-py}{p^2+4}\right)^2\\&=\frac{-\left(p^2+4\right)\left(x^2-pxy-y^2\right)}{\left(p^2+4\right)^2}=\mp1\end{aligned}$$

bulunur. Böylece Teorem 2.1.6'ya göre $(u,v)=\mp(U_n,U_{n-1})$ olur. Şu halde (2.16) eşitlikleri kullanılırsa, $(x,y)=\mp(V_n,V_{n-1})$ olduğu görülebilir.■

Sonuç 2.5. $x^2-xy-y^2=\mp5$ denkleminin tüm tamsayı çözümleri, $n\in\mathbb{Z}$ olmak üzere $(x,y)=\mp(L_n,L_{n-1})$ biçimindedir [22].

Sonuç 2.6. p^2+4 bir karesiz tamsayı olsun. Bu durumda $x^2-pxy-y^2=\mp(p^2+4)$

denkleminin negatif olmayan tüm tamsayı çözümleri, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $(x, y) = (V_n, V_{n-1})$ biçimindedir [18].

Teorem 2.1.4 ve sırasıyla $U_n = (2U_{n+1} - V_n)/p$, $U_{n+1} = (V_{n+1} - 2U_n)/p$ özdeşlikleri kullanılarak aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 2.7. Her $n \in \mathbb{Z}$ için,

$$V_n^2 - (p^2+4)V_nU_{n+1} + (p^2+4)U_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}p^2$$

ve

$$V_{n+1}^2 - (p^2+4)V_{n+1}U_n + (p^2+4)U_n^2 = (-1)^n p^2$$

dir .

İspat. Teorem 2.1.4'e göre

$$U_n^2 - pU_nU_{n-1} - U_{n-1}^2 = (-1)^{n+1}$$

yazılabilir. Bu özdeşlikte $U_n = (2U_{n+1} - V_n)/p$ eşitliği yerine yazılırsa,

$$\left((2U_{n+1} - V_n)/p\right)^2 - p\left((2U_{n+1} - V_n)/p\right)U_{n-1} - U_{n-1}^2 = (-1)^{n+1}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}(-1)^{n+1}p^2 &= 4U_{n+1}^2 - 4U_{n+1}V_n + V_n^2 - 2p^2U_{n+1}U_{n-1} + p^2V_nU_{n-1} - p^2U_{n-1}^2 \\ &= 4U_{n+1}^2 - 4U_{n+1}V_n + V_n^2 - p^2U_{n-1}(2U_{n+1} - V_n + U_{n-1})\end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitlikte $U_{n-1} = V_n - U_{n+1}$ olduğu kullanılırsa,

$$
\begin{aligned}
(-1)^{n+1}p^2 &= 4U_{n+1}^2 - 4U_{n+1}V_n + V_n^2 - p^2(V_n - U_{n+1})(2U_{n+1} - V_n + V_n - U_{n+1}) \\
&= 4U_{n+1}^2 - 4U_{n+1}V_n + V_n^2 - p^2(V_n - U_{n+1})U_{n+1} \\
&= 4U_{n+1}^2 - 4U_{n+1}V_n + V_n^2 - p^2V_nU_{n+1} + p^2U_{n+1}^2
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece

$$V_n^2 - (p^2+4)V_nU_{n+1} + (p^2+4)U_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}p^2$$

bulunur.

İkinci özdeşliğin ispatı için Teorem 2.1.4'e göre $U_n^2 - pU_nU_{n-1} - U_{n-1}^2 = (-1)^{n+1}$ özdeşliği ve $U_{n+1} = (V_{n+1} - 2U_n)/p$ eşitliği göz önüne alınırsa,

$$(-1)^n = \left((V_{n+1} - 2U_n)/p\right)^2 - p\left((V_{n+1} - 2U_n)/p\right)U_n - U_n^2$$

olur. Böylece

$$(-1)^n p^2 = V_{n+1}^2 - 4V_{n+1}U_n + 4U_n^2 - p^2V_{n+1}U_n + 2p^2U_n^2 - p^2U_n^2$$

eşitliği elde edilir. Buradan da

$$V_{n+1}^2 - (p^2+4)V_{n+1}U_n + (p^2+4)U_n^2 = (-1)^n p^2$$

olduğu görülür. ■

Sonuç 2.8. $x^2 - (p^2+4)xy + (p^2+4)y^2 = \mp p^2$ denkleminin tüm tamsayı çözümleri, $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $(x,y) = \mp(V_{n+1}, U_n)$ biçimindedir.

İspat. Eğer $(x,y) = \mp(V_{n+1}, U_n)$ ise Sonuç 2.7'ye göre

$$x^2-(p^2+4)xy+(p^2+4)y^2=V_{n+1}^2-(p^2+4)V_{n+1}U_n+(p^2+4)U_n^2=(-1)^n p^2=\mp p^2$$

olur. Şimdi $x^2-(p^2+4)xy+(p^2+4)y^2=\mp p^2$ olduğunu kabul edelim. Buradan $(x-2y)^2-p^2\left(y^2-xy\right)=\mp p^2$ yazılabilir. Bu eşitlikten $p^2\,|\,(x-2y)^2$, yani $p\,|\,(x-2y)$ olduğu görülür. O halde $u=(x-2y)/p$ ve $v=y$ alınırsa $u^2-puv-v^2=\mp 1$ bulunur. Böylece Teorem 2.1.6'ya göre $u=\mp U_{n+1}$ ve $v=\mp U_n$ olup buradan x ve y ler çekilerek istenen elde edilir. ■

m bir tek tamsayı ve $p=L_m$ olsun. $L_m^2-5F_m^2=4(-1)^m=-4$ eşitliği kullanılarak,

$$\alpha=\left(p+\sqrt{p^2+4}\right)/2=(L_m+\sqrt{5}F_m)/2=\left(\left(1+\sqrt{5}\right)/2\right)^m$$

ve

$$\beta=\left(p-\sqrt{p^2+4}\right)/2=(L_m-\sqrt{5}F_m)/2=\left(\left(1-\sqrt{5}\right)/2\right)^m$$

bulunur. Böylece $U_n=F_{mn}/F_m$ ve $V_n=L_{mn}$ olur.

Aşağıdaki sonuçların ispatları sırasıyla Teorem 2.1.4, Teorem 2.1.6 ve Teorem 2.1.5'den elde edilebileceğinden, ispatsız olarak verilecektir.

Sonuç 2.9. m bir tek tamsayı olmak üzere, her $n\in\mathbb{Z}$ için

$$F_{mn}^2-L_mF_{mn}F_{m(n-1)}-F_{m(n-1)}^2=(-1)^{n+1}F_m^2$$

dir.

Sonuç 2. 10. m bir tek tamsayı olsun. Bu durumda $x^2-L_mxy-y^2=\mp 1$ denkleminin tüm tamsayı çözümleri, $n\in\mathbb{Z}$ olmak üzere

$$(x,y) = \mp(F_{mn}/F_m, F_{m(n-1)}/F_m)$$

biçimindedir.

Sonuç 2.11. m bir tek tamsayı olsun. Bu durumda her $n \in \mathbb{Z}$ için

$$L_{mn}^2 - L_m L_{mn} L_{m(n-1)} - L_{m(n-1)}^2 = (-1)^n 5F_m^2$$

dir.

2.2. Genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas Dizileri $\{u_n\}$ ve $\{v_n\}$ İle İlgili Temel Teoremler, Özdeşlikler ve Bazı Diophantine Denklemleri

$\{u_n\}$ dizisinin tekrarlama bağıntısının karakteristik denklemi $x^2 - px + 1 = 0$ ve bu denklemin kökleri $\alpha = \left(p + \sqrt{p^2 - 4}\right)/2$ ve $\overline{\alpha} = \beta = \left(p - \sqrt{p^2 - 4}\right)/2$ dir. Burada $\alpha\beta = 1$, $\alpha^2 = p\alpha - 1$ ve $\alpha + \beta = p$ dir.

$a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ kümesi, [48] numaralı kaynakta,

$$(a,b)(c,d) = (pac + ad + bc, -ac + bd)$$

şeklinde tanımlanan çarpma ve

$$\left(a,b\right) + \left(c,d\right) = \left(a + c, b + d\right)$$

toplama işlemi ile birlikte ele alınsın. Buradan,

$$(a,b)(c,d) = (pac + ad + bc, -ac + bd) = (pca + cb + da, -ca + db) = (c,d)(a,b)$$

olduğu kolaylıkla görülebilir. Ayrıca, $+$ işleminin birim elemanı $(0,0)$ ve çarpma işleminin birim elemanı $(0,1)$ dir. Dolayısıyla $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ nin, birim elemanı $(0,1)$ olan değişmeli bir halka olduğu görülebilir.

$\alpha=\left(p+\sqrt{p^2-4}\right)/2$ olmak üzere, $\mathbb{Z}[\alpha]=\{a\alpha+b : a,\ b\in\mathbb{Z}\}$ olsun. Bu taktirde $\mathbb{Z}[\alpha]$, $\mathbb{Q}(\sqrt{p^2-4})$ reel kuadratik cisminin cebirsel tamsayılar halkasının bir alt halkasıdır ve eğer p^2-4 karesiz bir tamsayı ise $\mathbb{Z}[\alpha]$, $\mathbb{Q}(\sqrt{p^2-4})$ reel kuadratik cisminin cebirsel tamsayılar halkasına eşittir.

Bu kısımda, $\phi:\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}[\alpha]$, $\phi((a,b))=a\alpha+b$ ile verilen bir fonksiyon tanımlansın. Her $a,\ b,\ c,\ d\in\mathbb{Z}$ için,

$$\begin{aligned}(a\alpha+b)(c\alpha+d)&=\alpha^2ac+\alpha(ad+bc)+bd\\&=(p\alpha-1)ac+\alpha(ad+bc)+bd\\&=(pac+ad+bc)\alpha-ac+bd\end{aligned}$$

ve

$$(a\alpha+b)+(c\alpha+d)=(a+c)\alpha+b+d$$

olduğundan, ϕ nin bir halka homomorfizması olduğu görülür. Ayrıca ϕ, birebir ve örten olduğundan bir halka izomorfizmasıdır.

Aşağıdaki önermenin ispatı, Önerme 2.1'e benzer şekilde yapılabileceğinden, ispatsız olarak verilecektir.

Önerme 2.7. $x+\alpha y$ nin, $\mathbb{Z}[\alpha]$ halkasında bir birim olması için gerekli ve yeterli koşul $x^2+pxy+y^2=\mp 1$ olmasıdır.

Şimdi bazı Diophantine denklemlerinin çözümünü bulmada önemli olan bir teoremi verelim.

Teorem 2.2.1. $p>3$ olmak üzere, $\mathbb{Z}[\alpha]$ halkasının birimlerinin kümesi $\{\mp\alpha^n : n\in\mathbb{Z}\}$ dir.

İspat. Teoremin ispatı Teorem 2.1.1'e benzer şekilde şöyle yapılabilir. $\alpha x+y$ bir birim ve $1<\alpha x+y<\alpha$ ise bu durumda $x>0$ ve $y<0$ olur. İlk olarak $1<\alpha x+y<\alpha$ olacak biçimde bir $\alpha x+y$ biriminin olmadığını gösterelim. Tersine, $1<\alpha x+y<\alpha$ olacak biçimde bir $\alpha x+y$ biriminin olduğunu kabul edelim. $1<\alpha x+y<\alpha$ ve $\alpha x+y$ bir birim olacak biçimde en küçük pozitif x tamsayısını göz önüne alalım. $1<\alpha x+y<\alpha$ olduğundan $\overline{\alpha}<x+\overline{\alpha}y<1$ dir. Buradan $\overline{\alpha}(\alpha x+y)=x+\overline{\alpha}y$ de bir birim olur. Böylece $1/(x+\overline{\alpha}y)$ de $\mathbb{Z}[\alpha]$ halkasında bir birimdir ve buradan $1<1/(x+\overline{\alpha}y)<1/\overline{\alpha}=\alpha$ bulunur. $\varepsilon=(x+\overline{\alpha}y)(x+\alpha y)$ olsun. Bu durumda $\varepsilon=\mp1$ ve $1<\left(x+\alpha y\right)/\varepsilon<\alpha$ dır. $\varepsilon=1$ olduğunu kabul edelim. Buradan $1<x+\alpha y<\alpha$ olup bu da $y>0$ olmasını gerektirir. Bu ise $y<0$ olmasıyla çelişir. O halde $\varepsilon=-1$ dir. Böylece $1<-x+\alpha(-y)<\alpha$ olur. x, $\alpha x+y$ birim olacak şekilde en küçük pozitif tamsayı ve $-x+\alpha(-y)$ bir birim olduğundan, $x\le -y$ olur. Dolayısıyla $-x+\alpha x\le -x-\alpha y<\alpha$ bulunur. Buradan $x(\alpha-1)\le\alpha$ eşitsizliği yazılabilir. Ayrıca $p>3$ olduğundan $\alpha=\left(p+\sqrt{p^2-4}\right)/2>(3+\sqrt{5})/2>2$ dir. Buradan $x\le\alpha/(\alpha-1)=1+1/(\alpha-1)<2$ olduğu görülür. Dolayısıyla $x=1$ dir. Böylece $-1=\varepsilon=(x+\overline{\alpha}y)(x+\alpha y)=x^2+pxy+y^2$ olduğundan $-1=1+py+y^2$, yani $y(p+y)=-2$ bulunur. O halde $y\,|\,2$ olur. Dolayısıyla $y=-2$ veya $y=-1$ olmak zorundadır. Her iki durumda da $p=3$ olur. Bu ise hipotezle çelişir. ■

Bu teorem $p=3$ için sağlanmaz. Çünkü eğer $p=3$ ise, $\alpha=(3+\sqrt{5})/2=\left[(1+\sqrt{5})/2\right]^2=1+(1+\sqrt{5})/2$ olup $(1+\sqrt{5})/2\in\mathbb{Z}[\alpha]$ dır. Ayrıca her $n\in\mathbb{Z}$ için $(1+\sqrt{5})/2\neq\left[(1+\sqrt{5})/2\right]^{2n}=\alpha^n$ dir.

İspatı Teorem 2.1.2'ye benzer şekilde yapılabileceğinden, aşağıdaki teorem ispatsız olarak verilecektir.

Teorem 2.2.2. Her $n \in \mathbb{N}$ için $(1,0)^n = (u_n, -u_{n-1})$ ve $(1,0)^{-n} = (-u_n, u_{n+1})$ dir.

Böylece Teorem 2.2.2'ye göre, her $n \in \mathbb{N}$ için $(1,0)^{-n} = (-u_n, u_{n+1}) = (u_{-n}, -u_{-(n+1)})$ ve $(1,0)^n = (u_n, -u_{n-1})$ olduğundan, her $n \in \mathbb{Z}$ için $(1,0)^n = (u_n, -u_{n-1})$ bulunur.

Teorem 2.2.2 ve $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ halkasının $(0,1)$ birim elemanlı, değişmeli bir halka olduğu kullanılarak, $x,\ y \in \mathbb{Z}$ olmak üzere,

$$\left(x,0\right)^n = \left(x^n u_n, -x^n u_{n-1}\right) \tag{2.17}$$

ve

$$\left(0,y\right)^n = \left(0, y^n\right) \tag{2.18}$$

olduğu görülür.

(2.17) ve (2.18) eşitlikleri göz önüne alınarak, istenilen elde edilebileceğinden, aşağıdaki önerme ispatsız olarak verilecektir.

Önerme 2.8. $x,\ y \in \mathbb{Z}$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$\left(x,y\right)^n = \left(\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j y^{n-j} u_j, -\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j y^{n-j} u_{j-1} \right)$$

dir.

Aşağıdaki teorem, Önerme 2.8 kullanılarak ispatlanabileceği için, burada ispatsız olarak verilecektir.

Teorem 2.2.3. $m,\ r\in\mathbb{Z}$ ve $n\in\mathbb{N}$ olmak üzere,

$$u_{mn+r}=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^{n-j}u_m^j u_{m-1}^{n-j}u_{j+r} \text{ ve } u_{mn+r-1}=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^{n-j}u_m^j u_{m-1}^{n-j}u_{j+r-1}$$

dir [38].

[40] numaralı kaynakta mevcut olan aşağıdaki teorem, farklı yoldan ispatlanacaktır.

Teorem 2.2.4. Her $n\in\mathbb{Z}$ için $u_n^2-pu_nu_{n-1}+u_{n-1}^2=1$ dir [40].

İspat. Teorem $n=0$ için doğrudur. Şimdi $n>0$ olsun. Dolayısıyla

$$(0,1)=(1,0)^n(1,0)^{-n}=(u_n,-u_{n-1})(-u_n,u_{n+1})=(0,u_n^2-u_{n-1}u_{n+1})$$

dir. Buradan $1=u_n^2-u_{n-1}u_{n+1}$ bulunur. Böylece $u_{n+1}=pu_n-u_{n-1}$ olduğu kullanılırsa, ${u_n}^2-pu_nu_{n-1}+u_{n-1}^2=1$ elde edilir. Eğer $n<0$ ise bu durumda da u_n ve u_{n-1} in tanımları kullanılarak $u_n^2-pu_nu_{n-1}+u_{n-1}^2=1$ olduğu gösterilebilir. ■

[17], [38] ve [40] numaralı kaynaklarda mevcut olan özdeşliklerin ispatı, aşağıdaki önermede farklı yoldan verilecektir.

Önerme 2.9. Her $n\in\mathbb{Z}$ için $\alpha^n=\alpha u_n-u_{n-1}$ ve $\beta^n=\beta u_n-u_{n-1}$ dir. Ayrıca $u_n=\left(\alpha^n-\beta^n\right)/\sqrt{p^2-4}$ ve $v_n=\alpha^n+\beta^n$ dir [17], [38], [40].

İspat. ϕ fonksiyonunun tanımından,

$$\alpha u_n-u_{n-1}=\phi\left(\left(u_n,-u_{n-1}\right)\right)=\phi\left(\left(1,0\right)^n\right)=\left(\phi\left(\left(1,0\right)\right)\right)^n=\alpha^n$$

ve

$$\beta^n = \alpha^{-n} = \alpha u_{-n} - u_{-n-1} = -\alpha u_n + u_{n+1} = (\beta - p)u_n + u_{n+1} = \beta u_n - u_{n-1}$$

yazılabilir. $\alpha^n = \alpha u_n - u_{n-1}$ ve $\beta^n = \beta u_n - u_{n-1}$ olduğundan $u_n = \left(\alpha^n - \beta^n\right)/\sqrt{p^2-4}$ ve $v_n = \alpha^n + \beta^n$ bulunur. ■

Önerme 2.9'da elde edilen formüllere Binet formülleri denir ve bu formüller kullanılarak, her $n \in \mathbb{Z}$ için $v_n = u_{n+1} - u_{n-1} = pu_n - 2u_{n-1}$ olduğu gösterilebilir.

Şimdi de, üçüncü bölümde kullanılmak üzere aşağıdaki önermeyi verelim. Bu önerme, Önerme 2.4'e benzer şekilde ispatlanabileceğinden burada ispatı verilmeyecektir.

Önerme 2.10. Her $m,\ n \in \mathbb{Z}$ için $u_{m+n} = u_m u_{n+1} - u_{m-1} u_n$ ve $v_{m+n} = v_m u_{n+1} - u_n v_{m-1}$ dir [38].

Böylece Teorem 2.2.4'de verilen $u_n^2 - pu_n u_{n-1} + u_{n-1}^2 = 1$ özdeşliği kullanılarak aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 2.12. Her $n \in \mathbb{Z}$ için $v_n^2 - (p^2-4)u_n^2 = 4$ dir [38].

Önerme 2.11. $x = (1,0)$ olsun. Bu durumda her $n \in \mathbb{Z}$ için $(2,-p)x^n = (v_n, -v_{n-1})$ dir.

İspat.

$$x^{n+1} - x^{n-1} = (x - x^{-1})x^n = \big((1,0) - (-1,p)\big)x^n = (2,-p)x^n$$

ve

$$x^{n+1} - x^{n-1} = (u_{n+1}, -u_n) - (u_{n-1}, -u_{n-2}) = (v_n, -v_{n-1})$$

olduğundan $(2,-p)x^n=(v_n,-v_{n-1})$ bulunur. ■

Önerme 2.12 ve Teorem 2.2.5'de verilen özdeşlikler [38] numaralı kaynakta mevcuttur, ancak burada ispatlarıyla birlikte verilecektir.

Önerme 2.12. Her $m,\ n\in\mathbb{Z}$ için $(p^2-4)u_{n+m}=v_nv_{m+1}-v_{n-1}v_m$ dir [38].

İspat. $x=(1,0)$ olsun. Önerme 2.11'e göre

$$(2,-p)x^n=(v_n,-v_{n-1})$$

ve

$$(2,-p)x^m=(v_m,-v_{m-1})$$

olup, bu iki eşitlik taraf tarafa çarpılırsa

$$\begin{aligned}(2,-p)x^n(2,-p)x^m &=(v_n,-v_{n-1})(v_m,-v_{m-1})\\ &=\left(v_nv_{m+1}-v_{n-1}v_m,-v_nv_m+v_{n-1}v_{m-1}\right)\end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca

$$(2,-p)x^n(2,-p)x^m=\left(0,p^2-4\right)x^{n+m}=\left(\left(p^2-4\right)u_{n+m},-\left(p^2-4\right)u_{n+m-1}\right)$$

olduğundan

$$(p^2-4)u_{n+m}=v_nv_{m+1}-v_{n-1}v_m \tag{2.19}$$

elde edilir.■

Teorem 2.2.5. Her $n\in\mathbb{Z}$ için $v_n^2-pv_nv_{n-1}+v_{n-1}^2=-(p^2-4)$ dir [38].

İspat. $(2,-p)x^n = (v_n, -v_{n-1})$ ve $(2,-p)x^{-n} = (v_{-n}, -v_{-n-1}) = (v_n, -v_{n+1})$ eşitlikleri taraf tarafa çarpılırsa,

$$(0, p^2-4) = (v_n, -v_{n-1})(v_n, -v_{n+1}) = (0, -v_n^2 + v_{n-1}v_{n+1}) = (0, -v_n^2 + pv_nv_{n-1} - v_{n-1}^2)$$

olur. Böylece $v_n^2 - pv_nv_{n-1} + v_{n-1}^2 = -(p^2-4)$ elde edilir. ■

Teorem 2.2.6. $p > 3$ olsun. Bu durumda $x^2 - pxy + y^2 = 1$ denkleminin tüm tamsayı çözümleri, $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $(x, y) = \mp(u_n, u_{n-1})$ biçimindedir.

İspat. Teorem 2.2.4'e göre, eğer $(x, y) = \mp(u_n, u_{n-1})$ ise $x^2 - pxy + y^2 = 1$ dir. Şimdi $x^2 - pxy + y^2 = 1$ olsun. Bu durumda $\alpha x - y$, $\mathbb{Z}[\alpha]$ halkasında bir birim olur. Dolayısıyla $\alpha x - y = \mp\alpha^n$ olacak biçimde bir $n \in \mathbb{Z}$ vardır. Buradan

$$(x, -y) = \phi^{-1}(\alpha x - y) = \phi^{-1}(\mp\alpha^n) = \mp(\phi^{-1}(\alpha))^n = \mp(1,0)^n = \mp(u_n, -u_{n-1})$$

olur ve ispat tamamlanır. ■

Aşağıdaki sonuç, Teorem 2.2.6'dan elde edilebileceği için ispatsız olarak verilecektir.

Sonuç 2.13. $p > 3$ olsun. Bu durumda $x^2 - pxy + y^2 = 1$ denkleminin negatif olmayan tüm tamsayı çözümleri, $n \geq 1$ olmak üzere $(x, y) = (u_n, u_{n-1})$ biçimindedir [34], [46].

Sonuç 2.14. $p > 3$ olsun. Bu durumda $u^2 - (p^2-4)v^2 = 4$ denkleminin negatif olmayan tüm tamsayı çözümleri, $n \geq 1$ olmak üzere $(u, v) = (v_n, u_n)$ ile verilir [24].

İspat. Eğer $(u, v) = (v_n, u_n)$ ise, Sonuç 2.12'ye göre $u^2 - (p^2-4)v^2 = 4$ olur. Şimdi $u^2 - (p^2-4)v^2 = 4$, yani $u^2 - p^2v^2 = 4 + 4v^2$ olsun. Buradan $u^2 - p^2v^2$ nin bir çift tamsayı olduğu görülür. Bu ise u ve pv nin aynı anda tek veya aynı anda çift tamsayı olmasını gerektirir. Bu durumda $x=(u+pv)/2$ ve $y=v$ alınırsa,

$$x^2-pxy+y^2=\frac{(u+pv)^2-2pv(u+pv)+4v^2}{4}=\frac{u^2-(p^2-4)v^2}{4}=\frac{4}{4}=1$$

olur. Sonuç 2.13'e göre, $n\geq 0$ olmak üzere $x=u_{n+1}$ ve $y=u_n$ biçimindedir. Dolayısıyla $u+pv=2u_{n+1}$ ve $y=v=u_n$ olup buradan $u=v_n$ ve $v=u_n$ elde edilir. ■

Horadam [18] numaralı kaynakta, Teorem 2.2.7'de verilen denklemin pozitif çözümlerini tespit etmiştir. Burada bu denklemin tüm tamsayı çözümleri verilecektir.

Teorem 2.2.7. $p>3$ ve p^2-4 karesiz bir tamsayı olsun. Bu durumda $x^2-pxy+y^2=-(p^2-4)$ denkleminin tüm tamsayı çözümleri, $n\in\mathbb{Z}$ olmak üzere $(x,y)=\mp(v_n,v_{n-1})$ biçimindedir.

İspat. Eğer $(x,y)=\mp(v_n,v_{n-1})$ ise, Teorem 2.2.5'e göre $x^2-pxy+y^2=-(p^2-4)$ olur. Şimdi $x^2-pxy+y^2=-(p^2-4)$ olsun. Bu denklemin her iki tarafı 4 ile çarpılırsa $(2x-py)^2-(p^2-4)y^2=-4(p^2-4)$ bulunur. Böylece p^2-4 karesiz olduğundan, bu denklemden $(p^2-4)\,|\,(2x-py)$ olduğu görülür. Benzer şekilde,

$$(2y-px)^2-(p^2-4)x^2=-4(p^2-4)$$

yazılabilir. Buradan da p^2-4 karesiz olduğundan $(p^2-4)\,|\,(2y-px)$ bulunur. Böylece

$$u=(px-2y)/(p^2-4) \text{ ve } v=(2x-py)/(p^2-4)$$

alınırsa,

$$u^2 - puv + v^2 = \frac{(px-2y)^2 - p(px-2y)(2x-py) + (2x-py)^2}{(p^2-4)^2}$$
$$= \frac{-(p^2-4)(x^2-pxy+y^2)}{(p^2-4)^2} = \frac{-(p^2-4)(-(p^2-4))}{(p^2-4)^2} = 1$$

elde edilir. Dolayısıyla, Teorem 2.2.6'ya göre $(u,v) = \mp(u_n, u_{n-1})$ olur. Buradan da $(x,y) = \mp(v_n, v_{n-1})$ olduğu görülür. ■

Teorem 2.2.7 ve Sonuç 2.13'den elde edilebilecek olan aşağıdaki sonuç ispatsız olarak verilecektir.

Sonuç 2.15. $p > 3$ ve $p^2 - 4$ karesiz bir tamsayı olsun. Bu durumda $x^2 - pxy + y^2 = -(p^2-4)$ denkleminin negatif olmayan tüm tamsayı çözümleri, $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $(x,y) = (v_n, v_{n-1})$ biçimindedir [18].

Sırasıyla Teorem 2.2.4, $u_n = (2u_{n+1} - v_n)/p$ ve $u_{n+1} = (v_{n+1} + 2u_n)/p$ özdeşlikleri kullanılarak aşağıdaki sonuç verilebilir. Bu sonucun ispatı Sonuç 2.7'ye benzer şekilde yapılabileceğinden burada ispatsız olarak verilecektir.

Sonuç 2.16. Her $n \in \mathbb{Z}$ için

$$v_{n+1}^2 - (p^2-4)v_{n+1}u_n - (p^2-4)u_n^2 = p^2$$

ve

$$v_n^2 - (p^2-4)v_n u_{n+1} - (p^2-4)u_{n+1}^2 = p^2$$

dir.

Aşağıdaki sonuç, Sonuç 2.8'e benzer şekilde ispatlanabileceğinden, ispatsız olarak verilecektir.

Sonuç 2.17. $p > 3$ olsun. Bu durumda $x^2 - (p^2 - 4)xy - (p^2 - 4)y^2 = p^2$ denkleminin tüm tamsayı çözümleri, $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $(x, y) = \mp(v_{n+1}, u_n)$ ile verilir.

m bir çift tamsayı ve $p = L_m$ olsun. Bu durumda $L_m^2 - 5F_m^2 = 4(-1)^m = 4$ özdeşliği kullanılırsa,

$$\alpha = \left(p + \sqrt{p^2 - 4}\right)/2 = (L_m + \sqrt{5}F_m)/2 = \left(\left(1 + \sqrt{5}\right)/2\right)^m$$

ve

$$\beta = \left(p - \sqrt{p^2 - 4}\right)/2 = (L_m - \sqrt{5}F_m)/2 = \left(\left(1 - \sqrt{5}\right)/2\right)^m$$

bulunur. Buradan $u_n = F_{mn} / F_m$ ve $v_n = L_{mn}$ olup aşağıdaki sonuçlar verilebilir. Bu sonuçlar sırasıyla Teorem 2.2.4, Teorem 2.2.6 ve Teorem 2.2.5 kullanılarak ispatlanabileceğinden burada ispatsız olarak verilecektir.

Sonuç 2.18. m bir çift tamsayı olmak üzere, her $n \in \mathbb{Z}$ için

$$F_{mn}^2 - L_m F_{mn} F_{m(n-1)} + F_{m(n-1)}^2 = F_m^2$$

dir.

Sonuç 2.19. $m > 2$ bir çift tamsayı olsun. Bu durumda $x^2 - L_m xy + y^2 = 1$ denkleminin tüm tamsayı çözümleri, $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere,

$$(x, y) = \mp(F_{mn} / F_m, F_{m(n-1)} / F_m)$$

ile verilir.

Sonuç 2.20. m bir çift tamsayı olmak üzere, her $n \in \mathbb{Z}$ için

$$L_{mn}^2 - L_m L_{mn} L_{m(n-1)} + L_{m(n-1)}^2 = -5F_m^2$$

dir.

Teorem 2.2.8. $p > 3$ olsun. Bu durumda $x^2 - pxy + y^2 = -1$ denkleminin tamsayı çözümü yoktur.

İspat. x ve y tamsayılar olmak üzere $x^2 - pxy + y^2 = -1$ olsun. Dolayısıyla $(\alpha x - y)(\overline{\alpha} x - y) = -1$ olur. Şu halde $\alpha x - y$, $\mathbb{Z}[\alpha]$ halkasında bir birimdir. O halde $\alpha x - y = \mp\alpha^n$ olacak biçimde $n \in \mathbb{Z}$ vardır. Buradan

$$(x, -y) = \phi^{-1}(\alpha x - y) = \phi^{-1}(\mp\alpha^n) = \mp(\phi^{-1}(\alpha))^n = \mp(1,0)^n = \mp(u_n, -u_{n-1})$$

olur. Şu halde $(x, y) = \mp(u_n, u_{n-1})$ dir. Bu ise

$$-1 = x^2 - pxy + y^2 = u_n^2 - pu_n u_{n-1} + u_{n-1}^2 = 1$$

eşitliğini verir ki bu olamaz. O halde $x^2 - pxy + y^2 = -1$ denkleminin tamsayı çözümü yoktur.■

Sonuç 2.21. $p > 3$ olmak üzere $u^2 - (p^2 - 4)v^2 = -4$ denkleminin tamsayı çözümü yoktur.

İspat. u ve v tamsayılar olmak üzere, $u^2 - (p^2 - 4)v^2 = -4$ olsun. Buradan $u^2 - p^2v^2 = 4v^2 - 4$ olur. Böylece $u^2 - p^2v^2$ nin çift tamsayı olduğu görülür. Dolayısıyla u ve v aynı anda tek veya aynı anda çift olmalıdır. Bu durumda $x = (u + pv)/2$ ve $y = v$ alınırsa,

$$x^2 - pxy + y^2 = \frac{(u + pv)^2 - 2pv(u + pv) + 4v^2}{4} = \frac{u^2 - (p^2 - 4)v^2}{4} = -1$$

bulunur. Fakat Teorem 2.2.8'e göre bu mümkün değildir. ■

Sonuç 2.21 kullanılarak, aşağıdaki sonuç ispatsız olarak verilebilir.

Sonuç 2.22. $p>3$ ve p^2-4 karesiz bir tamsayı olsun. Bu durumda $x^2-pxy+y^2=p^2-4$ denkleminin tamsayı çözümü yoktur.

Sonuç 2.23. $p>3$ ve p bir tek tamsayı olsun. Bu durumda $u^2-(p^2-4)v^2=-16$ ve $x^4-px^2y^2+y^4=-4$ denklemlerinin tamsayı çözümü yoktur.

İspat. u ve v tamsayılar olmak üzere $u^2-(p^2-4)v^2=-16$ olsun. Bu durumda u ve v aynı anda çift veya aynı anda tektir. Ayrıca $p^2-4\equiv-3(\mathrm{mod}\,8)$ olduğundan $u^2+3v^2\equiv 0(\mathrm{mod}\,8)$ dir. Buradan u ve v nin çift tamsayılar olduğu görülür. Dolayısıyla $(u/2)^2-(p^2-4)(v/2)^2=-4$ olur. Bu ise Sonuç 2.21'e göre mümkün değildir. O halde $u^2-(p^2-4)v^2=-16$ denkleminin tamsayı çözümü yoktur.

Şimdi x ve y tamsayılar olmak üzere $x^4-px^2y^2+y^4=-4$ olduğunu kabul edelim. Buradan $(2x^2-py^2)^2-(p^2-4)y^4=-16$ olur. Bu ise yukarıda gösterildiği gibi mümkün değildir. ■

Sonuç 2.24. $p>3$ olmak üzere $x^2-(p^2-4)xy-(p^2-4)y^2=-p^2$ denkleminin tamsayı çözümü yoktur.

İspat. $x^2-(p^2-4)xy-(p^2-4)y^2=-p^2$ olsun. Buradan

$$\left(x+2y\right)^2-p^2xy-p^2y^2=-p^2$$

yazılabileceğinden $p^2\mid(x+2y)^2$ olur. Böylece $p\mid(x+2y)$ bulunur. $u=(x+2y)/p$ ve $v=y$ alınırsa,

$$u^2 - puv + v^2 = \frac{x^2 - (p^2-4)xy - (p^2-4)y^2}{p^2} = \frac{-p^2}{p^2} = -1$$

olur. Ancak bu ise Teorem 2.2.8'e göre mümkün değildir. ■

Sonuç 2.25. $p \geq 3$ olmak üzere $x^2 - (p^2-4)xy - (p^2-4)y^2 = -1$ denkleminin tamsayı çözümü yoktur.

İspat. $p > 3$, x ve y tamsayılar olmak üzere $x^2 - (p^2-4)xy - (p^2-4)y^2 = -1$ olsun. Bu durumda $(px)^2 - (p^2-4)\left(px\right)\left(py\right) - (p^2-4)(py)^2 = -p^2$ yazılabilir. Ancak Sonuç 2.24'e göre bu mümkün değildir. $p = 3$ ise $x^2 - 5xy - 5y^2 = -1$ olur. Buradan $(2x-5y)^2 - 5(3y)^2 = -4$ bulunur. O halde Teorem 2.1.7'ye göre, n tek tamsayı olmak üzere $|2x-5y| = L_n$ ve $3|y| = F_n$ olur. Böylece y nin tamsayı olması için Teorem 1.3'e göre $4 \mid n$ olmalıdır. Fakat bu ise n nin tek tamsayı olmasıyla çelişir. ■

Sonuç 2.26. $p \geq 2$ olsun. Bu durumda $x^2 - 4(p^2-1)xy - 4(p^2-1)y^2 = -p^2$ ve $x^2 - 4(p^2-1)xy - 4(p^2-1)y^2 = -1$ denklemlerinin tamsayı çözümü yoktur.

İspat. x ve y tamsayılar olmak üzere

$$x^2 - 4(p^2-1)xy - 4(p^2-1)y^2 = -p^2$$

olsun. Dolayısıyla

$$x^2 - \left((2p)^2 - 4\right)xy - \left((2p)^2 - 4\right)y^2 = -p^2 \tag{2.20}$$

olur. (2.20) eşitliğinin her iki yanı 4 ile çarpılırsa,

$$(2x)^2 - \left((2p)^2 - 4\right)(2x)(2y) - \left((2p)^2 - 4\right)(2y)^2 = -(2p)^2$$

bulunur. Fakat Sonuç 2.24’e göre bu denklemin tamsayı çözümü yoktur.

Şimdi de x ve y tamsayılar olmak üzere,

$$x^2-4(p^2-1)xy-4(p^2-1)y^2=-1 \tag{2.21}$$

olsun. Eğer (2.21) eşitliğinin her iki yanı p^2 ile çarpılırsa,

$$(px)^2-4(p^2-1)(px)(py)-4(p^2-1)(py)^2=-p^2$$

bulunur. Ancak bu mümkün değildir. ■

$p=3$ ise $p^2-4=5$, $u_n=F_{2n}$ ve $v_n=L_{2n}$ olup $x^2-3xy+y^2=-1$, $x^2-3xy+y^2=5$ ve $u^2-5v^2=-4$ denklemlerinin çözümleri vardır. Ayrıca Teorem 2.2.6, Teorem 2.2.7, Sonuç 2.13 ve Sonuç 2.17 doğrudur. Bu ise aşağıdaki teoremden elde edilir.

Teorem 2.2.9. $x^2-3xy+y^2=\mp1$ denkleminin tüm tamsayı çözümleri, $n\in\mathbb{Z}$ olmak üzere $(x,y)=\mp(F_{n+2},F_n)$ ile ve $x^2-3xy+y^2=\mp5$ denkleminin tüm tamsayı çözümleri $(x,y)=\mp(L_{n+2},L_n)$ ile verilir. Ayrıca $u^2-5v^2=\mp4$ denkleminin negatif olmayan tüm tamsayı çözümleri, $n\in\mathbb{N}$ olmak üzere $(u,v)=(L_n,F_n)$ biçiminde ve $x^2-5xy-5y^2=9$ denkleminin tüm tamsayı çözümleri, $n\in\mathbb{Z}$ olmak üzere $(x,y)=\mp(L_{2n+2},F_{2n})$ biçimindedir.

İspat. $u=x-y$ ve $v=y$ olsun. Böylece

$$u^2-uv-v^2=(x-y)^2-y(x-y)-y^2=x^2-3xy+y^2=\mp1$$

bulunur. Dolayısıyla Sonuç 2.2’ye göre, $(u,v)=\mp(F_{n+1},F_n)$ olur. Buradan $x-y=\mp F_{n+1}$ ve $y=\mp F_n$ olup $(x,y)=\mp(F_{n+2},F_n)$ elde edilir. Eğer

$x^2-3xy+y^2=\mp 5$ ise $u^2-uv-v^2=(x-y)^2-y(x-y)-y^2=x^2-3xy+y^2=\mp 5$ olur. Böylece Sonuç 2.5'e göre $(u,v)=\mp(L_{n+1},L_n)$ bulunur. Dolayısıyla $x-y=\mp L_{n+1}$ ve $y=\mp L_n$ dir. Buradan $(x,y)=\mp(L_{n+2},L_n)$ elde edilir. Tersine tümevarımla, $F_{n+2}^2-3F_nF_{n+2}+F_n^2=(-1)^n$ ve $L_{n+2}^2-3L_nL_{n+2}+L_n^2=5(-1)^{n+1}$ olduğu görülebilir. Teorem 2.1.7'ye göre $u^2-5v^2=\mp 4$ denkleminin negatif olmayan tüm tamsayı çözümlerinin, $n\in\mathbb{N}$ olmak üzere $(u,v)=(L_n,F_n)$ biçiminde olduğu görülür. Ayrıca $x^2-5xy-5y^2=9$ denkleminin tüm tamsayı çözümleri de benzer şekilde bulunabilir.■

Teorem 2.2.9'dan, aşağıdaki sonuç verilebilir. Bu sonuç, Teorem 2.2.6'nın $p=3$ için doğru olduğunu gösterir.

Sonuç 2.27. $x^2-3xy+y^2=1$ denkleminin tüm tamsayı çözümleri, $n\in\mathbb{Z}$ olmak üzere $(x,y)=\mp(u_n,u_{n-1})$ biçimindedir.

$p\geq 1$ olmak üzere p^2+4 sayısı karesiz olmadığında ve $p>3$ olmak üzere p^2-4 sayısı karesiz olmadığında sırasıyla, Teorem 2.1.8 ve Teorem 2.2.7 sağlanmaz. Örnek olarak, $x^2-4xy-y^2=20$ denkleminin bir çözümü $(x,y)=(7,1)$ dir, fakat her $n\in\mathbb{Z}$ için $(7,1)\neq(V_n,V_{n-1})$ dir. Ayrıca, $x^2-7xy+y^2=45$ denkleminin bir çözümü $(x,y)=(1,11)$ olmasına rağmen, her $n\in\mathbb{Z}$ için $(1,11)\neq(v_n,v_{n-1})$ dir.

Daha genel olarak, $m\neq 0$ olmak üzere $p=L_m$ alınarak aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 2.2.10. $x^2-L_mxy+(-1)^my^2=\mp 5F_m^2$ denkleminin tüm tamsayı çözümleri, $n\in\mathbb{Z}$ olmak üzere $(x,y)=\mp(L_{m+n},L_n)$ ile verilir.

İspat. $x^2-L_mxy+(-1)^my^2=\mp 5F_m^2$ ise $(2x-L_my)^2-(L_m^2-4(-1)^m)y^2=\mp 20F_m^2$ olup $(2x-L_my)^2-5F_m^2y^2=\mp 20F_m^2$ bulunur. Bu eşitlikten $5\mid(2x-L_my)$ olduğu görülür. O halde $2x-L_my=5a$ olacak biçimde a tamsayısı vardır. Buradan

$$(5a)^2 - 5F_m^2 y^2 = \mp 20F_m^2$$

yani

$$5a^2 - F_m^2 y^2 = \mp 4F_m^2$$

bulunur. Dolayısıyla $F_m \mid a$ dır. Şu halde $a = F_m t$ olan t tamsayısı vardır. Böylece

$$(5F_m t)^2 - F_m^2 y^2 = \mp 4F_m^2$$

eşitliğinden,

$$y^2 - 5t^2 = \mp 4$$

denklemi elde edilir. Buradan y ve t nin aynı anda tek veya aynı anda çift olduğu görülür. O halde $u = \left(y+t\right)/2$ ve $v = t$ alınırsa,

$$u = \frac{y + \dfrac{2x - L_m y}{5F_m}}{2} = \frac{x + L_{m-1} y}{5F_m}$$

ve

$$v = \frac{\dfrac{2x - L_m y}{5}}{F_m} = \frac{2x - L_m y}{5F_m}$$

bulunur. Böylece

$$u^2 - uv - v^2 = \frac{(x + L_{m-1} y)^2 - (x + L_{m-1} y)(2x - L_m y) - (2x - L_m y)^2}{25F_m^2}$$

$$= \frac{-5(x^2 - L_m xy + (-1)^m y^2)}{25F_m^2} = \mp 1$$

olur. Şu halde Sonuç 2.2'ye göre, $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $(u,v) = \mp(F_{n+1}, F_n)$ olduğu görülür. Dolayısıyla, $(x + L_{m-1}y)/5F_m = \mp F_{n+1}$ ve $(2x - L_m y)/5F_m = \mp F_n$ dir. Buradan $(x, y) = \mp(L_{n+m}, L_n)$ elde edilir. Tersine $L_{n+m}^2 - L_m L_{n+m} L_n + (-1)^m L_n^2 = (-1)^{n+1} 5F_m^2$ olduğu Binet formülleri kullanılarak gösterilebilir. ■

BÖLÜM 3. GENELLEŞTİRİLMİŞ FİBONACCİ VE LUCAS DİZİLERİNİN BÖLÜNEBİLME ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde, [28] numaralı kaynakta, Keskin ve Yosma tarafından ispatlanan genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas dizileriyle ilgili kongrüanslar, Teorem 3.1.1, Teorem 3.1.2, Teorem 3.2.1 ve Teorem 3.2.2'de ispatsız olarak verilecektir. Bu teoremlerin ispatları, Binet formülleri ve tümevarım kullanılarak yapılabilir. Bu kongrüanslara ek olarak genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas dizilerinin monoton artan ve her $n \in \mathbb{N}$ için $V_n > U_n$, $v_n > u_n$ olduğu gösterilecektir. Son olarak da genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas dizileriyle ilgili kongrüanslar kullanılarak bu dizilerin bölünebilme özellikleri ispatlanacaktır. Bu bölünebilme özellikleri, dördüncü bölümde bazı Diophantine denklemlerinin çözümlerini bulmada kullanılacaktır.

Genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayılarının bölünebilme özellikleri birçok yazar tarafından çalışılmıştır. 1997'de $U_a \mid V_b$ ve $u_a \mid v_b$ olması için gerekli ve yeterli şartların verildiği bir teorem, [11] numaralı kaynakta Hilton, Pedersen ve Somer tarafından ispatlanmıştır. Daha sonra Hilton ve Pedersen, [12] numaralı kaynakta, her $j \geq 0$ için $V_n \mid V_{(2j+1)n}$ ve $v_n \mid v_{(2j+1)n}$ olduğunu Binet formüllerini kullanarak ispatlamışlardır. Bunlara ek olarak, $2a \mid b$ ise $V_a \mid U_b$ ve $v_a \mid u_b$ olduğunu göstermişlerdir. $V_a \mid U_b$ veya $v_a \mid u_b$ ise $2a \mid b$ olduğunun gösterilebileceğini iddia etmişlerdir. Ayrıca Ribenboim, [41] ve [42] numaralı kaynaklarda, $U_m \neq 1$ olmak üzere $U_m \mid U_n$ olması için ve $u_m \neq 1$ olmak üzere $u_m \mid u_n$ olması için gerekli ve yeterli şartın $m \mid n$ olduğunu, ayrıca $V_m \neq 1$ olmak üzere $V_m \mid V_n$ ve $v_m \neq 1$ olmak üzere $v_m \mid v_n$ olması için gerekli ve yeterli şartın $m \mid n$ ve n / m nin tek tamsayı olması gerektiğini ifade etmiştir. Bunlara ek olarak Hinkel [13] numaralı kaynakta, $m \mid n$ ise

$U_m \mid U_n$ ve $u_m \mid u_n$ olduğunu, $m \mid n$ ve n/m tek tamsayı ise $V_m \mid V_n$ ve $v_m \mid v_n$ olduğunu Binet formüllerini kullanarak ispatlamıştır.

Yukarıda bahsedilen bölünebilme özellikleri [11], [12] ve [13] numaralı kaynaklarda tek taraflı olarak ispatlanmıştır. Bu nedenle bu özeliklerin çift taraflı ispatları, bütünlüğü sağlamak açısından burada verilecektir. Bu çalışmada verilen, bölünebilme özeliklerinin ispatları farklı yoldan yapıldığı ve bir arada bulunduğu için önem taşımaktadır.

3.1. $\{U_n\}$ ve $\{V_n\}$ Dizilerinin Bölünebilme Özellikleri

Teorem 3.1.1. Her $n \in \mathbb{N}$ ve $m,\ r \in \mathbb{Z}$ için

$$U_{2mn+r} \equiv (-1)^{(m+1)n} U_r (\operatorname{mod} V_m) \tag{3.1}$$

ve

$$V_{2mn+r} \equiv (-1)^{(m+1)n} V_r (\operatorname{mod} V_m) \tag{3.2}$$

dir [28].

Teorem 3.1.2. Her $n \in \mathbb{N}$ ve $m,\ r \in \mathbb{Z}$ için

$$U_{2mn+r} \equiv (-1)^{mn} U_r (\operatorname{mod} U_m) \tag{3.3}$$

ve

$$V_{2mn+r} \equiv (-1)^{mn} V_r (\operatorname{mod} U_m) \tag{3.4}$$

dir [28].

$p=1$ olduğunda, $\{U_n\}$ ve $\{V_n\}$ dizileri sırasıyla Fibonacci ve Lucas dizilerine karşılık gelmektedir. $p=1$ için aşağıdaki teoremler ilk bölümde verilmiştir. Bu nedenle $\{U_n\}$ ve $\{V_n\}$ dizilerinin bölünebilme özelliklerinin verildiği bu alt bölüm boyunca $p \geq 2$ alınacaktır.

Teorem 3.1.3. Her $n \in \mathbb{N}$ için $V_n > U_n$ dir.

İspat. $V_n^2 - (p^2+4)U_n^2 = (-1)^n 4$ özdeşliğinden $U_n^2 = \dfrac{V_n^2 \mp 4}{p^2+4}$ olur. Böylece

$$V_n^2 - U_n^2 = V_n^2 - \frac{V_n^2 \mp 4}{p^2+4} = \frac{(p^2+3)V_n^2 \mp 4}{p^2+4}$$

bulunur. Ayrıca $(p^2+3)V_n^2 \mp 4 > 0$ ve $p^2+4>0$ olduğundan $V_n^2 - U_n^2 > 0$ dir. Buradan $V_n^2 > U_n^2$ olur. Dolayısıyla $V_n > U_n$ dir. ■

Aşağıdaki iki teoremin ispatları açık olduğundan burada ispatsız verilecektir.

Teorem 3.1.4. $\{U_n\}_{n\geq 0}$ monoton artandır.

Teorem 3.1.5. $\{V_n\}_{n\geq 1}$ monoton artandır.

Şimdi vereceğimiz önermeler, genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayılarının bölünebilme özelliklerinin ispatlarında kullanılacağından, bütünlük açısından ispatlarıyla birlikte verilecektir.

Önerme 3.1.1. Her $n \in \mathbb{Z}$ için $(V_n, V_{n-1}) = 1$ veya $(V_n, V_{n-1}) = 2$ dir [10], [12], [33].

İspat. İspatı Tümevarım ilkesini kullanarak yapalım. $n=1$ ise $(V_1, V_0) = (p,2) = 1$ veya $(V_1, V_0) = (p,2) = 2$ dir. Şimdi $(V_n, V_{n-1}) = 1$ veya $(V_n, V_{n-1}) = 2$ olduğunu kabul edelim. $(V_{n+1},V_n)=d$ olsun. Buradan $d\left|V_{n+1}\right.$ ve $d\left|V_n\right.$ olur. Ayrıca $V_{n+1}=pV_n+V_{n-1}$ olduğundan $d\left|pV_n+V_{n-1}-pV_n\right.$ olup $d\left|V_{n-1}\right.$ bulunur. Böylece $d\left|V_n\right.$ ve $d\left|V_{n-1}\right.$ den $d\left|(V_n,V_{n-1})\right.$ elde edilir. Bu durumda hipoteze göre $(V_n,V_{n-1})=1$ veya $(V_n,V_{n-1})=2$ olduğundan $d\left|1\right.$ veya $d\left|2\right.$ bulunur. O halde $(V_{n+1},V_n)=1$ veya $(V_{n+1},V_n)=2$ dir. ■

Önerme 3.1.2. Her $n\in\mathbb{Z}$ için $(U_n,U_{n-1})=1$ dir [10], [12], [33].

İspat. Teorem 2.1.4'den $U_n^2-pU_nU_{n-1}-U_{n-1}^2=\left(-1\right)^{n+1}$ olduğu biliniyor. Bu özdeşlik kullanılarak $(U_n,U_{n-1})=1$ olduğu kolaylıkla görülebilir.■

Önerme 3.1.3. $n>0$ ise $V_{n+1}>2V_n$ dir.

İspat. $V_{n+1}=pV_n+V_{n-1}$ olduğundan $V_{n+1}-2V_n=(p-2)V_n+V_{n-1}$ dir. Ayrıca $p\geq 2$ ve $n>0$ olduğundan $(p-2)V_n+V_{n-1}>0$ olur. O halde $V_{n+1}>2V_n$ dir. ■

Önerme 3.1.4. $0<r<n$ ise $V_n>2V_r$ dir.

İspat. Önermenin ispatını n üzerinden tümevarımla yapalım. $n=2$ ise $0<r<2$ olduğundan $r=1$ olup $V_2=p^2+2>2p=2V_1$ dir. Şimdi $0<r<n$ olmak üzere $V_n>2V_r$ olsun. $0<s<n+1$ için $V_{n+1}>2V_s$ olduğunu gösterelim. $0<s<n+1$ ise $0<s\leq n$ olup Önerme 3.1.3 ve Teorem 3.1.5'e göre, $V_{n+1}>2V_n\geq 2V_s$ elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar. ■

Önerme 3.1.5. $n\geq 0$ ise $U_{n+1}\geq 2U_n$ dir.

İspat. $U_{n+1}=pU_n+U_{n-1}$ olduğundan $U_{n+1}-2U_n=\left(p-2\right)U_n+U_{n-1}$ bulunur. Ayrıca $p\geq 2$ ve $n\geq 0$ olduğundan $\left(p-2\right)U_n+U_{n-1}\geq 0$ dır. O halde $U_{n+1}\geq 2U_n$ dir. ■

Önerme 3.1.6. $0<r<n$ ise $U_n>2U_r$ dir.

İspat. İspatı n üzerinden tümevarımla yapalım. $n=2$ ise $r=1$ olup $U_2 = p^2+1 > 2 = 2U_1$ dir. Şimdi $0<r<n$ olmak üzere $U_n > 2U_r$ olsun. $0<s<n+1$ için $U_{n+1} > 2U_s$ olduğunu gösterelim. $s<n+1$ olduğundan $s \le n$ dir. O halde Önerme 3.1.5 ve Teorem 3.1.4'e göre $U_{n+1} \ge 2U_n > 2U_s$ bulunur. ■

Önerme 3.1.7. $0<r<n$ ise $V_n > 2U_r$ dir.

İspat. Teorem 3.1.3'den dolayı $V_n > U_n$ dir. Önerme 3.1.6'ya göre $0<r<n$ iken $U_n > 2U_r$ dir. Dolayısıyla $V_n > U_n \ge 2U_r$ ve buradan $V_n > 2U_r$ bulunur. ■

Teorem 3.1.6. $m,\ n \in \mathbb{N}$ olsun. Bu durumda $V_m | U_n$ olması için gerekli ve yeterli şart $m|n$ ve n/m nin çift tamsayı olmasıdır.

İspat. $V_m | U_n$ ve $n = mq+r,\ 0 \le r < m$ olsun. Eğer q tek tamsayı ise $q = 2t+1$ olan t tamsayısı vardır. (3.1) kongrüansı kullanılarak,

$$U_n = U_{2mt+m+r} \equiv (-1)^{(m+1)t} U_{m+r} \pmod{V_m}$$

yazılabilir. Böylece $V_m | U_{m+r}$ olur. (2.14) özdeşliğinden,

$$(p^2+4)U_{m+r} = V_m V_{r+1} + V_r V_{m-1}$$

ve $V_m | U_{m+r}$ olduğundan $V_m | V_r V_{m-1}$ bulunur. Önerme 3.1.1'e göre $(V_m, V_{m-1}) = 1$ veya $(V_m, V_{m-1}) = 2$ olduğu biliniyor.

Eğer $(V_m, V_{m-1}) = 1$ ise $V_m | V_r V_{m-1}$ olduğundan $V_m | V_r$ bulunur. Buradan $V_m \le V_r$ elde edilir. Bu ise mümkün değildir, çünkü $\{V_n\}$ dizisi monoton artan ve $r<m$ olduğundan $V_r < V_m$ dir.

Eğer $(V_m, V_{m-1}) = 2$ ise $(\frac{V_m}{2}, \frac{V_{m-1}}{2}) = 1$ olur. Ayrıca $V_m \mid V_r V_{m-1}$ olduğundan $\frac{V_m}{2} \Big| V_r \frac{V_{m-1}}{2}$ yazılabilir. Buradan $\frac{V_m}{2} | V_r$ elde edilir. O halde $V_m \leq 2V_r$ olur. Bu ise Önerme 3.1.4'e göre mümkün değildir. Dolayısıyla q çift tamsayıdır. Buradan $t \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $q = 2t$ alınırsa, (3.1) kongrüansından,

$$U_n = U_{2mt+r} \equiv (-1)^{(m+1)t} U_r (\operatorname{mod} V_m)$$

olur. Şimdi $r > 0$ olduğunu kabul edelim. $V_m | U_n$ olduğundan yukarıdaki kongrüanstan $V_m | U_r$ bulunur. Böylece $V_m \leq U_r$ olur. Fakat $0 < r < m$ olduğundan, Teorem 3.1.3 ve Teorem 3.1.4'e göre $V_m > U_m > U_r$ dir. O halde $r = 0$ olmalıdır. Dolayısıyla $n = mq$ ve q çift tamsayı olur.

Tersine $m | n$ ve n/m çift tamsayı olsun. Böylece $t \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $q = 2t$ yazılabilir. Bu durumda, (3.1) kongrüansından,

$$U_n = U_{2mt} \equiv (-1)^{(m+1)t} U_0 (\operatorname{mod} V_m)$$

olur. Buradan, $U_0 = 0$ olduğundan $V_m | U_n$ bulunur. ■

Teorem 3.1.7. $m, n \in \mathbb{N}$ olsun. Bu durumda $U_m | U_n$ olması için gerekli ve yeterli şart $m | n$ olmasıdır [41], [42].

İspat. İlk olarak $U_m | U_n$ fakat $m \nmid n$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $0 < r < m$ olmak üzere $n = mq + r$ yazılabilir. Şimdi q nun çift tamsayı olduğunu kabul edelim. Şu halde $q = 2t$ olan $t \in \mathbb{Z}$ vardır. Böylece (3.3) kongrüansından,

$$U_n = U_{2mt+r} \equiv (-1)^{mt} U_r (\bmod U_m)$$

yazılabilir. $U_m \mid U_n$ olduğundan yukarıdaki kongrüansa göre $U_m \mid U_r$ bulunur. Buradan $U_m \leq U_r$ olup bu ise Teorem 3.1.4'e göre mümkün değildir. Çünkü $\{U_n\}$ dizisi monoton artan ve $r < m$ olduğundan $U_r < U_m$ dir. O halde q çift tamsayı değildir. Eğer q tek tamsayı ise, $t \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $q = 2t+1$ alınırsa (3.3) kongrüansından,

$$U_n = U_{2mt+m+r} \equiv (-1)^{mt} U_{m+r} (\bmod U_m)$$

yazılabilir. $U_m \mid U_n$ olduğundan, buradan $U_m \mid U_{m+r}$ elde edilir. Önerme 2.4'de verilen

$$U_{m+r} = U_{m+1} U_r + U_m U_{r-1}$$

özdeşliği ve $U_m \mid U_{m+r}$ olduğu göz önüne alınırsa $U_m \mid U_{m+1} U_r$ bulunur. Ayrıca Önerme 3.1.2'ye göre $(U_m, U_{m+1}) = 1$ olduğu biliniyor. Şu halde $U_m \mid U_r$ olur. Böylece $U_m \leq U_r$ bulunur. Ancak Teorem 3.1.4'e göre bu mümkün değildir. O halde $r = 0$ olup $n = mq$ bulunur. Dolayısıyla $m \mid n$ dir.

Tersine $m \mid n$ olsun. Bu durumda $q \in \mathbb{N}$ olmak üzere $n = mq$ yazılabilir. Böylece Teorem 2.1.3'de verilen $U_{mq} = \sum_{j=0}^{q} \binom{q}{j} U_m^j U_{m-1}^{q-j} U_j$ toplamı kullanılırsa $U_m \mid U_{mq}$ olduğu görülür. ■

Teorem 3.1.8. $m,\ n \in \mathbb{N}$ olsun. Bu durumda $V_m \mid V_n$ olması için gerekli ve yeterli şart $m \mid n$ ve n/m nin tek tamsayı olmasıdır [41], [42].

İspat. $V_m \mid V_n$ ve $0 \le r < m$ olmak üzere, $n = mq + r$ olsun. Eğer q bir çift tamsayı ise, $t \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $q = 2t$ biçiminde yazılabilir. Bu durumda (3.2) kongrüansı kullanılırsa,

$$V_n = V_{2mt+r} \equiv (-1)^{(m+1)t} V_r (\bmod V_m)$$

olur. $V_m \mid V_n$ olduğundan, yukarıdaki kongrüanstan $V_m \mid V_r$ bulunur. Böylece $V_m \le V_r$ olur. Bu ise Teorem 3.1.5'e göre mümkün değildir. Çünkü $\{V_n\}$ monoton artan bir dizi ve $r < m$ olduğundan $V_r < V_m$ dir. O halde q tek tamsayıdır. Dolayısıyla, $t \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $q = 2t + 1$ alınırsa, (3.2) kongrüansından,

$$V_n = V_{2mt+m+r} \equiv (-1)^{(m+1)t} V_{m+r} (\bmod V_m)$$

yazılabilir. Buradan $V_m \mid V_{m+r}$ olup, Önerme 2.4'de verilen $V_{m+r} = U_r V_{m+1} + U_{r-1} V_m$ özdeşliği kullanılırsa $V_m \mid U_r V_{m+1}$ bulunur. Şimdi $r > 0$ olduğunu kabul edelim. Önerme 3.1.1'e göre $(V_m, V_{m+1}) = 1$ veya $(V_m, V_{m+1}) = 2$ olduğu biliniyor.

Eğer $(V_m, V_{m+1}) = 1$ ise buradan $V_m \mid U_r$ bulunur. Böylece $V_m \le U_r$ olur. Bu ise mümkün değildir. Çünkü $r < m$ olduğundan, Teorem 3.1.3 ve Teorem 3.1.4'e göre $U_r < U_m < V_m$ dir.

Eğer $(V_m, V_{m+1}) = 2$ ise $(\frac{V_m}{2}, \frac{V_{m+1}}{2}) = 1$ olur. Ayrıca $V_m \mid U_r V_{m+1}$ olduğundan $\frac{V_m}{2} \mid U_r \frac{V_{m+1}}{2}$ yazılabilir. Böylece $\frac{V_m}{2} \mid U_r$ elde edilir. Şu halde $V_m \le 2U_r$ dir. Bu da Önerme 3.1.7'ye göre mümkün değildir. O halde $r = 0$ dır. Dolayısıyla $n = mq$ ve q tek tamsayı olur.

Tersine, $m \mid n$ ve n/m tek tamsayı olsun. Böylece $n = m(2t+1)$ olan $t \in \mathbb{Z}$ vardır. Dolayısıyla (3.2) kongrüansı kullanılırsa,

$$V_n = V_{2mt+m} \equiv (-1)^{(m+1)t} V_m (\bmod V_m)$$

yazılabilir. Buradan $V_m \mid V_n$ elde edilir. ■

Aşağıdaki teorem Hilton, Pedersen ve Somer tarafından [11] numaralı kaynakta ispatlandığı için burada ispatsız olarak verilecektir.

Teorem 3.1.9. $m,\ n \in \mathbb{N}$ olsun. Bu durumda $U_n \mid V_m$ olması için gerekli ve yeterli şart

i) $n = 1$,
ii) $p = 2$ ise $n = 2$
iii) $p \geq 3$ ise $n = 2$ ve $m = 2t + 1,\ t \in \mathbb{Z}$

olmasıdır [11].

3. 2. $\{u_n\}$ ve $\{v_n\}$ Dizilerinin Bölünebilme Özellikleri

Teorem 3.2.1. Her $n \in \mathbb{N}$ ve $m,\ r \in \mathbb{Z}$ için

$$u_{2mn+r} \equiv (-1)^{(m+1)n} u_r (\bmod v_m) \tag{3.5}$$

ve

$$v_{2mn+r} \equiv (-1)^{(m+1)n} v_r (\bmod v_m) \tag{3.6}$$

dir [28].

Teorem 3.2.2. Her $n \in \mathbb{N}$ ve $m,\ r \in \mathbb{Z}$ için

$$u_{2mn+r} \equiv u_r (\bmod u_m) \tag{3.7}$$

ve

$$v_{2mn+r} \equiv v_r (\mathrm{mod}\, u_m) \tag{3.8}$$

dir [28].

Bu bölüm boyunca, $\{u_n\}$ ve $\{v_n\}$ dizilerinin tanımları gereği, $p \geq 3$ olduğu göz önünde bulundurulacaktır.

Teorem 3.2.3. Her $n > 1$ tamsayısı için $v_n > u_n$ dir.

İspat. $v_n^2 - (p^2 - 4)u_n^2 = 4$ özdeşliğinden $u_n^2 = \dfrac{v_n^2 - 4}{p^2 - 4}$ yazılabilir. Bu durumda

$$v_n^2 - u_n^2 = v_n^2 - \frac{v_n^2 - 4}{p^2 - 4} = \frac{(p^2 - 5)v_n^2 + 4}{p^2 - 4}$$

olur. $p \geq 3$ olduğundan $(p^2 - 5)v_n^2 + 4 > 0$ ve $p^2 - 4 > 0$ dir. O halde $v_n^2 - u_n^2 > 0$ bulunur. Buradan $v_n^2 > u_n^2$, dolayısıyla $v_n > u_n$ elde edilir. ■

Teorem 3.2.4. $\{u_n\}_{n \geq 0}$ monoton artandır.

İspat. Teoremin ispatı için Önerme 2.9'da verilen $\beta^n = \beta u_n - u_{n-1}$ özdeşliği kullanılacaktır. Bu özdeşlikte $\beta = p - \alpha$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$\beta^n = (p - \alpha)u_n - u_{n-1} = (pu_n - u_{n-1}) - \alpha u_n = u_{n+1} - \alpha u_n$$

bulunur. $p \geq 3$ olduğundan, $\beta^n > 0$ dır. Böylece $u_{n+1} - \alpha u_n > 0$ yani $u_{n+1} > \alpha u_n$ elde edilir. Şu halde $\alpha > 1$ ve $u_{n+1} > \alpha u_n$ olduğu göz önüne alınırsa $u_{n+1} > \alpha u_n > u_n$ olur. Dolayısıyla $u_{n+1} > u_n$ dir. ■

Teorem 3.2.5. $\{v_n\}_{n\geq 0}$ monoton artandır.

İspat. $k \geq 3$ olduğu göz önüne alınarak ve Teorem 3.2.4 kullanılarak,

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \left(u_{n+2} - u_n\right) - \left(u_{n+1} - u_{n-1}\right) = \left(pu_{n+1} - 2u_n\right) - \left(u_{n+1} - u_{n-1}\right) \\ &= \left(p-1\right)u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} \geq 2u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} \ > 2\left(u_{n+1} - u_n\right) > 0 \end{aligned}$$

bulunur. O halde ispat tamamlanır. ■

Önerme 3.2.1. Her $n \in \mathbb{Z}$ için $(v_n, v_{n-1}) = 1$ veya $(v_n, v_{n-1}) = 2$ dir [10], [12], [33].

İspat. İspat, Tümevarım ilkesi kullanılarak Önerme 3.1.1'in ispatına benzer şekilde yapılabilir.■

Önerme 3.2.2. Her $n \in \mathbb{Z}$ için $(u_n, u_{n-1}) = 1$ dir [10], [12], [33].

İspat. Teorem 2.2.4 kullanılırsa, $(u_n, u_{n-1}) = 1$ olduğu görülür. ■

Önerme 3.2.3. $n > 0$ ise $v_{n+1} > 2v_n$ dir.

İspat. $p \geq 3$ olmak üzere $v_{n+1} = pv_n - v_{n-1}$ olduğu ve Teorem 3.2.5 kullanılırsa,

$$v_{n+1} - 2v_n = (p-2)v_n - v_{n-1} \geq v_n - v_{n-1} > 0$$

olur. O halde $v_{n+1} > 2v_n$ dir. ■

Önerme 3.2.4. $0 < r < n$ ise $v_n > 2v_r$ dir.

İspat. Teorem 3.2.5 ve Önerme 3.2.3'den ispat görülür. ■

Önerme 3.2.5. $n > 0$ ise $u_{n+1} > 2u_n$ dir.

İspat. Teorem 3.2.4'den ispat görülür. ■

Önerme 3.2.6. $0 < r < n$ olmak üzere $u_n > 2u_r$ dir.

İspat. Önerme 3.2.5 ve Teorem 3.2.4 kullanılarak, ispat n üzerinden tümevarımla yapılır. ■

Önerme 3.2.7. $0 < r < n$ olmak üzere $v_n > 2u_r$ dir.

İspat. Teorem 3.2.3 ve Önerme 3.2.6 kullanılarak istenilen elde edilir. ■

Teorem 3.2.6. $m,\ n \in \mathbb{N}$ olsun. Bu durumda $v_m \,|\, u_n$ olması için gerekli ve yeterli şart $m \,|\, n$ ve n/m nin çift tamsayı olmasıdır.

İspat. $v_m \,|\, u_n$ ve $n = mq + r,\ 0 \le r < m$ olsun. Eğer q tek tamsayı ise $t \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $q = 2t + 1$ alınabilir. (3.5) ile verilen kongrüans kullanılarak,

$$u_n = u_{2mt+m+r} \equiv (-1)^{(m+1)t} u_{m+r} (\mathrm{mod}\, v_m)$$

yazılabilir. Buradan $v_m \,|\, u_{m+r}$ bulunur. Ayrıca (2.19) ile verilen

$$(p^2 - 4)u_{m+r} = v_{m+1}v_r - v_m v_{r-1}$$

özdeşliği göz önüne alınırsa $v_m \mid v_{m+1}v_r$ elde edilir. Önerme 3.2.1'e göre $(v_m, v_{m+1}) = 1$ veya $(v_m, v_{m+1}) = 2$ olduğu biliniyor.

Eğer $(v_m, v_{m+1}) = 1$ ise $v_m \mid v_{m+1}v_r$ olduğundan $v_m \mid v_r$ bulunur. Bu ise $r < m$ olduğundan Teorem 3.2.5'e göre mümkün değildir.

Eğer $(v_m, v_{m+1}) = 2$ ise $(\frac{v_m}{2}, \frac{v_{m+1}}{2}) = 1$ dir. Böylece, $v_m \mid v_{m+1}v_r$ olduğundan $\frac{v_m}{2} \Big| v_r \frac{v_{m+1}}{2}$ yazılabilir. Buradan $\frac{v_m}{2} \mid v_r$ elde edilir. O halde $v_m \le 2v_r$ dir. Fakat Önerme 3.2.4'e göre bu da mümkün değildir. Dolayısıyla q çift tamsayıdır. Böylece, $t \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $q = 2t$ alınırsa, (3.5) ile verilen kongrüanstan,

$$u_n = u_{2mt+r} \equiv (-1)^{(m+1)t} u_r (\mathrm{mod}\, v_m)$$

yazılabilir. Şimdi $r > 0$ olduğunu kabul edelim. $v_m \mid u_n$ olduğundan yukarıdaki kongrüanstan $v_m \mid u_r$ olur. Buradan $v_m \le u_r$ bulunur. Bu ise Teorem 3.2.3 ve Teorem 3.2.4'e göre mümkün değildir. O halde $r = 0$ olmalıdır. Dolayısıyla $n = mq$ ve q çift tamsayı olur.

Tersine $m \mid n$ ve $t \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $n = 2mt$ olsun. Bu durumda, (3.5) ile verilen kongrüanstan,

$$u_n = u_{2mt} \equiv (-1)^{(m+1)t} u_0 (\mathrm{mod}\, v_m)$$

yazılabilir. Böylece $u_0 = 0$ olduğu göz önüne alınırsa $v_m \mid u_n$ elde edilir. ■

Teorem 3.2.7. $m,\ n \in \mathbb{N}$ olsun. Bu durumda $u_m \mid u_n$ olması için gerekli ve yeterli şart $m \mid n$ olmasıdır [41], [42].

İspat. İlk olarak $u_m | u_n$ fakat $m \nmid n$ olsun. Bu durumda $0 < r < m$ olmak üzere $n = mq + r$ yazılabilir. Şimdi q nun çift tamsayı olduğunu kabul edelim. O zaman $t \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $q = 2t$ alınırsa, (3.7) ile verilen kongrüanstan,

$$u_n = u_{2mt+r} \equiv u_r (\bmod u_m)$$

yazılabilir. $u_m | u_n$ olduğundan $u_m | u_r$ bulunur. Böylece $u_m \le u_r$ olur. Bu ise Teorem 3.2.4'e göre mümkün değildir. O halde q çift tamsayı değildir. Eğer q tek tamsayı ise, $t \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $q = 2t + 1$ alınırsa, (3.7) ile verilen kongrüanstan,

$$u_n = u_{2mt+m+r} \equiv u_{m+r} (\bmod u_m)$$

olur. $u_m | u_n$ olduğundan, buradan $u_m | u_{m+r}$ elde edilir. Ayrıca Önerme 2.10'da verilen $u_{m+r} = u_m u_{r+1} - u_{m-1} u_r$ özdeşliği göz önüne alınırsa $u_m | u_{m-1} u_r$ bulunur. Böylece $(u_m, u_{m-1}) = 1$ olduğundan $u_m | u_r$ elde edilir. Ancak Teorem 3.2.4'e göre bu mümkün değildir. O halde $r = 0$ olup $n = mq$ bulunur. Dolayısıyla $m | n$ dir.

Tersine $m | n$ olsun. Bu durumda $q \in \mathbb{N}$ olmak üzere $n = mq$ yazılabilir. Teorem 2.2.3'de verilen

$$u_{mq} = \sum_{j=0}^{q} \binom{q}{j} (-1)^{q-j} u_m^j u_{m-1}^{q-j} u_j = u_m \sum_{j=1}^{q} \binom{q}{j} (-1)^{q-j} u_m^{j-1} u_{m-1}^{q-j} u_j$$

toplamı kullanılırsa $u_m | u_{mq}$ elde edilir. Bu da ispatı tamamlar. ■

Teorem 3.2.8. $m, n \in \mathbb{N}$ olsun. Bu durumda $v_m | v_n$ olması için gerekli ve yeterli şart $m | n$ ve n / m nin tek tamsayı olmasıdır [41], [42].

İspat. $v_m \mid v_n$ ve $0 \le r < m$ olmak üzere $n = mq + r$ olsun. Eğer q bir çift tamsayı ise, $q = 2t$ olan t tamsayısı vardır. Bu durumda (3.6) ile verilen kongrüans kullanılırsa,

$$v_n = v_{2mt+r} \equiv (-1)^{(m+1)t} v_r (\bmod v_m)$$

yazılabilir. $v_m \mid v_n$ olduğundan bu kongrüanstan $v_m \mid v_r$ bulunur. Bu ise Teorem 3.2.5'e göre mümkün değildir. O halde q tek tamsayıdır. Şu halde, $t \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $q = 2t + 1$ alınırsa, (3.6) ile verilen kongrüanstan,

$$v_n = v_{2mt+m+r} \equiv (-1)^{(m+1)t} v_{m+r} (\bmod v_m)$$

yazılabilir. Böylece $v_m \mid v_{m+r}$ elde edilir. Önerme 2.10'da verilen $v_{m+r} = v_m u_{r+1} - u_r v_{m-1}$ özdeşliği kullanılırsa $v_m \mid u_r v_{m-1}$ bulunur. Şimdi $r > 0$ olduğunu kabul edelim. Önerme 3.2.1'e göre $(v_m, v_{m-1}) = 1$ veya $(v_m, v_{m-1}) = 2$ olduğu biliniyor.

Eğer $(v_m, v_{m-1}) = 1$ ise $v_m \mid u_r v_{m-1}$ olduğundan $v_m \mid u_r$ bulunur. Böylece $v_m \le u_r$ olur. Bu ise Teorem 3.2.3'e göre mümkün değildir.

Eğer $(v_m, v_{m-1}) = 2$ ise $(\frac{v_m}{2}, \frac{v_{m-1}}{2}) = 1$ dir. Bu durumda $v_m \mid u_r v_{m-1}$ olduğundan $\frac{v_m}{2} \mid u_r \frac{v_{m-1}}{2}$ yazılabilir. Buradan $\frac{v_m}{2} \mid u_r$ ve böylece $v_m \le 2u_r$ elde edilir. Bu ise Önerme 3.2.7'ye göre mümkün değildir. O halde $r = 0$ dır. Dolayısıyla $n = mq$ ve q tek tamsayı olur.

Tersine, $m \mid n$ ve $t \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $n = m(2t+1)$ olsun. Böylece (3.6) ile verilen kongrüanstan,

$$v_n = v_{2mt+m} \equiv (-1)^{(m+1)t} v_m (\bmod v_m)$$

olur. O halde $v_m | v_n$ dir. ■

Aşağıdaki teorem, Hilton, Pedersen ve Somer tarafından çift yönlü olarak [11] numaralı kaynakta ispatlandığı için burada sadece teoremin ifadesine yer verilecektir.

Teorem 3.2.9. $m,\ n \in \mathbb{N}$ olsun. Bu durumda $u_n | v_m$ olması için gerekli ve yeterli şart $n = 2$ ve m nin tek tamsayı olmasıdır [11].

BÖLÜM 4. BAZI DİOPHANTİNE DENKLEMLERİNİN GENELLEŞTİRİLMİŞ FİBONACCİ VE LUCAS DİZİLERİ İLE ÇÖZÜMLERİ

Melham, [37] numaralı kaynakta, m çift tamsayı ise $y^2 - V_m xy + x^2 = \mp U_m^2$ denklemlerinin tüm çözümlerinin, $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $(x, y) = \mp(U_n, U_{n+m})$ biçiminde olduğunu ve m tek tamsayı ise $y^2 - V_m xy - x^2 = \mp U_m^2$ denklemlerinin tüm çözümlerinin, $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $(x, y) = \mp(U_n, U_{n+m})$ biçiminde olduğunu göstermiştir. Ayrıca Melham, m çift tamsayı ve $p^2 + 4$ karesiz tamsayı ise $y^2 - V_m xy + x^2 = \mp(p^2 + 4)U_m^2$ denklemlerinin tüm çözümlerinin, $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $(x, y) = \mp(V_n, V_{n+m})$ biçiminde olduğunu ispatlamıştır. Bununla birlikte m tek tamsayı ve $p^2 + 4$ karesiz tamsayı ise, $y^2 - V_m xy + x^2 = \mp(p^2 + 4)U_m^2$ denklemlerinin tüm çözümlerinin, $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $(x, y) = \mp(V_n, V_{n+m})$ biçiminde olduğunu göstermiştir. Ayrıca, $m \in \mathbb{Z}$ ise $y^2 - v_m xy + x^2 = \mp u_m^2$ denklemlerinin tüm çözümlerinin, $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $(x, y) = \mp(u_n, u_{n+m})$ biçiminde olduğunu, $m \in \mathbb{Z}$ ve $p^2 - 4$ karesiz tamsayı ise $y^2 - v_m xy + x^2 = -(p^2 - 4)u_m^2$ denkleminin tüm çözümlerinin, $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $(x, y) = \mp(v_n, v_{n+m})$ biçiminde olduğunu ispatlamıştır. Melham'ın bu teoremleri, McDaniel'in [34] numaralı kaynakta verdiği teoremlerin genelleştirilmiş halleridir. [29] numaralı kaynakta ise, Kılıç ve Ömür, McDaniel'in [34] ve Melham'ın [37] numaralı kaynaklarda ele aldığı koniklerin daha genel hallerini incelemişlerdir.

Bu bölümde ise genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas dizileri olan $\{U_n\}$, $\{V_n\}$ ve $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ dizilerinin özellikleri kullanılarak, daha önce Kimberling [30], McDaniel [34] ve Melham [37], tarafından çözümleri araştırılan,

$$x^2 - V_n xy + \left(-1\right)^n y^2 = \mp(p^2+4)U_n^2,$$

$$x^2 - V_n xy + \left(-1\right)^n y^2 = \mp U_n^2,$$

$$x^2 - v_n xy + y^2 = -(p^2-4)u_n^2$$

ve

$$x^2 - v_n xy + y^2 = u_n^2$$

Diophantine denklemlerinin tüm tamsayı çözümleri bulunacaktır. Ayrıca, $p \geq 2$ olmak üzere,

$$x^2 - (p^2+4)U_n xy - (p^2+4)\left(-1\right)^n y^2 = \mp V_n^2$$

ve $p \geq 3$ olmak üzere,

$$x^2 - (p^2-4)u_n xy - (p^2-4)\left(-1\right)^n y^2 = v_n^2$$

Diophantine denklemlerinin tüm tamsayı çözümleri elde edilecektir. Daha sonra bu denklemler kullanılarak; n tek tamsayı ve $p \geq 2$ ise,

$$x^2 - V_n xy - y^2 = -1,$$

$$x^2 - V_n xy - y^2 = 1,$$

$$x^2 - V_{2n} xy + y^2 = (p^2+4)U_n^2,$$

$$x^2 - V_{2n} xy + y^2 = -V_n^2,$$

$$x^2 - V_{2n} xy + y^2 = V_n^2$$

Diophantine denklemlerinin tüm tamsayı çözümleri ve n çift tamsayı, $p \geq 2$ olmak üzere,

$$x^2 - V_n xy + y^2 = 1,$$
$$x^2 - V_{2n} xy + y^2 = -(p^2+4)U_n^2$$

ve

$$x^2 - V_{2n} xy + y^2 = V_n^2$$

Diophantine denklemlerinin tüm tamsayı çözümleri tespit edilecektir. Ayrıca $p \geq 2$ olmak üzere,

$$x^2 - (p^2+4)U_n xy - (p^2+4)\left(-1\right)^n y^2 = 1$$

ve

$$x^2 - V_{2n} xy + y^2 = U_n^2,$$

Diophantine denklemlerinin tüm tamsayı çözümleri araştırılacaktır. Bu denklemlere ek olarak, $p > 2$ ve p^2+4 karesiz bir tamsayı olmak üzere,

$$x^2 - V_n xy + \left(-1\right)^n y^2 = -(p^2+4),$$
$$x^2 - V_n xy + \left(-1\right)^n y^2 = p^2+4,$$
$$x^2 - \left(p^2+2\right) xy + y^2 = p^2+4,$$
$$x^2 - V_{2n} xy + y^2 = -(p^2+4)V_n^2,$$
$$x^2 - \left(p^2+2\right) xy + y^2 = -p^2(p^2+4),$$
$$x^2 - V_{2n} xy + y^2 = (p^2+4)V_n^2,$$
$$x^2 - \left(p^2+2\right) xy + y^2 = p^2(p^2+4)$$

ve

$$x^2 - \left[p^2\left(p^2+4\right)+2\right] xy + y^2 = \left(p^2+4\right)\left(p^2+2\right)^2$$

Diophantine denklemlerinin tüm tamsayı çözümleri tespit edilecektir. Ayrıca, $p \geq 3$ ve $p^2 - 4$ bir karesiz tamsayı olmak üzere,

$$x^2 - v_n xy + y^2 = -(p^2 - 4)u_n^2,$$
$$x^2 - v_{2n} xy + y^2 = -(p^2 - 4)u_n^2,$$
$$x^2 - v_n xy + y^2 = -(p^2 - 4)$$

ve

$$x^2 - (p^2 - 2)xy + y^2 = -(p^2 - 4)$$

Diophantine denklemlerinin tüm tamsayı çözümleri bulunacaktır. Bunlara ek olarak,

$$x^2 - v_n xy - y^2 = 1,$$
$$x^2 - v_{2n} xy + y^2 = u_n^2,$$
$$x^2 - v_{2n} xy + y^2 = v_n^2$$

ve $p \geq 3$ olmak üzere,

$$x^2 - (p^2 - 4)u_n xy - (p^2 - 4)y^2 = 1$$

Diophantine denklemlerinin tüm tamsayı çözümleri tespit edilecektir.

4.1. $\{U_n\}$ ve $\{V_n\}$ Dizileriyle İlgili Özdeşlikler ve Bazı Diophantine Denklemlerinin Çözümleri

Bu bölümde kullanılacak olan ve [38], [42] numaralı kaynaklarda da mevcut olan ve bazılarının ispatı ikinci bölümde yapılan özdeşlikler, $m,\ n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere,

$$U_n^2 - pU_n U_{n-1} - U_{n-1}^2 = (-1)^{n+1}, \tag{4.1}$$

$$V_n^2 - pV_nV_{n-1} - V_{n-1}^2 = (-1)^n (p^2+4), \tag{4.2}$$

$$V_mU_n - U_mV_n = 2(-1)^m U_{n-m}, \tag{4.3}$$

$$V_mV_n - (p^2+4)U_mU_n = 2(-1)^n V_{m-n}, \tag{4.4}$$

$$U_{n+1}V_m + V_{m-1}U_n = V_{n+m}, \tag{4.5}$$

$$V_mV_n + (p^2+4)U_mU_n = 2V_{n+m}, \tag{4.6}$$

$$V_mU_n + U_mV_n = 2U_{n+m}, \tag{4.7}$$

$$U_{n-1} + U_{n+1} = V_n, \tag{4.8}$$

$$V_{n-1} + V_{n+1} = (p^2+4)U_n, \tag{4.9}$$

$$V_n^2 - (p^2+4)U_n^2 = (-1)^n 4, \tag{4.10}$$

$$U_{n+m} = U_{m+1}U_n + U_{n-1}U_m \tag{4.11}$$

şeklinde sıralanabilir.

Binet Formülleri, tümevarım veya matrisler kullanılarak Fibonacci ve Lucas sayılarıyla ilgili birçok özdeşlik elde edilmiştir. Matrisler kullanılarak elde edilen bazı özdeşliklere [20], [26], [36], [43] ve [44] numaralı kaynaklarda rastlamak mümkündür. Bu bölümde terimleri genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayıları olan matrisler ele alınıp, yukarıdaki özdeşlikler kullanılarak, $\{U_n\}$ ve $\{V_n\}$ dizilerinin elemanlarıyla ilgili yeni özdeşlikler elde edilecektir. Bu özdeşlikler birçok Diophantine denklemlerinin tüm tamsayı çözümlerini karakterize etmek açışından önem taşımaktadır.

Teorem 4.1.1. $m, n, t \in \mathbb{Z}$ olmak üzere,

$$V_{n+m}^2 - (p^2+4)(-1)^{n+t+1}U_{t-n}V_{n+m}U_{m+t} - (p^2+4)(-1)^{n+t}U_{m+t}^2 = (-1)^{m+t}V_{t-n}^2$$

dir.

İspat. Teoremin ispatı için (4.6) ve (4.7) özdeşlikleri kullanılarak,

$$\begin{bmatrix} V_n/2 & (p^2+4)U_n/2 \\ U_t/2 & V_t/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_m \\ U_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{n+m} \\ U_{m+t} \end{bmatrix}$$

matris çarpımı göz önüne alınacaktır. (4.4) özdeşliğinden,

$$\begin{vmatrix} V_n/2 & (p^2+4)U_n/2 \\ U_t/2 & V_t/2 \end{vmatrix} = \frac{V_nV_t-(p^2+4)U_nU_t}{4} = \frac{(-1)^n V_{t-n}}{2} \neq 0$$

yazılabilir. Böylece

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} V_m \\ U_m \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} V_n/2 & (p^2+4)U_n/2 \\ U_t/2 & V_t/2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} V_{n+m} \\ U_{m+t} \end{bmatrix} \\ &= \frac{2}{(-1)^n V_{t-n}} \begin{bmatrix} V_t/2 & -(p^2+4)U_n/2 \\ -U_t/2 & V_n/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{n+m} \\ U_{m+t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

olduğu kullanılırsa,

$$\begin{aligned} V_m &= \frac{(-1)^n \left(V_tV_{n+m}-(p^2+4)U_nU_{m+t}\right)}{V_{t-n}} \\ U_m &= \frac{(-1)^n \left(V_nU_{m+t}-U_tV_{n+m}\right)}{V_{t-n}} \end{aligned} \tag{4.12}$$

elde edilir. $V_m^2-(p^2+4)U_m^2=(-1)^m 4$ özdeşliğinde (4.12)'de bulunan V_m ve U_m değerleri yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} (-1)^m 4V_{t-n}^2 &= \left(V_tV_{n+m}-(p^2+4)U_nU_{m+t}\right)^2-(p^2+4)\left(V_nU_{m+t}-U_tV_{n+m}\right)^2 \\ &= \left(V_t^2-(p^2+4)U_t^2\right)V_{n+m}^2-2(p^2+4)\left(V_tU_n-V_nU_t\right)V_{n+m}U_{m+t} \\ &\quad -(p^2+4)\left(V_n^2-(p^2+4)U_n^2\right)U_{m+t}^2 \end{aligned}$$

olur. Böylece (4.3) ve (4.10) özdeşliklerinden faydalanarak,

$$\left(-1\right)^{m} 4V_{t-n}^{2} = \left(-1\right)^{t} 4V_{n+m}^{2} - 4(p^{2}+4)\left(-1\right)^{n} U_{t-n}V_{n+m}U_{m+t} - 4(p^{2}+4)\left(-1\right)^{n} U_{m+t}^{2}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$V_{n+m}^{2} - (p^{2}+4)(-1)^{n+t}U_{t-n}V_{n+m}U_{m+t} - (p^{2}+4)\left(-1\right)^{n+t} U_{m+t}^{2} = \left(-1\right)^{m+t} V_{t-n}^{2} \quad (4.13)$$

olur. ■

Teorem 4.1.2. $m,\ n,\ t \in \mathbb{Z}$ ve $n \neq t$ ise

$$V_{n+m}^{2} - \left(-1\right)^{n+t} V_{t-n}V_{n+m}V_{m+t} + \left(-1\right)^{n+t} V_{m+t}^{2} = \left(-1\right)^{m+t+1} (p^{2}+4)U_{t-n}^{2}$$

dir.

İspat. (4.6) özdeşliği kullanılarak,

$$\begin{bmatrix} V_n/2 & (p^2+4)U_n/2 \\ V_t/2 & (p^2+4)U_t/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_m \\ U_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{n+m} \\ V_{m+t} \end{bmatrix}$$

matris çarpımı göz önüne alınırsa, $n \neq t$ olduğundan (4.3) özdeşliğinden,

$$\begin{vmatrix} V_n/2 & (p^2+4)U_n/2 \\ V_t/2 & (p^2+4)U_t/2 \end{vmatrix} = \frac{(p^2+4)\left(V_nU_t - V_tU_n\right)}{4} = \frac{(p^2+4)\left(-1\right)^n U_{t-n}}{2} \neq 0$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} V_m \\ U_m \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} V_n/2 & (p^2+4)U_n/2 \\ V_t/2 & (p^2+4)U_t/2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} V_{n+m} \\ V_{m+t} \end{bmatrix} \\ &= \frac{2(-1)^n}{(p^2+4)U_{t-n}} \begin{bmatrix} (p^2+4)U_t/2 & -(p^2+4)U_n/2 \\ -V_t/2 & V_n/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{n+m} \\ V_{m+t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

olduğu kullanılırsa,

$$
\begin{aligned}
V_m &= \frac{(-1)^n \left(U_t V_{n+m} - U_n V_{m+t}\right)}{U_{t-n}} \\
U_m &= \frac{(-1)^n \left(V_n V_{m+t} - V_t V_{n+m}\right)}{(p^2+4)U_{t-n}}
\end{aligned} \tag{4.14}
$$

bulunur. Ayrıca $V_m^2 - (p^2+4)U_m^2 = (-1)^m 4$ özdeşliğinde (4.14) eşitliklerinde bulunan V_m ve U_m değerleri yerine yazılırsa,

$$
(p^2+4)\left(U_t V_{n+m} - U_n V_{m+t}\right)^2 - \left(V_n V_{m+t} - V_t V_{n+m}\right)^2 = (-1)^m 4(p^2+4)U_{t-n}^2
$$

olur. Burada (4.10) ve (4.4) özdeşlikleri kullanılırsa,

$$
V_{n+m}^2 - (-1)^{n+t} V_{t-n} V_{n+m} V_{m+t} + (-1)^{n+t} V_{m+t}^2 = (-1)^{m+t+1} (p^2+4)U_{t-n}^2 \tag{4.15}
$$

elde edilir. ■

$$
\begin{bmatrix} U_n/2 & V_n/2 \\ U_t/2 & V_t/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_m \\ U_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{n+m} \\ U_{m+t} \end{bmatrix}
$$

matris çarpımı ve (4.7) özdeşliği kullanılarak, aşağıdaki teoremin ispatı benzer şekilde yapılabileceğinden, teorem ispatsız olarak verilecektir.

Teorem 4.1.3. $m,\ n,\ t \in \mathbb{Z}$ ve $k \neq n$ ise,

$$
U_{n+m}^2 - V_{n-t} U_{n+m} U_{m+t} + (-1)^{n+t} U_{m+t}^2 = (-1)^{m+t} U_{n-t}^2 \tag{4.16}
$$

dir.

Bundan sonraki kısımda, Teorem 4.1.1, Teorem 4.1.2 ve Teorem 4.1.3 ile verilen özdeşliklerden hareketle, $n \geq 1$ bir tamsayı olmak üzere [37] numaralı kaynakta ele alınan,

$$x^2 - V_n xy + (-1)^n y^2 = \mp(p^2+4)U_n^2,$$
$$x^2 - V_n xy + (-1)^n y^2 = \mp U_n^2$$

deklemlerinin tüm tamsayı çözümleri ve ayrıca

$$x^2 - (p^2+4)U_n xy - (p^2+4)(-1)^n y^2 = \mp V_n^2$$

denklemlerinin tüm tamsayı çözümleri tespit edildi. Bundan sonraki teoremlerde, n sıfırdan büyük bir tamsayı olarak alınacaktır.

Teorem 4.1.4.

$$x^2 - (p^2+4)U_n xy - (p^2+4)(-1)^n y^2 = -V_n^2$$

ve

$$x^2 - (p^2+4)U_n xy - (p^2+4)(-1)^n y^2 = V_n^2$$

denklemlerinin tüm tamsayı çözümleri, sırasıyla m tek tamsayı ve m çift tamsayı olmak üzere $(x, y) = \mp(V_{n+m}, U_m)$ biçimindedir.

İspat. $x^2 - (p^2+4)U_n xy - (p^2+4)(-1)^n y^2 = -V_n^2$ olsun. Buradan

$$\left(2x - (p^2+4)U_n y\right)^2 - (p^2+4)\left((p^2+4)U_n^2 + 4(-1)^n\right)y^2 = -4V_n^2$$

yazılabilir. Bu son eşitlikte (4.10) özdeşliği kullanılırsa $\left(2x - (p^2+4)U_n y\right)^2 - (p^2+4)V_n^2 y^2 = -4V_n^2$ elde edilir. Böylece $V_n \mid 2x - (p^2+4)U_n y$

olduğu görülür. O halde $2x-(p^2+4)U_n y = V_n a$ olan bir a tamsayısı vardır. Dolayısıyla

$$\left(V_n a\right)^2-(p^2+4)V_n^2 y^2=-4V_n^2$$

olur. Buradan

$$a^2-(p^2+4)y^2=-4$$

bulunur. Bu durumda Teorem 2.1.7'nin ispatında olduğu gibi,

$$u=\left(a+py\right)/2=\left(\left(\left(2x-(p^2+4)U_n y\right)/V_n\right)+py\right)/2=\left(x-V_{n-1}y\right)/V_n \text{ ve } v=y$$

alınırsa,

$$\begin{aligned} u^2-puv-v^2 &= \left(\left(x-V_{n-1}y\right)/V_n\right)^2-p\left(\left(x-V_{n-1}y\right)/V_n\right)y-y^2 \\ &= \left(x^2-(V_{n-1}+V_{n+1})xy-y^2\left(V_n^2-pV_nV_{n-1}-V_{n-1}^2\right)\right)/V_n^2 \end{aligned}$$

bulunur. (4.2) ve (4.9) özdeşliklerinden,

$$u^2-puv-v^2=\left(x^2-(p^2+4)U_n xy-(p^2+4)\left(-1\right)^n y^2\right)/V_n^2=-V_n^2/V_n^2=-1$$

elde edilir. Dolayısıyla Sonuç 2.3'e göre, m tek tamsayı olmak üzere $\left(u,v\right)=\mp\left(U_{m+1},U_m\right)$ dir. Bu durumda

$$\left(x-V_{n-1}y\right)/V_n=\mp U_{m+1} \text{ ve } y=\mp U_m$$

olup $x=\mp\left(U_{m+1}V_n+V_{n-1}U_m\right)$ ve $y=\mp U_m$ bulunur. Böylece (4.5) özdeşliği kullanılarak, m tek tamsayı olmak üzere,

$$\left(x,y\right)=\mp\left(V_{n+m},U_m\right)$$

elde edilir. Şu halde $x^2-(p^2+4)U_nxy-(p^2+4)\left(-1\right)^n y^2=-V_n^2$ denkleminin çözümleri, m tek tamsayı olmak üzere $\left(x,y\right)=\mp\left(V_{n+m},U_m\right)$ biçimindedir.

Tersine, m tek tamsayı olmak üzere $\left(x,y\right)=\mp\left(V_{n+m},U_m\right)$ olsun. Bu durumda (4.13) özdeşliğinden $x^2-(p^2+4)U_nxy-(p^2+4)(-1)^n y^2=-V_n^2$ bulunur.

Şimdi $x^2-(p^2+4)U_nxy-(p^2+4)\left(-1\right)^n y^2=V_n^2$ olsun. Buradan, yukarıdakine benzer şekilde,

$$u=\left(x-V_{n-1}y\right)/V_n \text{ ve } v=y$$

alınırsa, $u^2-puv-v^2=1$ olur. Sonuç 2.3'e göre, m çift tamsayı olmak üzere $\left(u,v\right)=\mp\left(U_{m+1},U_m\right)$ elde edilir. Böylece $\left(x-V_{n-1}y\right)/V_n=\mp U_{m+1}$ ve $y=\mp U_m$ olup (4.5) özdeşliği kullanılarak, m çift tamsayı olmak üzere $\left(x,y\right)=\mp\left(V_{n+m},U_m\right)$ bulunur.

Eğer m çift tamsayı olmak üzere $\left(x,y\right)=\mp\left(V_{n+m},U_m\right)$ ise (4.13) özdeşliğinden $x^2-(p^2+4)U_nxy-(p^2+4)(-1)^n y^2=V_n^2$ olduğu görülür. ■

Aşağıdaki iki teorem Melham tarafından [37] numaralı kaynakta ifade edilmiştir. Biz burada bu teoremlerin farklı yoldan ispatlarını yapacağız.

Teorem 4.1.5. p^2+4 karesiz olmak üzere $x^2-V_nxy+\left(-1\right)^n y^2=-(p^2+4)U_n^2$ ve $x^2-V_nxy+\left(-1\right)^n y^2=(p^2+4)U_n^2$ denklemlerinin tüm tamsayı çözümleri, sırasıyla m çift tamsayı ve m tek tamsayı olmak üzere $\left(x,y\right)=\mp\left(V_{n+m},V_m\right)$ biçimindedir [37].

İspat. İlk olarak $x^2 - V_n xy + (-1)^n y^2 = -(p^2+4)U_n^2$ olsun. Bu denklemin her iki tarafı 4 ile çarpılır ve (4.10) özdeşliği kullanılırsa $(2x - V_n y)^2 - (p^2+4)U_n^2 y^2 = -4(p^2+4)U_n^2$ bulunur. p^2+4 karesiz olduğundan, $U_n \mid 2x - V_n y$ olur. Dolayısıyla $2x - V_n y = zU_n$ olacak biçimde $z \in \mathbb{Z}$ vardır. Böylece $(zU_n)^2 - (p^2+4)U_n^2 y^2 = -4(p^2+4)U_n^2$ olup, buradan $z^2 - (p^2+4)y^2 = -4(p^2+4)$ elde edilir. O halde $(p^2+4) \mid z$ olur. Böylece $z = (p^2+4)a$ olacak biçimde $a \in \mathbb{Z}$ vardır. Buradan $2x - V_n y = (p^2+4)U_n a$ olduğu görülür. Dolayısıyla

$$\left((p^2+4)U_n a\right)^2 - (p^2+4)U_n^2 y^2 = -4(p^2+4)U_n^2$$

denkleminden,

$$y^2 - (p^2+4)a^2 = 4$$

elde edilir. Böylece Teorem 2.1.7'nin ispatına göre $u = (y + pa)/2$ ve $v = a$ alınırsa,

$$u = \frac{y + p\left(\dfrac{2x - V_n y}{(p^2+4)U_n}\right)}{2} = \frac{2px + \left((p^2+4)U_n - pV_n\right)}{(p^2+4)U_n} = \frac{px + V_{n-1}y}{(p^2+4)U_n}$$

ve

$$v = \left(2x - V_n y\right)/(p^2+4)U_n$$

olur. Buradan

$$u^2 - puv - v^2 = \frac{-(p^2+4)\left(x^2 - V_n xy + (-1)^n y^2\right)}{(p^2+4)^2 U_n^2} = \frac{-(p^2+4)\left(-(p^2+4)U_n^2\right)}{(p^2+4)^2 U_n^2} = 1$$

elde edilir. Dolayısıyla Sonuç 2.3'e göre m çift tamsayı olmak üzere $(u,v)=\mp(U_{m+1},U_m)$ dir. Böylece $(px+V_{n-1}y)/(p^2+4)U_n=\mp U_{m+1}$ ve $(2x-V_ny)/(p^2+4)U_n=\mp U_m$ olur. Buradan (4.5), (4.9) ve (4.10) özdeşlikleri kullanılarak m çift tamsayı olmak üzere $(x,y)=\mp(V_{n+m},V_m)$ bulunur.

Tersine, eğer m çift tamsayı olmak üzere $(x,y)=\mp(V_{n+m},V_m)$ ise (4.15) özdeşliğinden $x^2-V_nxy+(-1)^n y^2=-(p^2+4)U_n^2$ olur.

Şimdi $x^2-V_nxy+(-1)^n y^2=(p^2+4)U_n^2$ olsun. Bu durumda, yukarıdakine benzer şekilde m tek tamsayı olmak üzere $(x,y)=\mp(V_{n+m},V_m)$ olduğu görülebilir. Ayrıca m tek tamsayı olmak üzere $(x,y)=\mp(V_{n+m},V_m)$ ise yine (4.15) özdeşliğinden $x^2-V_nxy+(-1)^n y^2=(p^2+4)U_n^2$ olduğu görülür. ■

Teorem 4.1.6. $x^2-V_nxy+(-1)^n y^2=-U_n^2$ ve $x^2-V_nxy+(-1)^n y^2=U_n^2$ denklemlerinin tüm tamsayı çözümleri, sırasıyla m tek tamsayı ve m çift tamsayı olmak üzere $(x,y)=\mp(U_{n+m},U_m)$ biçimindedir [29], [37].

İspat. $x^2-V_nxy+(-1)^n y^2=-U_n^2$ olsun. Bu durumda (4.10) özdeşliği kullanılırsa $(2x-V_ny)^2-(p^2+4)U_n^2y^2=-4U_n^2$ yazılabilir. Buradan $U_n \mid 2x-V_ny$ olduğu görülür. Şu halde $((2x-V_ny)/U_n)^2-(p^2+4)y^2=-4$ dür. Böylece,

$$u=(((2x-V_ny)/U_n)+py)/2=x-U_{n-1}y/U_n \quad \text{ve} \quad v=y$$

alınırsa $u^2-puv-v^2=-1$ bulunur. Sonuç 2.3'e göre $(u,v)=\mp(U_{m+1},U_m)$ olacak biçimde bir m tek tamsayısı vardır. Dolayısıyla (4.11) özdeşliğinden, m tek tamsayı olmak üzere $(x,y)=\mp(U_{n+m},U_m)$ elde edilir.

Tersine, m tek tamsayı olmak üzere $(x,y)=\mp(U_{n+m},U_m)$ ise (4.16) özdeşliğine göre $x^2-V_nxy+(-1)^n y^2=-U_n^2$ olur.

Eğer $x^2-V_nxy+(-1)^n y^2=U_n^2$ ise yukarıdakine benzer adımlarla, m çift tamsayı olmak üzere $(x,y)=\mp(U_{n+m},U_m)$ olduğu görülür. Ayrıca eğer m çift tamsayı olmak üzere $(x,y)=\mp(U_{n+m},U_m)$ ise (4.16) özdeşliğinden $x^2-V_nxy+(-1)^n y^2=U_n^2$ elde edilir. ■

İleride ele alınacak olan Diophantine denklemlerinin çözümlerini bulmak için, genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayılarının bölünebilme özellikleri kullanılacaktır. $p=1$ için aşağıdaki denklemlerin tüm tamsayı çözümleri [8] numaralı kaynakta araştırılmıştır. Bu nedenle aşağıdaki denklemlerde $p\geq 2$ olduğu göz önüne alınarak, bu denklemlerin tüm tamsayı çözümleri araştırılacaktır.

Teorem 4.1.7. Eğer n bir tek tamsayı ise $x^2-V_nxy-y^2=-1$ ve $x^2-V_nxy-y^2=1$ denklemlerinin tüm tamsayı çözümleri, $t\in\mathbb{Z}$ olmak üzere sırasıyla $(x,y)=\mp\left(U_{(2t+2)n}/U_n,U_{(2t+1)n}/U_n\right)$ ve $(x,y)=\mp\left(U_{(2t+1)n}/U_n,U_{2tn}/U_n\right)$ biçimindedir. Eğer n bir çift tamsayı ise bu durumda $x^2-V_nxy+y^2=1$ denkleminin tüm tamsayı çözümleri, $t\in\mathbb{Z}$ olmak üzere $(x,y)=\mp\left(U_{(t+1)n}/U_n,U_{tn}/U_n\right)$ ile verilir.

İspat. İlk olarak $x^2-V_nxy-y^2=-1$ olsun. Bu denklemin her iki tarafı U_n^2 ile çarpılırsa,

$$(U_nx)^2-V_n(U_nx)(U_ny)-(U_ny)^2=-U_n^2$$

olup Teorem 4.1.6'ya göre, m tek tamsayı olmak üzere $U_nx=\mp U_{n+m}$ ve $U_ny=\mp U_m$ biçimindedir. Buradan, m tek tamsayı olmak üzere $x=\mp U_{n+m}/U_n$ ve $y=\mp U_m/U_n$ olur. Böylece Teorem 3.1.7'ye göre, x ve y nin tamsayı olması için $n\mid m$ olmalıdır.

O halde $n \mid m$ ve m bir tek tamsayı olduğundan, $m = (2t+1)n$ olacak biçimde bir t tamsayısı vardır. Dolayısıyla

$$(x, y) = \mp\left(U_{(2t+2)n} / U_n, U_{(2t+1)n} / U_n\right)$$

elde edilir.

Tersine, eğer $n \geq 3$ bir tek tamsayı ve $t \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $(x, y) = \mp\left(U_{(2t+2)\,n} / U_n, U_{(2t+1)\,n} / U_n\right)$ ise (4.16) özdeşliğine göre, $x^2 - V_n xy - y^2 = -1$ olur.

Benzer yolla, eğer n bir tek tamsayı ise, bu durumda $x^2 - V_n xy - y^2 = 1$ denkleminin tüm tamsayı çözümlerinin, $t \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $(x, y) = \mp\left(U_{(2t+1)n} / U_n, U_{2tn} / U_n\right)$ biçiminde olduğu görülür. Tersine, eğer n bir tek tamsayı ve $t \in \mathbb{Z}$ olmak üzere, $(x, y) = \mp\left(U_{(2t+1)n} / U_n, U_{2tn} / U_n\right)$ ise (4.16) özdeşliğinden $x^2 - V_n xy - y^2 = 1$ bulunur.

Şimdi $x^2 - V_n xy + y^2 = 1$ ve n bir çift tamsayı olsun. Bu denklemin her iki tarafı U_n^2 ile çarpılır ve Teorem 4.1.6 kullanılırsa, m çift tamsayı olmak üzere $(x, y) = \mp\left(U_{n+m} / U_n, U_m / U_n\right)$ elde edilir. Dolayısıyla Teorem 3.1.7'ye göre, $n \mid m$ dir. Buradan n ve m çift tamsayılar olduğundan, $t \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $m = tn$ yazılabilir. Böylece

$$(x, y) = \mp\left(U_{(t+1)n} / U_n, U_{tn} / U_n\right)$$

elde edilir.

Ayrıca, eğer n bir çift tamsayı ve $t \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $(x, y) = \mp\left(U_{(t+1)n} / U_n, U_{tn} / U_n\right)$ ise (4.16) özdeşliğinden $x^2 - V_n xy + y^2 = 1$ olduğu görülür. ■

Sonuç 4.1. Eğer n bir çift tamsayı ise $x^2 - V_n xy + y^2 = -1$ denkleminin tamsayı çözümü yoktur.

İspat. $x^2 - V_n xy + y^2 = -1$ olsun. Bu denklemin her iki yanı U_n^2 ile çarpılır ve Teorem 4.1.6 kullanılırsa, m tek tamsayı olmak üzere $(x, y) = \mp(U_{n+m}/U_n, U_m/U_n)$ elde edilir. Teorem 3.1.7'ye göre, (x, y) nin tamsayı çifti olması için $n \mid m$ olmalıdır. Fakat n çift, m tek olduğundan bu mümkün değildir. O halde $x^2 - V_n xy + y^2 = -1$ denkleminin tamsayı çözümü yoktur. ■

Teorem 4.1.8 $x^2 - (p^2+4)U_n xy - (p^2+4)(-1)^n y^2 = 1$ denkleminin tüm tamsayı çözümleri, $t \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $(x, y) = \mp\left(V_{(2t+1)n}/V_n, U_{2tn}/V_n\right)$ biçimindedir.

İspat. $x^2 - (p^2+4)U_n xy - (p^2+4)(-1)^n y^2 = 1$ olsun. Bu denklemin her iki tarafı V_n^2 ile çarpılırsa,

$$(V_n x)^2 - (p^2+4)U_n (V_n x)(V_n y) - (p^2+4)(-1)^n (V_n y)^2 = V_n^2$$

olup Teorem 4.1.4'e göre, m çift tamsayı olmak üzere $V_n x = \mp V_{n+m}$ ve $V_n y = \mp U_m$ dir. Buradan $(x, y) = \mp(V_{n+m}/V_n, U_m/V_n)$ elde edilir. Böylece Teorem 3.1.6 ve Teorem 3.1.8'e göre, $n \mid m$ ve m/n nin çift tamsayı olduğu görülür. Dolayısıyla $m = 2tn$ olacak biçimde $t \in \mathbb{Z}$ vardır. O halde $(x, y) = \mp\left(V_{(2t+1)n}/V_n, U_{2tn}/V_n\right)$ dir.

Tersine, $t \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $(x, y) = \mp\left(V_{(2t+1)n}/V_n, U_{2tn}/V_n\right)$ ise (4.13) özdeşliğinden $x^2 - (p^2+4)U_n xy - (p^2+4)(-1)^n y^2 = 1$ elde edilir. ■

Sonuç 4.2. $x^2 - (p^2+4)U_n xy - (p^2+4)(-1)^n y^2 = -1$ denkleminin tamsayı çözümü yoktur.

İspat. $x^2-(p^2+4)U_nxy-(p^2+4)(-1)^n y^2=-1$ denkleminin her iki tarafı V_n^2 ile çarpılırsa,

$$\left(V_nx\right)^2-(p^2+4)U_n\left(V_nx\right)\left(V_ny\right)-(p^2+4)\left(-1\right)^n\left(V_ny\right)^2=-V_n^2$$

olur. Teorem 4.1.4'e göre m tek tamsayı olmak üzere $\left(x,y\right)=\mp\left(V_{n+m}/V_n,U_{2m}/V_n\right)$ dir. Böylece Teorem 3.1.6 ve Teorem 3.1.8'e göre $n\,|\,m$ ve m/n çift tamsayı olmalıdır. Fakat m tek tamsayı olduğundan bu mümkün değildir. O halde $x^2-(p^2+4)U_nxy-(p^2+4)(-1)^n y^2=-1$ denkleminin tamsayı çözümü yoktur. ■

Teorem 4.1.9. n çift tamsayı ise $x^2-V_{2n}xy+y^2=-(p^2+4)U_n^2$ denkleminin tüm tamsayı çözümleri, $t\in\mathbb{Z}$ olmak üzere $\left(x,y\right)=\mp\left(V_{(2t+3)n}/V_n,V_{(2t+1)n}/V_n\right)$ biçimindedir. n tek tamsayı ise $x^2-V_{2n}xy+y^2=(p^2+4)U_n^2$ denkleminin tüm tamsayı çözümleri, $t\in\mathbb{Z}$ olmak üzere $\left(x,y\right)=\mp\left(V_{(2t+3)n}/V_n,V_{(2t+1)n}/V_n\right)$ biçimindedir.

İspat. n çift tamsayı olmak üzere $x^2-V_{2n}xy+y^2=-(p^2+4)U_n^2$ olsun. Bu eşitliğin her iki tarafı V_n^2 ile çarpılır ve $U_{2n}=U_nV_n$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$\left(V_nx\right)^2-V_{2n}\left(V_nx\right)\left(V_ny\right)+\left(V_ny\right)^2=-(p^2+4)U_{2n}^2$$

elde edilir. Teorem 4.1.5'e göre, m çift tamsayı olmak üzere $V_nx=\mp V_{2n+m}$ ve $V_ny=\mp V_m$ dir. Böylece m çift tamsayı olmak üzere $\left(x,y\right)=\mp\left(V_{2n+m}/V_n,V_m/V_n\right)$ olur. Ayrıca Teorem 3.1.8'e göre, $\left(x,y\right)$ nin tamsayı çifti olması için $n\,|\,m$ ve m/n nin tek tamsayı olması gerekir. Bu nedenle $m=\left(2t+1\right)n$ olacak biçimde $t\in\mathbb{Z}$ vardır. Dolayısıyla, $\left(x,y\right)=\mp\left(V_{(2t+3)n}/V_n,V_{(2t+1)n}/V_n\right)$ elde edilir.

Tersine, eğer n bir çift tamsayı ve $t \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $(x,y) = \mp\left(V_{(2t+3)n}/V_n, V_{(2t+1)n}/V_n\right)$ ise (4.15) özdeşliğinden, $x^2 - V_{2n}xy + y^2 = -(p^2+4)U_n^2$ olduğu görülür.

Şimdi n bir tek tamsayı olmak üzere $x^2 - V_{2n}xy + y^2 = (p^2+4)U_n^2$ olsun. Bu denklem V_n^2 ile çarpılırsa, yukarıdakine benzer şekilde Teorem 4.1.5'e göre, m tek tamsayı olmak üzere $(x,y) = \mp\left(V_{2n+m}/V_n, V_m/V_n\right)$ bulunur. Böylece Teorem 3.1.8'e göre, x ve y nin tamsayı olması için $n \mid m$ ve m/n tek tamsayı olmalıdır. O halde, $t \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $m = (2t+1)n$ yazılabilir. Dolayısıyla $(x,y) = \mp\left(V_{(2t+3)n}/V_n, V_{(2t+1)n}/V_n\right)$ elde edilir.

Eğer n bir tek tamsayı ve $t \in \mathbb{Z}$ olmak üzere, $(x,y) = \mp\left(V_{(2t+3)n}/V_n, V_{(2t+1)n}/V_n\right)$ ise (4.15) özdeşliğinden $x^2 - V_{2n}xy + y^2 = (p^2+4)U_n^2$ olduğu görülür. ■

Sonuç 4.3. Eğer n bir tek tamsayı ise $x^2 - V_{2n}xy + y^2 = -(p^2+4)U_n^2$ denkleminin ve eğer n çift tamsayı ise $x^2 - V_{2n}xy + y^2 = (p^2+4)U_n^2$ denkleminin tamsayı çözümü yoktur.

İspat. Teorem 4.1.5 ve Teorem 3.1.8'den ispat açıktır. ■

Teorem 4.1.10. $x^2 - V_{2n}xy + y^2 = U_n^2$ denkleminin tüm tamsayı çözümleri, $t \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $(x,y) = \mp\left(U_{(2t+2)n}/V_n, U_{2tn}/V_n\right)$ biçimindedir.

İspat. $x^2 - V_{2n}xy + y^2 = U_n^2$ olsun. Bu denklemin her iki yanı V_n^2 ile çarpılırsa,

$$\left(V_n x\right)^2 - V_{2n}\left(V_n x\right)\left(V_n y\right) + \left(V_n y\right)^2 = U_{2n}^2$$

olur. Teorem 4.1.6'ya göre, m çift tamsayı olmak üzere

$\left(x,y\right)=\mp\left(U_{2n+m}/V_n,U_m/V_n\right)$ bulunur. Böylece $\left(x,y\right)$ nin bir tamsayı çifti olması için, Teorem 3.1.6'ya göre $n\,|\,m$ ve m/n nin bir çift tamsayı olması gerekir. O halde $m=2tn$ olacak biçimde bir t tamsayısı vardır. Dolayısıyla $\left(x,y\right)=\mp\left(U_{(2t+2)n}/V_n,U_{2tn}/V_n\right)$ elde edilir.

Tersine, eğer $t\in\mathbb{Z}$ olmak üzere $\left(x,y\right)=\mp\left(U_{(2t+2)n}/V_n,U_{2tn}/V_n\right)$ ise (4.16) özdeşliğinden $x^2-V_{2n}xy+y^2=U_n^2$ olduğu görülür. ■

Teorem 4.1.11. $x^2-V_{2n}xy+y^2=-U_n^2$ denkleminin tamsayı çözümü yoktur.

İspat. $x^2-V_{2n}xy+y^2=-U_n^2$ olsun. Bu denklemin her iki tarafı V_n^2 ile çarpılırsa, $\left(V_nx\right)^2-V_{2n}\left(V_nx\right)\left(V_ny\right)+\left(V_ny\right)^2=-U_{2n}^2$ olur. Buradan Teorem 4.1.6'ya göre, m tek tamsayı olmak üzere $\left(x,y\right)=\mp\left(U_{2n+m}/V_n,U_m/V_n\right)$ bulunur. Böylece x ve y nin tamsayı olması için Teorem 3.1.6'ya göre, $n\,|\,m$ ve m/n çift tamsayı olmalıdır. O halde $m=2tn$ olan $t\in\mathbb{Z}$ vardır. Bu ise m nin tek tamsayı olması ile çelişir. Dolayısıyla $x^2-V_{2n}xy+y^2=-U_n^2$ denkleminin tamsayı çözümü yoktur. ■

Teorem 4.1.12. n bir tek tamsayı olsun. Bu durumda $x^2-V_{2n}xy+y^2=-V_n^2$ denkleminin tüm tamsayı çözümleri, $t\in\mathbb{Z}$ olmak üzere $\left(x,y\right)=\mp\left(U_{(2t+3)n}/U_n,U_{(2t+1)n}/U_n\right)$ biçimindedir.

İspat. $x^2-V_{2n}xy+y^2=-V_n^2$ olsun. Bu denklemin her iki tarafı U_n^2 ile çarpılırsa $\left(U_nx\right)^2-V_{2n}\left(U_nx\right)\left(U_ny\right)+\left(U_ny\right)^2=-U_{2n}^2$ bulunur. Böylece Teorem 4.1.6'ya göre m tek tamsayı olmak üzere, $\left(x,y\right)=\mp\left(U_{2n+m}/U_n,U_m/U_n\right)$ olur. Ayrıca x ve y nin tamsayı olması için Teorem 3.1.7'ye göre $n\,|\,m$ olmalıdır. m ve n tamsayılarının her ikisi de tek olduğundan, $m=\left(2t+1\right)n$ olacak biçimde bir t tamsayısı vardır. Buradan $\left(x,y\right)=\mp\left(U_{(2t+3)n}/U_n,U_{(2t+1)n}/U_n\right)$ elde edilir.

Tersine, n bir tek tamsayı ve $t \in \mathbb{Z}$ olmak üzere, $(x, y) = \mp\left(U_{(2t+3)n}/U_n, U_{(2t+1)n}/U_n\right)$ ise bu durumda (4.16) özdeşliğinden $x^2 - V_{2n}xy + y^2 = -V_n^2$ bulunur. ■

Şimdi aşağıdaki sonuçlar verilebilir.

Sonuç 4.4. Eğer n bir çift tamsayı ise $x^2 - V_{2n}xy + y^2 = -V_n^2$ denkleminin tamsayı çözümü yoktur.

İspat. $x^2 - V_{2n}xy + y^2 = -V_n^2$ denklemi U_n^2 ile çarpılıp, Teorem 4.1.6 ve Teorem 3.1.7 kullanılırsa ispat görülür. ■

Sonuç 4.5. Eğer n bir çift tamsayı ise $x^2 - V_{2n}xy + y^2 = V_n^2$ denkleminin tüm tamsayı çözümleri, $t \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $(x, y) = \mp\left(U_{(t+2)n}/U_n, U_{tn}/U_n\right)$ biçimindedir. Eğer n bir tek tamsayı ise, $x^2 - V_{2n}xy + y^2 = V_n^2$ denkleminin tüm tamsayı çözümleri, $t \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $(x, y) = \mp\left(U_{(2t+2)n}/U_n, U_{2tn}/U_n\right)$ ile verilir.

İspat. n bir çift tamsayı ve $x^2 - V_{2n}xy + y^2 = V_n^2$ olsun. Teorem 4.1.6'ya göre, m çift tamsayı olmak üzere, $(x, y) = \mp(U_{2n+m}/U_n, U_m/U_n)$ olur. O halde x ve y nin tamsayı olması için Teorem 3.1.7'ye göre, $m = tn$ olacak biçimde bir t tamsayısı vardır. Dolayısıyla, $(x, y) = \mp\left(U_{(t+2)n}/U_n, U_{tn}/U_n\right)$ elde edilir.

Tersine, $t \in \mathbb{Z}$ olmak üzere, $(x, y) = \mp\left(U_{(t+2)n}/U_n, U_{tn}/U_n\right)$ ise (4.16) özdeşliğinden $x^2 - V_{2n}xy + y^2 = V_n^2$ olur.

Şimdi n bir tek tamsayı ve $x^2 - V_{2n}xy + y^2 = V_n^2$ olsun. Bu durumda, m çift tamsayı olmak üzere $(x, y) = \mp(U_{2n+m}/U_n, U_m/U_n)$ olur. Böylece Teorem 3.1.7'ye göre $n \mid m$ olmalıdır. Dolayısıyla $t \in \mathbb{Z}$ olmak üzere, $m = 2tn$ yazılabilir. Buradan

$\left(x,y\right)=\mp\left(U_{(2t+2)n}/U_n,U_{2tn}/U_n\right)$ elde edilir. ■

Tersine, $t\in\mathbb{Z}$ olmak üzere, $\left(x,y\right)=\mp\left(U_{(2t+2)n}/U_n,U_{2tn}/U_n\right)$ ise (4.16) özdeşliğinden $x^2-V_{2n}xy+y^2=V_n^2$ olur.

Teorem 4.1.13. p^2+4 karesiz bir tamsayı olsun. Bu durumda $x^2-V_nxy+\left(-1\right)^n y^2=-(p^2+4)$ denkleminin tüm tamsayı çözümleri, m çift tamsayı ve $U_n \mid V_m$ olmak üzere $\left(x,y\right)=\mp\left(V_{n+m}/U_n,V_m/U_n\right)$ biçimindedir.

İspat. $x^2-V_nxy+\left(-1\right)^n y^2=-(p^2+4)$ olsun. Bu denklemin her iki yanı U_n^2 ile çarpılırsa,

$$\left(U_nx\right)^2-V_n\left(U_nx\right)\left(U_ny\right)+\left(-1\right)^n\left(U_ny\right)^2=-(p^2+4)U_n^2$$

olup Teorem 4.1.5'e göre m çift tamsayı ve $U_n \mid V_m$ olmak üzere $\left(x,y\right)=\mp\left(V_{n+m}/U_n,V_m/U_n\right)$ bulunur.

Tersine, m çift tamsayı olmak üzere $\left(x,y\right)=\mp\left(V_{n+m}/U_n,V_m/U_n\right)$ ise (4.15) özdeşliğinden $x^2-V_nxy+\left(-1\right)^n y^2=-(p^2+4)$ olur. ■

Teorem 4.1.13, Teorem 1.4 ve Teorem 3.1.9'a göre aşağıdaki sonuçlar verilebilir.

Sonuç 4.6. p^2+4 karesiz bir tamsayı ise $x^2-pxy-y^2=-\left(p^2+4\right)$ denkleminin tüm tamsayı çözümleri, $t\in\mathbb{Z}$ olmak üzere $\left(x,y\right)=\mp\left(V_{2t+1},V_{2t}\right)$ biçimindedir.

İspat. Teorem 4.1.13'de $n=1$ alınıp, m nin çift tamsayı olduğu göz önüne alınırsa ispat tamamlanır. ■

Sonuç 4.7. $p \geq 3$ ve p^2+4 karesiz bir tamsayı olmak üzere, $x^2-\left(p^2+2\right)xy+y^2=-\left(p^2+4\right)$ denkleminin çözümü yoktur.

İspat. Teorem 4.1.13 de $p \geq 3$ ve $n=2$ alınırsa $V_2=p^2+2$ olur. Böylece Teorem 3.1.9'a göre m nin tek tamsayı olması gerekir. Bu ise m nin çift tamsayı olması ile çelişir. ■

Teorem 4.1.14. p^2+4 karesiz bir tamsayı olsun. Bu durumda $x^2-V_nxy+(-1)^n y^2=p^2+4$ denkleminin tüm tamsayı çözümleri, m tek tamsayı ve $U_n \mid V_m$ olmak üzere $(x,y)=\mp\left(V_{n+m}/U_n, V_m/U_n\right)$ biçimindedir.

İspat. $x^2-V_nxy+(-1)^n y^2=p^2+4$ olsun. Bu denklemin her iki yanı U_n^2 ile çarpılırsa,

$$(U_nx)^2-V_n(U_nx)(U_ny)+(-1)^n(U_ny)^2=(p^2+4)U_n^2$$

olur. Bu durumda Teorem 4.1.5'e göre, m tek tamsayı ve $U_n \mid V_m$ olmak üzere $(x,y)=\mp\left(V_{n+m}/U_n, V_m/U_n\right)$ bulunur.

Eğer, m tek tamsayı ve $(x,y)=\mp\left(V_{n+m}/U_n, V_m/U_n\right)$ ise (4.15) özdeşliğinden $x^2-V_nxy+(-1)^n y^2=p^2+4$ bulunur. ■

Teorem 4.1.14 ve Teorem 3.1.9'a göre aşağıdaki sonuçlar verilebilir.

Sonuç 4.8. p^2+4 karesiz bir tamsayı ise $x^2-pxy-y^2=p^2+4$ denkleminin tüm tamsayı çözümleri, $t \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $(x,y)=\mp\left(V_{2t+2}, V_{2t+1}\right)$ biçimindedir.

İspat. Teorem 4.1.14'de $n=1$ alınır ve m nin tek tamsayı olduğu göz önünde bulundurulursa ispat tamamlanır. ■

Sonuç 4.9. $x^2 - 6xy + y^2 = 8$ denkleminin tüm tamsayı çözümleri, $t \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $(x, y) = \mp\left(V_{(2t+3)} / 2, V_{(2t+1)} / 2\right)$ biçimindedir.

İspat. Teorem 4.1.14'de $p = 2$ ve $n = 2$ alınıp, m nin tek tamsayı olduğu göz önünde bulundurulursa istenen elde edilir.

Sonuç 4.10. $p^2 + 4$ karesiz bir tamsayı olsun. Bu durumda $x^2 - \left(p^2 + 2\right)xy + y^2 = p^2 + 4$ denkleminin tüm çözümleri, $t \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $(x, y) = \mp\left(V_{(2t+3)} / p, V_{(2t+1)} / p\right)$ biçimindedir.

İspat. Teorem 4.1.14'de $n = 2$ alınırsa Teorem 3.1.9'a göre m nin tek tamsayı olması gerekir. Bu da ispatı tamamlar. ■

Teorem 4.1.15. $p^2 + 4$ bir karesiz tamsayı ise $x^2 - V_{2n}xy + y^2 = -(p^2 + 4)V_n^2$ denkleminin tüm tamsayı çözümleri m çift tamsayı ve $U_n \mid V_m$ olmak üzere $(x, y) = \mp\left(V_{2n+m} / U_n, V_m / U_n\right)$ biçimindedir.

İspat. $x^2 - V_{2n}xy + y^2 = -(p^2 + 4)V_n^2$ olsun. Bu denklem U_n^2 ile çarpılırsa $\left(U_n x\right)^2 - V_{2n}\left(U_n x\right)\left(U_n y\right) + \left(U_n y\right)^2 = -(p^2 + 4)U_{2n}^2$ olur. Bu durumda Teorem 4.1.5'e göre, m çift tamsayı ve $U_n \mid V_m$ olmak üzere $(x, y) = \mp\left(V_{2n+m} / U_n, V_m / U_n\right)$ bulunur.

Tersine, m çift tamsayı olmak üzere $(x, y) = \mp\left(V_{2n+m} / U_n, V_m / U_n\right)$ ise (4.15) özdeşliğinden $x^2 - V_{2n}xy + y^2 = -(p^2 + 4)V_n^2$ olduğu görülür. ■

Sonuç 4.11. $p^2 + 4$ karesiz bir tamsayı ise $x^2 - \left(p^2 + 2\right)xy + y^2 = -p^2(p^2 + 4)$ denkleminin tüm tamsayı çözümleri, $t \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $(x, y) = \mp\left(V_{2t+2}, V_{2t}\right)$ biçimindedir.

İspat. Teorem 4.1.15'de $n=1$ alınıp m nin çift olduğu göz önünde bulundurulursa, $t \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $m=2t$ olur. Dolayısıyla $(x,y)=\mp(V_{2t+2},V_{2t})$ bulunur. ■

Sonuç 4.12. $p \geq 3$ ve p^2+4 karesiz bir tamsayı ise $x^2-\left[p^2\left(p^2+4\right)+2\right]xy+y^2=-\left(p^2+4\right)\left(p^2+2\right)^2$ denkleminin çözümü yoktur.

İspat. Teorem 4.1.15'de $p \geq 3$ ve $n=2$ alınırsa, Teorem 3.1.9'a göre m tek olur. Bu ise m nin çift olması ile çelişir. ■

Teorem 4.1.16. p^2+4 bir karesiz tamsayı ise $x^2-V_{2n}xy+y^2=(p^2+4)V_n^2$ denkleminin tüm tamsayı çözümleri, m tek tamsayı ve $U_n \mid V_m$ olmak üzere $(x,y)=\mp(V_{2n+m}/U_n, V_m/U_n)$ biçimindedir.

İspat. $x^2-V_{2n}xy+y^2=(p^2+4)V_n^2$ olsun. Bu denklem U_n^2 ile çarpılırsa $(U_nx)^2-V_{2n}(U_nx)(U_ny)+(U_ny)^2=(p^2+4)U_{2n}^2$ olur. Bu durumda Teorem 4.1.5'e göre, m tek tamsayı ve $U_n \mid V_m$ olmak üzere $(x,y)=\mp(V_{2n+m}/U_n, V_m/U_n)$ dir.

Diğer yandan, eğer m tek tamsayı ve $(x,y)=\mp(V_{2n+m}/U_n, V_m/U_n)$ ise (4.15) özdeşliğinden $x^2-V_{2n}xy+y^2=(p^2+4)V_n^2$ olduğu görülür. ■

Sonuç 4.13. p^2+4 karesiz bir tamsayı ise $x^2-\left(p^2+2\right)xy+y^2=p^2(p^2+4)$ denkleminin çözümleri, $t \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $(x,y)=\mp(V_{2t+3},V_{2t+1})$ biçimindedir.

İspat. Teorem 4.1.16'da $n=1$ alınırsa ispat görülür. ■

Sonuç 4.14. $p \geq 2$ ve p^2+4 karesiz bir tamsayı olsun. Bu durumda $x^2-\left[p^2\left(p^2+4\right)+2\right]xy+y^2=\left(p^2+4\right)\left(p^2+2\right)^2$ denkleminin tüm tamsayı çözümleri, $t \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $(x,y)=\mp\left(V_{(2t+5)}/p, V_{(2t+1)}/p\right)$ biçimindedir.

İspat. Teorem 4.1.16'da $p \geq 2$ ve $n = 2$ alınırsa, Teorem 3.1.9'a göre $t \in \mathbb{Z}$ olmak üzere, $m = 2t + 1$ biçiminde olduğu görülür. Buradan istenen elde edilir. ■

4.2. $\{u_n\}$ ve $\{v_n\}$ Dizileriyle İlgili Özdeşlikler ve Bazı Diophantine Denklemlerinin Çözümleri

Bu bölümde elemanları genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayıları olan özel matrisler kullanılarak bazı özdeşlikler elde edilecektir. Ayrıca bu özdeşliklerden hareketle bazı Diophantine denklemlerinin tüm çözümlerinin genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayıları olduğu gösterilecektir.

Bu bölümde kullanacağımız ve [38], [42] numaralı kaynaklarda da mevcut olan ve bazılarının ispatı ikinci bölümde yapılan özdeşlikler, $m,\ n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere,

$$u_n^2 - pu_nu_{n-1} + u_{n-1}^2 = 1, \tag{4.17}$$

$$v_n^2 - pv_nv_{n-1} + v_{n-1}^2 = -\left(p^2 - 4\right), \tag{4.18}$$

$$v_mu_n - u_mv_n = 2u_{n-m}, \tag{4.19}$$

$$v_mv_n - \left(p^2 - 4\right)u_mu_n = 2v_{n-m}, \tag{4.20}$$

$$u_nu_{m+1} - u_mu_{n-1} = u_{n+m}, \tag{4.21}$$

$$v_mv_n + \left(p^2 - 4\right)u_mu_n = 2v_{n+m}, \tag{4.22}$$

$$u_mv_n + v_mu_n = 2u_{n+m}, \tag{4.23}$$

$$u_{n+1} - u_{n-1} = v_n, \tag{4.24}$$

$$v_{n+1} - v_{n-1} = \left(p^2 - 4\right)u_n, \tag{4.25}$$

$$v_n^2 - \left(p^2 - 4\right)u_n^2 = 4, \tag{4.26}$$

$$u_{m+1}v_n - u_mv_{n-1} = v_{n+m} \tag{4.27}$$

biçiminde sıralanabilir. Yukarıdaki özdeşlikler aşağıda verilen teoremlerin ispatlarında kullanılacaktır.

Teorem 4.2.1. Her $m,\ n,\ t \in \mathbb{Z}$ için

$$v_{n+m}^2 - (p^2-4)u_{n-t}v_{n+m}u_{m+t} - (p^2-4)u_{m+t}^2 = v_{n-t}^2$$

dir.

İspat. Eğer (4.22) ve (4.23) özdeşlikleri göz önüne alınırsa,

$$\begin{bmatrix} v_n/2 & (p^2-4)u_n/2 \\ u_t/2 & v_t/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_m \\ u_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{n+m} \\ u_{m+t} \end{bmatrix}$$

matris çarpımı yazılabilir. (4.20) özdeşliğinden,

$$\begin{vmatrix} v_n/2 & (p^2-4)u_n/2 \\ u_t/2 & v_t/2 \end{vmatrix} = \frac{v_n v_t - (p^2-4)u_n u_t}{4} = \frac{v_{n-t}}{2} \neq 0$$

olduğundan,

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} v_m \\ u_m \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} v_n/2 & (p^2-4)u_n/2 \\ u_t/2 & v_t/2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} v_{n+m} \\ u_{m+t} \end{bmatrix} \\ &= \frac{2}{v_{n-t}}\begin{bmatrix} v_t/2 & -(p^2-4)u_n/2 \\ -u_t/2 & v_n/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{n+m} \\ u_{m+t} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$v_m = \frac{v_t v_{n+m} - (p^2-4)u_n u_{m+t}}{v_{n-t}}$$

ve

$$u_m = \frac{v_n u_{m+t} - u_t v_{n+m}}{v_{n-t}}$$

bulunur. Yukarıda bulunan v_m ve u_m ifadeleri $v_m^2-(p^2-4)u_m^2=4$ özdeşliğinde yerine yazılırsa,

$$\left(v_t v_{n+m}-(p^2-4)u_n u_{m+t}\right)^2-(p^2-4)\left(v_n u_{m+t}-u_t v_{n+m}\right)^2=4v_{n-t}^2$$

olur. Böylece

$$\left(v_t^2-(p^2-4)u_t^2\right)v_{n+m}^2-2(p^2-4)\left(v_t u_n-v_n u_t\right)v_{n+m}u_{m+t}-(p^2-4)\left(v_n^2-(p^2-4)u_n^2\right)u_{m+t}^2=4v_{n-t}^2$$

bulunur. Bu eşitlikte (4.19) ve (4.26) özdeşlikleri kullanılırsa,

$$4v_{n+m}^2-4(p^2-4)u_{n-t}v_{n+m}u_{m+t}-4(p^2-4)u_{m+t}^2=4v_{n-t}^2$$

ve buradan

$$v_{n+m}^2-(p^2-4)u_{n-t}v_{n+m}u_{m+t}-(p^2-4)u_{m+t}^2=v_{n-t}^2 \tag{4.28}$$

elde edilir. ■

Teorem 4.2.2. Her $m,\ n,\ t\in\mathbb{Z}$ ve $t\neq n$ için,

$$v_{n+m}^2-v_{n-t}v_{n+m}v_{m+t}+v_{m+t}^2=-(p^2-4)u_{n-t}^2$$

dir.

İspat. (4.22) özdeşliğinden faydalanılarak

$$\begin{bmatrix} v_n/2 & (p^2-4)u_n/2 \\ v_t/2 & (p^2-4)u_t/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_m \\ u_m \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} v_{n+m} \\ v_{m+t} \end{bmatrix}$$

matris denklemi yazılabilir. (4.19) özdeşliği kullanılırsa, $t\neq n$ olduğundan,

$$\begin{vmatrix} v_n/2 & (p^2-4)u_n/2 \\ v_t/2 & (p^2-4)u_t/2 \end{vmatrix} = \frac{(p^2-4)\left(v_n u_t - v_t u_n\right)}{4} = \frac{(p^2-4)u_{n-t}}{2} \neq 0$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} v_m \\ u_m \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} v_n/2 & (p^2-4)u_n/2 \\ v_t/2 & (p^2-4)u_t/2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} v_{n+m} \\ v_{m+t} \end{bmatrix} \\ &= \frac{2}{\left(p^2-4\right)u_{n-t}} \begin{bmatrix} (p^2-4)u_t/2 & -(p^2-4)u_n/2 \\ -v_t/2 & v_n/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{n+m} \\ v_{m+t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$v_m = \frac{u_t v_{n+m} - u_n v_{m+t}}{u_{n-t}}$$

ve

$$u_m = \frac{v_n v_{m+t} - v_t v_{n+m}}{(p^2-4)u_{n-t}}$$

elde edilir. $v_m^2 - (p^2-4)u_m^2 = 4$ özdeşliğinde, yukarıda bulunan v_m ve u_m ler yerine yazılarak

$$(p^2-4)\left(u_t v_{n+m} - u_n v_{m+t}\right)^2 - \left(v_n v_{m+t} - v_t v_{n+m}\right)^2 = 4(p^2-4)u_{n-t}^2$$

bulunur. Böylece

$$-\left(v_t^2-(p^2-4)u_t^2\right)v_{n+m}^2 + 2\left(v_n v_t - (p^2-4)u_t u_n\right)v_{n+m}v_{m+t} - \left(v_n^2-(p^2-4)u_n^2\right)v_{m+t}^2 = 4(p^2-4)u_{n-t}^2$$

olup bu denklemde (4.20) ve (4.26) özdeşlikleri kullanılırsa,

$$4v_{n+m}^2 - 4v_{n-t}v_{n+m}v_{m+t} + 4v_{m+t}^2 = -4(p^2-4)u_{n-t}^2,$$

yani

$$v_{n+m}^2 - v_{n-t}v_{n+m}v_{m+t} + v_{m+t}^2 = -(p^2-4)u_{n-t}^2 \qquad (4.29)$$

özdeşliği elde edilir. ■

(4.23) özdeşliği kullanılarak,

$$\begin{bmatrix} u_n/2 & v_n/2 \\ u_t/2 & v_t/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_m \\ u_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{n+m} \\ u_{m+t} \end{bmatrix}$$

matris çarpımı göz önüne alınırsa, aşağıdaki teorem verilebilir. Bu teoremin ispatı Teorem 4.2.1 ve Teorem 4.2.2'ye benzer şekilde yapılabileceğinden, burada ispatı verilmeyecektir.

Teorem 4.2.3. Her $m, n, t \in \mathbb{Z}$ ve $t \neq n$ için,

$$u_{n+m}^2 - v_{n-t}u_{n+m}u_{m+t} + u_{m+t}^2 = u_{n-t}^2 \qquad (4.30)$$

dir.

Teorem 4.2.1, Teorem 4.2.2 ve Teorem 4.2.3'de verilen özdeşliklerden faydalanarak, $n \geq 1$ olmak üzere [37] numaralı kaynakta ele alınan,

$$x^2 - v_n xy + y^2 = -(p^2-4)u_n^2,$$
$$x^2 - v_n xy + y^2 = u_n^2$$

Diophantine denklemlerinin tüm tamsayı çözümleri verilecektir ve bunlara ek olarak,

$$x^2-(p^2-4)u_nxy-(p^2-4)y^2=v_n^2$$

Diophantine denkleminin tüm tamsayı çözümleri aşağıdaki teoremlerde tespit edilecektir. Bundan sonra $n\geq 1$ olarak alınacaktır.

Teorem 4.2.4. $p\geq 3$ ise $x^2-(p^2-4)u_nxy-(p^2-4)y^2=v_n^2$ denkleminin tüm tamsayı çözümleri, $m\in\mathbb{Z}$ olmak üzere $(x,y)=\mp(v_{n+m},u_m)$ biçimindedir.

İspat. $x^2-(p^2-4)u_nxy-(p^2-4)y^2=v_n^2$ olsun. Buradan

$$\left(2x-(p^2-4)u_ny\right)^2-\left((p^2-4)^2u_n^2+4(p^2-4)\right)y^2=4v_n^2$$

yazılabilir. Böylece $\left(2x-(p^2-4)u_ny\right)^2-(p^2-4)\left((p^2-4)u_n^2+4\right)y^2=4v_n^2$ olur. Bu eşitlikte (4.26) özdeşliği kullanılırsa $\left(2x-(p^2-4)u_ny\right)^2-(p^2-4)v_n^2y^2=4v_n^2$ bulunur. Şu halde $v_n\mid 2x-(p^2-4)u_ny$ dir. Bu durumda,

$$u=\frac{\left(\dfrac{\left(2x-(p^2-4)u_ny\right)}{v_n}+py\right)}{2} \quad \text{ve} \quad v=y$$

alınırsa, (4.25) özdeşliğinden $u=\left(x+v_{n-1}y\right)/v_n$ olur. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}u^2-puv+v^2&=\left(\left(x+v_{n-1}y\right)/v_n\right)^2-p\left(\left(x-v_{n-1}y\right)/v_n\right)y+y^2\\&=\left(x^2-(v_{n+1}-v_{n-1})xy+y^2\left(v_n^2-pv_nv_{n-1}+v_{n-1}^2\right)\right)/v_n^2\end{aligned}$$

bulunur. Bu durumda (4.18) ve (4.25) özdeşlikleri kullanılarak

$$u^2-puv+v^2=\left(x^2-(p^2-4)u_nxy-(p^2-4)y^2\right)/v_n^2=v_n^2/v_n^2=1$$

elde edilir. O halde Teorem 2.2.6 ve Sonuç 2.27'ye göre, $m \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $(u,v) = \mp(u_{m+1}, u_m)$ dir. Dolayısıyla

$$(x + v_{n-1}y)/v_n = \mp u_{m+1} \text{ ve } y = \mp u_m,$$

yani $x = \mp(u_{m+1}v_n - v_{n-1}u_m)$ ve $y = \mp u_m$ bulunur. Böylece (4.27) özdeşliği kullanılırsa,

$$(x,y) = \mp(v_{n+m}, u_m)$$

elde edilir.

Tersine, $m \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $(x,y) = \mp(v_{n+m}, u_m)$ ise (4.28) özdeşliğinden $x^2 - (p^2-4)u_n xy - (p^2-4)y^2 = v_n^2$ olduğu görülür. ■

Teorem 4.2.5. $p \geq 3$ ve $p^2 - 4$ bir karesiz tamsayı olsun. Bu durumda $x^2 - v_n xy + y^2 = -(p^2-4)u_n^2$ denkleminin tüm tamsayı çözümleri, $m \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $(x,y) = \mp(v_{n+m}, v_m)$ biçimindedir [37].

İspat. $x^2 - v_n xy + y^2 = -(p^2-4)u_n^2$ olsun. Bu denklemin her iki tarafı 4 ile çarpılıp, (4.26) özdeşliği kullanılırsa $(2x - v_n y)^2 - (p^2-4)u_n^2 y^2 = -4(p^2-4)u_n^2$ bulunur. $p^2 - 4$ karesiz olduğundan $u_n \mid 2x - v_n y$ dir. Dolayısıyla $2x - v_n y = u_n z$ olacak biçimde $z \in \mathbb{Z}$ vardır. Böylece $(u_n z)^2 - (p^2-4)u_n^2 y^2 = -4(p^2-4)u_n^2$ olup, buradan $z^2 - (p^2-4)y^2 = -4(p^2-4)$ elde edilir. Bu eşitlikten $(p^2-4) \mid z$ olduğu görülür. Bu durumda $z = (p^2-4)a$ olacak biçimde $a \in \mathbb{Z}$ vardır. Böylece $2x - v_n y = (p^2-4)u_n a$ olur. O halde

$$((p^2-4)u_n a)^2 - (p^2-4)u_n^2 y^2 = -4(p^2-4)u_n^2$$

denkleminden

$$y^2-(p^2-4)a^2=4$$

bulunur. Sonuç 2.14'ün ispatına göre $u=\left(y+pa\right)/2$ ve $v=a$ alınırsa,

$$u=\frac{y+p\left(\dfrac{2x-v_ny}{(p^2-4)u_n}\right)}{2}=\frac{2px+\left((p^2-4)u_n-pv_n\right)y}{2(p^2-4)u_n}=\frac{px-v_{n-1}y}{(p^2-4)u_n}$$

ve

$$v=\frac{2x-v_ny}{(p^2-4)u_n}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}u^2-puv+v^2&=\left(\frac{px-v_{n-1}y}{(p^2-4)u_n}\right)^2-p\left(\frac{px-v_{n-1}y}{(p^2-4)u_n}\right)\left(\frac{2x-v_ny}{(p^2-4)u_n}\right)+\left(\frac{2x-v_ny}{(p^2-4)u_n}\right)^2\\&=-(p^2-4)\left(x^2-v_nxy+y^2\right)/(p^2-4)^2u_n^2=1\end{aligned}$$

bulunur. Teorem 2.2.6 ve Sonuç 2.27'ye göre, $m\in\mathbb{Z}$ olmak üzere, $\left(u,v\right)=\mp\left(u_{m+1},u_m\right)$ olur. Dolayısıyla

$$\left(px-v_{n-1}y\right)/(p^2-4)u_n=\mp u_{m+1}$$

ve

$$\left(2x-v_ny\right)/(p^2-4)u_n=\mp u_m$$

elde edilir. Bu iki denklemle beraber (4.22), (4.24) ve (4.25) özdeşlikleri kullanılarak, $\left(x,y\right)=\mp\left(v_{n+m},v_m\right)$ bulunur.

Tersine, eğer $\left(x,y\right)=\mp\left(v_{n+m},v_m\right)$ ise, (4.29) özdeşliğine göre $x^2-v_nxy+y^2=-(p^2-4)u_n^2$ olduğu görülür. ■

Teorem 4.2.6. $x^2-v_nxy+y^2=u_n^2$ denkleminin tüm tamsayı çözümleri, $m\in\mathbb{Z}$ olmak üzere $\left(x,y\right)=\mp\left(u_{n+m},u_m\right)$ biçimindedir [37].

İspat. $x^2-v_nxy+y^2=u_n^2$ olsun. Buradan $\left(2x-v_ny\right)^2-(p^2-4)u_n^2y^2=4u_n^2$ olur. O halde $u_n\,|\,2x-v_ny$ dir. Böylece $\left(\left(2x-v_ny\right)/u_n\right)^2-(p^2-4)y^2=4$ yazılabilir. Dolayısıyla

$$u=\left(\left(\left(2x-v_ny\right)/u_n\right)+py\right)/2=\left(x+u_{n-1}y\right)/u_n \text{ ve } v=y$$

alınırsa $u^2-puv+v^2=1$ bulunur. Şu halde Teorem 2.2.6 ve Sonuç 2.27'ye göre, m tamsayı olmak üzere $\left(u,v\right)=\mp\left(u_{m+1},u_m\right)$ dir. Buradan, $\left(x,y\right)=\mp\left(u_nu_{m+1}-u_{n-1}u_m,u_m\right)$ olduğu ve (4.21) özdeşliği kullanılırsa $\left(x,y\right)=\mp\left(u_{n+m},u_m\right)$ elde edilir.

Tersine, $\left(x,y\right)=\mp\left(u_{n+m},u_m\right)$ ise (4.30) özdeşliğinden $x^2-v_nxy+y^2=u_n^2$ olduğu görülür. ■

Şimdi, Teorem 4.2.1, Teorem 4.2.2 ve Teorem 4.2.3'de verilen Diophantine denklemlerinden hareketle, üçüncü bölümde ispatlanan, $\left\{u_n\right\}$ ve $\left\{v_n\right\}$ dizilerinin bölünebilme özellikleri de kullanarak, aşağıdaki denklemlerin tüm tamsayı çözümleri bulunacaktır.

Teorem 4.2.7. $x^2-v_nxy-y^2=1$ denkleminin tüm tamsayı çözümleri, $t\in\mathbb{Z}$ olmak üzere $\left(x,y\right)=\mp\left(u_{(t+1)n}/u_n,u_{tn}/u_n\right)$ biçimindedir.

İspat. $x^2 - v_n xy + y^2 = 1$ olsun. Bu denklemin her iki tarafı u_n^2 ile çarpılırsa,

$$(u_n x)^2 - v_n (u_n x)(u_n y) - (u_n y)^2 = u_n^2$$

olup Teorem 4.2.6'ya göre, m tamsayı olmak üzere $u_n x = \mp u_{n+m}$ ve $u_n y = \mp u_m$ olur. Buradan, $x = \mp u_{n+m} / u_n$ ve $y = \mp u_m / u_n$ elde edilir. Böylece Teorem 3.2.7'ye göre, x ve y nin tamsayı olması için $n \mid m$ olmalıdır. Dolayısıyla $m = tn$ olacak biçimde $t \in \mathbb{Z}$ vardır. O halde

$$(x, y) = \mp\left(u_{(t+1)n} / u_n, u_{tn} / u_n\right)$$

dir.

Tersine, $t \in \mathbb{Z}$ için $(x, y) = \mp\left(u_{(t+1)n} / u_n, u_{tn} / u_n\right)$ ise, (4.30) özdeşliğinden $x^2 - v_n xy - y^2 = 1$ olur. ■

Teorem 4.2.8. $p \geq 3$ ise $x^2 - (p^2 - 4)u_n xy - (p^2 - 4)y^2 = 1$ denkleminin tüm tamsayı çözümleri, $t \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $(x, y) = \mp\left(v_{(2t+1)n} / v_n, u_{2tn} / v_n\right)$ biçimindedir.

İspat. $x^2 - (p^2 - 4)u_n xy - (p^2 - 4)y^2 = 1$ olsun. Bu denklemin her iki tarafı v_n^2 ile çarpılırsa,

$$(v_n x)^2 - (p^2 - 4)u_n (v_n x)(v_n y) - (p^2 - 4)(v_n y)^2 = v_n^2$$

olur. Teorem 4.2.4'e göre $v_n x = \mp v_{n+m}$ ve $v_n y = \mp u_m$ bulunur. Buradan $(x, y) = \mp(v_{n+m} / v_n, u_m / v_n)$ elde edilir. Teorem 3.2.6 ve Teorem 3.2.8'e göre, $n \mid m$ ve m / n nin bir çift tamsayı olduğu görülür. Şu halde $t \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $m = 2tn$ dir. Böylece $(x, y) = \mp\left(v_{(2t+1)n} / v_n, u_{2tn} / v_n\right)$ bulunur.

Tersine, $t \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $(x,y) = \mp\left(v_{(2t+1)\,n}/v_n, u_{2tn}/v_n\right)$ ise (4.28) özdeşliğinden, $x^2-(p^2-4)u_n xy-(p^2-4)y^2=1$ olduğu görülür. ■

Teorem 4.2.9. $p \geq 3$ ve p^2-4 bir karesiz tamsayı ise, $x^2-v_{2n}xy+y^2=-(p^2-4)u_n^2$ denkleminin tüm tamsayı çözümleri, $t \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $(x,y)=\mp\left(v_{(2t+3)n}/v_n, v_{(2t+1)n}/v_n\right)$ biçimindedir.

İspat. $x^2-v_{2n}xy+y^2=-(p^2-4)u_n^2$ olsun. Bu özdeşliğin her iki tarafı v_n^2 ile çarpılıp $u_{2n}=u_nv_n$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$(v_nx)^2-v_{2n}(v_nx)(v_ny)+(v_ny)^2=-(p^2-4)u_{2n}^2$$

olur. Böylece Teorem 4.2.5'e göre, $v_nx=\mp v_{2n+m}$ ve $v_ny=\mp v_m$ bulunur. Şu halde $(x,y)=\mp(v_{2n+m}/v_n, v_m/v_n)$ dir. Ayrıca x ve y nin tamsayı olması için Teorem 3.2.8'e göre, $n\,|\,m$ ve m/n tek tamsayı olmalıdır. Bu durumda $m=(2t+1)n$ olacak biçimde $t\in\mathbb{Z}$ vardır. Dolayısıyla $(x,y)=\mp\left(v_{(2t+3)n}/v_n, v_{(2t+1)n}/v_n\right)$ bulunur.

Tersine, $t\in\mathbb{Z}$ olmak üzere $(x,y)=\mp\left(v_{(2t+3)n}/v_n, v_{(2t+1)n}/v_n\right)$ ise, (4.29) özdeşliğinden $x^2-v_{2n}xy+y^2=-(p^2-4)u_n^2$ elde edilir. ■

Teorem 4.2.10. $x^2-v_{2n}xy+y^2=u_n^2$ ve $x^2-v_{2n}xy+y^2=v_n^2$ denklemlerinin tüm tamsayı çözümleri, $t\in\mathbb{Z}$ olmak üzere, sırasıyla $(x,y)=\mp\left(u_{(2t+2)n}/v_n, u_{2tn}/v_n\right)$ ve $(x,y)=\mp\left(u_{(t+2)n}/u_n, u_{tn}/u_n\right)$ biçimindedir.

İspat. $x^2-v_{2n}xy+y^2=u_n^2$ olsun. Bu denklemin her iki tarafı v_n^2 ile çarpılırsa,

$$(v_nx)^2-v_{2n}(v_nx)(v_ny)+(v_ny)^2=u_{2n}^2$$

olur. Teorem 4.2.6'ya göre, $m \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $(x, y) = \mp(u_{2n+m}/v_n, u_m/v_n)$ biçimindedir. Böylece Teorem 3.2.6 kullanılarak $n \mid m$ ve m/n nin çift tamsayı olduğu görülür. O halde $m = 2tn$ olan bir t tamsayısı vardır. Dolayısıyla $(x, y) = \mp\left(u_{(2t+2)n}/v_n, u_{2tn}/v_n\right)$ dir.

Tersine, $t \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $(x, y) = \mp\left(u_{(2t+2)n}/v_n, u_{2tn}/v_n\right)$ ise, (4.30) özdeşliğinden $x^2 - v_{2n}xy + y^2 = u_n^2$ bulunur.

Şimdi $x^2 - v_{2n}xy + y^2 = v_n^2$ olsun. Bu denklem u_n^2 ile çarpılır ve Teorem 4.2.6 kullanılırsa, $m \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $(x, y) = \mp(u_{2n+m}/u_n, u_m/u_n)$ olduğu görülür. Ayrıca x ve y nin tamsayı olması için Teorem 3.2.7'ye göre $n \mid m$ olmalıdır. Böylece, $t \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $m = tn$ olur. Buradan da, $(x, y) = \mp\left(u_{(t+2)n}/u_n, u_{tn}/u_n\right)$ elde edilir.

Tersine, $(x, y) = \mp\left(u_{(t+2)n}/u_n, u_{tn}/u_n\right)$ ise (4.30) özdeşliğinden $x^2 - v_{2n}xy + y^2 = v_n^2$ olduğu görülür.■

Teorem 4.2.11. $p \geq 3$ ve $p^2 - 4$ bir karesiz tamsayı olsun. Bu durumda $x^2 - v_n xy + y^2 = -(p^2 - 4)$ denkleminin tüm tamsayı çözümleri, $m \in \mathbb{Z}$ ve $u_n \mid v_m$ olmak üzere, $(x, y) = \mp(v_{n+m}/u_n, v_m/u_n)$ biçimindedir.

İspat. $x^2 - v_n xy + y^2 = -(p^2 - 4)$ olsun. Bu denklemin her iki tarafı u_n^2 ile çarpılırsa,

$$(u_n x)^2 - v_n (u_n x)(u_n y) + (u_n y)^2 = -(p^2 - 4)u_n^2$$

olur. Böylece Teorem 4.2.5'e göre, $m \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $(x, y) = \mp(v_{n+m}/u_n, v_m/u_n)$ bulunur.

Tersine, eğer $\left(x,y\right)=\mp\left(v_{n+m}/u_n,v_m/u_n\right)$ ise, (4.29) özdeşliğinden $x^2-v_nxy+y^2=-(p^2-4)$ elde edilir. ■

Sonuç 4.15. $p\geq 3$ ve p^2-4 bir karesiz tamsayı olsun. Bu durumda $x^2-(p^2-2)xy+y^2=-(p^2-4)$ denkleminin tüm tamsayı çözümleri, $t\in\mathbb{Z}$ olmak üzere $\left(x,y\right)=\mp\left(\frac{v_{2t+3}}{p},\frac{v_{2t+1}}{p}\right)$ biçimindedir.

İspat. Teorem 4.2.11'de $n=2$ alınırsa Teorem 3.2.9'a göre m tek tamsayı olur. Şu halde $m=2t+1$ olan t tamsayısı vardır. Dolayısıyla $\left(x,y\right)=\mp\left(\frac{v_{2t+3}}{p},\frac{v_{2t+1}}{p}\right)$ bulunur. ■

Aşağıdaki sonuç, Teorem 4.2.11 ve Teorem 3.2.9 kullanılarak ispatlanabileceğinden, burada ispatsız olarak verilecektir.

Sonuç 4.16. $p\geq 3$, p^2-4 karesiz bir tamsayı ve $n>2$ ise $x^2-v_nxy+y^2=-(p^2-4)$ denkleminin tamsayı çözümü yoktur.

BÖLÜM 5. TARTIŞMA VE ÖNERİLER

Bu çalışmanın ilk bölümünde, Fibonacci ve Lucas sayılarıyla ilgili temel tanım ve teoremler verildi. Ayrıca bu sayıların bölünebilme özellikleri ispatlandı. Fibonacci ve Lucas sayılarının bölünebilme özellikleri, [11], [12], [13], [32] ve [45] numaralı kaynaklarda ispatlanmıştır. Burada ise bu özelliklerin ispatları farklı yollardan yapılmıştır.

İkinci bölümde, genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas dizileri tanımlanarak, bu dizilerin elemanlarıyla ilgili özdeşlikler elde edildi. Daha sonra bu özdeşlikler kullanılarak, bazı Diophantine denklemlerinin tüm tamsayı çözümleri belirlendi. Bu bölümü oluşturan teoremleri içeren bir makale, SCI expanded kapsamındaki bir dergide yayına kabul edilmiştir [27].

Üçüncü bölümde ise, genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas dizilerinin bölünebilme özelliklerinin ispatları yapıldı. Bu sayıların bölünebilme özelliklerinin açık ve anlaşılır şekilde ispatlarına yer verildiğinden, üçüncü bölüm bu çalışmanın önemli bir bölümünü oluşturmaktadır. Bu bölümde verilen teoremler, dördüncü bölümde Diophantine denklemlerinin tüm tamsayı çözümlerini tespit ederken kullanıldığı için önem taşımaktadır.

Dördüncü bölümde, elemanları genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayıları olan matrisler kullanılarak bazı özdeşlikler elde edildi. Daha sonra bu özdeşlikler yardımıyla birçok Diophantine denklemlerinin tüm tamsayı çözümleri tespit edildi. Ayrıca, bu bölümde $p \geq 2$ ve p^2+4 karesiz bir tamsayı ise, $x^2 - V_n xy + (-1)^n y^2 = p^2+4$ denkleminin tüm tamsayı çözümlerinin, m tek tamsayı ve $U_n \mid V_m$ olmak üzere, $(x,y) = \mp(V_{n+m}/U_n, V_m/U_n)$ biçiminde olduğu verildi.

Özellikle, $p=2$ alındığında, Teorem 3.1.9'a göre, $U_n \mid V_m$ olması için $n=2$ olmalıdır. Diğer taraftan, $p=2$ alındığında $x^2 - V_n xy + (-1)^n y^2 = p^2 + 4$ denklemi $x^2 - 6xy + y^2 = 8$ denklemine dönüşür. Ayrıca bu denklemin çözümlerinin Pell ve Pell-Lucas sayıları cinsinden mevcut olduğu görülebilir. Bu nedenle, bu çalışmada ele alınan denklemlerin, $p \geq 1$ ve $p^2 + 4$ karesiz bir tamsayı olmadığında, çözümlerinin olup olmadığı, varsa bu çözümlerin ne olduğu araştırılabilir. Yine benzer şekilde, bu çalışmada ele alınan denklemlerin, $p \geq 3$ ve $p^2 - 4$ karesiz bir tamsayı olmadığında, çözümlerinin olup olmadığı, varsa bu çözümlerin ne olduğu araştırılabilir.

KAYNAKLAR

[1] ANDREESCU, T., ANDRICA, D., An Introduction to Diophantine equations, GIL Publishing House, Romania, 2002.

[2] ANDREESCU, T., ANDRICA, D., On an Diophantine equation and its ramifications, The College Mathematics Journal, 35(1), 15-21, 2004.

[3] BENJAMIN, A. T., QUINN, J., Proofs That Really Count: The Art of Combinatorial Proof, The Mathematical Association of America, USA, 2003.

[4] BERGUM, G. E., Addenda to geometry of generalized Simson's Formula, The Fibonacci Quarterly, 22 (1), 22-28, 1984.

[5] BRANDT, K., KOELZER, J., Diophantine Equations, Fibonacci Hyperbolas, and Quadratic Forms, Missouri Journal of Mathematical Science, 18, 1-11, 2006.

[6] BONG, N. H., Fibonacci matrices and matrix representation of Fibonacci numbers, Southeast Asian Bull. Math., 23, 357-374, 1999.

[7] CARLITZ, L., A note on Fibonacci numbers, The Fibonacci Quarterly, 18, 15-28, 1964.

[8] DEMİRTÜRK, B., KESKİN, R., Integer Solutions of Some Diophantine Equations via Fibonacci and Lucas Numbers, Journal of Integer Sequences, 12, 1-14, 2009.

[9] DICKSON, L. E., History of the theory of numbers, 1, Carnegie Institution of Washington, Washington D.C., 1919.

[10] HILTON, P., PEDERSEN, J., Fibonacci and Lucas Numbers in Teaching and Research, J. Math. Informatique, 3, 36-57, 1991-1992.

[11] HILTON, P., PEDERSEN, J., SOMER, L., On Lucasian numbers, The Fibonacci Quarterly, 35, 43-47, 1997.

[12] HILTON, P., PEDERSEN, J., On generalized Fibonaccian and Lucasian numbers, The Mathematical Gazette, 90(518), 215-222, 2006.

[13] HINKEL, D. E., An investigation of Lucas Sequences, Yüksek Lisans Tezi, Arizona Üniversitesi, 1-35, 2007.

[14] HOGGATT, V. E. Jr., Fibonacci and Lucas numbers, Houghton Mifflin Company, Boston, 1969.

[15] HONSBERGER, R., Mathematical Gems III, Mathematical Association of America, Washington, DC, 1985.

[16] HORADAM, A. F., A Generalized Fibonacci sequence, American Mathematical Monthly, 68(5), 455-459, 1961.

[17] HORADAM, A. F., Basic properties of certain generalized sequences of numbers, The Fibonacci Quarterly, 3(3), 161-176, 1965.

[18] HORADAM, A. F., Geometry of a generalized Simson's Formula, The Fibonacci Quarterly, 20(2), 164-168, 1982.

[19] HORADAM, A. F., SHANNON, A. G., Generalization of a result of Morgado, Portugalie Math., 44, 137-148, 1987.

[20] JOHNSON, R. C., Matrix numbers and matrices, 2008 http://ww.dur.ac.uk/bob.johnson/.bonacci/

[21] JONES, J. P., Diophantine Representation of the Fibonacci numbers, The Fibonacci Quarterly, 13, 84-88, 1975.

[22] JONES, J. P., Diophantine representation of the Lucas numbers, The Fibonacci Quarterly, 14, 134, 1976.

[23] JONES, J. P., KISS, P., On points whose coordinates are terms of a linear recurrence, The Fibonacci Quarterly, 31, 239-245, 1993.

[24] JONES, J. P., Representation of Solutions of Pell equations using Lucas sequences, Acta Acad. Paed. Agr, 30, 75-86, 2003.

[25] KALMAN, D., MENA, R., The Fibonacci numbers-exposed, Mathematics Magazine, 76, 167-181, 2003.

[26] KESKİN, R., DEMİRTÜRK, B., Some new Fibonacci and Lucas identities by matrix methods, International Journal of Mathematical Education In Science and Technology, 41, 379-387, 2010.

[27] KESKİN, R., DEMİRTÜRK, B., Solutions of Some Diophantine Equations Using Generalized Fibonacci and Lucas Sequences, Ars Combinatoria, yayına kabul edildi.

[28] KESKİN, R., YOSMA, Z, Some New Identities Concerning Generalized Fibonacci and Lucas Numbers, yayına gönderildi.

[29] KILIÇ, E., ÖMÜR, N., Conics characterizing the generalized Fibonacci and Lucas sequences with indices in arithmetic progressions, Ars Combinatoria, 94, 459-464, 2010.

[30] KIMBERLING, C., Fibonacci Hyperbolas, The Fibonacci Quarterly, 28, 22-27, 1990.

[31] KOSHY, T., New Fibonacci and Lucas identities, The Mathematical Gazette, 82, 481-484, 1998.

[32] KOSHY, T., Fibonacci and Lucas numbers with applications, John Wiley and Sons, Proc., New York-Toronto, 2001.

[33] MCDANIEL, W. L., The g.c.d. in Lucas sequences and Lehmer sequences, The Fibonacci Quarterly, 29(1), 24-29, 1991.

[34] MCDANIEL, W. L., Diophantine Representation of Lucas Sequences, The Fibonacci Quarterly, 33, 58-63, 1995.

[35] MCLAUGHLIN, R., Sequences: Some properties by matrix methods, The Mathematical Gazette, 64(430), 281-282, 1980.

[36] MCLAUGHLIN, R., Combinatorial identities deriving from the n th power of a 2×2 matrix, Integers, 4, A19, 1-15, 2004.

[37] MELHAM, R., Conics Which Characterize Certain Lucas Sequences, The Fibonacci Quarterly, 35, 248-251, 1997.

[38] RABINOWITZ, S., Algorithmic Manipulation of Fibonacci Identities, Applications of Fibonacci Numbers, Cilt 6, Kluwer Academic Pub., Dordrect, The Netherlands, 389-408, 1996.

[39] RIBENBOIM, P., Square classes of Fibonacci and Lucas numbers, Portugaliae Mathematica, 46(2), 159-175, 1989.

[40] RIBENBOIM, P., The Little book of big primes, Springer-Verlag, New York, 1991.

[41] RIBENBOIM, P., An Algorithm to Determine the Points with Integral Coordinates in Vertain Elliptic Curves, Journal of Number Theory, 74, 19-38, 1999.

[42] RIBENBOIM, P., My numbers, My friends, Springer-Verlag Inc., New York, 2000.

[43] SILVESTER, J. R., Fibonacci properties by matrix methods, Mathematical Gazette, 63, 188-191, 1979.

[44] SPIYEV, M. Z., Fibonacci Identities via the Determinant Sum Property,

College Mathematics Journal, 37:4, 286-289, 2006.

[45] VAJDA, S., Fibonacci and Lucas numbers and the golden section, Ellis Horwood Limited Publ., England, 1989.

[46] ZHIWEI, S., Singlefold, Diophantine representation of the sequence $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ and $u_{n+2} = mu_{n+1} + u_n$, Pure and Applied Logic, Beijing Univ. Press, Beijing, 97-101, 1992.

[47] WASTEELS, J., Mathesis, 3(2), 60-62, 1902.

[48] WEISSTEIN, E. W., Fast Fibonacci transform, WathWorld- Wolfram web resource, http://mathworld.wolfram.com/FastFibonacciTransform.html

[49] http://en.Wikipedia.org./wiki/Diophantine_equation#Linear_Diophantine _equations

ÖZGEÇMİŞ

Bahar Demirtürk, 1979'da İskenderun'da doğdu. 1997 yılında İstiklal Makzume Anadolu Lisesinden mezun oldu. 1998 yılında kazandığı Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünden 2002 yılında mezun oldu. 2003 yılında Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisansa başladı. Ağustos 2004'de Sakarya Üniversitesi Matematik Bölümünde Araştırma Görevlisi olarak göreve başladı. Ankara'da başladığı yüksek lisans eğitimini Mayıs 2005'de tamamladı. Eylül 2005'de Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında doktora eğitimine başladı. Halen Sakarya Üniversitesi Matematik Bölümünde çalışmaktadır.