T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ELEMANTER ESNEK TOPOLOJİK UZAYLARA GİRİŞ

DOKTORA TEZİ

Kemal TAŞKÖPRÜ

Enstitü Anabilim Dalı	**:**	**MATEMATİK**
Enstitü Bilim Dalı	**:**	**TOPOLOJİ**
Tez Danışmanı	**:**	**Doç. Dr. İsmet ALTINTAŞ**

Kasım 2017

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ELEMANTER ESNEK TOPOLOJİK UZAYLARA GİRİŞ

DOKTORA TEZİ

Kemal TAŞKÖPRÜ

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Bu tez 16 / 11 /2017 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği/oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr.
Halis AYGÜN
Jüri Başkanı

Prof. Dr.
Yusuf ATALAY
Üye

Doç. Dr.
Soley ERSOY
Üye

Doç. Dr.
Banu PAZAR VAROL
Üye

Doç. Dr.
İsmet ALTINTAŞ
Üye

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

Kemal TAŞKÖPRÜ

16.11.2017

TEŞEKKÜR

Doktora eğitimim boyunca kıymetli bilgilerini ve deneyimlerini benden esirgemeyen, çalışmalarımı her aşamasında sabır ve titizlikle takip eden, her konuda daha iyi bir çalışma ortaya çıkarmam için beni destekleyen ve teşvik eden, öğrencisi olduğum için onur duyduğum değerli danışmanım Doç. Dr. İsmet ALTINTAŞ'a sonsuz teşekkür ve saygılarımı sunarım.

Akademisyen olmamın yolunu açan, yüksek lisans eğitimim öncesinde ve sırasında ilgisini esirgemeyen, önerileriyle beni yönlendiren kıymetli hocam Prof. Dr. Murat TOSUN'a; hem ders aşamasında hem de tez aşamasında her konuda desteğini aldığım Sakarya Üniversitesi Matematik Bölümü'nde ve birlikte çalıştığım Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Matematik Bölümü'nde görev yapan tüm öğretim elemanlarına minnet ve şükranlarımı sunarım.

Her koşulda yanımda olduğu, çalışmalarım sırasında fedakarlık göstererek beni desteklediği, bana karşı sarsılmaz inanç ve sonsuz saygı duyduğu için sevgili eşim Sema TAŞKÖPRÜ'ye; maddi ve manevi tüm destekleriyle beni bugünlere getirip her zaman benim için en iyisini isteyen anneme, babama ve kız kardeşime tüm kalbimle teşekkür ederim.

Ayrıca bu çalışmanın maddi açıdan desteklenmesine olanak sağlayan Sakarya Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Komisyonuna (Proje No: 2017-50-02-006) teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

A	: Parametreler kümesi
$\mathcal{B}$	: Esnek baz
$\mathfrak{B}$	: Esnek eleman sınıfı
F^{C}	: F ’nin esnek tümleyeni
$F^{\mathbb{C}}$	: F ’nin elemanter esnek tümleyeni
$\mathfrak{P}$	: Elemanter esnek çarpım topolojisi
$\mathcal{P}(X)$	: X ’in kuvvet kümesi
Φ	: Boş esnek küme
$\mathbb{R}(A)$	: Esnek reel sayıların sınıfı
$\mathfrak{R}$	: Elemanter esnek bölüm topolojisi
$S_A(X)$	: X üzerindeki tüm esnek kümelerin sınıfı
$SE(\tilde{X})$	: $\tilde{X}$ ’nın tüm esnek elemanlarının sınıfı
$SS(\mathfrak{B})$	: $\mathfrak{B}$ esnek eleman sınıfının ürettiği esnek küme
$\mathcal{S}$	: Esnek alt baz
τ	: Esnek topoloji
$\mathfrak{T}$	: Esnek eleman sınıflarının topolojisi
$\mathcal{T}$	: Elemanter esnek topoloji
$\mathcal{T}^*$	: Elemanter esnek başlangıç topolojisi
$\mathcal{T}_*$	: Elemanter esnek sonuç topolojisi
X	: Evrensel küme
$\tilde{X}$	: Mutlak esnek küme
$\tilde{x}$	: Bir esnek eleman
$\tilde{\subseteq}$	: Esnek alt küme
$\tilde{\supseteq}$	: Esnek üst küme

$\tilde{\cup}$: Esnek birleşim

$\tilde{\cap}$: Esnek kesişim

$\tilde{\setminus}$: Esnek fark

$\tilde{\times}$:Esnek Kartezyen çarpım

$\Cup$: Elemanter esnek birleşim

$\Cap$: Elemanter esnek kesişim

$\setminus$: Elemanter esnek fark

$\tilde{\in}$: Esnek elemanı

$\tilde{\notin}$: Esnek elemanı değil

ÖZET

Anahtar kelimeler: Esnek küme, esnek eleman, elemanter işlemler, elemanter esnek topoloji, esnek baz, esnek sürekli fonksiyon

Bu tezde, esnek kümeler üzerine yeni topolojik yapılar kurulmuştur. Önce esnek eleman sınıfları üzerine klasik anlamda bir topoloji kurulmuş ve sonra esnek kümeler üzerinde elemanter işlemler kullanılarak yeni bir esnek topoloji tanımlanmıştır. Bu yeni topoloji elemanter esnek topoloji olarak adlandırılmıştır. Elemanter esnek topolojinin, literatürde mevcut olan esnek topolojiler ve esnek eleman sınıfları üzerine kurulan topoloji ile ilişkileri ispatlanmış ve elemanter esnek topolojinin diğer esnek topolojilerden farklı olduğu görülmüştür. Böylece elemanter esnek topolojik uzaylarda esnek açık ve esnek kapalı küme, esnek komşuluk, esnek iç elemanı, esnek kapanış elemanı, esnek baz, esnek yerel baz gibi önemli topolojik kavramlar tanımlanmış ve onların birçok özellikleri ispatlanmıştır. Bunların yanı sıra esnek eleman sınıfları üzerinde esnek dönüşüm ve esnek fonksiyon kavramları tanıtılarak, elemanter esnek topolojik uzaylar üzerinde esnek sürekli fonksiyonlar ve onların bazı özellikleri incelenmiştir. Son olarak elemanter esnek çarpım ve elemanter esnek bölüm uzayları üzerine çalışılmıştır.

INTRODUCTION TO ELEMENTARY SOFT TOPOLOGICAL SPACES

SUMMARY

Keywords: Soft set, soft element, elementary operations, elementary soft topology, soft base, soft continuous function

In this thesis, new topological structures are constructed on soft sets. First, a topology in the classical sense is constructed on classes of soft elements, and then a new soft topology is defined on the soft sets using elementary operations. This new topology is called elementary soft topology. The elementary soft topology has been proven to be related to the soft topologies found in the literature and the topology constructed on the classes of soft elements, and has been demonstrated to be different from other soft topologies. Thus, in the elementary soft topological spaces, important topological concepts such as soft open and soft closed set, soft neighborhood, soft interior element, soft closure element, soft base and soft local base are defined and many features of them are proved. In addition to this, by introducing concepts of soft mapping and soft function on the classes of soft elements, soft continuous functions on elementary soft topological spaces and some properties of them are investigated. Finally, elementary soft product and elementary soft quotient space are studied.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Mühendislik, ekonomi, çevre bilimleri ve sosyal bilimler gibi alanlarda doğruluk değeri göreceli olan kavramlar ile çok fazla karşılaşılır. Bunun sonucu ortaya çıkan belirsizliği içeren bir problemin, matematiksel olarak ele alınması ve çözülmesi için Aristo mantığı ve Georg Cantor'un klasik kümeler teorisi yetersiz kalabilir. Bu tür problemlerle başa çıkabilmek için olasılık teorisi [1], bulanık kümeler teorisi [2], yaklaşımlı kümeler teorisi [3], sezgisel bulanık kümeler teorisi [4], aralık matematiği teorisi [5] ve esnek kümeler teorisi [6] gibi birçok teori geliştirilmiştir. L. A. Zadeh tarafından geliştirilen ve belirsizlik kavramıyla büyük ölçüde başa çıkabilen bulanık kümeler teorisi birçok alana başarıyla uygulanmıştır [2]. Fakat üyelik fonksiyonlarından yararlanılan bu teoride her bir durum için üyelik fonksiyonunun inşa edilmesi zorluğu vardır. D. Molodtsov karşılaşılan bu zorlukları ortadan kaldırmak için esnek kümeler teorisini geliştirmiştir [6]. Esnek kümeler teorisinde, bulanık kümeler teorisindeki reel değerli üyelik fonksiyonunun aksine küme değerli bir dönüşüm kullanılmış ve bir esnek küme, bir parametre kümesinden bir evrensel kümeye bir dönüşüm olarak tanımlanmıştır.

D. Molodtsov esnek kümeler teorisini oyun teorisi, olasılık teorisi, optimizasyon teorisi, sürekli diferansiyellenebilir fonksiyonlar, Riemann integrasyonu, Peron integrasyonu ve yöneylem araştırması gibi alanlara başarılı bir şekilde uygulamıştır [6,7]. Ayrıca D. Molodtsov ve arkadaşları esnek sayı, esnek türev ve esnek integral gibi kavramları tanıtarak esnek küme teorisi temelinde bir analiz inşa etmeye çalışmışlardır [8]. P. K. Maji ve arkadaşları esnek küme teorisini karar verme problemlerinde kullanmış, esnek kümelerin bazı işlemlerini tanımlayıp onların özelliklerini incelemiş ve bulanık esnek küme kavramını tanıtmışlardır [9-11]. Bunun dışında birçok araştırmacı da esnek kümeleri ve esnek küme işlemlerini farklı şekillerde yorumlayarak geliştirmeye çalışmıştır [12-29]. D. Pei ve D. Miao esnek kümelerin bilgi sistemlerinin bir sınıfı olduğunu göstermişlerdir [30]. Son yıllarda esnek kümeler üzerine birçok matematiksel yapı kurulmuştur. Bu bağlamda esnek kümeler teorisinde grup, halka, ideal vb. cebirsel yapılar üzerine çok sayıda çalışma yapılmış ve bu çalışmaların sonucu olarak esnek kümelerin bazı yeni uygulamaları elde edilmiştir [31-44]. İlk kez 2011 yılında M. Shabir ve M. Naz esnek kümeler üzerine topolojik yapılar kurmuşlardır [45]. W. K. Min bu esnek topolojik uzaylarda esnek ayırma aksiyomları ile ilgili çalışmalar sunmuştur [46]. 2012 yılında H. Hazra ve arkadaşları Shabir ve Naz'ın tanımladığı esnek topolojiden farklı bir topoloji tanımlamışlardır [47]. Bu süreçte A. Aygünoğlu, B. P. Varol ve H. Aygün esnek kümeler ve bulanık esnek kümeler üzerine topolojik yapılar kurup birçok topolojik kavramı incelemişlerdir [48-51]. İ. Zorlutuna ve arkadaşları esnek topolojik uzaylarda esnek nokta kavramını kullanarak esnek iç nokta, esnek komşuluk, esnek süreklilik ve esnek kompaktlık gibi kavramları tanıtmışlardır [52]. Bunların dışında birçok yazar esnek nokta kavramını kullanarak esnek topolojik uzaylar ile ilgili çok sayıda yeni çalışma yapmışlardır [53-62]. 2012 yılında S. Das ve S. K. Samanta, esnek reel küme, esnek reel sayı ve onların özelliklerini [63], 2013 yılında esnek kompleks küme, esnek kompleks sayı ve onların özelliklerini [64] inceledikten sonra aynı yıl esnek eleman ile esnek kümeler üzerinde elemanter esnek küme işlemlerini tanıtarak bu işlemlere göre esnek kümeler üzerine esnek metrik yapıları kurmuşlardır [65]. S. Das, S. K. Samanta ve birçok yazar esnek eleman kavramını kullanarak esnek vektör uzayları, esnek normlu uzaylar, esnek iç çarpım uzayları gibi çeşitli matematiksel yapılar üzerine çalışmalar yapmışlardır [66-72].

Bu tez çalışmasında, literatürde tanımlanmış esnek topolojik yapılardan farklı olarak, esnek eleman temelinde esnek kümeler üzerinde tanımlanan elemanter işlemler ile yeni bir topolojik yapı kurulmuş, literatürdeki birçok temel topolojik kavram bu yeni yapıya uygun şekilde tanımlanmış ve onların özellikleri ispatlanmıştır.

Bu tez sonuç ve öneriler bölümü ile birlikte altı bölümden oluşmaktadır. İkinci bölümde, esnek kümeler ile ilgili temel kavramlar verilmiş ve elemanter işlemler ile ilgili bazı yeni özellikler ispatlanmıştır. Elemanter birleşim ve kesişim işlemlerinde dağılma özellikleri, De Morgan kuralları ve tümleyen kuralları genel olarak sağlanmadığından dolayı bu bölümde bu özelliklerin bazı şartlar altında sağlandığı ispat edilmiştir.

Üçüncü bölümde, önce esnek elemanların sınıfları üzerine klasik işlemlerle bir topolojik yapı kurulmuştur. Klasik topolojik uzaylardaki kavramlar, bu topolojik uzayda da geçerli olduğundan detaylar incelenmemiştir. Sonra esnek kümeler üzerine, esnek kümelerin elemanter birleşim ve elemanter kesişim işlemleri ile yeni bir esnek topolojik yapı kurulmuş ve bu topolojiye elemanter esnek topoloji adı verilmiştir. Elemanter esnek topolojik uzaylara açıklayıcı örnekler verilmiştir. Elemanter esnek topoloji hem esnek eleman sınıfları üzerinde tanımladığımız topoloji hem de literatürde tanımlanan esnek topolojilerle karşılaştırılmıştır. Aynı zamanda elemanter esnek topolojiler ile klasik topolojiler arasındaki geçişlerin bazı şartlar altında mümkün olduğu gösterilmiştir. Bu bölümde elemanter esnek topolojik uzaylarda esnek açık küme, esnek kapalı küme, esnek komşuluk, esnek iç elemanı, esnek dış elemanı, esnek kapanış elemanı, esnek sınır elemanı, esnek yığılma elemanı, esnek baz ve esnek yerel baz gibi temel topolojik kavramlar tanımlanmış ve onların önemli özellikleri ispatlanmıştır.

Dördüncü bölümde, esnek kümeler üzerinde esnek eleman kavramı kullanılarak esnek dönüşüm tanımlanmış, esnek dönüşüm ile klasik dönüşümler arasındaki ilişki incelenmiş ve bazı şartlar altında esnek dönüşümlerden elde edilen parametrelendirilmiş dönüşümlerin kesin dönüşümler olduğu ispatlanmıştır. Bu esnek dönüşümlere esnek fonksiyon adı verilmiştir. Aynı zamanda esnek dönüşüm ve esnek fonksiyonların esnek kümeler üzerindeki elemanter işlemler ile ilgili bazı özellikleri ispatlanmıştır. Son olarak elemanter esnek topolojik uzaylar üzerinde esnek sürekli fonksiyonlar tanımlanmış ve bazı önemli özellikleri ispatlanmıştır.

Beşinci bölümünde, elemanter esnek topolojik yapılardan yararlanarak elemanter işlemler ve esnek fonksiyonlar vasıtası ile elemanter esnek alt uzay, elemanter esnek başlangıç uzayı, elemanter esnek çarpım uzayı, elemanter esnek sonuç uzayı, esnek bağıntı ve elemanter esnek bölüm uzayı tanımlanmış ve bazı özellikleri ispatlanmıştır.

Tezin son bölümünde, bu tez kapsamında elde edilen sonuçlar ve bu tez konusu kapsamındaki çalışmaları kaynak gösterecek ileri çalışmalar için bazı öneriler verilmiştir.

BÖLÜM 2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde esnek küme, esnek küme işlemleri, esnek eleman, esnek sayı, esnek sayılar üzerindeki cebirsel işlemler ve esnek kümeler üzerinde tanımlanan elemanter işlemler [6,9,21,63,64,65]'den yararlanılarak verilmiş ve elemanter işlemlerin bazı yeni özellikleri ispatlanmıştır. Ayrıca esnek elemanlar sınıfı üzerinde esnek metrik uzaylar ve esnek topolojik uzaylar ile ilgili özet bilgiler verilmiştir.

2.1. Esnek Kümeler

Tanım 2.1.1. [6] $X \neq \varnothing$ bir evrensel küme ve $A \neq \varnothing$ bir parametreler kümesi olsun.

$$F : A \to \mathcal{P}(X)$$

dönüşümüne X üzerinde bir esnek küme denir ve (F, A) ikilisi ile gösterilir. Başka bir ifade ile X kümesinin alt kümelerinin parametrelendirilmiş bir ailesine X üzerinde bir esnek küme denir. Her $\lambda \in A$ için $F(\lambda)$ kümesi, (F, A) esnek kümesinin λ-yaklaşımlı elemanlarının bir kümesi olarak göz önünde bulundurulabilir. Böylece X kümesi üzerinde bir (F, A) esnek kümesi

$$(F, A) = \{(\lambda, F(\lambda)) : \lambda \in A \text{ ve } F(\lambda) \subset X\}$$

şeklinde ifade edilir.

A parametre kümesi tarafından parametrelendirilmiş X evrensel kümesi üzerindeki bütün esnek kümelerin sınıfı $S_A(X)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.2. [9] X üzerinde bir (F,A) esnek kümesi verilsin.

1. Her $\lambda \in A$ için $F(\lambda)=\varnothing$ ise (F,A) kümesine boş esnek küme denir ve Φ ile gösterilir.
2. Her $\lambda \in A$ için $F(\lambda)=X$ ise (F,A) kümesine mutlak esnek küme denir ve $\tilde{X}$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.3. [9,21,24] (F,A) ve (G,B) X üzerinde iki esnek küme olsun.

1. $A \subset B$ ve her $\lambda \in A$ için $F(\lambda) \subset G(\lambda)$ ise (F,A) kümesine (G,B) esnek kümesinin esnek alt kümesi denir ve $(F,A) \tilde{\subset} (G,B)$ ile gösterilir. (G,B) kümesine de (F,A) esnek kümesinin esnek üst kümesi denir ve $(G,B) \tilde{\supset} (F,A)$ ile gösterilir.
2. (F,A) kümesi, (G,B) kümesinin esnek alt kümesi ve (G,B) kümesi de (F,A) kümesinin esnek alt kümesi ise (F,A) ve (G,B) kümelerine X üzerinde eşit esnek kümeler denir.
3. $C = A \cup B$ ve her $\lambda \in C$ için

$$H(\lambda)=\begin{cases} F(\lambda) & , \quad \lambda \in A-B \\ G(\lambda) & , \quad \lambda \in B-A \\ F(\lambda) \cup G(\lambda) & , \quad \lambda \in A \cap B \end{cases}$$

olmak üzere (H,C) esnek kümesine (F,A) ve (G,B) esnek kümelerinin esnek birleşimi denir ve $(H,C)=(F,A) \tilde{\cup} (G,B)$ ile gösterilir.

4. $C = A \cap B$ ve her $\lambda \in C$ için $H(\lambda)=F(\lambda) \cap G(\lambda)$ olmak üzere (H,C) esnek kümesine (F,A) ve (G,B) esnek kümelerinin esnek kesişimi denir ve $(H,C)=(F,A) \tilde{\cap} (G,B)$ ile gösterilir.

5. $C = A \setminus B$ ve her $\lambda \in C$ için $H(\lambda) = F(\lambda) \setminus G(\lambda)$ olmak üzere (H, C) esnek kümesine (F, A) ve (G, B) esnek kümelerinin esnek farkı denir ve $(H, C) = (F, A) \tilde{\setminus} (G, B)$ ile gösterilir.

6. $F^C : A \to \mathcal{P}(X)$ dönüşümü her $\lambda \in A$ için $F^C(\lambda) = X - F(\lambda)$ olmak üzere X üzerindeki (F^C, A) esnek kümesine (F, A) esnek kümesinin esnek tümleyeni denir ve $(F^C, A) = (F, A)^C$ ile gösterilir.

7. $H : A \times B \to \mathcal{P}(X \times X)$ dönüşümü her $(a, b) \in A \times B$ için $H(a, b) = F(a) \times G(b)$ olmak üzere $(H, A \times B) = (F, A) \tilde{\times} (G, B)$ esnek kümesine (F, A) ile (G, B) esnek kümesinin kartezyen çarpımı denir.

Önerme 2.1.4. [21,24] (F, A), (G, A) ve (H, A), X üzerinde esnek kümeler olmak üzere aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

1. $\left((F, A) \tilde{\cup} (G, A)\right)^C = (F, A)^C \tilde{\cap} (G, A)^C$,

2. $\left((F, A) \tilde{\cap} (G, A)\right)^C = (F, A)^C \tilde{\cup} (G, A)^C$,

3. $\left((F, A) \tilde{\cap} (G, A)\right) \tilde{\cup} (H, A) = \left((F, A) \tilde{\cup} (H, A)\right) \tilde{\cap} \left((G, A) \tilde{\cup} (H, A)\right)$,

4. $\left((F, A) \tilde{\cup} (G, A)\right) \tilde{\cap} (H, A) = \left((F, A) \tilde{\cap} (H, A)\right) \tilde{\cup} \left((G, A) \tilde{\cap} (H, A)\right)$.

2.2. Esnek Elemanlar

Tezin bundan sonraki kısmında bir $A \neq \varnothing$ parametre kümesi ile çalışılacağı için esnek kümenin gösteriminde (F, A) yerine kolaylık için sadece F kullanılmıştır.

Tanım 2.2.1. [63] $X \neq \varnothing$ bir küme ve $A \neq \varnothing$ bir parametreler kümesi olsun. Bir $\varepsilon : A \to X$ fonksiyonuna X kümesi üzerinde bir esnek eleman denir.

ε, X üzerinde bir esnek eleman ve bir $F \in S_A(X)$ verildiğinde her $\lambda \in A$ için $\varepsilon(\lambda) \in F(\lambda)$ ise ε esnek elemanı F esnek kümesine aittir denir ve $\varepsilon \tilde{\in} F$ ile gösterilir.

Her $\lambda \in A$ için $F(\lambda) \subset X$ tek elemanlı bir küme ise F kümesine tek elemanlı esnek küme denir. Böylece her tek elemanlı esnek küme aynı zamanda bir esnek elemana karşılık gelir.

Her $\lambda \in A$ için $F(\lambda) \neq \varnothing$ olacak şekilde X üzerinde tanımlı tüm esnek kümeler ile Φ boş esnek kümenin oluşturduğu sınıf $S(\tilde{X})$ ile gösterilir. $F \in S(\tilde{X})$ esnek kümesinin tüm esnek elemanlarının sınıfı da $SE(F)$ ile gösterilir.

Tezin bundan sonraki kısmında esnek elemanlar için $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \ldots$ gösterimi kullanılmıştır.

Önerme 2.2.2. [65] Bir $F \in S(\tilde{X})$ esnek kümenin esnek elemanlarının bir sınıfı, bu esnek kümenin bir esnek alt kümesini üretir. $\mathfrak{B}$, $\tilde{X}$ mutlak esnek kümesinin esnek elemanlarının bir sınıfı olmak üzere $\mathfrak{B}$ sınıfının ürettiği esnek küme $SS(\mathfrak{B})$ ile gösterilir.

Önerme 2.2.3 [65] Herhangi bir $F \in S(\tilde{X})$ esnek kümesi için $SS(SE(F)) = F$ olur. Ancak $\tilde{X}$ mutlak esnek kümesinin esnek elemanlarının bir $\mathfrak{B}$ sınıfı için $SE(SS(\mathfrak{B})) \supseteq \mathfrak{B}$ olur.

Uyarı 2.2.4. $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2 \subset SE(\tilde{X})$ olmak üzere $\mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{B}_2$ olsun. Her $\lambda \in A$ için $\mathfrak{B}_1(\lambda) = \mathfrak{B}_2(\lambda)$ ise $SS(\mathfrak{B}_1) = SS(\mathfrak{B}_2)$ olur.

Örnek 2.2.5. $A = \{\lambda, \mu\}$ ve $X = \{a, b, c\}$ olsun. Bu durumda

$$\tilde{x}_1=\{(\lambda,a),(\mu,a)\},\quad \tilde{x}_4=\{(\lambda,a),(\mu,b)\},\quad \tilde{x}_7=\{(\lambda,b),(\mu,c)\},$$
$$\tilde{x}_2=\{(\lambda,b),(\mu,b)\},\quad \tilde{x}_5=\{(\lambda,a),(\mu,c)\},\quad \tilde{x}_8=\{(\lambda,c),(\mu,a)\},$$
$$\tilde{x}_3=\{(\lambda,c),(\mu,c)\},\quad \tilde{x}_6=\{(\lambda,b),(\mu,a)\},\quad \tilde{x}_9=\{(\lambda,c),(\mu,b)\}$$

olmak üzere $SE(\tilde{X})=\{\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,...,\tilde{x}_9\}$ olur. $\mathcal{B}_1=\{\tilde{x}_1,\tilde{x}_2\}$, $\mathcal{B}_2=\{\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\tilde{x}_4,\tilde{x}_5\}$ ve $\mathcal{B}_3=\{\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\tilde{x}_4,\tilde{x}_6\}$ eleman sınıfları ele alınırsa

$$F=SS(\mathcal{B}_1)=SS(\mathcal{B}_3)=\{(\lambda,\{a,b\}),(\mu,\{a,b\})\},$$
$$G=SS(\mathcal{B}_2)=\{(\lambda,\{a,b\}),(\mu,\{a,b,c\})\}$$

olduğu görülür. Buradan $SE(F)=\{\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\tilde{x}_4,\tilde{x}_6\}$ ve $SE(G)=\{\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\tilde{x}_4,\tilde{x}_5,\tilde{x}_6,\tilde{x}_7\}$ olup $\mathcal{B}_1\subset SE(F)$, $\mathcal{B}_2\subset SE(G)$ ve $\mathcal{B}_3=SE(F)$ elde edilir.

Önerme 2.2.6. [65] Herhangi $F,G\in S(\tilde{X})$ esnek kümeleri için F kümesinin her esnek elemanı G kümesinin de bir esnek elemanı ise $F\,\tilde{\subseteq}\,G$ olur.

Uyarı 2.2.7. [65] $F,G\in S(\tilde{X})$ verilsin.

1. $\tilde{x}\,\tilde{\in}\,F\,\tilde{\cup}\,G$ ise $\tilde{x}\,\tilde{\in}\,F$ veya $\tilde{x}\,\tilde{\in}\,G$ olması gerekmez.

2. F, G esnek kümelerinin esnek kesişiminin veya esnek tümleyeninin $S(\tilde{X})$ sınıfına ait olması gerekmez.

Örnek 2.2.8. Örnek 2.2.5. üzerinden $H=\{(\lambda,\{a,c\}),(\mu,\{c\})\}\in S(\tilde{X})$ ve $K=\{(\lambda,\{a,b,c\}),(\mu,\{b,c\})\}\in S(\tilde{X})$ esnek kümeleri verilsin. Buradan $K^C=\{(\lambda,\varnothing),(\mu,\{a\})\}\notin S(\tilde{X})$ olur ve $F\,\tilde{\cup}\,H=\{(\lambda,\{a,b,c\}),(\mu,\{a,b,c\})\}$ olup $\tilde{x}_7\,\tilde{\in}\,F\,\tilde{\cup}\,H$ olmasına rağmen $\tilde{x}_7\,\tilde{\notin}\,F$ ve $\tilde{x}_7\,\tilde{\notin}\,H$ olur. Ayrıca $F\,\tilde{\cap}\,H=\{(\lambda,\{a\}),(\mu,\varnothing)\}\notin S(\tilde{X})$ olur.

2.3. Elemanter Esnek İşlemler

Bu kısımda esnek kümeler üzerinde esnek elemanlar kullanılarak yapılan elemanter esnek birleşim, elemanter esnek kesişim ve elemanter esnek tümleyen olarak adlandırılan elemanter esnek işlemler verilmiş ve bu işlemlerin bazı yeni özellikleri ispat edilmiştir.

Tanım 2.3.1. $F, G \in S(\tilde{X})$ esnek kümeleri verilsin.

1. $\mathfrak{B} = \left\{ \tilde{x} \tilde{\in} \tilde{X} : \tilde{x} \tilde{\in} F \text{ veya } \tilde{x} \tilde{\in} G \right\}$ olmak üzere $F \Cup G = SS(\mathfrak{B})$ esnek kümesine F ve G esnek kümelerinin elemanter birleşimi denir. Diğer bir ifadeyle $F \Cup G = SS(SE(F) \cup SE(G))$ olarak tanımlanır [65].
2. $\mathfrak{B} = \left\{ \tilde{x} \tilde{\in} \tilde{X} : \tilde{x} \tilde{\in} F \text{ ve } \tilde{x} \tilde{\in} G \right\}$ olmak üzere $F \Cap G = SS(\mathfrak{B})$ esnek kümesine F ve G esnek kümelerinin elemanter kesişimi denir. Diğer bir ifadeyle $F \Cap G = SS(SE(F) \cap SE(G))$ olarak tanımlanır [65].
3. $\mathfrak{B} = \left\{ \tilde{x} \tilde{\in} \tilde{X} : \tilde{x} \tilde{\in} F^{C} \right\}$ olmak üzere $F^{\mathbb{C}} = SS(\mathfrak{B})$ esnek kümesine F esnek kümesinin elemanter tümleyeni denir. Diğer bir ifadeyle $F^{\mathbb{C}} = SS\left(SE\left(F^{C}\right)\right)$ olarak tanımlanır [65].
4. $\mathfrak{B} = \left\{ \tilde{x} \tilde{\in} \tilde{X} : \tilde{x} \tilde{\in} F \tilde{\setminus} G \right\}$ olmak üzere $F \setminus G = SS(\mathfrak{B})$ esnek kümesine F ve G esnek kümelerinin elemanter farkı denir. Diğer bir ifadeyle $F \setminus G = SS\left(SE\left(F \tilde{\setminus} G\right)\right)$ olarak tanımlanır.

Önerme 2.3.2. [65] $F, G \in S(\tilde{X})$ esnek kümeleri için aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

1. $F \Cup G = F \tilde{\cup} G$,
2. $F \Cap F^{\mathbb{C}} = \Phi$,
3. Her $i \in I$ için $F_i = SS(\mathfrak{B}_i)$ ise $\bigcup\!\!\!\!\bigcup_{i \in I} F_i = SS\left(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{B}_i\right)$.

Önerme 2.3.3. $F, G \in S(\tilde{X})$ esnek kümeleri verilsin. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır.

1. $F \Cap G \tilde{\subseteq} F \tilde{\cap} G$,

2. $F^{\mathbb{C}} \tilde{\subseteq} F^{C}$,

3. $F \setminus G \tilde{\subseteq} F \tilde{\diagdown} G$,

4. $F \Cup F^{\mathbb{C}} \tilde{\subseteq} \tilde{X}$,

5. Her $i \in I$ için $F_i = SS(\mathfrak{B}_i)$ ise $\bigcap\limits_{i \in I} F_i \tilde{\supseteq} SS\left(\bigcap\limits_{i \in I} \mathfrak{B}_i\right)$.

İspat: 1. Eğer her $\lambda \in A$ için $F(\lambda) \cap G(\lambda) \neq \varnothing$ ise $F \Cap G \neq \Phi$ olur. Buradan $F \Cap G = F \tilde{\cap} G$ olur. Eğer en az bir $\lambda \in A$ için $F(\lambda) \cap G(\lambda) = \varnothing$ ve $\lambda' \in A \diagdown \{\lambda\}$ için $F(\lambda') \neq G(\lambda')$ ise $F \Cap G = \Phi$ ve $F \tilde{\cap} G \neq \Phi$ olur. Böylece $F \Cap G \tilde{\subseteq} F \tilde{\cap} G$ elde edilir.

2. Eğer her $\lambda \in A$ için $F^{C}(\lambda) = \varnothing$ ise $F^{\mathbb{C}} = F^{C} = \Phi$ olur. Eğer en az bir $\lambda \in A$ için $F^{C}(\lambda) = \varnothing$ ve $\lambda' \in A \diagdown \{\lambda\}$ için $F^{C}(\lambda') \neq \varnothing$ ise $F^{\mathbb{C}} = \Phi$ ve $F^{C} \neq \Phi$ olur. Böylece $F^{\mathbb{C}} \tilde{\subseteq} F^{C}$ elde edilir.

3. Eğer her $\lambda \in A$ için $F(\lambda) \diagdown G(\lambda) \neq \varnothing$ ise $F \setminus G \neq \Phi$ olur. Buradan $F \setminus G = F \tilde{\diagdown} G$ olur. Eğer en az bir $\lambda \in A$ için $F(\lambda) \diagdown G(\lambda) = \varnothing$ ve $\lambda' \in A \diagdown \{\lambda\}$ için $F(\lambda') \neq G(\lambda')$ ise $F \setminus G = \Phi$ ve $F \tilde{\diagdown} G \neq \Phi$ olur. Böylece $F \setminus G \tilde{\subseteq} F \tilde{\diagdown} G$ elde edilir.

4. Eğer $F^{\mathbb{C}} = \Phi$ ise $F \Cup F^{\mathbb{C}} = F \Cup \Phi = F \tilde{\subseteq} \tilde{X}$ olur. Eğer $F^{\mathbb{C}} \neq \Phi$ ise $F \Cup F^{\mathbb{C}} = \tilde{X}$ olur. Böylece $F \Cup F^{\mathbb{C}} \tilde{\subseteq} \tilde{X}$ elde edilir.

5. Her $i \in I$ için $\mathcal{B}_i \subseteq SE(F_i)$ olduğundan $\bigcap_{i\in I}\mathcal{B}_i \subseteq \bigcap_{i\in I} SE(F_i)$ olur. Buradan $SS\left(\bigcap_{i\in I}\mathcal{B}_i\right) \tilde{\subseteq} SS\left(\bigcap_{i\in I} SE(F_i)\right)$ yazılır. Dolayısıyla $SS\left(\bigcap_{i\in I}\mathcal{B}_i\right) \tilde{\subseteq} \Cap_{i\in I} F_i$ elde edilir.

Uyarı 2.3.4. Herhangi $F,G \in S(\tilde{X})$ esnek kümeleri için $F \Cap G = \Phi$ olması $F \tilde{\subset} G^{\mathbb{C}}$ ve $G \tilde{\subset} F^{\mathbb{C}}$ olmasını gerektirmez. Örneğin; $X=\{a,b,c,d\}$ ve $A=\{\lambda,\mu\}$ olmak üzere

$$F=\{(\lambda,\{a,b\}),(\mu,\{a,c\})\},$$
$$G=\{(\lambda,\{c,d\}),(\mu,\{b,c\})\},$$
$$H=\{(\lambda,\{c,d\}),(\mu,\{a,b,d\})\}$$

esnek kümelerini ve onların elemanter tümleyenlerini ele alalım. $F \Cap G = \Phi$ ve $F \Cap H = \Phi$ olmasına rağmen $F \tilde{\not\subset} G^{\mathbb{C}}$ veya $G \tilde{\not\subset} F^{\mathbb{C}}$ ve $F \tilde{\not\subset} H^{\mathbb{C}}$ veya $H \tilde{\not\subset} F^{\mathbb{C}}$ elde edilir. Fakat $H^{\mathbb{C}} \tilde{\subset} F$ ve $F^{\mathbb{C}} \tilde{\subset} H$ olur. Ayrıca $G \Cap H \neq \Phi$ olmasına rağmen $G^{\mathbb{C}} \Cap H^{\mathbb{C}} = \Phi$ olur.

Önerme 2.3.5. Herhangi $F,G \in S(\tilde{X})$ esnek kümeleri için $F \Cap G = \Phi$ ve $F \tilde{\cap} G \in S(\tilde{X})$ ise $F \tilde{\subset} G^{\mathbb{C}}$ ve $G \tilde{\subset} F^{\mathbb{C}}$ olur.

İspat: $F \Cap G = \Phi$ ve $F \tilde{\cap} G \in S(\tilde{X})$ olsun. Eğer her $\lambda \in A$ için $F(\lambda) \cap G(\lambda) \neq \varnothing$ ise $F \tilde{\cap} G \neq \Phi$ ve $F(\lambda) \cap G(\lambda) = \varnothing$ ise $F \tilde{\cap} G = \Phi$ olur. Böylece, $F \tilde{\cap} G \in S(\tilde{X})$ iken her iki durumda da $F \Cap G = F \tilde{\cap} G$ elde edilir. Bu durumda $F \Cap G = \Phi$ olması $F \tilde{\cap} G = \Phi$ olmasını gerektirir. Buradan

$$\begin{aligned} F \tilde{\subset} G^{C} \text{ ve } G \tilde{\subset} F^{C} &\Rightarrow SE(F) \subset SE(G^{\mathbb{C}}) \text{ ve } SE(G) \subset SE(F^{\mathbb{C}}) \\ &\Rightarrow SS(SE(F)) \tilde{\subset} SS(SE(G^{\mathbb{C}})) \text{ ve } SS(SE(G)) \subset SS(SE(F^{\mathbb{C}})) \\ &\Rightarrow F \tilde{\subset} G^{\mathbb{C}} \text{ ve } G \tilde{\subset} F^{\mathbb{C}} \end{aligned}$$

olur.

Lemma 2.3.6. Herhangi $F, G \in S(\tilde{X})$ esnek kümeleri için aşağıdakiler sağlanır.

1. $SE(F \Cap G) = SE(F) \cap SE(G)$,

2. $SE(F \Cup G) \supset SE(F) \cup SE(G)$.

İspat. Her $\tilde{x} \in SE(F \Cap G)$ için Tanım 2.3.1.'den $\tilde{x} \in SE(F) \cap SE(G)$ olur. Bu durumda $SE(F \Cap G) \subset SE(F) \cap SE(G)$ olur. Aynı zamanda Önerme 2.2.3.'ün bir sonucu olarak $SE(F) \cap SE(G) \subset SE(F \Cap G)$ ve $SE(F) \cup SE(G) \subset SE(F \Cup G)$ bulunur. Dolayısıyla ispat her iki madde için de tamamlanır.

Önerme 2.3.7. Herhangi $F, G, H \in S(\tilde{X})$ esnek kümeleri için aşağıdaki özellikler sağlanır.

1. $(F \Cap G) \Cup H \,\tilde{\subseteq}\, (F \Cup H) \Cap (G \Cup H)$,

2. $(F \Cup G) \Cap H \,\tilde{\supseteq}\, (F \Cap H) \Cup (G \Cap H)$.

İspat. 1.

$$
\begin{aligned}
(F \Cap G) \Cup H &= SS(SE(F \Cap G) \cup SE(H)) \\
&= SS((SE(F) \cap SE(G)) \cup SE(H)) && \text{(Lemma 2.3.6. (1))} \\
&= SS((SE(F) \cup SE(H)) \cap (SE(G) \cup SE(H))) \\
&\tilde{\subseteq} SS(SE(F \Cup H) \cap SE(G \Cup H)) && \text{(Lemma 2.3.6. (2))} \\
&= (F \Cup H) \Cap (G \Cup H).
\end{aligned}
$$

2.

$$
\begin{aligned}
(F \Cup G) \Cap H &= SS(SE(F \Cup G) \cap SE(H)) \\
&\tilde{\supseteq} SS((SE(F) \cup SE(G)) \cap SE(H)) && \text{(Lemma 2.3.6. (2))} \\
&= SS((SE(F) \cap SE(H)) \cup (SE(G) \cap SE(H))) \\
&= SS(SE(F \Cap H) \cup SE(G \Cap H)) && \text{(Lemma 2.3.6. (1))} \\
&= (F \Cap H) \Cup (G \Cap H).
\end{aligned}
$$

Uyarı 2.3.8. Yukarıdaki önermeye göre elemanter birleşim ve elemanter kesişim işlemleri $S\left(\tilde{X}\right)$ üzerinde dağılma özelliğine sahip değillerdir. Aşağıdaki örnekten [65]'deki Önerme 2.1.18.'in doğru olmadığı görülmektedir.

Örnek 2.3.9. Uyarı 2.3.4.'deki F, G ve H esnek kümeleri için $\left(F \Cap G\right) \Cup H = H$ olmasına rağmen

$$\left(F \Cup H\right) \Cap \left(G \Cup H\right) = \left\{\left(\lambda, \{c,d\}\right), \left(\mu, \{a,b,c,d\}\right)\right\}$$

olur. Ayrıca $\left(F \Cup G\right) \Cap H = \left\{\left(\lambda, \{c,d\}\right), \left(\mu, \{a,b\}\right)\right\}$ olmasına rağmen

$$\left(F \Cap H\right) \Cup \left(G \Cap H\right) = \left\{\left(\lambda, \{c,d\}\right), \left(\mu, \{b\}\right)\right\}$$

olur.

Hangi şartlarda elemanter birleşim ve elemanter kesişim işlemlerinin $S\left(\tilde{X}\right)$ üzerinde dağılma özelliğine sahip olacağı aşağıdaki önermede verilmiştir.

Önerme 2.3.10. Herhangi $F, G, H \in S\left(\tilde{X}\right)$ esnek kümeleri verilsin. Bu durumda

1. Eğer $F \tilde{\cap} G \in S\left(\tilde{X}\right)$ ise

$$\left(F \Cap G\right) \Cup H = \left(F \Cup H\right) \Cap \left(G \Cup H\right)$$

olur.

2. Eğer $F \tilde{\cap} H \in S\left(\tilde{X}\right)$ ve $G \tilde{\cap} H \in S\left(\tilde{X}\right)$ ise

$$\left(F \Cup G\right) \Cap H = \left(F \Cap H\right) \Cup \left(G \Cap H\right)$$

olur.

İspat. **1.** $F \tilde{\cap} G \in S(\tilde{X})$ ise her $\lambda \in A$ için $F(\lambda) \cap G(\lambda) \neq \varnothing$ veya $F(\lambda) \cap G(\lambda) = \varnothing$ olur. Bu durumda $F \tilde{\cap} G = F \Cap G$ olur. Buradan

$$
\begin{aligned}
(F \Cap G) \Cup H &= (F \tilde{\cap} G) \Cup H \\
&= (F \tilde{\cap} G) \tilde{\cup} H \qquad \text{(Önerme 2.3.2. (1))} \\
&= (F \tilde{\cup} H) \tilde{\cap} (G \tilde{\cup} H) \\
&= (F \Cup H) \Cap (G \Cup H)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

2. $F \tilde{\cap} H \in S(\tilde{X})$ ve $G \tilde{\cap} H \in S(\tilde{X})$ ise $F \tilde{\cap} H = F \Cap H$ ve $G \tilde{\cap} H = G \Cap H$ olur. Buradan

$$
\begin{aligned}
(F \Cup G) \Cap H &= (F \tilde{\cup} G) \Cap H \qquad \text{(Önerme 2.3.2. (1))} \\
&= (F \tilde{\cup} G) \tilde{\cap} H \\
&= (F \tilde{\cap} H) \tilde{\cup} (G \tilde{\cap} H) \\
&= (F \Cap H) \Cup (G \Cap H)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Önerme 2.3.11. Herhangi $F, G \in S(\tilde{X})$ esnek kümeleri verilsin. Bu durumda

1. $F^C \Cap G^C \neq \Phi$ ise $(F \Cup G)^C = F^C \Cap G^C$,

2. $(F \Cap G)^C \neq \Phi$ ise $(F \Cap G)^C = F^C \Cup G^C$

olur.

İspat. 1.

$$\begin{aligned}(F \Cup G)^C &= (F \tilde{\cup} G)^C \\ &= F^C \tilde{\cap} G^C \\ &= F^C \Cap G^C. \ (F^C \Cap G^C \neq \Phi \ \text{ile})\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}(F \Cap G)^C &= (F \tilde{\cap} G)^C \quad ((F \Cap G)^C \neq \Phi \ \text{ile}) \\ &= F^C \tilde{\cup} G^C \\ &= F^C \Cup G^C.\end{aligned}$$

Önerme 2.3.12. Herhangi $F, G \in S(\tilde{X})$ esnek kümeleri verilsin. Bu durumda

1. $F^C \Cap G^C \neq \Phi$, $F^{\mathbb{C}} \neq \Phi$ ve $G^{\mathbb{C}} \neq \Phi$ ise $(F \Cup G)^{\mathbb{C}} = F^{\mathbb{C}} \Cap G^{\mathbb{C}}$,

2. $F \Cap G \neq \Phi$, $F^{\mathbb{C}} \neq \Phi$ ve $G^{\mathbb{C}} \neq \Phi$ ise $(F \Cap G)^{\mathbb{C}} = F^{\mathbb{C}} \Cup G^{\mathbb{C}}$

olur.

İspat: 1.

$$\begin{aligned}(F \Cup G)^{\mathbb{C}} &= SS\left\{\tilde{x} \tilde{\in} \tilde{X} : \tilde{x} \tilde{\in} (F \Cup G)^C\right\} \\ &= SS\left\{\tilde{x} \tilde{\in} \tilde{X} : \tilde{x} \tilde{\in} (F \tilde{\cup} G)^C\right\} \\ &= SS\left\{\tilde{x} \tilde{\in} \tilde{X} : \tilde{x} \tilde{\in} F^C \tilde{\cap} G^C\right\} \\ &= SS\left\{\tilde{x} \tilde{\in} \tilde{X} : \tilde{x} \tilde{\in} F^C \Cap G^C\right\} \qquad (F^C \Cap G^C \neq \Phi \ \text{ile}) \\ &= SS\left\{\tilde{x} \tilde{\in} \tilde{X} : \tilde{x} \tilde{\in} F^C \ \text{ve} \ \tilde{x} \tilde{\in} G^C\right\} \\ &= SS\left\{SE(F^C) \cap SE(G^C)\right\}. \qquad (2.1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F^{\mathbb{C}} \Cap G^{\mathbb{C}} &= SS\left\{\tilde{x} \tilde{\in} \tilde{X} : \tilde{x} \tilde{\in} F^{\mathbb{C}} \ \text{ve} \ \tilde{x} \tilde{\in} G^{\mathbb{C}}\right\} \\ &= SS\left\{\tilde{x} \tilde{\in} \tilde{X} : \tilde{x} \tilde{\in} F^C \ \text{ve} \ \tilde{x} \tilde{\in} G^C\right\} \quad (F^{\mathbb{C}} \neq \Phi \ \text{ve} \ G^{\mathbb{C}} \neq \Phi \ \text{ile}) \\ &= SS\left\{SE(F^C) \cap SE(G^C)\right\}. \qquad (2.2)\end{aligned}$$

Böylece (2.1) ve (2.2)'den ispat tamamlanır.

2.

$$
\begin{aligned}
\left(F \Cap G\right)^{\mathbb{C}} &= SS\left\{\tilde{x} \tilde{\in} \tilde{X} : \tilde{x} \tilde{\in} \left(F \Cap G\right)^{C}\right\} \\
&= SS\left\{\tilde{x} \tilde{\in} \tilde{X} : \tilde{x} \tilde{\in} \left(F \tilde{\cap} G\right)^{C}\right\} \qquad (F \Cap G \neq \Phi \text{ ile}) \\
&= SS\left\{\tilde{x} \tilde{\in} \tilde{X} : \tilde{x} \tilde{\in} F^{C} \tilde{\cup} G^{C}\right\} \\
&= SS\left\{\tilde{x} \tilde{\in} \tilde{X} : \tilde{x} \tilde{\in} F^{C} \Cup G^{C}\right\} \\
&= SS\left\{\tilde{x} \tilde{\in} \tilde{X} : \tilde{x} \tilde{\in} F^{C} \text{ veya } \tilde{x} \tilde{\in} G^{C}\right\} \\
&= SS\left\{SE\left(F^{C}\right) \cup SE\left(G^{C}\right)\right\}. \qquad (2.3)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F^{\mathbb{C}} \Cup G^{\mathbb{C}} &= SS\left\{\tilde{x} \tilde{\in} \tilde{X} : \tilde{x} \tilde{\in} F^{\mathbb{C}} \text{ veya } \tilde{x} \tilde{\in} G^{\mathbb{C}}\right\} \\
&= SS\left\{\tilde{x} \tilde{\in} \tilde{X} : \tilde{x} \tilde{\in} F^{C} \text{ veya } \tilde{x} \tilde{\in} G^{C}\right\} \quad (F^{\mathbb{C}} \neq \Phi \text{ ve } G^{\mathbb{C}} \neq \Phi \text{ ile}) \\
&= SS\left\{SE\left(F^{C}\right) \cup SE\left(G^{C}\right)\right\}. \qquad (2.4)
\end{aligned}
$$

Böylece (2.3) ve (2.4)’den ispat tamamlanır.

Uyarı 2.3.13. Yukarıdaki önermelerde de görüldüğü gibi esnek kümeler üzerinde elemanter işlemler dağılma özelliğini ve De Morgan kurallarını genelde sağlamaz. Eğer verilen esnek kümelerin esnek kesişimleri, esnek tümleyenleri ve esnek tümleyenlerinin esnek kesişimleri $S\left(\tilde{X}\right)$ sınıfına ait ise dağılma özelliği ve De Morgan kuralları elemanter işlemler için de sağlanır.

2.4. Esnek Sayılar

Tanım 2.4.1. [63] $B(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinin boştan farklı tüm sınırlı alt kümelerinin sınıfı olsun. $F : A \to B(\mathbb{R})$ dönüşümü ile birlikte F esnek kümesine esnek reel küme denir. Eğer F esnek reel kümesi tek elemanlı esnek küme ise F kümesine karşılık gelen esnek eleman ile ilişkilendirerek bu esnek kümeye esnek reel sayı denir. Tüm esnek reel kümelerin sınıfı $\mathrm{R}(A)$, tüm esnek reel sayıların sınıfı

$\mathbb{R}(A)$ ve negatif olmayan esnek reel sayıların sınıfı $\mathbb{R}(A)^*$ ile gösterilir. $\mathbb{R}(A) = SE(\tilde{\mathbb{R}})$ olduğu açıktır.

Tezin bu kısmından sonra esnek sayılar için $\tilde{r}, \tilde{s}, \tilde{t}, \ldots$ gösterimi ve özel olarak her $\lambda \in A$ için $\tilde{r}(\lambda) = r$ ise $\overline{r}$ gösterimi kullanılmıştır.

Tanım 2.4.2. [63] $\tilde{r}, \tilde{s} \in \mathbb{R}(A)$ esnek reel sayıları verildiğinde bu esnek reel sayıların sıralaması, her $\lambda \in A$ için

1. $\tilde{r}(\lambda) \leq \tilde{s}(\lambda)$ ise $\tilde{r} \,\tilde{\leq}\, \tilde{s}$,

2. $\tilde{r}(\lambda) \geq \tilde{s}(\lambda)$ ise $\tilde{r} \,\tilde{\geq}\, \tilde{s}$,

3. $\tilde{r}(\lambda) < \tilde{s}(\lambda)$ ise $\tilde{r} \,\tilde{<}\, \tilde{s}$,

4. $\tilde{r}(\lambda) > \tilde{s}(\lambda)$ ise $\tilde{r} \,\tilde{>}\, \tilde{s}$ şeklindedir.

Tanım 2.4.3. [62] $F, G \in R(A)$ esnek reel kümeler olsun.

1. F ve G esnek reel kümelerinin toplamı her $\lambda \in A$ için $(F+G)(\lambda) = \{a+b : a \in F(\lambda),\, b \in G(\lambda)\}$ ile tanımlıdır.

2. (F, A) ve (G, A) esnek reel kümelerinin farkı her $\lambda \in A$ için $(F-G)(\lambda) = \{a-b : a \in F(\lambda),\, b \in G(\lambda)\}$ ile tanımlıdır.

3. (F, A) ve (G, A) esnek reel kümelerinin çarpımı her $\lambda \in A$ için $(F.G)(\lambda) = \{a.b : a \in F(\lambda),\, b \in G(\lambda)\}$ ile tanımlıdır.

4. (F, A) ve (G, A) esnek reel kümelerinin bölümü her $\lambda \in A$ için $(F/G)(\lambda) = \{a/b : a \in F(\lambda),\, b \in G(\lambda) \setminus \{0\}\}$ ile tanımlıdır.

Uyarı 2.4.4. [63] $\mathbb{R}(A)$ esnek reel sayılar sınıfı üzerinde toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemleri $R(A)$ üzerindeki işlemlere benzer şekilde yapılır. Örneğin; $\tilde{r}, \tilde{s} \,\tilde{\in}\, \mathbb{R}(A)$ verildiğinde bu iki esnek reel sayının toplamı her $\lambda \in A$ için

$\left(\tilde{r}+\tilde{s}\right)\left(\lambda\right)=\left\{a+b:a=\tilde{r}\left(\lambda\right),b=\tilde{s}\left(\lambda\right)\right\}$ olmak üzere $\tilde{r}+\tilde{s}$ biçiminde ve bu iki esnek reel sayının çarpımı her $\lambda\in A$ için $\left(\tilde{r}.\tilde{s}\right)\left(\lambda\right)=\left\{a.b:a=\tilde{r}\left(\lambda\right),b=\tilde{s}\left(\lambda\right)\right\}$ olmak üzere $\tilde{r}.\tilde{s}$ biçimindedir. Bu durumda $\mathbb{R}\left(A\right)$, tanımlanan toplama ve çarpma işlemlerine göre bir cisim olur.

2.5. Esnek Metrik Uzaylar

Bu kısımda esnek metrik uzay tanımı ve esnek metrik uzayın bazı özellikleri, esnek elemanlar üzerinden verilmiştir.

Tanım 2.5.1. [65] $X\neq\emptyset$ bir evrensel küme ve $A\neq\emptyset$ bir parametreler kümesi olmak üzere ve $d:SE\left(\tilde{X}\right)\times SE\left(\tilde{X}\right)\to\mathbb{R}\left(A\right)^{*}$ esnek dönüşümü aşağıdaki şartları sağlarsa d dönüşümüne $\tilde{X}$ üzerinde esnek metrik denir.

EM1. Her $\tilde{x},\tilde{y}\,\tilde{\in}\,\tilde{X}$ için $d\left(\tilde{x},\tilde{y}\right)\tilde{\geq}\,\overline{0}$,

EM2. Her $\tilde{x},\tilde{y}\,\tilde{\in}\,\tilde{X}$ için $d\left(\tilde{x},\tilde{y}\right)=\overline{0}\Leftrightarrow\tilde{x}=\tilde{y}$,

EM3. Her $\tilde{x},\tilde{y}\,\tilde{\in}\,\tilde{X}$ için $d\left(\tilde{x},\tilde{y}\right)=d\left(\tilde{y},\tilde{x}\right)$,

EM4. Her $\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}\,\tilde{\in}\,\tilde{X}$ için $d\left(\tilde{x},\tilde{y}\right)\tilde{\leq}\,d\left(\tilde{x},\tilde{z}\right)\tilde{+}\,d\left(\tilde{z},\tilde{y}\right)$.

$\tilde{X}$ mutlak esnek kümesine üzerindeki d esnek metriği ile birlikte esnek metrik uzay denir ve $\left(\tilde{X},d,A\right)$ veya $\left(\tilde{X},d\right)$ ile gösterilir. (EM1)-(EM4) aksiyomlarına da esnek metrik aksiyomları denir.

Örnek 2.5.2. [65] $\left\{d_{\lambda}:\lambda\in A\right\}$, bir X kesin kümesi üzerindeki kesin metriklerin herhangi parametrelendirilmiş edilmiş ailesi olsun. Bu durumda her $\tilde{x},\tilde{y}\,\tilde{\in}\,\tilde{X}$ ve her $\lambda\in A$ için $d\left(\tilde{x},\tilde{y}\right)\left(\lambda\right)=d_{\lambda}\left(\tilde{x}\left(\lambda\right),\tilde{y}\left(\lambda\right)\right)$ şeklinde tanımlanan d dönüşümü $\tilde{X}$ üzerinde bir esnek metrik olur.

Örnek 2.5.3. [65] ρ, bir X kesin kümesi üzerindeki herhangi kesin metrik olmak üzere, her $\tilde{x},\tilde{y} \tilde{\in} \tilde{X}$ ve her $\lambda \in A$ için $d(\tilde{x},\tilde{y})(\lambda) = \rho(\tilde{x}(\lambda),\tilde{y}(\lambda))$ şeklinde tanımlanan $d : SE(\tilde{X}) \times SE(\tilde{X}) \to \mathbb{R}(A)^*$ dönüşümü bir esnek metrik olur. Bu şekildeki bir esnek metriğe ρ kesin metriği tarafından üretilen esnek metrik denir. Böylece X üzerindeki herhangi metrik bir esnek metriğe genişletilebilir.

Örnek 2.5.4. $\mathbb{R}$ üzerindeki Öklid metriği tarafından üretilen esnek metrik aşağıdaki şekildedir.

$$d : SE(\tilde{\mathbb{R}}) \times SE(\tilde{\mathbb{R}}) \to \mathbb{R}(A)^*,\ \forall \lambda \in A \text{ ve } \forall \tilde{x},\tilde{y} \tilde{\in} \tilde{\mathbb{R}},\ d(\tilde{x},\tilde{y})(\lambda) = |\tilde{x}(\lambda) - \tilde{y}(\lambda)|$$

Örnek 2.5.5. $\mathbb{R}^n$ üzerindeki Öklid metriği tarafından üretilen esnek metrik aşağıdaki şekilde tanımlıdır ve bu esnek metriğe esnek Öklid metriği denir.

$$d : SE(\tilde{\mathbb{R}}^n) \times SE(\tilde{\mathbb{R}}^n) \to \mathbb{R}(A)^*,$$

$$\forall \lambda \in A \text{ ve } \forall \tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\ldots\tilde{x}_n), \tilde{\mathbf{y}} = (\tilde{y}_1,\tilde{y}_2,\ldots\tilde{y}_n) \tilde{\in} \tilde{\mathbb{R}}^n \ni \tilde{x}_i,\tilde{y}_i \tilde{\in} \tilde{\mathbb{R}},\ i = 1,2,\ldots n,$$

$$d(\tilde{\mathbf{x}},\tilde{\mathbf{y}})(\lambda) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\tilde{x}_i(\lambda) - \tilde{y}_i(\lambda))^2}\ .$$

Uyarı 2.5.6. [65] Kesin metriklerin herhangi parametrelendirilmiş ailesi bir esnek metrik olmasına rağmen, herhangi esnek metrik kesin metriklerin parametrelendirilmiş bir ailesi değildir. Böylece esnek metrik, kesin metriklerin herhangi bir parametrelendirilmiş ailesinden daha genel ve daha kapsamlıdır.

Örnek 2.5.7. [65] $X = \{x, y\}$ ve $A = \{\alpha, \beta\}$ olsun.

$$\tilde{x}_1 = \{(\alpha,x),(\beta,x)\}, \quad \tilde{x}_3 = \{(\alpha,y),(\beta,x)\},$$
$$\tilde{x}_2 = \{(\alpha,x),(\beta,y)\}, \quad \tilde{x}_4 = \{(\alpha,y),(\beta,y)\}$$

olmak üzere $SE\left(\tilde{X}\right)=\{\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\tilde{x}_3,\tilde{x}_4\}$ olur. $\tilde{X}$ üzerinde esnek ayrık metrik her $\tilde{x},\tilde{y}\,\tilde{\in}\,\tilde{X}$ için

$$d\left(\tilde{x},\tilde{y}\right)=\begin{cases}\overline{0}, & \tilde{x}=\tilde{y}\\ \overline{1}, & \tilde{x}\neq\tilde{y}\end{cases}$$

ile tanımlansın. Buradan her $\lambda\in A$ ve her $\tilde{x},\tilde{y}\,\tilde{\in}\,\tilde{X}$ için

$$d\left(\tilde{x},\tilde{y}\right)(\lambda)=d_\lambda\left(\tilde{x}(\lambda),\tilde{y}(\lambda)\right)$$

olacak şekilde $d_\lambda : X\times X\to\mathbb{R}^+$ dönüşümleri iyi tanımlı olmaz. Gerçekten,

$$d\left(\tilde{x}_1,\tilde{x}_1\right)=\overline{0}\Rightarrow d\left(\tilde{x}_1,\tilde{x}_1\right)(\alpha)=0\Rightarrow d_\alpha\left(\tilde{x}_1(\alpha),\tilde{x}_1(\alpha)\right)=d_\alpha(x,x)=0,$$
$$d\left(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2\right)=\overline{1}\Rightarrow d\left(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2\right)(\alpha)=1\Rightarrow d_\alpha\left(\tilde{x}_1(\alpha),\tilde{x}_2(\alpha)\right)=d_\alpha(x,x)=1$$

olur. Böylece her $\lambda\in A$ için d_λ, X üzerinde metrik değildir.

Teorem 2.5.8. [65] $X\neq\emptyset$ bir evrensel küme ve $A\neq\emptyset$ bir parametreler kümesi olsun. $\tilde{X}$ üzerinde bir $d:SE\left(\tilde{X}\right)\times SE\left(\tilde{X}\right)\to\mathbb{R}(A)^*$ esnek metriği (EM5) şartını sağlarsa her $\tilde{x},\tilde{y}\,\tilde{\in}\,\tilde{X}$ için $d_\lambda\left(\tilde{x}(\lambda),\tilde{y}(\lambda)\right)=d\left(\tilde{x},\tilde{y}\right)(\lambda)$ şeklinde tanımlanan $d_\lambda : X\times X\to\mathbb{R}^+$, her $\lambda\in A$ için X üzerinde bir metriktir.

EM5. Her $\lambda\in A$, her $\tilde{x},\tilde{y}\,\tilde{\in}\,\tilde{X}$ ve her $(\eta,\xi)\in X\times X$ için

$$\left\{d\left(\tilde{x},\tilde{y}\right)(\lambda):\tilde{x}(\lambda)=\eta,\tilde{y}(\lambda)=\xi\right\}$$

tek elemanlı bir kümedir.

Bu bakış açısıyla (EM5) şartını sağlayan $d : SE\left(\tilde{X}\right) \times SE\left(\tilde{X}\right) \to \mathbb{R}(A)^*$ esnek metriği, P. Majumdar ve S.K. Samanta [73] tarafından verilen tanıma göre $d : A \to \left(\mathbb{R}^+\right)^{X \times X}$ biçiminde bir özel esnek dönüşüm olur.

Tanım 2.5.9. [65] $\left(\tilde{X}, d, A\right)$ esnek metrik uzay ve $F \in S\left(\tilde{X}\right)$ esnek alt kümesi verilsin. $d_F : SE(F) \times SE(F) \to \mathbb{R}(A)^*$ esnek dönüşümü, her $\tilde{x}, \tilde{y} \tilde{\in} F$ için $d_F\left(\tilde{x}, \tilde{y}\right) = d\left(\tilde{x}, \tilde{y}\right)$ olmak üzere F üzerinde bir esnek metriktir. Bu esnek metriğe F üzerine indirgenen esnek alt metrik ve $\left(F, d_F, A\right)$ üçlüsüne de esnek alt metrik uzay denir.

Tanım 2.5.10. [65] $\left(\tilde{X}, d, A\right)$ esnek metrik uzay, $\tilde{a} \tilde{\in} \tilde{X}$ ve $\tilde{r} \in \mathbb{R}(A)^*$ olsun.

$$
\begin{aligned}
B(\tilde{a}, \tilde{r}) &= \left\{\tilde{x} \tilde{\in} \tilde{X} : d\left(\tilde{x}, \tilde{a}\right) \tilde{<} \tilde{r}\right\} \subset SE\left(\tilde{X}\right), \\
\overline{B(\tilde{a}, \tilde{r})} &= \left\{\tilde{x} \tilde{\in} \tilde{X} : d\left(\tilde{x}, \tilde{a}\right) \tilde{\leq} \tilde{r}\right\} \subset SE\left(\tilde{X}\right), \\
S(\tilde{a}, \tilde{r}) &= \left\{\tilde{x} \tilde{\in} \tilde{X} : d\left(\tilde{x}, \tilde{a}\right) \tilde{<} \tilde{r}\right\} \subset SE\left(\tilde{X}\right)
\end{aligned}
$$

sınıflarına sırasıyla $\tilde{a}$ merkezli $\tilde{r}$ yarıçaplı açık yuvar, kapalı yuvar ve küre, $SS\left(B(\tilde{a}, \tilde{r})\right)$, $SS\left(\overline{B(\tilde{a}, \tilde{r})}\right)$ ve $SS\left(B(\tilde{a}, \tilde{r})\right)$ esnek kümelerine de sırasıyla $\tilde{a}$ merkezli $\tilde{r}$ yarıçaplı esnek açık yuvar, esnek kapalı yuvar ve esnek küre denir.

Tanım 2.5.11. [65] F, $\left(\tilde{X}, d, A\right)$ esnek metrik uzayında bir esnek küme olsun. Bir $\tilde{a} \tilde{\in} F$ esnek elemanı için $\tilde{a} \in B(\tilde{a}, \tilde{r}) \subset SE(F)$ olacak şekilde $\tilde{r} \in \mathbb{R}(A)^*$ var ise $\tilde{a}$ elemanına F kümesinin bir iç elemanı denir ve F kümesinin tüm iç elemanlarının kümesi $Int(F)$ ile gösterilir. Buradan $SS\left(Int(F)\right)$ esnek kümesine de F esnek kümesinin esnek içi denir.

Tanım 2.5.12. [65] $\left(\tilde{X},d,A\right)$ esnek metrik uzay ve $\mathfrak{B} \subset SE\left(\tilde{X}\right)$ sınıfı boştan farklı olsun. $\mathfrak{B}$ sınıfının her elemanı iç eleman ise $\mathfrak{B}$ sınıfına $\left(\tilde{X},d,A\right)$ içinde açık denir. Buradan $SS\left(\mathfrak{B}\right)$ esnek kümesine de esnek açık denir.

Tanım 2.5.13. [65] $\left(\tilde{X},d,A\right)$ esnek metrik uzay olsun. Bir $F \in S\left(\tilde{X}\right)$ esnek kümesinin esnek tümleyeni için $F^c \in S\left(\tilde{X}\right)$ ve F^c, $\left(\tilde{X},d,A\right)$ içinde esnek açık ise F kümesine $\left(\tilde{X},d,A\right)$ içinde esnek kapalı denir.

Teorem 2.5.14. [65] Bir esnek metrik uzayda her açık yuvar bir açık kümedir ve böylece her esnek açık yuvar bir esnek açık kümedir.

Tanım 2.5.15. [65] $\left(\tilde{X},d,A\right)$ esnek metrik uzay, $\tilde{a} \in \tilde{X}$ ve $N\left(\tilde{a}\right) \subset SE\left(\tilde{X}\right)$ olsun. $\tilde{a} \in B\left(\tilde{a},\tilde{r}\right) \subset N\left(\tilde{a}\right)$ olacak şekilde $\tilde{r} \in \mathbb{R}\left(A\right)^*$ var ise $N\left(\tilde{a}\right)$ sınıfına $\tilde{a}$ elemanının komşuluğu denir ve $SS\left(N\left(\tilde{a}\right)\right)$ kümesine de $\tilde{a}$ elemanının esnek komşuluğu denir.

Teorem 2.5.16. [65] $\left(\tilde{X},d,A\right)$ esnek metrik uzayında

1. Φ ve $\tilde{X}$ esnek kümeleri esnek açıktır.

2. Herhangi sayıda esnek açık kümenin elemanter birleşimi esnek açıktır.

Uyarı 2.5.17. [65] $SS\left(\mathfrak{B}_1\right) \Cap SS\left(\mathfrak{B}_2\right) \neq SS\left(\mathfrak{B}_1 \cap \mathfrak{B}_1\right)$ olduğundan herhangi iki esnek açık kümenin elemanter kesişimi esnek açık olmayabilir.

Örnek 2.5.18. [65] $X = \{x, y, z\}$ ve $A = \{\lambda, \mu\}$ olsun.

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1 &= \{(\lambda,x),(\mu,x)\}, & \tilde{x}_4 &= \{(\lambda,x),(\mu,y)\}, \\ \tilde{x}_2 &= \{(\lambda,y),(\mu,y)\}, & \tilde{x}_5 &= \{(\lambda,y),(\mu,z)\}, \\ \tilde{x}_3 &= \{(\lambda,z),(\mu,z)\}, & \tilde{x}_6 &= \{(\lambda,z),(\mu,x)\} \end{aligned}$$

olmak üzere $\mathcal{B}_1 = \{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3\}$ ve $\mathcal{B}_2 = \{\tilde{x}_1, \tilde{x}_4, \tilde{x}_5, \tilde{x}_6\}$ sınıfları verilsin. Bu durumda $SS(\mathcal{B}_1) = \tilde{X}$ ve $SS(\mathcal{B}_2) = \tilde{X}$ olup $SS(\mathcal{B}_1) \Cap SS(\mathcal{B}_1) = \tilde{X}$ elde edilir. Fakat $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \{\tilde{x}_1\}$ olup $SS(\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2) \neq \tilde{X}$ olur.

Önerme 2.5.19. [65] $(\tilde{X}, d, A)$ esnek metrik uzayı (EM5) şartını sağlasın. $(\tilde{X}, d, A)$ içindeki her $\lambda \in A$ ve $B(\tilde{a}, \tilde{r})$ açık yuvarı için $SS(B(\tilde{a}, \tilde{r}))(\lambda) = B(\tilde{a}(\lambda), \tilde{r}(\lambda))$, (X, d_λ) metrik uzayı içinde bir açık yuvardır.

Önerme 2.5.20. [65] $(\tilde{X}, d, A)$ esnek metrik uzayı (EM5) şartını sağlasın. F, $(\tilde{X}, d, A)$ içinde esnek açıktır ancak ve ancak her $\lambda \in A$ için $F(\lambda)$, (X, d_λ) metrik uzayı içinde açıktır.

Teorem 2.5.21. [65] $(\tilde{X}, d, A)$ esnek metrik uzayı (EM5) şartını sağlasın. $(\tilde{X}, d, A)$ içinde iki esnek açık kümenin elemanter kesişimi esnek açık küme olur.

Teorem 2.5.22. [65] $(\tilde{X}, d, A)$ esnek metrik uzayında

1. Φ ve $\tilde{X}$ esnek kümeleri esnek kapalıdır.

2. Herhangi sayıda esnek kapalı kümelenin elemanter kesişimi, esnek kapalıdır.

Teorem 2.5.23. [65] $(\tilde{X}, d, A)$ esnek metrik uzayı (EM5) şartını sağlasın ve $\{F_i : \mathrm{i} = 1, 2, \ldots \mathrm{n}\}$, $(\tilde{X}, d, A)$ içinde sonlu sayıda esnek kapalı kümelerin bir sınıfı olsun. $\bigcap_{i=1}^{n} F_i^c (\neq \Phi) \in S(\tilde{X})$ ise $\bigcup_{i=1}^{n} F_i$, $(\tilde{X}, d, A)$ içinde esnek kapalıdır.

2.6. Esnek Topolojik Uzaylar

Tanım 2.6.1. [45] $\tau \subseteq S_A(X)$ olmak üzere

1. $\Phi, \tilde{X} \in \tau$,

2. $\{F_i\}_{i\in I} \subset \tau$ için $\tilde{\bigcup_{i\in I}} F_i \in \tau$,

3. $\{F_i\}_{i=1}^{n} \subset \tau$ için $\tilde{\bigcap_{i=1}^{n}} F_i \in \tau$,

şartları sağlanırsa τ sınıfı X üzerinde bir esnek topoloji denir. (X,τ,A) üçlüsüne de esnek topolojik uzay denir.

Örnek 2.6.2. [45,48] (X,τ,A) bir esnek topolojik uzay olsun. Her $\lambda \in A$ için $\tau_\lambda = \{F(\lambda) : (F,A) \in \tau\}$ sınıfı X üzerinde bir topolojidir. Bu topoloji λ-parametre topolojisi olarak adlandırılır.

Tanım 2.6.3. [45] τ sınıfının elemanlarına esnek açık kümeler ve esnek tümleyenleri esnek açık olan esnek kümelere de esnek kapalı küme denir.

Tanım 2.6.4. [47] τ, X üzerinde A ile parametrelendirilen esnek kümelerin bir sınıfı ve her $\lambda \in A$ için $\tau_\lambda = \{F(\lambda) : F \in \tau\}$ olsun. Eğer τ_λ sınıfı her $\lambda \in A$ için X üzerinde bir topoloji ise τ sınıfına $\tilde{X}$ üzerinde esnek kümelerin bir topolojisi denir.

Teorem 2.6.5. [45] (X,τ,A) bir esnek topolojik uzay olmak üzere

1. Φ ve $\tilde{X}$ esnek kapalıdır.

2. X üzerindeki herhangi sayıda esnek kapalı kümenin esnek kesişimi esnek kapalıdır.

3. X üzerindeki herhangi iki esnek kapalı kümenin esnek birleşimi esnek kapalıdır.

BÖLÜM 3. ELEMANTER ESNEK TOPOLOJİK UZAYLAR

Bu bölümde esnek kümeler üzerine, esnek kümelerin elemanter birleşim ve elemanter kesişim işlemleri ile yeni bir esnek topolojik yapı kurulmuştur ve bu topolojiye elemanter esnek topoloji adı verilmiştir. Elemanter esnek topoloji tanımından önce esnek elemanların sınıfı üzerine klasik işlemlerle bir topolojik yapı kurulmuştur. Elemanter esnek topoloji, esnek eleman sınıfları üzerine kurulan topoloji ve literatürde bilinen esnek topolojiler ile karşılaştırılmış ve bazı örnekler verilmiştir. Aynı zamanda elemanter esnek topolojik uzaylarda esnek kapalı küme, esnek komşuluk, esnek iç elemanı, esnek kapanış elemanı, esnek yığılma elemanı, esnek baz ve esnek yerel baz gibi bazı temel kavramlar tanımlanmış ve bu kavramların birçok özelliği ispatlanmıştır.

3.1. Elemanter Esnek Topoloji

$X \neq \varnothing$ bir evrensel küme ve $A \neq \varnothing$ bir parametreler kümesi olmak üzere $\tilde{X}$ mutlak esnek küme olsun.

Tanım 3.1.1. $\mathfrak{T} \subset \mathcal{P}\left(SE\left(\tilde{X}\right)\right)$, esnek elemanların sınıflarının bir koleksiyonu olmak üzere

1. $\varnothing,\ SE\left(\tilde{X}\right) \in \mathfrak{T}$,

2. $\{\mathcal{B}_i\}_{i \in I} \subset \mathfrak{T}$ için $\bigcup_{i \in I} \mathcal{B}_i \in \mathfrak{T}$,

3. $\{\mathcal{B}_i\}_{i=1}^{n} \subset \mathfrak{T}$ için $\bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{B}_i \in \mathfrak{T}$

şartları sağlanırsa $\mathfrak{T}$ koleksiyonu $\tilde{X}$ üzerinde bir topolojidir. Bu topoloji esnek elemanların sınıflarının oluşturduğu topoloji (EES topoloji) olarak adlandırılır ve

$\left(\tilde{X},\mathfrak{T},A\right)$ üçlüsüne de EES topolojik uzay adı verilir. $\mathfrak{T}$ koleksiyonunun her bir elemanına açık sınıf ve tümleyeni açık sınıf olan bir sınıfa da kapalı sınıf denir.

Örnek 3.1.2. $\left(\tilde{X},\mathfrak{T},A\right)$, EES topolojik uzay olsun. Her $\lambda \in A$ için

$$\mathfrak{T}_\lambda = \left\{\mathfrak{B}_\lambda \subset X : \tilde{x}\left(\lambda\right) \in \mathfrak{B}_\lambda, \forall \tilde{x} \in \mathfrak{B} \in \mathfrak{T}\right\}$$

sınıfı X üzerinde bir topolojidir.

Örnek 3.1.3. $\left(\tilde{X},d,A\right)$ esnek metrik uzayında $\tilde{a} \tilde{\in} \tilde{X}$ merkezli tüm açık yuvarların sınıfı

$$\beta = \left\{B\left(\tilde{a},\tilde{r}\right) : \tilde{a} \tilde{\in} \tilde{X}, \tilde{r} \tilde{>} \overline{0}\right\}$$

$\tilde{X}$ üzerinde bir EES topoloji için bir bazdır. Bu bazın ürettiği topolojiye, yani d esnek metriği tarafından üretilen EES topolojiye $\tilde{X}$ üzerinde metrik EES topoloji denir. Böylece her esnek metrik uzay aynı zamanda bir EES topolojik uzaydır.

Tezin bundan sonraki kısımlarında elemanter işlemler yardımı ile $\tilde{X}$ üzerine bir topoloji kurulmuş ve bu topolojik uzayda temel kavramlar incelenmiştir.

Tanım 3.1.4. $\mathcal{T} \subset S\left(\tilde{X}\right)$ olmak üzere

1. $\Phi, \tilde{X} \in \mathcal{T}$,

2. $\left\{U_i\right\}_{i\in I} \subset \mathcal{T}$ için $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}$,

3. $\left\{U_i\right\}_{i=1}^{n} \subset \mathcal{T}$ için $\bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \mathcal{T}$

şartları sağlanırsa $\mathcal{T}$ sınıfı $\tilde{X}$ üzerinde bir esnek topolojidir. Bu topolojiye elemanter esnek topoloji ve $\left(\tilde{X},\mathcal{T},A\right)$ üçlüsüne de elemanter esnek topolojik uzay adı verilir.

Tanım 3.1.5. $\mathcal{T}_1$ ve $\mathcal{T}_2$, $\tilde{X}$ üzerinde iki elemanter esnek topolojik uzay olsun. $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$ ise $\mathcal{T}_1$ topolojisi $\mathcal{T}_2$ topolojisinden daha kaba ya da $\mathcal{T}_2$ topolojisi $\mathcal{T}_1$ topolojisinden daha ince yapıya sahiptir denir.

Örnek 3.1.6. $\mathcal{T} = \left\{\Phi, \tilde{X}\right\}$ sınıfı $\tilde{X}$ üzerinde bir elemanter esnek topolojidir. Bu topolojiye en kaba elemanter esnek topoloji denir.

Örnek 3.1.7. $\mathcal{T} = S\left(\tilde{X}\right)$ sınıfı $\tilde{X}$ üzerinde bir elemanter esnek topolojidir. Bu topolojiye en ince elemanter esnek topoloji denir.

Örnek 3.1.8. Her esnek metrik uzay bir elemanter esnek topolojik uzay değildir. Çünkü esnek metrik uzayda iki esnek açık kümenin elemanter kesişimi esnek açık olmayabilir (Uyarı 2.5.17.'e bakınız). Fakat, (EM5) şartını sağlayan $\left(\tilde{X}, d, A\right)$ esnek metrik uzayında tüm esnek açık kümelerin sınıfı Teorem 2.5.16. ve 2.5.21.'den esnek kümelerin elemanter birleşim ve elemanter kesişim işlemlerine göre bir topoloji olur. Bu topolojiye elemanter esnek metrik topoloji denir.

Örnek 3.1.9. $X = \{x, y, z\}$ ve $A = \{\lambda, \mu\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} F_1 &= \left\{\left(\lambda, \{x, y\}\right), \left(\mu, \{x, z\}\right)\right\}, \\ F_2 &= \left\{\left(\lambda, \{z\}\right), \left(\mu, \{y\}\right)\right\}, \\ F_3 &= \left\{\left(\lambda, \{z\}\right), \left(\mu, \{y, z\}\right)\right\} \end{aligned}$$

esnek kümeler olsun. Bu durumda $\mathcal{T}_1 = \left\{\Phi, \tilde{X}, F_1, F_2\right\}$ sınıfı $\tilde{X}$ üzerinde hem bir elemanter esnek topoloji hem de Tanım 2.6.1. ve 2.6.4.'e göre bir esnek topolojidir. $\mathcal{T}_2 = \left\{\Phi, \tilde{X}, F_2, F_3\right\}$ sınıfı $\tilde{X}$ üzerinde ne bir elemanter esnek topoloji ne de bir esnek topolojidir. $\mathcal{T}_3 = \left\{\Phi, \tilde{X}, F_1, F_3\right\}$ sınıfı $\tilde{X}$ üzerinde bir elemanter esnek topolojidir. Ancak, $\tilde{X}$ üzerinde Tanım 2.6.1. ve 2.6.4.'e göre bir esnek topoloji değildir.

Gerçekten, $F_1 \tilde{\cap} F_3 = \{(\mu, \{z\})\} \notin \mathcal{T}_3$ olur ve $\tau_\mu = \{\varnothing, X, \{x,z\}, \{y,z\}\}$ sınıfı X üzerinde bir topoloji değildir. Son olarak $\mathcal{T}_4 = \{\Phi, \tilde{X}, F_1, F_2, F_3\}$ sınıfı $\tilde{X}$ üzerinde bir elemanter esnek topoloji ve Tanım 2.6.1.'e göre bir esnek topoloji olmasına rağmen Tanım 2.6.4.'e göre bir esnek topoloji değildir.

Uyarı 3.1.10. En az iki elemanlı bir X kümesi üzerinde kurulan elemanter esnek topolojinin bu küme üzerinde kurulan esnek topoloji olması gerekmez. Örneğin; Örnek 3.1.9.'daki $\mathcal{T}_1$ sınıfı $\tilde{X}$ üzerinde hem elemanter esnek topoloji hem de esnek topolojidir. Fakat, $\mathcal{T}_3$ sınıfı $\tilde{X}$ üzerinde elemanter esnek topoloji olmasına rağmen bir esnek topoloji değildir. Yine Örnek 3.1.7.'deki $S(\tilde{X})$ sınıfı $\tilde{X}$ üzerinde en ince elemanter esnek topoloji olduğu halde bir esnek topoloji değildir. Örnek 3.1.6.'daki en kaba sınıf $\tilde{X}$ üzerinde hem elemanter esnek topoloji hem de esnek topolojidir.

Aşağıdaki önermeler ve teoremler, elemanter esnek topoloji ile diğer topolojiler arasındaki ilişkileri verir.

Önerme 3.1.11. $(\tilde{X}, \mathcal{T}, A)$ bir elemanter esnek topolojik uzay olsun. Eğer boştan farklı her $U, V \in \mathcal{T}$ esnek kümeleri için $U \Cap V \neq \Phi$ ise $\mathcal{T}$ sınıfı aynı zamanda $\tilde{X}$ üzerinde bir esnek topolojidir.

İspat. Önerme 2.3.2.'den $\Cup_{i\in I} U_i = \tilde{\bigcup}_{i\in I} U_i$ ve $\Cap_{i=1}^{n} U_i \neq \Phi$ için $\Cap_{i=1}^{n} U_i = \tilde{\bigcap}_{i=1}^{n} U_i$ olduğundan ispat açıktır.

Teorem 3.1.12. $(\tilde{X}, \tau, A)$, Tanım 2.6.4.'e göre bir esnek topolojik uzay olsun. Bu durumda $\mathcal{T} = \{U \in S(\tilde{X}) : U(\lambda) \in \tau_\lambda, \forall \lambda \in A\}$ sınıfı $\tilde{X}$ üzerinde bir elemanter esnek topolojidir.

İspat: 1. $\Phi, \tilde{X} \in \tau$ olduğundan $\Phi, \tilde{X} \in \mathcal{T}$ olduğu kolayca görülür.

2. $\{U_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{T}$ olsun. $\underset{i\in I}{\Cup} U_i = \widetilde{\bigcup_{i\in I}} U_i$ olduğundan $\underset{i\in I}{\Cup} U_i \in \mathcal{T}$ olduğu açıktır.

3. $U,V \in \mathcal{T}$ olsun. Eğer $U \Cap V = \Phi$ ise $U \Cap V \in \mathcal{T}$ olduğu açıktır. Eğer $U \Cap V \neq \Phi$ ise $U \Cap V = U \tilde{\cap} V$ olur. Buradan, Örnek 2.6.2. yardımıyla $U \Cap V(\lambda) = (U \tilde{\cap} V)(\lambda) = U(\lambda) \cap V(\lambda) \in \tau_\lambda$ olur. Böylece $U \Cap V \in \mathcal{T}$ elde edilir.

Bu durumda $\mathcal{T}$ sınıfı $\tilde{X}$ üzerinde bir elemanter esnek topoloji olur.

Teorem 3.1.13. $(\tilde{X}, \mathfrak{T}, A)$ bir EES topolojik uzay olsun. Bu durumda $\mathcal{T} = \{U \in S(\tilde{X}) : SE(U) \in \mathfrak{T}\}$ sınıfı $\tilde{X}$ üzerinde bir elemanter esnek topolojidir.

İspat: 1. $\emptyset, SE(\tilde{X}) \in \mathfrak{T}$ olduğundan $SS(\emptyset) = \Phi$ ve $SS(SE(\tilde{X})) = \tilde{X}$ olur. Buradan $\Phi, \tilde{X} \in \mathcal{T}$ elde edilir.

2. $\{U_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{T}$ olsun. $\underset{i\in I}{\Cup} U_i = SS\left(\bigcup_{i\in I} SE(U_i)\right)$ olur. $\mathfrak{T}$ bir topoloji olduğundan $\bigcup_{i\in I} SE(U_i) \in \mathfrak{T}$ olur. Böylece $\underset{i\in I}{\Cup} U_i \in \mathcal{T}$ elde edilir.

3. $U,V \in \mathcal{T}$ olsun. $U \Cap V = SS(SE(U) \cap SE(V))$ olur. $\mathfrak{T}$ bir topoloji olduğundan $SE(U) \cap SE(V) \in \mathfrak{T}$ olur. Böylece $U \Cap V \in \mathcal{T}$ elde edilir.

Bu durumda $\mathcal{T}$ sınıfı $\tilde{X}$ üzerinde bir elemanter esnek topoloji olur.

Önerme 3.1.14. $(\tilde{X}, \mathcal{T}, A)$ bir elemanter esnek topolojik uzay olsun. Eğer $U,V \in \mathcal{T}$ için $U \tilde{\cap} V \in S(\tilde{X})$ ise her $\lambda \in A$ için $\mathcal{T}_\lambda = \{U(\lambda) : U \in \mathcal{T}\}$ sınıfı X üzerinde bir topolojidir.

İspat: $U,V \in \mathcal{T}$ için $U \tilde{\cap} V \in S(\tilde{X})$ ise $U \tilde{\cap} V = U \Cap V$ olur. Bu durumda $\mathcal{T}$ esnek topoloji olur. Dolayısıyla Örnek 2.6.2.'den her $\lambda \in A$ için $\mathcal{T}_\lambda = \{U(\lambda) : U \in \mathcal{T}\}$ sınıfı X üzerinde bir topoloji olur.

Tanım 3.1.15. $(\tilde{X}, \mathcal{T}, A)$ bir elemanter esnek topolojik uzay olmak üzere $\mathcal{T}$ sınıfının her bir üyesine esnek açık küme denir.

Bir $K \in S(\tilde{X})$ esnek kümesi verildiğinde $K^C \in S(\tilde{X})$ ve $K^{\mathbb{C}} \in \mathcal{T}$ ise K esnek kümesine esnek kapalı küme denir.

Önerme 3.1.16. $(\tilde{X}, \mathcal{T}, A)$ bir elemanter esnek topolojik uzay olsun.

1. Φ ve $\tilde{X}$ esnek kapalıdır.

2. $\{K_i : i \in I\}$, $(\tilde{X}, \mathcal{T}, A)$ uzayında esnek kapalı kümelerin bir sınıfı olsun. Bu durumda $K = \Cap \{K_i : i \in I\}$ esnek kapalıdır.

3. $K_1^{\mathbb{C}} \Cap K_2^{\mathbb{C}} \neq \Phi$ olacak şekilde K_1 ve K_2, $(\tilde{X}, \mathcal{T}, A)$ uzayında iki esnek kapalı küme olsun. Bu durumda $K_1 \Cup K_2$ esnek kapalıdır.

İspat: **1.** $\Phi^C = \tilde{X} \in S(\tilde{X})$ ve $\Phi^{\mathbb{C}} = \tilde{X} \in \mathcal{T}$ olduğundan Φ esnek kapalıdır. Benzer şekilde $\tilde{X}$ da esnek kapalıdır.

2. Her $i \in I$ için $K_i = \Phi$ ya da bazı $j \in I$ indisleri için $K_j = \Phi$ ise K kümesinin esnek kapalı olduğu görülür. Her $i \in I$ için $K_i \neq \Phi$ ve $K = \Phi$ ise yine K kümesinin esnek kapalı olduğu görülür. Eğer $K \neq \Phi$ ise $K^C \in S(\tilde{X})$ olur ve Önerme 2.3.12.'den $K^{\mathbb{C}} = (\Cap \{K_i : i \in I\})^{\mathbb{C}} = \Cup \{K_i^{\mathbb{C}} : i \in I\}$ elde edilir. Buradan, her $i \in I$ için $K_i^{\mathbb{C}} \in \mathcal{T}$ olduğundan $K^{\mathbb{C}} \in \mathcal{T}$ olur. Dolayısıyla K esnek kapalıdır.

3. K_1 ve K_2 esnek kümelerinden biri ya da her ikisi Φ ise $K_1 \Cup K_2$ kümesinin esnek kapalı olduğu açıktır. $K_1 \neq \Phi$ ve $K_2 \neq \Phi$ olsun. K_1 ve K_2 esnek kapalı olduğundan $K_1^C, K_2^C \in S(\tilde{X})$ ve $K_1^{\mathbb{C}}, K_2^{\mathbb{C}} \in \mathcal{T}$ olur. $K_1^{\mathbb{C}} \Cap K_2^{\mathbb{C}} \neq \Phi$ ise $K_1^C, K_2^C \in S(\tilde{X})$ olduğundan $(K_1 \Cup K_2)^C \in S(\tilde{X})$ olur ve Önerme 2.3.12.'den $(K_1 \Cup K_2)^{\mathbb{C}} = K_1^{\mathbb{C}} \Cap K_2^{\mathbb{C}}$ elde edilir. Buradan $K_1^{\mathbb{C}}, K_2^{\mathbb{C}} \in \mathcal{T}$ olduğundan $(K_1 \Cup K_2)^{\mathbb{C}} = K_1^{\mathbb{C}} \Cap K_2^{\mathbb{C}} \in \mathcal{T}$ olur. Dolayısıyla $K_1 \Cup K_2$ esnek kapalıdır.

Örnek 3.1.17. Örnek 3.1.9.'da verilen $\mathcal{T}_3 = \{\Phi, \tilde{X}, F_1, F_3\}$ elemanter esnek topolojisine göre esnek kapalı kümelerin sınıfı,

$$K_1 = \{(\lambda, \{z\}), (\mu, \{y\})\} \text{ ve } K_3 = \{(\lambda, \{x, y\}), (\mu, \{x\})\}$$

olmak üzere $\mathcal{K} = \{\Phi, \tilde{X}, K_1, K_3\}$ olur.

Ayrıca Örnek 3.1.9.'da verilen X evrensel kümesi ile A parametreler kümesi üzerinde

$$F_4 = \{(\lambda, \{x, y\}), (\mu, X)\} \text{ ve } F_5 = \{(\lambda, X), (\mu, \{y, z\})\}$$

esnek kümeleri verilsin. Bu durumda $\mathcal{T}_3' = \{\Phi, \tilde{X}, F_1, F_3, F_4, F_5\}$ $\tilde{X}$ üzerinde bir elemanter esnek topoloji olup $\mathcal{T}_3'$ topolojisine göre esnek kapalı kümelerin sınıfı yine $\mathcal{K} = \{\Phi, \tilde{X}, K_1, K_3\}$ olur.

Dikkat edilirse K_1 ve K_2 iki esnek kapalı küme olduğu halde $K_1 \Cup K_2 = \{(\lambda, X), (\mu, \{x, y\})\}$ esnek kapalı değildir. Çünkü $K_1^{\mathbb{C}} \Cap K_2^{\mathbb{C}} = \Phi$ olur.

3.2. Esnek Kümenin İçi, Dışı, Sınırı, Kapanışı ve Yığılma Elemanlarının Kümesi

Tanım 3.2.1. $(\tilde{X},\mathcal{T},A)$ bir elemanter esnek topolojik uzay ve $\tilde{x}\tilde{\in}\tilde{X}$ olsun. Bir $N\in S(\tilde{X})$ esnek kümesi için $\tilde{x}\tilde{\in}U\tilde{\subseteq}N$ olacak şekilde $U\in\mathcal{T}$ esnek açık kümesi varsa N esnek kümesine $\tilde{x}$ esnek elemanının esnek komşuluğu denir. $\tilde{x}$ esnek elemanının tüm esnek komşuluklarının sınıfı $N_{\mathcal{T}}(\tilde{x})$ veya $\mathcal{T}$ anlaşılıyor ise $N(\tilde{x})$ ile gösterilir.

Tanım 3.2.2. $(\tilde{X},\mathcal{T},A)$ elemanter esnek topolojik uzay olmak üzere $F,N\in S(\tilde{X})$ esnek kümeleri için $F\tilde{\subset}U\tilde{\subset}N$ olacak şekilde $N\in\mathcal{T}$ esnek açık kümesi varsa N esnek kümesine F esnek kümesinin esnek komşuluğu denir.

Teorem 3.2.3. $(\tilde{X},\mathcal{T},A)$ bir elemanter esnek topolojik uzay ve $\tilde{x}\tilde{\in}\tilde{X}$ olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanır.

1. Her $N\in N_{\mathcal{T}}(\tilde{x})$ için $\tilde{x}\in N$ olur,

2. $N,N'\in N_{\mathcal{T}}(\tilde{x})$ için $N\Cap N'\in N_{\mathcal{T}}(\tilde{x})$ olur,

3. $N\in N_{\mathcal{T}}(\tilde{x})$ ve $N\tilde{\subset}N'$ ise $N'\in N_{\mathcal{T}}(\tilde{x})$ olur,

4. Her $N\in N_{\mathcal{T}}(\tilde{x})$ için $N'\in N_{\mathcal{T}}(\tilde{x})$ vardır öyle ki her $\tilde{y}\in N'$ için $N\in N_{\mathcal{T}}(\tilde{y})$ olur.

İspat: Yalnızca 2. özellik ispatlanmıştır.
$N,N'\in N_{\mathcal{T}}(\tilde{x})$ ise $\tilde{x}\tilde{\in}U\tilde{\subseteq}N$ ve $\tilde{x}\tilde{\in}U'\tilde{\subseteq}N'$ olacak şekilde $U\in\mathcal{T}$ ve $U'\in\mathcal{T}$ esnek açık kümeleri vardır. Buradan $\tilde{x}\in SE(U)\subseteq SE(N)$ ve $\tilde{x}\in SE(U')\subseteq SE(N')$ olur. $\tilde{x}\in SE(U)\cap SE(U')\subseteq SE(N)\cap SE(N')$ olduğundan

$$\tilde{x}\tilde{\in}SS\big(SE(U)\cap SE(U')\big)\tilde{\subseteq}SS\big(SE(N)\cap SE(N')\big)$$

yani $\tilde{x}\tilde{\in}U\Cap U'\tilde{\subseteq}N\Cap N'$ olur. Dolayısıyla $N\Cap N'\in N_{\mathcal{T}}(\tilde{x})$ elde edilir.

Tanım 3.2.4. $\left(\tilde{X},\mathcal{T},A\right)$ bir elemanter esnek topolojik uzay ve $F\in S\left(\tilde{X}\right)$ olsun. Bir $\tilde{x}\tilde{\in}F$ için $\tilde{x}\tilde{\in}U\tilde{\subset}F$ olacak şekilde bir $U\in\mathcal{T}$ var ise $\tilde{x}$ elemanına F kümesinin bir esnek iç elemanı denir. F kümesinin tüm esnek iç elemanlarının sınıfı $intF$ ile gösterilir. F kümesinin tüm esnek iç elemanlarının sınıfının ürettiği esnek kümeye de F kümesinin esnek içi denir ve $F^{\circ}=SS\left(intF\right)$ ile gösterilir.

Teorem 3.2.5. $\left(\tilde{X},\mathcal{T},A\right)$ bir elemanter esnek topolojik uzay ve $F\in S\left(\tilde{X}\right)$ olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanır.

1. F°, F kümesinin esnek açık alt kümelerinin elemanter birleşimine eşittir,

2. F°, F kümesinin en büyük esnek açık alt kümesidir,

3. F esnek açıktır $\Leftrightarrow$ $F^{\circ}=F$.

İspat: Yalnızca 1. özellik ispatlanmıştır.
F kümesinin esnek açık alt kümelerinin elemanter birleşimi $G=\Cup\left\{U\in S\left(\tilde{X}\right):U\tilde{\subset}F \text{ ve } U\in\mathcal{T}\right\}$ olsun. $F^{\circ}=G$ olduğunu göstermeliyiz. $\tilde{x}\in intF$ olsun. Buradan $\tilde{x}\tilde{\in}U\tilde{\subset}F$ olacak şekilde $U\in\mathcal{T}$ vardır. Bu durumda $U\tilde{\subset}G$ ve $\tilde{x}\in SE\left(G\right)$ olur. Böylece $intF\subset SE\left(G\right)$ elde edilir. Dolayısıyla $SS\left(intF\right)\tilde{\subset}SS\left(SE\left(G\right)\right)$ yani $F^{\circ}\tilde{\subset}G$ olur.

Tersine, $\tilde{x}\tilde{\in}G$ olsun. Buradan $\tilde{x}\in SE\left(G\right)$ olur ve $\tilde{x}\tilde{\in}U\tilde{\subset}F$ olacak şekilde $U\in\mathcal{T}$ vardır. Bu durumda $\tilde{x}\in intF$ olur. Böylece $SE\left(G\right)\subset intF$ elde edilir. Dolayısıyla $SS\left(SE\left(G\right)\right)\tilde{\subset}SS\left(intF\right)$ yani $G\tilde{\subset}F^{\circ}$ olur.

Böylece $F^{\circ}=G$ olur ve ispat tamamlanır.

Teorem 3.2.6. $\left(\tilde{X},\mathcal{T},A\right)$ bir elemanter esnek topolojik uzay ve $F,G\in S\left(\tilde{X}\right)$ olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanır.

1. $\tilde{X}^{\circ}=\tilde{X}$ ve $\Phi^{\circ}=\Phi$,

2. $F \tilde{\subseteq} G$ ise $F^{\circ} \tilde{\subseteq} G^{\circ}$,

3. $\left(F^{\circ}\right)^{\circ} = F^{\circ}$,

4. $F^{\circ} \Cap G^{\circ} = \left(F \Cap G\right)^{\circ}$,

5. $F^{\circ} \Cup G^{\circ} \tilde{\subseteq} \left(F \Cup G\right)^{\circ}$.

İspat: Yalnızca 4. özellik ispatlanmıştır.

$F \Cap G \tilde{\subseteq} F$ ve $F \Cap G \tilde{\subseteq} G$ olduğundan 2. özellikten $\left(F \Cap G\right)^{\circ} \tilde{\subseteq} F^{\circ}$ ve $\left(F \Cap G\right)^{\circ} \tilde{\subseteq} G^{\circ}$ olur. Böylece $\left(F \Cap G\right)^{\circ} \tilde{\subseteq} F^{\circ} \Cap G^{\circ}$ elde edilir.

Diğer taraftan, $F^{\circ} \tilde{\subseteq} F$ ve $G^{\circ} \tilde{\subseteq} G$ olduğundan $F^{\circ} \Cap G^{\circ} \tilde{\subseteq} F \Cap G$ olur. Ayrıca $\left(F \Cap G\right)^{\circ}$, $F \Cap G$ kümesinin en büyük esnek açık alt kümesidir. Böylece $F^{\circ} \Cap G^{\circ} \tilde{\subseteq} \left(F \Cap G\right)^{\circ}$ elde edilir.

Dolayısıyla $F^{\circ} \Cap G^{\circ} = \left(F \Cap G\right)^{\circ}$ olur ve ispat tamamlanır.

Tanım 3.2.7. $\left(\tilde{X}, \mathcal{T}, A\right)$ elemanter esnek topolojik uzay ve $F \in S\left(\tilde{X}\right)$ olsun. $F^{\mathbb{C}}$ kümesinin bir esnek iç elemanına F kümesinin bir esnek dış elemanı denir. F kümesinin tüm esnek dış elemanlarının sınıfı $extF$ ile gösterilir. F kümesinin tüm esnek dış elemanlarının sınıfının ürettiği esnek kümeye de F kümesinin esnek dışı denir ve F^{e} ile gösterilir.

Tanım 3.2.8. $\left(\tilde{X}, \mathcal{T}, A\right)$ bir elemanter esnek topolojik uzay, $F \in S\left(\tilde{X}\right)$ ve $\tilde{x} \tilde{\in} \tilde{X}$ olsun. Eğer her bir $N \in N_{\mathcal{T}}\left(\tilde{x}\right)$ için $F \Cap N \neq \Phi$ ise $\tilde{x}$ elemanına F kümesinin esnek kapanış elemanı denir. F kümesinin tüm esnek kapanış elemanlarının sınıfı clF ile gösterilir. F kümesinin tüm esnek kapanış elemanlarının sınıfının ürettiği esnek kümeye de F kümesinin esnek kapanışı denir ve $\overline{F} = SS\left(clF\right)$ ile gösterilir.

Eğer $F \Cap N = \Phi$ ve $F \tilde{\cap} N \in S\left(\tilde{X}\right)$ olacak şekilde en az bir $N \in N_{\mathcal{T}}\left(\tilde{x}\right)$ var ise $\tilde{x} \tilde{\in} \tilde{X}$, F kümesinin bir esnek kapanış elemanı değildir.

Teorem 3.2.9. $\left(\tilde{X}, \mathcal{T}, A\right)$ bir elemanter esnek topolojik uzay ve $F \in S\left(\tilde{X}\right)$ olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanır.

1. $\bar{F}$, F kümesini kapsayan esnek kapalı kümelerin elemanter kesişimine eşittir.

2. $\bar{F}$, F kümesini kapsayan en küçük esnek kapalı kümedir.

3. F esnek kapalıdır $\Leftrightarrow$ $\bar{F} = F$.

İspat: Yalnızca 1. özellik ispatlanmıştır.

F kümesini kapsayan esnek kapalı kümelerin elemanter kesişimi $G = \Cap \left\{K \in S\left(\tilde{X}\right) : F \tilde{\subset} K \text{ ve } K \text{ esnek kapalı}\right\}$ olsun. $\bar{F} = G$ olduğunu göstermeliyiz.

$\tilde{x} \tilde{\in} G$ olsun. Kabul edelim ki $\tilde{x} \tilde{\notin} \bar{F}$ olsun. Buradan $F \Cap N = \Phi$ ve $F \tilde{\cap} N \in S\left(\tilde{X}\right)$ olacak şekilde en az bir $N \in N_{\mathcal{T}}\left(\tilde{x}\right)$ vardır. Ayrıca, $N \in N_{\mathcal{T}}\left(\tilde{x}\right)$ olduğundan $\tilde{x} \tilde{\in} U \tilde{\subset} N$ olacak şekilde $U \in \mathcal{T}$ vardır. Böylece $F \Cap U = \Phi$ ve $F \tilde{\cap} U \in S\left(\tilde{X}\right)$ olur. Buradan $U^C \in S\left(\tilde{X}\right)$ olur ve Önerme 2.3.5.'den $F \tilde{\subset} U^{\mathbb{C}}$ elde edilir. Dolayısıyla $U^{\mathbb{C}} = U^C$ olur ve bu ise $\left(U^{\mathbb{C}}\right)^{\mathbb{C}} = U \in \mathcal{T}$ yani $U^{\mathbb{C}}$ kümesinin esnek kapalı olmasını gerektirir. Fakat $\tilde{x} \tilde{\notin} U^{\mathbb{C}}$ olur ve bu ise $\tilde{x} \tilde{\in} G$ olması ile çelişir. Bu durumda $\tilde{x} \tilde{\in} \bar{F}$ olur ve $G \tilde{\subset} \bar{F}$ elde edilir.

Tersine, $\tilde{x} \in clF$ olsun. Buradan $\tilde{x} \tilde{\in} \bar{F}$ olur. Kabul edelim ki $\tilde{x} \tilde{\notin} G$ olsun. Bu durumda $F \tilde{\subset} K$ olacak şekilde K esnek kapalı kümesi vardır ve $\tilde{x} \tilde{\notin} K$ olur. $\tilde{x} \tilde{\in} K^{\mathbb{C}}$ ve $K^{\mathbb{C}} \in \mathcal{T}$ olduğundan $K^{\mathbb{C}} \in N_{\mathcal{T}}\left(\tilde{x}\right)$ olur. Ayrıca, $F \tilde{\subset} K$ olduğundan $F \Cap K^{\mathbb{C}} = \Phi$ ve $F \tilde{\cap} K^{\mathbb{C}} \left(= \Phi\right) \in S\left(\tilde{X}\right)$ olur. Böylece $\tilde{x}$, F kümesinin bir esnek kapanış elemanı değildir. Bu ise $\tilde{x} \in clF$ olması ile çelişir. Dolayısıyla $\tilde{x} \tilde{\in} G$ olur ve $\bar{F} \tilde{\subset} G$ elde edilir.

Dolayısıyla $\bar{F} = G$ olur ve ispat tamamlanır.

Teorem 3.2.10. $(\tilde{X},\mathcal{T},A)$ bir elemanter esnek topolojik uzay ve $F,G\in S(\tilde{X})$ olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanır.

1. $\overline{\tilde{X}}=\tilde{X}$ ve $\overline{\Phi}=\Phi$,

2. $F\tilde{\subseteq}G$ ise $\overline{F}\tilde{\subseteq}\overline{G}$,

3. $\overline{(\overline{F})}=\overline{F}$,

4. $\overline{F}^{\mathbb{C}}\Cap\overline{G}^{\mathbb{C}}\neq\Phi$ ise $\overline{F}\Cup\overline{G}=\overline{(F\Cup G)}$,

5. $\overline{(F\Cap G)}\tilde{\subseteq}\overline{F}\Cap\overline{G}$.

İspat: Yalnızca 4. özellik ispatlanmıştır.

$F\tilde{\subseteq}F\Cup G$ ve $G\tilde{\subseteq}F\Cup G$ olduğundan 2. özellikten $\overline{F}\tilde{\subseteq}\overline{(F\Cup G)}$ ve $\overline{G}\tilde{\subseteq}\overline{(F\Cup G)}$ olur. Böylece $\overline{F}\Cup\overline{G}\tilde{\subseteq}\overline{(F\Cup G)}$ elde edilir.

Diğer taraftan, $F\tilde{\subseteq}\overline{F}$ ve $G\tilde{\subseteq}\overline{G}$ olduğundan $F\Cup G\tilde{\subseteq}\overline{F}\Cup\overline{G}$ olur. $\overline{F}^{\mathbb{C}}\Cap\overline{G}^{\mathbb{C}}\neq\Phi$ ise Önerme 3.1.16.'dan $\overline{F}\Cup\overline{G}$ esnek kapalıdır. Ayrıca, $F\Cup G$ kümesini kapsayan en küçük esnek kapalı küme $\overline{(F\Cup G)}$ olur. Bu durumda $\overline{(F\Cup G)}\tilde{\subseteq}\overline{F}\Cup\overline{G}$ elde edilir.

Böylece $\overline{F}\Cup\overline{G}=\overline{(F\Cup G)}$ olur ve ispat tamamlanır.

Önerme 3.2.11. $(\tilde{X},\mathcal{T},A)$ elemanter esnek topolojik uzay ve $F\in S(\tilde{X})$ olmak üzere $(\overline{F})^{\mathbb{C}}=(F^{\mathbb{C}})^{\circ}$ olur.

İspat. $\tilde{x}\tilde{\in}(\overline{F})^{\mathbb{C}}$ olsun. $\tilde{x}\tilde{\notin}\overline{F}$, yani $\tilde{x}\notin clF$ olur. Bu durumda $F\Cap N=\Phi$ ve $F\tilde{\cap}N\in S(\tilde{X})$ olacak şekilde bir $N\in N_{\mathcal{T}}(\tilde{x})$ vardır. Buradan Önerme 2.3.5. yardımıyla $\tilde{x}\tilde{\in}N\tilde{\subseteq}F^{\mathbb{C}}$ olur. Dolayısıyla $\tilde{x}\in intF^{\mathbb{C}}$ ve bunun sonucunda $\tilde{x}\tilde{\in}(F^{\mathbb{C}})^{\circ}$ olur. Böylece $(\overline{F})^{\mathbb{C}}\tilde{\subseteq}(F^{\mathbb{C}})^{\circ}$ elde edilir.

$\tilde{x} \tilde{\in} \left(F^{\mathbb{C}}\right)^{\circ}$ olsun. $\left(F^{\mathbb{C}}\right)^{\circ} \in N_{\mathcal{T}}\left(\tilde{x}\right)$ olur. $\left(F^{\mathbb{C}}\right)^{\circ} \Cap F = \Phi$ ve her durumda $\left(F^{\mathbb{C}}\right)^{\circ} \tilde{\cap} F = \Phi$ olup $\left(F^{\mathbb{C}}\right)^{\circ} \tilde{\cap} F \in S\left(\tilde{X}\right)$ olur. Dolayısıyla $\tilde{x} \notin clF$ ve bunun sonucunda $\tilde{x} \tilde{\notin} \overline{F}$ yazılır. Bu durumda $\tilde{x} \tilde{\in} \left(\overline{F}\right)^{\mathbb{C}}$ olur. Böylece $\left(F^{\mathbb{C}}\right)^{\circ} \tilde{\subset} \left(\overline{F}\right)^{\mathbb{C}}$ elde edilir.

Dolayısıyla $\left(\overline{F}\right)^{\mathbb{C}} = \left(F^{\mathbb{C}}\right)^{\circ}$ olur ve ispat tamamlanır.

Önerme 3.2.12. $\left(\tilde{X}, \mathcal{T}, A\right)$ elemanter esnek topolojik uzay ve $F, F^{C} \in S\left(\tilde{X}\right)$ olmak üzere $\left(F^{\circ}\right)^{\mathbb{C}} = \overline{\left(F^{\mathbb{C}}\right)}$ olur.

İspat. $F^{\mathbb{C}} = G$ olsun. Önerme 3.2.11.'den $\left(G^{\mathbb{C}}\right)^{\circ} = \left(\overline{G}\right)^{\mathbb{C}}$ elde edilir. Buradan $F^{C} \in S\left(\tilde{X}\right)$ olduğundan $\left(G^{\mathbb{C}}\right)^{\circ} = \left(\left(F^{\mathbb{C}}\right)^{\mathbb{C}}\right)^{\circ} = F^{\circ}$ olur. Bu durumda $\left(\overline{G}\right)^{\mathbb{C}} = F^{\circ}$ ve bunun sonucunda $\overline{G} = \left(F^{\circ}\right)^{\mathbb{C}}$ yazılır. Dolayısıyla $\left(F^{\circ}\right)^{\mathbb{C}} = \overline{\left(F^{\mathbb{C}}\right)}$ elde edilir.

Tanım 3.2.13. $\left(\tilde{X}, \mathcal{T}, A\right)$ elemanter esnek topolojik uzay, $F \in S\left(\tilde{X}\right)$ve $\tilde{x} \tilde{\in} \tilde{X}$ olsun. Eğer $\tilde{x} \notin intF$ ve $\tilde{x} \notin extF$ ise $\tilde{x}$ elemanına F kümesinin esnek sınır elemanı denir. F kümesinin esnek sınır elemanlarının sınıfı bdF ile gösterilir. F kümesinin esnek sınır elemanlarının sınıfının ürettiği esnek kümeye de F kümesinin esnek sınırı denir ve $\partial F = SS\left(bdF\right)$ ile gösterilir. $\tilde{x} \tilde{\in} \partial F$ iken $\tilde{x} \tilde{\notin} F^{\circ}$ ve $\tilde{x} \tilde{\notin} F^{e}$ olduğuna dikkat edilmelidir.

Önerme 3.2.14. $\left(\tilde{X}, \mathcal{T}, A\right)$ elemanter esnek topolojik uzay, $F, F^{C} \in S\left(\tilde{X}\right)$ olmak üzere $\partial F = \overline{F} \Cap \overline{\left(F^{\mathbb{C}}\right)} = \overline{F} \setminus F^{\circ}$ olur.

İspat. $F^{C} \in S\left(\tilde{X}\right)$ olduğu ve Önerme 3.2.11. ve 3.2.12. göz önünde bulundurulursa

$$
\begin{aligned}
bdF &= \left\{ \tilde{x} \mathrel{\tilde{\in}} \tilde{X} : \tilde{x} \mathrel{\tilde{\notin}} \left(F^{\mathbb{C}}\right)^{\circ} \text{ ve } \tilde{x} \mathrel{\tilde{\notin}} F^{\circ} \right\} \\
&= \left\{ \tilde{x} \mathrel{\tilde{\in}} \tilde{X} : \tilde{x} \mathrel{\tilde{\notin}} \left(\bar{F}\right)^{\mathbb{C}} \text{ ve } \tilde{x} \mathrel{\tilde{\notin}} F^{\circ} \right\} \\
&= \left\{ \tilde{x} \mathrel{\tilde{\in}} \tilde{X} : \tilde{x} \in \bar{F} \text{ ve } \tilde{x} \in \left(F^{\circ}\right)^{\mathbb{C}} \right\} \\
&= SE\left(\bar{F}\right) \cap SE\left(\left(F^{\circ}\right)^{\mathbb{C}}\right)
\end{aligned}
$$

olur. Buradan da $\partial F = \bar{F} \Cap \overline{\left(F^{\mathbb{C}}\right)}$ elde edilir. Ayrıca

$$
\begin{aligned}
\tilde{x} \mathrel{\tilde{\in}} \bar{F} \setminus F^{\circ} &\Leftrightarrow \tilde{x} \mathrel{\tilde{\in}} \bar{F} \text{ ve } \tilde{x} \mathrel{\tilde{\notin}} F^{\circ} \\
&\Leftrightarrow \tilde{x} \mathrel{\tilde{\in}} \bar{F} \text{ ve } \tilde{x} \mathrel{\tilde{\in}} \overline{\left(F^{\mathbb{C}}\right)} \\
&\Leftrightarrow \tilde{x} \mathrel{\tilde{\in}} \bar{F} \Cap \overline{\left(F^{\mathbb{C}}\right)}
\end{aligned}
$$

olduğundan $\partial F = \bar{F} \Cap \overline{\left(F^{\mathbb{C}}\right)} = \bar{F} \setminus F^{\circ}$ elde edilir.

Uyarı 3.2.15. $F^{C} \notin S\left(\tilde{X}\right)$ ise Önerme 3.2.12. ve 3.2.14.'deki eşitlikler sağlanmayabilir. Örnek 3.2.20.'ye bakınız.

Tanım 3.2.16. $\left(\tilde{X}, \mathcal{T}, A\right)$ elemanter esnek topolojik uzay, $F \in S\left(\tilde{X}\right)$ ve $\tilde{x} \mathrel{\tilde{\in}} \tilde{X}$ olsun. Eğer her bir $N \in N_{\mathcal{T}}\left(\tilde{x}\right)$ için $F \Cap \left(N \setminus \{\tilde{x}\}\right) \neq \Phi$ ise $\tilde{x}$ elemanına F kümesinin esnek yığılma elemanı denir. F kümesinin tüm esnek yığılma elemanlarının sınıfı $limF$ ile gösterilir. F kümesinin tüm esnek yığılma elemanlarının sınıfının ürettiği esnek kümeye de F kümesinin esnek yığılma elemanlarının kümesi denir ve $F^{\sim} = SS\left(limF\right)$ ile gösterilir.

Eğer $F \Cap \left(N \setminus \{\tilde{x}\}\right) = \Phi$ ve $F \mathbin{\tilde{\cap}} \left(N \setminus \{\tilde{x}\}\right) \in S\left(\tilde{X}\right)$ olacak şekilde en az bir $N \in N\left(\tilde{x}\right)$ var ise $\tilde{x} \mathrel{\tilde{\in}} \tilde{X}$, F kümesinin bir esnek yığılma elemanı değildir. Ayrıca $F^{\sim} \mathrel{\tilde{\subset}} \bar{F}$ olduğu açıktır.

Teorem 3.2.17. $\left(\tilde{X}, \mathcal{T}, A\right)$ elemanter esnek topolojik uzay ve $F \in S\left(\tilde{X}\right)$ olmak üzere $F \Cup F^{\sim}$ esnek kümesi esnek kapalıdır.

İspat. $F \Cup F^{\sim}$ kümesinin esnek kapalı olduğunu göstermek için $\left(F \Cup F^{\sim}\right)^{\mathbb{C}} \in \mathcal{T}$ ve $\left(F \Cup F^{\sim}\right)^{C} \in S\left(\tilde{X}\right)$ olduğunu göstermeliyiz. Bunun için keyfi $\tilde{x} \tilde{\in} \left(F \Cup F^{\sim}\right)^{\mathbb{C}}$ alalım. Bu durumda $\tilde{x} \tilde{\notin} F \Cup F^{\sim}$, yani $\tilde{x} \tilde{\notin} F$ ve $\tilde{x} \tilde{\notin} F^{\sim}$ olur. $\tilde{x} \tilde{\notin} F^{\sim}$ olduğundan $F \Cap \left(N \setminus \{\tilde{x}\}\right) = \Phi$ ve $F \tilde{\frown} \left(N \setminus \{\tilde{x}\}\right) \in S\left(\tilde{X}\right)$ olacak şekilde en az bir $N \in N_{\mathcal{T}}\left(\tilde{x}\right)$ vardır. $\tilde{x} \tilde{\notin} F$ ve $F \tilde{\frown} \left(N \setminus \{\tilde{x}\}\right) \in S\left(\tilde{X}\right)$ olduğundan $F \Cap N = \Phi$ ve $F \tilde{\frown} N \in S\left(\tilde{X}\right)$ olur. Her $\tilde{y} \tilde{\in} N$ için $F \Cap N = \Phi$ olduğundan N kümesinin hiçbir esnek elemanı F kümesinin bir esnek yığılma elemanı değildir, yani $\tilde{y} \tilde{\notin} F^{\sim}$ olur. Dolayısıyla $F^{\sim} \Cap N = \Phi$ ve $F^{\sim} \tilde{\frown} N \in S\left(\tilde{X}\right)$ olur. Böylece $\tilde{x} \tilde{\in} N \tilde{\subset} F^{\mathbb{C}}$ ve $\tilde{x} \tilde{\in} N \tilde{\subset} \left(F^{\sim}\right)^{\mathbb{C}}$ olup $\tilde{x} \tilde{\in} N \tilde{\subset} F^{\mathbb{C}} \Cap \left(F^{\sim}\right)^{\mathbb{C}}$ elde edilir. Önerme 2.3.12. yardımıyla $\tilde{x} \tilde{\in} N \tilde{\subset} \left(F \Cup F^{\sim}\right)^{\mathbb{C}}$ elde edilir. Bunun sonucunda $\tilde{x} \tilde{\in} \left(\left(F \Cup F^{\sim}\right)^{\mathbb{C}}\right)^{\circ}$, yani $\left(F \Cup F^{\sim}\right)^{\mathbb{C}} \in \mathcal{T}$ olur. Ayrıca $F \tilde{\frown} N \in S\left(\tilde{X}\right)$ ve $F^{\sim} \tilde{\frown} N \in S\left(\tilde{X}\right)$ olduğundan $F^{\mathbb{C}} \in S\left(\tilde{X}\right)$ ve $\left(F^{\sim}\right)^{\mathbb{C}} \in S\left(\tilde{X}\right)$ olur. Bunun sonucunda da $\left(F \Cup F^{\sim}\right)^{C} \in S\left(\tilde{X}\right)$ bulunur.

Teorem 3.2.18. $\left(\tilde{X}, \mathcal{T}, A\right)$ elemanter esnek topolojik uzay ve $F \in S\left(\tilde{X}\right)$ olmak üzere $\overline{F} = F \Cup F^{\sim}$ olur.

İspat. $F^{\sim} \tilde{\subset} \overline{F}$ ve $F \tilde{\subset} \overline{F}$ olduğundan $F \Cup F^{\sim} \tilde{\subset} \overline{F}$ olur. Diğer taraftan $F \tilde{\subset} F \Cup F^{\sim}$ olur. Teorem 3.2.17.'dan $F \Cup F^{\sim}$ esnek kapalı ve Teorem 3.2.9.'dan $\overline{F}$, F kümesini kapsayan en küçük esnek kapalı küme olduğundan $\overline{F} \tilde{\subset} F \Cup F^{\sim}$ olur. Dolayısıyla $\overline{F} = F \Cup F^{\sim}$ elde edilir.

Teorem 3.2.19. $\left(\tilde{X}, \mathcal{T}, A\right)$ elemanter esnek topolojik uzay ve $F \in S\left(\tilde{X}\right)$ olsun. F esnek kapalıdır $\Leftrightarrow$ $F^{\sim} \tilde{\subseteq} F$.

İspat. $\Rightarrow$ F esnek kapalı olsun. Teorem 3.2.9.'dan $F = \bar{F}$ olur. Bu durumda Teorem 3.2.18.'den $\bar{F} = F \Cup F^{\sim}$ olduğundan $F = F \Cup F^{\sim}$ olur. Dolayısıyla $F^{\sim} \tilde{\subseteq} F$ elde edilir.

$\Leftarrow$ $F^{\sim} \tilde{\subseteq} F$ olsun. Bu durumda $F \Cup F^{\sim} \tilde{\subseteq} F$ olup Teorem 3.2.18.'den $\bar{F} \tilde{\subseteq} F$ olur. Ayrıca Teorem 3.2.9.'dan $F \tilde{\subseteq} \bar{F}$ olur. Sonuç olarak $F = \bar{F}$ olup yine Teorem 3.2.9.'dan F esnek kapalı olur.

Örnek 3.2.20. Örnek 3.1.9.'a göre $\mathcal{T}_3$ elemanter esnek topolojisi için $F = \{(\lambda, \{x, z\}), (\mu, X)\}$ ve $G = \{(\lambda, \{x, z\}), (\mu, \{x, y\})\}$ esnek kümeleri verilsin. Bu durumda

$$
\begin{array}{lllll}
F^{\circ} = F_3, & \bar{F} = \tilde{X}, & F^{e} = \Phi, & \partial F = \tilde{X}, & F^{\sim} = \Phi, \\
G^{\circ} = \Phi, & \bar{G} = \tilde{X}, & G^{e} = F_1, & \partial G = \tilde{X}, & G^{\sim} = \{(\lambda, \{y\}), (\mu, \{z\})\}
\end{array}
$$

olur.

Ayrıca $F^{C} \notin S\left(\tilde{X}\right)$ olduğundan $\left(F^{\circ}\right)^{\mathbb{C}} = K_3$ ve $\overline{\left(F^{\mathbb{C}}\right)} = \Phi$ olup $\left(F^{\circ}\right)^{\mathbb{C}} \neq \overline{\left(F^{\mathbb{C}}\right)}$ ve $\bar{F} \setminus F^{\circ} = K_3$ olup $\partial F \neq \bar{F} \setminus F^{\circ}$ olduğu görülür.

3.3. Esnek Baz ve Esnek Yerel Baz

Tanım 3.3.1. $\mathcal{B} \subset S\left(\tilde{X}\right)$ esnek kümelerin bir sınıfı olsun. Eğer $\mathcal{B}$ sınıfı aşağıdaki şartları sağlarsa bu sınıfa $\tilde{X}$ üzerindeki bir elemanter esnek topoloji için esnek baz denir.

B1. Her $\tilde{x} \tilde{\in} \tilde{X}$ için $\tilde{x} \tilde{\in} B$ olacak şekilde en az bir $B \in \mathcal{B}$ esnek kümesi vardır.

B2. $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ için $\tilde{x} \tilde{\in} \tilde{X}$ ve $\tilde{x} \tilde{\in} B_1 \Cap B_2$ ise $\tilde{x} \tilde{\in} B_3 \tilde{\subset} B_1 \Cap B_2$ olacak şekilde $B_3 \in \mathcal{B}$ esnek kümesi vardır.

Örnek 3.3.2. $X = \{x, y, z\}$ ve $A = \{\lambda, \mu\}$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
&B_1 = \{(\lambda, \{x\}), (\mu, \{x\})\}, \quad B_2 = \{(\lambda, \{x\}), (\mu, \{y\})\}, \quad B_3 = \{(\lambda, \{x\}), (\mu, \{z\})\}, \\
&B_4 = \{(\lambda, \{x, y\}), (\mu, X)\}, \quad B_5 = \{(\lambda, \{x, z\}), (\mu, X)\}
\end{aligned}
$$

esnek kümeleri için $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, B_3, B_4, B_5\}$ olsun. $\mathcal{B}$ sınıfı $\tilde{X}$ üzerindeki bir elemanter esnek topoloji için esnek bazdır.

Çözüm. $\tilde{X}$ mutlak esnek kümesinin esnek elemanları

$$
\begin{aligned}
\tilde{x}_1 &= \{(\lambda, x), (\mu, x)\}, \quad \tilde{x}_4 = \{(\lambda, y), (\mu, x)\}, \quad \tilde{x}_7 = \{(\lambda, z), (\mu, x)\}, \\
\tilde{x}_2 &= \{(\lambda, x), (\mu, y)\}, \quad \tilde{x}_5 = \{(\lambda, y), (\mu, y)\}, \quad \tilde{x}_8 = \{(\lambda, z), (\mu, y)\}, \\
\tilde{x}_3 &= \{(\lambda, x), (\mu, z)\}, \quad \tilde{x}_6 = \{(\lambda, y), (\mu, z)\}, \quad \tilde{x}_9 = \{(\lambda, z), (\mu, z)\}
\end{aligned}
$$

olmak üzere $SE(\tilde{X}) = \{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{x}_4, \tilde{x}_5, \tilde{x}_6, \tilde{x}_7, \tilde{x}_8, \tilde{x}_9\}$ olur. Bu durumda

B1. $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{x}_4, \tilde{x}_5, \tilde{x}_6 \tilde{\in} B_4$ ve $\tilde{x}_7, \tilde{x}_8, \tilde{x}_9 \tilde{\in} B_5$ olur.

B2. $B_1 \Cap B_4 = B_1 \in \mathcal{B}$, $B_2 \Cap B_4 = B_2 \in \mathcal{B}$, $B_3 \Cap B_4 = B_3 \in \mathcal{B}$, $B_1 \Cap B_5 = B_1 \in \mathcal{B}$, $B_2 \Cap B_5 = B_2 \in \mathcal{B}$, $B_3 \Cap B_5 = B_3 \in \mathcal{B}$ ve $B_4 \Cap B_5 = \{(\lambda, \{x\}), (\mu, X)\} = B_6 \notin \mathcal{B}$ olur. Burada B_6 esnek kümesi için $\tilde{x}_1 \tilde{\in} B_1 \tilde{\subset} B_6$, $\tilde{x}_2 \tilde{\in} B_2 \tilde{\subset} B_6$ ve $\tilde{x}_3 \tilde{\in} B_3 \tilde{\subset} B_6$ elde edilir.

Dolayısıyla $\mathcal{B}$ esnek bazdır.

Uyarı 3.3.3. $\mathcal{B}$, $\tilde{X}$ üzerindeki bir elemanter esnek topoloji için esnek baz ise $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ için $B_1 \Cap B_2$ kümesinin $\mathcal{B}$ sınıfına ait olması gerekmez. Örneğin; Örnek 3.3.2.'de $B_4, B_5 \in \mathcal{B}$ olduğu görülmesine rağmen $B_4 \Cap B_5 = B_6 \notin \mathcal{B}$ olur.

Önerme 3.3.4. $\mathcal{B} \subset S(\tilde{X})$, $\tilde{X}$ üzerindeki bir elemanter esnek topoloji için bir esnek baz olsun.

$$\mathcal{T}_{\mathcal{B}} = \left\{ U \in S(\tilde{X}) : \forall \tilde{x} \tilde{\in} \tilde{X} \text{ için } \exists B \in \mathcal{B} \ni \tilde{x} \tilde{\in} B \tilde{\subset} U \right\}$$

sınıfı $\tilde{X}$ üzerinde bir elemanter esnek topolojidir.

İspat: 1. Her $\tilde{x} \tilde{\in} \tilde{X}$ için $U = \Phi$ ise $\tilde{x} \tilde{\notin} U$ olur. Bu durumda $\Phi \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ elde edilir. $U = \tilde{X}$ ise her $B \in \mathcal{B}$ için $B \tilde{\subset} U$ olacağı için $\tilde{X} \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ olur.

2. Her $i \in I$ için $U_i \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ olsun. Bu durumda her $\tilde{x} \tilde{\in} \tilde{X}$ için $\tilde{x} \tilde{\in} B_i \tilde{\subset} U_i$ olacak şekilde her $i \in I$ için $B_i \in \mathcal{B}$ esnek kümeleri vardır. Böylece $\tilde{x} \tilde{\in} \tilde{\bigcup}_{i \in I} U_i$ ve $\tilde{x} \tilde{\in} B_i \tilde{\subset} \tilde{\bigcup}_{i \in I} U_i$ olur. Dolayısıyla $\tilde{\bigcup}_{i \in I} U_i \tilde{\in} \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ elde edilir.

3. $U_1, U_2 \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ ve $\tilde{x} \tilde{\in} U_1 \tilde{\cap} U_2$ olsun. $\tilde{x} \tilde{\in} U_1$ ve $\tilde{x} \tilde{\in} U_2$ olur. $U_1, U_2 \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ olduğu için $\tilde{x} \tilde{\in} B_1 \tilde{\subset} U_1$ ve $\tilde{x} \tilde{\in} B_2 \tilde{\subset} U_2$ olacak şekilde $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ esnek kümeleri vardır. Buradan $\tilde{x} \tilde{\in} B_1 \tilde{\cap} B_2$ olur. Tanım 3.3.1.'den $\tilde{x} \tilde{\in} B_3 \tilde{\subset} B_1 \tilde{\cap} B_2$ olacak şekilde $B_3 \in \mathcal{B}$ vardır. Böylece $\tilde{x} \tilde{\in} B_3 \tilde{\subset} B_1 \tilde{\cap} B_2 \tilde{\subset} U_1 \tilde{\cap} U_2$ olur. Dolayısıyla $U_1 \tilde{\cap} U_2 \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ elde edilir.

Tanım 3.3.5. Önerme 3.3.4.'de verilen $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ sınıfına $\mathcal{B}$ esnek bazı tarafından üretilen elemanter esnek topoloji denir.

Bu tanıma göre $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ olduğundan $\mathcal{B}$ sınıfının elemanları esnek açık kümelerdir.

Önerme 3.3.6. $(\tilde{X}, \mathcal{T}, A)$ elemanter esnek topolojik uzay ve $\mathcal{B}$, $\mathcal{T}$ için bir esnek baz olsun ($\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$). Bu durumda her esnek açık küme $\mathcal{B}$ sınıfının bazı elemanlarının elemanter birleşimi olarak ifade edilebilir.

İspat: $U \in \mathcal{T}$ olsun. Her $\tilde{x} \tilde{\in} \tilde{X}$ için Önerme 3.3.4.'den $\tilde{x} \tilde{\in} B_{\tilde{x}} \tilde{\subset} U$ olacak şekilde $B_{\tilde{x}} \in \mathcal{B}$ vardır. Böylece $U = \bigsqcup_{\tilde{x} \tilde{\in} U} B_{\tilde{x}}$ olur.

Örnek 3.3.7. Örnek 3.3.2.'deki esnek baz $\mathcal{B}$ sınıfının $\tilde{X}$ üzerinde ürettiği elemanter esnek topoloji

$$\begin{array}{lll} U_1 = \{(\lambda,\{x\}),(\mu,\{x\})\}, & U_4 = \{(\lambda,\{x\}),(\mu,\{x,y\})\}, & U_7 = \{(\lambda,\{x\}),(\mu,X)\}, \\ U_2 = \{(\lambda,\{x\}),(\mu,\{y\})\}, & U_5 = \{(\lambda,\{x\}),(\mu,\{x,z\})\}, & U_8 = \{(\lambda,\{x,y\}),(\mu,X)\}, \\ U_3 = \{(\lambda,\{x\}),(\mu,\{z\})\}, & U_6 = \{(\lambda,\{x\}),(\mu,\{y,z\})\}, & U_9 = \{(\lambda,\{x,z\}),(\mu,X)\} \end{array}$$

olmak üzere $\mathcal{T} = \left\{\Phi, \tilde{X}, U_1, U_2, U_3, U_4, U_5, U_6, U_7, U_8, U_9\right\}$ olur.

Uyarı 3.3.8. Önerme 3.3.6.'nın tersi doğru değildir.

Örnek 3.3.9. $X = \{x, y, z\}$ ve $A = \{\lambda, \mu\}$ olsun. $\tilde{X}$ üzerinde

$$\begin{array}{lll} F_1 = \left\{(\lambda,\{x,y\}),(\mu,\{x\})\right\}, & F_2 = \left\{(\lambda,\{x,y\}),(\mu,\{z\})\right\}, & F_3 = \left\{(\lambda,\{x,y\}),(\mu,\{x,z\})\right\}, \\ F_4 = \left\{(\lambda,\{z\}),(\mu,\{y,z\})\right\}, & F_5 = \left\{(\lambda,X),(\mu,\{y,z\})\right\} & \end{array}$$

olmak üzere $\mathcal{T} = \left\{\tilde{X}, \Phi, F_1, F_2, F_3, F_4, F_5\right\}$ elemanter esnek topolojisi verilsin. Bu durumda $\mathcal{B} = \left\{\tilde{X}, \Phi, F_1, F_2, F_3\right\}$ sınıfı Önerme 3.3.6.'nın şartını sağlar. Fakat $\tilde{x} = \left\{(\lambda, x), (\mu, y)\right\} \in SE\left(\tilde{X}\right)$ için $\tilde{x} \tilde{\in} F_5$ olmasına rağmen $\tilde{x} \tilde{\in} B \tilde{\subseteq} F_5$ olacak şekilde bir $B \in \mathcal{B}$ kümesi yoktur. Dolayısıyla $\mathcal{B}$ sınıfı $\mathcal{T}$ topolojisi için bir esnek baz değildir.

Önerme 3.3.6.'da bir elemanter esnek topoloji esnek baz yardımıyla tanımlanmıştır. Bunun tersi için yani verilen elemanter esnek topolojiye bir esnek baz bulmak için aşağıdaki teorem verilmiştir.

Teorem 3.3.10. $(\tilde{X}, \mathcal{T}, A)$ elemanter esnek topolojik uzay ve $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ olsun. Aşağıdaki ($\mathcal{B}_*$) şartı sağlanırsa $\mathcal{B}$ sınıfı $\mathcal{T}$ için bir esnek baz olur.

$\mathcal{B}_*$. Her $U \in \mathcal{T}$ ve her $\tilde{x} \tilde{\in} U$ için $\tilde{x} \tilde{\in} B \tilde{\subset} U$ olacak şekilde $B \in \mathcal{B}$ vardır.

İspat: B1. $U = \tilde{X}$ olsun. $U \in \mathcal{T}$ ve $\tilde{x} \tilde{\in} U$ olduğundan ($\mathcal{B}_*$) şartından dolayı $\tilde{x} \tilde{\in} B \tilde{\subset} U$ olacak şekilde $B \in \mathcal{B}$ vardır. Böylece her $\tilde{x} \tilde{\in} \tilde{X}$ için $\tilde{x} \tilde{\in} B$ olacak şekilde $B \in \mathcal{B}$ vardır.

B2. $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ ve $\tilde{x} \tilde{\in} \tilde{X}$ için $\tilde{x} \tilde{\in} B_1 \Cap B_2 = U$ olsun. B_1 ve B_2 esnek açık küme olduğu için U esnek açıktır. Böylece ($\mathcal{B}_*$) şartından dolayı $\tilde{x} \tilde{\in} B_3 \tilde{\subset} U$ olacak şekilde $B_3 \in \mathcal{B}$ vardır. Yani $\tilde{x} \tilde{\in} B_3 \tilde{\subset} B_1 \Cap B_2$ olur.

Dolayısıyla $\mathcal{B}$ bir esnek bazdır ve $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ olduğu açıktır.

Örnek 3.3.11. $\mathcal{B} = \left\{ SS\left(B\left(\tilde{x}, \tilde{\epsilon}\right)\right) : \tilde{x} \tilde{\in} \tilde{X} \text{ ve } \tilde{\epsilon} \tilde{>} \overline{0} \right\}$, $(\tilde{X}, d, A)$ esnek metrik uzayında esnek açık kümelerin bir sınıfı olsun. $(\tilde{X}, d, A)$ esnek metrik uzayı (EM5) şartını sağlarsa $\mathcal{B}$ sınıfı Örnek 3.1.8.'deki elemanter esnek metrik topoloji $\mathcal{T}$ için bir esnek baz olur.

Tanım 3.3.12. $(\tilde{X}, \mathcal{T}, A)$ elemanter esnek topolojik uzay ve $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ olsun. $\mathcal{S}$ sınıfının elemanlarının her sonlu elemanter kesişimi $\mathcal{T}$ için bir esnek baz ise $\mathcal{S}$ sınıfına $\mathcal{T}$ topolojisinin bir esnek alt bazı denir.

Tanım 3.3.13. $(\tilde{X}, \mathcal{T}, A)$ elemanter esnek topolojik uzay ve $\tilde{x} \tilde{\in} \tilde{X}$ keyfi bir esnek eleman olsun. $\tilde{x}$ elemanını içeren esnek açık kümelerin bir sınıfı $\mathcal{B}_{\tilde{x}}$ olmak üzere $\tilde{x}$ elemanını içeren her U esnek açık kümesi için $\tilde{x} \tilde{\in} B_{\tilde{x}} \tilde{\subset} U$ olacak şekilde $B_{\tilde{x}} \in \mathcal{B}_{\tilde{x}}$ var ise $\mathcal{B}_{\tilde{x}}$ sınıfına $\tilde{x}$ elemanının esnek yerel bazı denir.

Önerme 3.3.14. $\mathcal{B}$, $\tilde{X}$ üzerindeki bir elemanter esnek topoloji için esnek baz ve $\tilde{x} \tilde{\in} \tilde{X}$ olsun. $\mathcal{B}$ esnek bazının $\tilde{x}$ elemanını içeren elemanları $\tilde{x}$ esnek elemanı için bir esnek yerel baz oluşturur.

İspat. Teorem 3.3.10.'dan ispat elde edilir.

BÖLÜM 4. ESNEK FONKSİYON VE ESNEK SÜREKLİLİK

Bu bölümde esnek dönüşüm tanımı ve esnek dönüşümün özellikleri [73,74]'den farklı olarak esnek elemanlar üzerinde verilmiştir. Ayrıca esnek süreklilik tanımı elemanter esnek topolojik uzaylar üzerinde verilmiştir.

4.1. Esnek Fonksiyon

Tanım 4.1.1. X ve Y boştan farklı herhangi iki küme ve A boştan farklı parametreler kümesi olsun. $f : SE(\tilde{X}) \to SE(\tilde{Y})$ dönüşümüne bir esnek dönüşüm denir.

Örnek 4.1.2. X ve Y boştan farklı herhangi iki küme, A boştan farklı parametreler kümesi ve $\{f_\lambda : \lambda \in A\}$, X'den Y'ye kesin dönüşümlerin herhangi bir parametrelendirilmiş ailesi olsun. Bu durumda her $\tilde{x} \tilde{\in} \tilde{X}$ ve her $\lambda \in A$ için $f(\tilde{x})(\lambda) = f_\lambda(\tilde{x}(\lambda))$ şeklinde tanımlanan $f : SE(\tilde{X}) \to SE(\tilde{Y})$ dönüşümü bir esnek dönüşüm olur.

Örnek 4.1.3. X ve Y boştan farklı herhangi iki küme ve A boştan farklı parametreler kümesi olsun. $g : X \to Y$, bir kesin dönüşüm olmak üzere her $\tilde{x} \tilde{\in} \tilde{X}$ ve her $\lambda \in A$ için $f(\tilde{x})(\lambda) = g(\tilde{x}(\lambda))$ şeklinde tanımlanan $f : SE(\tilde{X}) \to SE(\tilde{Y})$ dönüşümü bir esnek dönüşüm olur. Bu şekildeki bir esnek dönüşüme g kesin dönüşümü tarafından üretilen esnek dönüşüm denir. Böylece, X'den Y'ye herhangi bir kesin dönüşüm bir esnek dönüşüme genişletilebilir.

Uyarı 4.1.4. Örnek 4.1.3.'ün tersi doğru değildir (Örnek 4.1.5.'e bakınız). Kesin dönüşümlerin herhangi parametrelendirilmiş ailesi bir esnek dönüşüm olmasına rağmen bir esnek dönüşüm kesin dönüşümlerin herhangi parametrelendirilmiş ailesi olmayabilir. Böylece esnek dönüşüm kesin dönüşümlerin herhangi bir parametrelendirilmiş ailesinden daha genel ve daha kapsamlıdır.

Örnek 4.1.5. $X=\{a,b\}$, $Y=\{c,d\}$ ve $A=\{\lambda,\mu\}$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\tilde{x}_1 &= \{(\lambda,a),(\mu,a)\}, \quad \tilde{y}_1=\{(\lambda,c),(\mu,c)\},\\
\tilde{x}_2 &= \{(\lambda,a),(\mu,b)\}, \quad \tilde{y}_2=\{(\lambda,c),(\mu,d)\},\\
\tilde{x}_3 &= \{(\lambda,b),(\mu,a)\}, \quad \tilde{y}_3=\{(\lambda,d),(\mu,c)\},\\
\tilde{x}_4 &= \{(\lambda,b),(\mu,b)\}, \quad \tilde{y}_4=\{(\lambda,d),(\mu,d)\}
\end{aligned}$$

olmak üzere $SE(\tilde{X})=\{\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\tilde{x}_3,\tilde{x}_4\}$ ve $SE(\tilde{Y})=\{\tilde{y}_1,\tilde{y}_2,\tilde{y}_3,\tilde{y}_4\}$ olur. $f:SE(\tilde{X})\to SE(\tilde{Y})$ esnek dönüşümü $f(\tilde{x}_1)=\tilde{y}_4$, $f(\tilde{x}_2)=\tilde{y}_1$, $f(\tilde{x}_3)=\tilde{y}_2$, $f(\tilde{x}_4)=\tilde{y}_3$ şeklinde tanımlansın. Buradan

$$\begin{aligned}
f(\tilde{x}_1)(\lambda)=\tilde{y}_4(\lambda) &\Rightarrow f_\lambda(\tilde{x}_1(\lambda))=f_\lambda(a)=d\,,\\
f(\tilde{x}_2)(\lambda)=\tilde{y}_1(\lambda) &\Rightarrow f_\lambda(\tilde{x}_2(\lambda))=f_\lambda(a)=c\,,\\
f(\tilde{x}_3)(\lambda)=\tilde{y}_2(\lambda) &\Rightarrow f_\lambda(\tilde{x}_3(\lambda))=f_\lambda(b)=c\,,\\
f(\tilde{x}_4)(\lambda)=\tilde{y}_3(\lambda) &\Rightarrow f_\lambda(\tilde{x}_4(\lambda))=f_\lambda(b)=d
\end{aligned}$$

olduğundan $f_\lambda : X\to Y$ bir dönüşüm değildir.

Teorem 4.1.6. X ve Y boştan farklı herhangi iki küme ve A boştan farklı parametreler kümesi olsun. $f:SE(\tilde{X})\to SE(\tilde{Y})$ esnek dönüşümü aşağıdaki (f_*) şartını sağlarsa, her $\tilde{x}\,\tilde{\in}\,\tilde{X}$ ve her $\xi\in X$ için $\tilde{x}(\lambda)=\xi$ olmak üzere $f_\lambda(\xi)=f(\tilde{x})(\lambda)$ ile tanımlanan $f_\lambda : X\to Y$, her bir $\lambda\in A$ için bir kesin dönüşümdür.

f_*. $\lambda \in A$ ve $\xi \in X$ için

$$\left\{ f(\tilde{x})(\lambda) : \tilde{x} \tilde{\in} \tilde{X} \ni \tilde{x}(\lambda) = \xi \right\}$$

tek elemanlı bir kümedir.

İspat: Her $\lambda \in A$ için $f_\lambda : X \to Y$, X kümesinin her bir elemanını Y kümesinin bir elemanı ile ilişkilendiren bir kural olsun. Her $\lambda \in A$ için f_λ dönüşümünün iyi tanımlılık özelliği (f_*) şartından çıkar. Böylece (f_*) şartını sağlayan f esnek dönüşümü kesin dönüşümlerin parametrelendirilmiş bir ailesini verir.

Bu bakış açısıyla (f_*) şartını sağlayan $f : SE(\tilde{X}) \to SE(\tilde{Y})$ esnek dönüşümü, P. Majumdar ve S. K. Samanta [73] tarafından verilen tanıma göre $f : A \to Y^X$ biçiminde bir özel esnek dönüşüm olur.

Tanım 4.1.7. $f : SE(\tilde{X}) \to SE(\tilde{Y})$ bir esnek dönüşüm olsun.

1. $F \in S(\tilde{X})$ esnek kümesinin f altındaki görüntüsü $f(SE(F))$ olarak tanımlanır ve F kümesinin f altındaki esnek görüntü kümesi $SS(f(SE(F))) \in S(\tilde{Y})$ esnek kümesidir.

2. $F' \in S(\tilde{Y})$ esnek kümesinin f altındaki ters görüntüsü $f^{-1}(SE(F'))$ olarak tanımlanır ve F' kümesinin f altındaki esnek ters görüntü kümesi $SS(f^{-1}(SE(F'))) \in S(\tilde{X})$ esnek kümesidir.

Uyarı 4.1.8. $f : SE(\tilde{X}) \to SE(\tilde{Y})$ bir esnek dönüşüm ve $F \in S(\tilde{X})$ olmak üzere Önerme 2.2.3.'den $f(SE(F)) \subset SE(SS(f(SE(F))))$ olur.

Uyarı 4.1.9. $F \in S(\tilde{X})$ ve $\mathfrak{B} \subset SE(\tilde{X})$ için $SS(\mathfrak{B}) = F$ ve $f : SE(\tilde{X}) \to SE(\tilde{Y})$ bir esnek dönüşüm olsun. Bu durumda $\mathfrak{B} \subseteq SE(F)$ olduğundan $f(\mathfrak{B}) \subseteq f(SE(F))$ olur. Buradan da $SS(f(\mathfrak{B})) \tilde{\subseteq} SS(f(SE(F)))$ olur. Fakat, f esnek dönüşümü (f_*) şartını sağlarsa her $\lambda \in A$ için $f(\mathfrak{B})(\lambda) = f(SE(F))(\lambda)$ olacağından Uyarı 2.2.4. gereği $SS(f(\mathfrak{B})) = SS(f(SE(F)))$ olur.

Tanım 4.1.10. Teorem 4.1.6.'nın şartlarını sağlayan bir esnek dönüşüme esnek fonksiyon adı verilir.

Önerme 4.1.11. Bir f esnek fonksiyonunun bire bir (her $\tilde{x}, \tilde{y} \tilde{\in} \tilde{X}$ için $f(\tilde{x}) = f(\tilde{y})$ ise $\tilde{x} = \tilde{y}$) ve örten ($f(SE(\tilde{X})) = SE(\tilde{Y})$) olması için gerek ve yeter şart her $\lambda \in A$ için $f_\lambda(\tilde{x}(\lambda)) = f(\tilde{x})(\lambda)$ ile tanımlanan $f_\lambda : X \to Y$ dönüşümünün bire bir ve örten olmasıdır.

Önerme 4.1.12. Herhangi $F, G \in S(\tilde{X})$ esnek kümeler ve $f : SE(\tilde{X}) \to SE(\tilde{Y})$ esnek dönüşümü verilsin. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır.

1. $F \tilde{\subseteq} G$ ise $SS(f(SE(F))) \tilde{\subset} SS(f(SE(G)))$,

2. $SS(f(SE(F \Cup G))) \tilde{\supset} SS(f(SE(F))) \Cup SS(f(SE(G)))$,

3. $SS(f(SE(F \Cap G))) \tilde{\subset} SS(f(SE(F))) \Cap SS(f(SE(G)))$,

4. $F \tilde{\subseteq} G$ ise $SS(f^{-1}(SE(F))) \tilde{\subset} SS(f^{-1}(SE(G)))$,

5. $SS(f^{-1}(SE(F \Cup G))) \tilde{\supset} SS(f^{-1}(SE(F))) \Cup SS(f^{-1}(SE(G)))$,

6. $SS(f^{-1}(SE(F \Cap G))) \tilde{\subset} SS(f^{-1}(SE(F))) \Cap SS(f^{-1}(SE(G)))$.

İspat. 1. ve 4.'ün ispatları aşikardır. 5. ve 6.'nın ispatları 2. ve 3. ile benzer şekilde yapıldığından sadece 2. ve 3.'ün ispatları yapılacaktır.

2.

$$SE(F \Cup G) \supset SE(F) \cup SE(G) \qquad \text{(Lemma 2.3.6. (2))}$$
$$f(SE(F \Cup G)) \supset f(SE(F) \cup SE(G))$$
$$f(SE(F \Cup G)) \supset f(SE(F)) \cup f(SE(G))$$
$$SS(f(SE(F \Cup G))) \tilde{\supset} SS(f(SE(F)) \cup f(SE(G)))$$
$$SS(f(SE(F \Cup G))) \tilde{\supset} SS(f(SE(F))) \Cup SS(f(SE(G))) \qquad \text{(Önerme 2.3.2. (3))}$$

3.

$$SE(F \Cap G) = SE(F) \cap SE(G) \qquad \text{(Lemma 2.3.6. (1))}$$
$$f(SE(F \Cap G)) = f(SE(F) \cap SE(G))$$
$$f(SE(F \Cap G)) \subset f(SE(F)) \cap f(SE(G))$$
$$SS(f(SE(F \Cap G))) \tilde{\subset} SS(f(SE(F)) \cap f(SE(G)))$$
$$SS(f(SE(F \Cap G))) \tilde{\subset} SS(f(SE(F))) \Cap SS(f(SE(G))) \qquad \text{(Önerme 2.3.3. (5))}$$

Uyarı 4.1.13. $f : SE(\tilde{X}) \to SE(\tilde{Y})$ esnek fonksiyon ise Uyarı 4.1.9.'dan yukarıdaki önermede 2. 5. ve 6. özellikte eşitlik durumu sağlanır.

4.2. Esnek Süreklilik

Tanım 4.2.1. $(\tilde{X}, \mathcal{T}, A)$ ve $(\tilde{Y}, \mathcal{T}', A)$ elemanter esnek topolojik uzaylar, $f : SE(\tilde{X}) \to SE(\tilde{Y})$ esnek dönüşümü ve $\tilde{x} \tilde{\in} \tilde{X}$ esnek elemanı verilsin. Her $N' \in N_{\mathcal{T}'}(f(\tilde{x}))$ esnek komşuluğu için $f(SE(N)) \subset SE(N')$ olacak şekilde en az bir $N \in N_{\mathcal{T}}(\tilde{x})$ esnek komşuluğu varsa f esnek dönüşümüne $\tilde{x}$ esnek elemanında esnek süreklidir denir. f esnek dönüşümü her bir $\tilde{x} \tilde{\in} \tilde{X}$ esnek elemanında esnek sürekli ise f esnek dönüşümüne $(\tilde{X}, \mathcal{T}, A)$ üzerinde esnek süreklidir ya da sadece esnek süreklidir denir.

Teorem 4.2.2. $(\tilde{X},\mathcal{T},A)$ ve $(\tilde{Y},\mathcal{T}',A)$ elemanter esnek topolojik uzaylar, $f:SE(\tilde{X})\to SE(\tilde{Y})$ bir esnek dönüşüm olsun. f dönüşümünün esnek sürekli olması için gerek ve yeter şart her $U'\in\mathcal{T}'$ için $SS\left(f^{-1}\left(SE(U')\right)\right)\in\mathcal{T}$ olmasıdır.

İspat: $\Rightarrow$ f esnek sürekli ve $U'\in\mathcal{T}'$ olsun. Keyfi $\tilde{x}\in f^{-1}\left(SE(U')\right)$ alalım. Buradan $f(\tilde{x})\in SE(U')$ ve $U'\in N_{\mathcal{T}'}\left(f(\tilde{x})\right)$ olur. f esnek sürekli olduğundan $f\left(SE(N)\right)\subset SE(U')$ olacak şekilde $N\in N_{\mathcal{T}}(\tilde{x})$ vardır. Bu durumda $\tilde{x}\in SE(N)\subset f^{-1}\left(SE(U')\right)$ ve $\tilde{x}\tilde{\in} N\tilde{\subset} SS\left(f^{-1}\left(SE(U')\right)\right)$ olur. $N\in N_{\mathcal{T}}(\tilde{x})$ olduğundan $\tilde{x}\tilde{\in} U\tilde{\subset} N\tilde{\subset} SS\left(f^{-1}\left(SE(U')\right)\right)$ olacak şekilde $U\in\mathcal{T}$ vardır. Böylece $\tilde{x}\in int\left(SS\left(f^{-1}\left(SE(U')\right)\right)\right)$ ve $\tilde{x}\tilde{\in} SS\left(f^{-1}\left(SE(U')\right)\right)^{\circ}$ olur. Dolayısıyla Teorem 3.2.5.'den $SS\left(f^{-1}\left(SE(U')\right)\right)\in\mathcal{T}$ olur.

$\Leftarrow$ Her $U'\in\mathcal{T}'$ için $U=SS\left(f^{-1}\left(SE(U')\right)\right)\in\mathcal{T}$ olsun. Keyfi $\tilde{x}\in\tilde{X}$ ve $N\in N_{\mathcal{T}'}\left(f(\tilde{x})\right)$ alalım. Buradan $f(\tilde{x})\tilde{\in} U'\tilde{\subset} N$ olacak şekilde $U'\in\mathcal{T}'$ `vardır ve $f(\tilde{x})\in SE(U')\subset SE(N)$ olur. Bu durumda $\tilde{x}\in f^{-1}\left(SE(U')\right)\subset f^{-1}\left(SE(N)\right)$ ve $\tilde{x}\tilde{\in} U\tilde{\subset} SS\left(f^{-1}\left(SE(N)\right)\right)$ olur. Ayrıca $U\in\mathcal{T}$ olduğundan $U\in N_{\mathcal{T}}(\tilde{x})$ olur. Böylece $f\left(SE(U)\right)\subset f\left(SE\left(SS\left(f^{-1}\left(SE(N)\right)\right)\right)\right)$ elde edilir. Dolayısıyla Teorem 3.2.3.'den $SS\left(f\left(SE\left(SS\left(f^{-1}\left(SE(N)\right)\right)\right)\right)\right)$ esnek kümesi de $f(\tilde{x})$ elemanının esnek komşuluğu olduğundan f esnek dönüşümü $\tilde{x}$'de esnek süreklidir.

Sonuç 4.2.3. $(\tilde{X},\mathcal{T},A)$ ve $(\tilde{Y},\mathcal{T}',A)$ elemanter esnek topolojik uzaylar olsun. $\tilde{X}$ ve $\tilde{Y}$ mutlak esnek kümelerindeki esnek açık kümelerin sonlu elemanter kesişimleri sırasıyla $S(\tilde{X})$ ve $S(\tilde{Y})$ sınıflarının elemanları olsun. $f:SE(\tilde{X})\to SE(\tilde{Y})$ esnek fonksiyonunun $(\tilde{X},\mathcal{T},A)$ üzerinde esnek sürekli olması için gerek ve yeter şart her

$\lambda \in A$ ve her $\tilde{x} \tilde{\in} \tilde{X}$ için $f_\lambda(\tilde{x}(\lambda)) = f(\tilde{x})(\lambda)$ ile tanımlanan $f_\lambda : X \to Y$ dönüşümünün $(X, \mathcal{T}_\lambda)$ üzerinde sürekli olmasıdır.

Örnek 4.2.4. Örnek 4.1.5.'den $\tilde{X}$ ve $\tilde{Y}$ üzerindeki elemanter esnek topolojiler

$$U_1 = \{(\lambda, \{a\}), (\mu, (a,b))\}, \quad U_2 = \{(\lambda, \{b\}), (\mu, (b))\},$$
$$V_1 = \{(\lambda, \{c,d\}), (\mu, (c))\}, \quad V_2 = \{(\lambda, \{d\}), (\mu, (c,d))\}$$

olmak üzere sırasıyla $\mathcal{T} = \{\tilde{X}, \Phi, U_1, U_2\}$ ve $\mathcal{T}' = \{\tilde{Y}, \Phi, V_1, V_2\}$ olsun. Bu durumda f esnek dönüşümü $\tilde{x}_4$ elemanında esnek sürekli fakat $\tilde{x}_1$ elemanında esnek sürekli değildir. Gerçekten; $N_{\mathcal{T}}(\tilde{x}_4) = \{U_2, \tilde{X}\}$ ve $N_{\mathcal{T}'}(f(\tilde{x}_4)) = \{V_1, V_2, \tilde{Y}\}$ olmak üzere

$$SS(f(SE(U_2))) = \{\tilde{y}_3\} \tilde{\subset} V_1,$$
$$SS(f(SE(U_2))) = \{\tilde{y}_3\} \tilde{\subset} V_2,$$
$$SS(f(SE(\tilde{X}))) = \tilde{Y} \tilde{\subseteq} \tilde{Y}$$

olduğundan f, $\tilde{x}_4$ elemanında esnek süreklidir. $N_{\mathcal{T}}(\tilde{x}_1) = \{U_1, \tilde{X}\}$ ve $N_{\mathcal{T}'}(f(\tilde{x}_1)) = \{V_2, \tilde{Y}\}$ olmak üzere $SS(f(SE(U_1))) = \tilde{X} \tilde{\not\subset} V_2$ olduğundan f, $\tilde{x}_1$ elemanında esnek sürekli değildir.

Örnek 4.2.5. $(\tilde{X}, \mathcal{T}, A)$ ve $(\tilde{Y}, \mathcal{T}', A)$ elemanter esnek topolojik uzaylar olmak üzere her $\tilde{x} \tilde{\in} \tilde{X}$ ve bir $\tilde{c} \tilde{\in} \tilde{Y}$ için $f(\tilde{x}) = \tilde{c}$ şeklinde tanımlı $f : SE(\tilde{X}) \to SE(\tilde{Y})$ sabit esnek dönüşümü esnek süreklidir. Gerçekten, herhangi bir $U' \in \mathcal{T}'$ için $\tilde{c} \tilde{\in} U'$ ise $SS(f^{-1}(SE(U'))) = \tilde{X} \in \mathcal{T}$ ve $\tilde{c} \tilde{\notin} U'$ ise $SS(f^{-1}(SE(U'))) = \Phi \in \mathcal{T}$ olur. Dolayısıyla sabit esnek dönüşüm topolojik yapıya bağlı olmaksızın her zaman esnek süreklidir.

Teorem 4.2.6. $\left(\tilde{X},\mathcal{T},A\right)$ ve $\left(\tilde{Y},\mathcal{T}',A\right)$ elemanter esnek topolojik uzaylar, $f:SE\left(\tilde{X}\right)\to SE\left(\tilde{Y}\right)$ bir esnek dönüşüm ve $F\in S\left(\tilde{X}\right)$ olsun. f esnek dönüşümü $\tilde{x}\,\tilde{\in}\,\tilde{X}$ elemanında esnek sürekli ve $\tilde{x}\in clF$ ise $f\left(\tilde{x}\right)\in cl\left(SS\left(f\left(SE\left(F\right)\right)\right)\right)$ olur.

İspat: f esnek dönüşümü $\tilde{x}\,\tilde{\in}\,\tilde{X}$ elemanında esnek sürekli olsun. Teorem 4.2.2.'den her $U'\in N_{\mathcal{T}'}\left(f\left(\tilde{x}\right)\right)$ esnek açık komşuluğu için $U=SS\left(f^{-1}\left(SE\left(U'\right)\right)\right)\in N_{\mathcal{T}}(\tilde{x})$ bir açık komşuluktur. $\tilde{x}\in clF$ olduğundan $F\Cap U\neq\Phi$ olur. Buradan $f\left(SE\left(F\Cap U\right)\right)\neq\varnothing$ ve Lemma 2.3.6.'dan $f\left(SE\left(F\right)\cap SE\left(U\right)\right)\neq\varnothing$ olur. Ayrıca $f\left(SE\left(F\right)\cap SE\left(U\right)\right)\subset f\left(SE\left(F\right)\right)\cap f\left(SE\left(U\right)\right)\neq\varnothing$ olduğu iyi bilinir. Böylece

$$SS\left(f\left(SE\left(F\right)\right)\right)\Cap SS\left(f\left(SE\left(U\right)\right)\right)\neq\Phi$$

elde edilir. Teorem 3.2.3.'den $SS\left(f\left(SE\left(U\right)\right)\right)$ esnek kümesi de $f\left(\tilde{x}\right)$ elemanının esnek komşuluğu olduğundan $f(\tilde{x})\in cl\left(SS\left(f\left(SE\left(F\right)\right)\right)\right)$ olur.

Sonuç 4.2.7. $\left(\tilde{X},\mathcal{T},A\right)$ ve $\left(\tilde{Y},\mathcal{T}',A\right)$ elemanter esnek topolojik uzaylar, $f:SE\left(\tilde{X}\right)\to SE\left(\tilde{Y}\right)$ esnek sürekli bir esnek dönüşüm ve $F\in S\left(\tilde{X}\right)$ olsun. Bu durumda $SS\left(f\left(clF\right)\right)\subset\overline{SS\left(f\left(SE\left(F\right)\right)\right)}$ olur.

Teorem 4.2.8. $\left(\tilde{X},\mathcal{T},A\right)$, $\left(\tilde{Y},\mathcal{T}',A\right)$ ve $\left(\tilde{Z},\mathcal{T}'',A\right)$ elemanter esnek topolojik uzaylar olmak üzere $f:SE\left(\tilde{X}\right)\to SE\left(\tilde{Y}\right)$, $\tilde{x}\,\tilde{\in}\,\tilde{X}$ elemanında ve $g:SE\left(\tilde{Y}\right)\to SE\left(\tilde{Z}\right)$, $f\left(\tilde{x}\right)\tilde{\in}\,\tilde{Y}$ elemanında birer esnek sürekli dönüşüm ise $g\circ f:SE\left(\tilde{X}\right)\to SE\left(\tilde{Z}\right)$ dönüşümü $\tilde{x}\,\tilde{\in}\,\tilde{X}$ elemanında esnek süreklidir.

İspat. $\tilde{x} \tilde{\in} \tilde{X}$ için $f(\tilde{x}) \tilde{\in} \tilde{Y}$ ve $g(f(\tilde{x})) \tilde{\in} \tilde{Z}$ olur. f, $\tilde{x} \tilde{\in} \tilde{X}$ elemanında esnek sürekli olduğundan, her $N' \in N_{\mathcal{T}'}(f(\tilde{x}))$ için $SE(N) \subset f^{-1}(SE(N'))$ olacak şekilde en az bir $N \in N_{\mathcal{T}}(\tilde{x})$ vardır. g, $f(\tilde{x}) \tilde{\in} \tilde{Y}$ elemanında esnek sürekli olduğundan, her $N'' \in N_{\mathcal{T}''}(g(f(\tilde{x})))$ için $SE(N') \subset g^{-1}(SE(N''))$ olacak şekilde en az bir $N' \in N_{\mathcal{T}'}(f(\tilde{x}))$ vardır. Buradan her $N'' \in N_{\mathcal{T}''}(g(f(\tilde{x})))$ için

$$SE(N) \subset f^{-1}(SE(N')) \subset f^{-1}(g^{-1}(SE(N'')))$$

olacak şekilde en az bir $N \in N_{\mathcal{T}}(\tilde{x})$ var ve

$$f^{-1}(g^{-1}(SE(N''))) = f^{-1} \circ g^{-1}(SE(N'')) = (g \circ f)^{-1}(SE(N''))$$

olduğundan $g \circ f$, $\tilde{x} \tilde{\in} \tilde{X}$ elemanında esnek süreklidir.

Teorem 4.2.9. $(\tilde{X}, \mathcal{T}, A)$ ve $(\tilde{Y}, \mathcal{T}', A)$ elemanter esnek topolojik uzaylar, $\mathcal{B}' \subset \mathcal{T}'$ sınıfı $\mathcal{T}'$ topolojisi için esnek baz, $\mathcal{S}' \subset \mathcal{T}'$ sınıfı $\mathcal{T}'$ topolojisi için esnek alt baz ve $f : SE(\tilde{X}) \to SE(\tilde{Y})$ esnek fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir.

1. f, $(\tilde{X}, \mathcal{T}, A)$ uzayında esnek süreklidir.

2. Her $S' \in \mathcal{S}'$ için $SS(f^{-1}(SE(S'))) \in \mathcal{T}$ olur.

3. Her $B' \in \mathcal{B}'$ için $SS(f^{-1}(SE(B'))) \in \mathcal{T}$ olur.

İspat. $(1) \Rightarrow (2)$ $\mathcal{S}'$ sınıfı $\mathcal{T}'$ topolojisi için esnek alt baz ve böylece $\mathcal{S}' \subset \mathcal{T}'$ olduğundan her $S' \in \mathcal{S}'$ için $S' \in \mathcal{T}'$ olur. f esnek sürekli olduğundan Teorem 4.2.2. gereği $SS(f^{-1}(SE(S'))) \in \mathcal{T}$ elde edilir.

$(2)\Rightarrow(3)$ $\mathcal{B}'$ sınıfı $\mathcal{T}'$ topolojisi için esnek baz ve $\mathcal{S}'$ sınıfı $\mathcal{T}'$ topolojisi için esnek alt baz olduğundan her $B'\in\mathcal{B}'$ için ve her $S'\in\mathcal{S}'$ için

$$B' = \bigcap_{S'\in\mathfrak{S}} S_i' \quad (\mathfrak{S}\subset\mathcal{S} \text{ sonlu})$$

olur. Kabulden dolayı her $S'\in\mathcal{S}'$ için $SS\left(f^{-1}\left(SE\left(S'\right)\right)\right)\in\mathcal{T}$ olup buradan f esnek fonksiyon olduğundan Uyarı 4.1.13. gereği

$$\begin{aligned}
\bigcap_{S'\in\mathfrak{S}} SS\left(f^{-1}\left(SE\left(S'\right)\right)\right) &= SS\left(\bigcap_{S'\in\mathfrak{S}} f^{-1}\left(SE\left(S'\right)\right)\right)\\
&= SS\left(f^{-1}\left(\bigcap_{S'\in\mathfrak{S}} SE\left(S'\right)\right)\right)\\
&= SS\left(f^{-1}\left(SE\left(\bigcap_{S'\in\mathfrak{S}} S'\right)\right)\right)\\
&= SS\left(f^{-1}\left(SE\left(B'\right)\right)\right)\in\mathcal{T}
\end{aligned}$$

elde edilir.

$(3)\Rightarrow(1)$ $\mathcal{B}'$ sınıfı $\mathcal{T}'$ topolojisi için esnek baz olduğundan her $B'\in\mathcal{B}'$ ve Önerme 3.3.6. gereği her $U'\in\mathcal{T}'$ için

$$U' = \bigcup_{i\in I} B_i'$$

yazılır. Kabulden dolayı her $B'\in\mathcal{B}'$ için $SS\left(f^{-1}\left(SE\left(B'\right)\right)\right)\in\mathcal{T}$ olup buradan f esnek fonksiyon olduğundan Uyarı 4.1.13. gereği

$$
\begin{aligned}
SS\left(f^{-1}\left(SE\left(U'\right)\right)\right) &= SS\left(f^{-1}\left(SE\left(\bigcup_{i\in I} B_i'\right)\right)\right) \\
&= SS\left(f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} SE\left(B_i'\right)\right)\right) \\
&= SS\left(\bigcup_{i\in I} f^{-1}\left(SE\left(B_i'\right)\right)\right) \\
&= \bigcup_{i\in I} SS\left(f^{-1}\left(SE\left(B_i'\right)\right)\right) \in \mathcal{T}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu durumda Teorem 4.2.2.’den f , $\left(\tilde{X}, \mathcal{T}, A\right)$ uzayında esnek süreklidir.

BÖLÜM 5. ESNEK ALT UZAY, ESNEK ÇARPIM UZAYI, ESNEK BÖLÜM UZAYI

Bu bölümde mevcut elemanter esnek topolojik yapılardan yararlanarak elemanter işlemler ve esnek dönüşümler vasıtası ile yeni topolojik yapılar oluşturulmuştur. Ayrıca bu yapıların temel bazı özellikleri ispatlanmıştır.

5.1. Esnek Alt Uzay

Bu kısımda verilen elemanter esnek topolojik uzayın herhangi bir esnek alt kümesi üzerinde bir elemanter esnek topoloji tanımlanmış ve bu topolojik yapının bazı temel özellikleri ispatlanmıştır.

$\left(\tilde{X},\mathcal{T},A\right)$ elemanter esnek topolojik uzay olmak üzere elemanter işlemler ile bu uzayın bir esnek alt uzayını elde etmek her durumda mümkün değildir. Örneğin, herhangi $F\in S\left(\tilde{X}\right)$ esnek kümesi için $\mathcal{T}_F=\left\{F\Cap U:U\in\mathcal{T}\right\}$ sınıfı F esnek kümesi üzerinde bir elemanter esnek topoloji değildir. Çünkü, her $i\in I$ için $V_i\in\mathcal{T}_F$ esnek kümelerinin herhangi elemanter birleşimleri $\mathcal{T}_F$ sınıfına ait olmayabilir. Gerçekten; her $i\in I$ için $V_i=F\Cap U_i$ olacak şekilde $U_i\in\mathcal{T}$ vardır. Bu durumda Önerme 2.3.7.'den elemanter kesişim ve birleşim işlemlerinin genelde dağılma özelliği olmadığından

$$\bigcup_{i\in I}V_i=\bigcup_{i\in I}\left(F\Cap U_i\right)\tilde{\supseteq}F\Cap\bigcup_{i\in I}U_i$$

elde edilir.

Herhangi bir $\left(\tilde{X},\mathcal{T},A\right)$ elemanter esnek topolojik uzayı ve $F\in S\left(\tilde{X}\right)$ esnek kümesi verildiğinde $\mathcal{T}$ topolojisinden indirgenen $\mathcal{T}_F$ sınıfının F üzerinde elemanter esnek topoloji olması aşağıdaki önermede verilmiştir.

Önerme 5.1.1. $\left(\tilde{X},\mathcal{T},A\right)$ elemanter esnek topolojik uzay ve $F\in S\left(\tilde{X}\right)$ olsun. Her $U\in\mathcal{T}$ için $F\tilde{\cap}U\in S\left(\tilde{X}\right)$ ise $\mathcal{T}_F=\left\{F\Cap U:U\in\mathcal{T}\right\}$ sınıfı F üzerinde bir elemanter esnek topolojidir.

İspat. 1. $F\Cap\Phi=\Phi$ ve $F\Cap\tilde{X}=F$ olduğundan $\Phi,F\in\mathcal{T}_F$ olur.

2. $V_1,V_2\in\mathcal{T}_F$ olsun. Bu durumda $V_1=F\Cap U_1$ ve $V_2=F\Cap U_2$ olacak şekilde $U_1,U_2\in\mathcal{T}$ vardır. Buradan $V_1\Cap V_2=\left(F\Cap U_1\right)\Cap\left(F\Cap U_2\right)=F\Cap\left(U_1\Cap U_2\right)$ olur. Böylece $U_1\Cap U_2\in\mathcal{T}$ olduğundan $V_1\Cap V_2\in\mathcal{T}_F$ elde edilir.

3. Her $i\in I$ için $V_i\in\mathcal{T}_F$ olsun. Bu durumda $V_i=F\Cap U_i$ olacak şekilde $U_i\in\mathcal{T}$ vardır. Buradan her $U\in\mathcal{T}$ için $F\tilde{\cap}U\in S\left(\tilde{X}\right)$ olduğu göz önünde bulundurularak Önerme 2.3.10.'dan $\bigcup\!\!\!\!\bigcup_{i\in I}V_i=\bigcup\!\!\!\!\bigcup_{i\in I}\left(F\Cap U_i\right)=F\Cap\bigcup\!\!\!\!\bigcup_{i\in I}U_i$ olur. Böylece $\bigcup\!\!\!\!\bigcup_{i\in I}V_i\in\mathcal{T}_F$ elde edilir.

Tanım 5.1.2. $\left(\tilde{X},\mathcal{T},A\right)$ elemanter esnek topolojik uzay olmak üzere herhangi $F\in S\left(\tilde{X}\right)$ esnek kümesi için Önerme 5.1.1.'deki $\mathcal{T}$ topolojisinden F esnek kümesi üzerine indirgenen $\mathcal{T}_F$ elemanter esnek topolojisine elemanter esnek alt uzay topolojisi ve $\left(F,\mathcal{T}_F,A\right)$ uzayına da $\left(\tilde{X},\mathcal{T},A\right)$ uzayının elemanter esnek alt uzayı denir.

Örnek 5.1.3. Örnek 3.1.9.'a göre $\tilde{X}$ üzerinde $\mathcal{T}_3$ elemanter esnek topolojisi ve $F=\left\{\left(\lambda,\{x,z\}\right),\left(\mu,X\right)\right\}$ esnek kümesi verilsin. Her $U\in\mathcal{T}_3$ için $F\tilde{\cap}U\in S\left(\tilde{X}\right)$ olduğu kolayca görülür. Buradan

$$F \Cap \Phi = \Phi, \qquad\qquad F \Cap \tilde{X} = F,$$
$$F \Cap F_1 = \{(\lambda, \{x\}), (\mu, \{x, z\})\} = V_1, \quad F \Cap F_3 = \{(\lambda, \{z\}), (\mu, \{y, z\})\} = V_2$$

olmak üzere $\mathcal{T}_F = \{\Phi, F, V_1, V_2\}$ sınıfı F üzerinde elemanter esnek alt uzay topolojisi olur.

Önerme 5.1.4. $(\tilde{X}, \mathcal{T}, A)$ elemanter esnek uzay ve $(F, \mathcal{T}_F, A)$ elemanter esnek alt uzayı verilsin. Eğer $U, V \in \mathcal{T}$ için $U \tilde{\cap} V \in S(\tilde{X})$ ise her $\lambda \in A$ için $\mathcal{T}_{F(\lambda)}$, $F(\lambda)$ üzerinde bir topoloji olur ve $(F(\lambda), \mathcal{T}_{F(\lambda)})$ uzayı $(X, \mathcal{T}_\lambda)$ uzayının bir alt uzayı olur.

İspat. Önerme 3.1.14.'den açıktır.

Teorem 5.1.5. $(\tilde{X}, \mathcal{T}, A)$ elemanter esnek uzay, $F, F^C \in S(\tilde{X})$ olmak üzere $(F, \mathcal{T}_F, A)$ elemanter esnek alt uzayı ve $G \in S(F)$ verilsin. G esnek kümesinin $(F, \mathcal{T}_F, A)$ elemanter esnek alt uzayında esnek kapalı olması için gerek ve yeter şart $U \in \mathcal{T}$ ve $U^C \in S(\tilde{X})$ olmak üzere $G = F \Cap U^{\mathbb{C}}$ olmasıdır.

İspat. $\Rightarrow$ $G \in S(F)$ esnek kümesi $(F, \mathcal{T}_F, A)$ uzayında esnek kapalı olsun. Bu durumda $G_F^{\mathbb{C}} \in \mathcal{T}_F$ ve $G_F^C \in S(F)$ olur. $G_F^{\mathbb{C}} \in \mathcal{T}_F$ olduğundan $G_F^{\mathbb{C}} = F \Cap U$ olacak şekilde $U \in \mathcal{T}$ vardır. Buradan F esnek kümesine göre her iki tarafın elemanter tümleyeni alınırsa

$$\left(G_F^{\mathbb{C}}\right)_F^{\mathbb{C}} = (F \Cap U)_F^{\mathbb{C}}$$
$$G = F \Cap (F \Cap U)^{\mathbb{C}}$$

olur. Esnek alt uzay tanımından $F \tilde{\cap} U \in S(\tilde{X})$ ve kabulden $F^C \in S(\tilde{X})$ olduğu göz önünde bulundurulursa

$$G = F \Cap \left(F^{\mathbb{C}} \Cup U^{\mathbb{C}}\right)$$

eşitliğinin sağlanması için $U^{C} \in S\left(\tilde{X}\right)$ olmalıdır. Böylece

$$\begin{aligned} G &= \left(F \Cap F^{\mathbb{C}}\right) \Cup \left(F \Cap U^{\mathbb{C}}\right) \\ &= F \Cap U^{\mathbb{C}} \end{aligned}$$

elde edilir.

$\Leftarrow$ $G = F \Cap U^{\mathbb{C}}$ olacak şekilde $U \in \mathcal{T}$ kümesi var ve $U^{C} \in S\left(\tilde{X}\right)$ olsun. Buradan eşitlikte her iki tarafın F esnek kümesine göre elemanter tümleyeni alınırsa

$$\begin{aligned} G_F^{\mathbb{C}} &= \left(F \Cap U^{\mathbb{C}}\right)_F^{\mathbb{C}} \\ &= F \Cap \left(F \Cap U^{\mathbb{C}}\right)^{\mathbb{C}} \\ &= \left(F \Cap F^{\mathbb{C}}\right) \Cup \left(F \Cap \left(U^{\mathbb{C}}\right)^{\mathbb{C}}\right) \\ &= \left(F \Cap U\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda $G_F^{\mathbb{C}} \in \mathcal{T}_F$ olur. Ayrıca kabulden $F, F^{C} \in S\left(\tilde{X}\right)$ ve $G \in S\left(F\right)$ olduğundan $G_F^{C} \in S\left(F\right)$ olur. Dolayısıyla G esnek kümesi $\left(F, \mathcal{T}_F, A\right)$ uzayında esnek kapalı olur.

Teorem 5.1.6. $\left(\tilde{X}, \mathcal{T}, A\right)$ elemanter esnek uzayı verilsin.

1. $F \in S\left(\tilde{X}\right)$ olmak üzere $\left(F, \mathcal{T}_F, A\right)$ uzayında esnek açık olan bir esnek kümenin $\left(\tilde{X}, \mathcal{T}, A\right)$ uzayında esnek açık olması için gerek ve yeter şart F kümesinin $\left(\tilde{X}, \mathcal{T}, A\right)$ uzayında esnek açık olmasıdır.

2. $F, F^C \in S(\tilde{X})$ olmak üzere $(F, \mathcal{T}_F, A)$ uzayında esnek kapalı olan bir esnek küme $(\tilde{X}, \mathcal{T}, A)$ uzayında esnek kapalı ise F esnek kümesi $(\tilde{X}, \mathcal{T}, A)$ uzayında esnek kapalıdır.

İspat. 1. $\Rightarrow$ Her $U \in \mathcal{T}$ için $F \Cap U \in \mathcal{T}$ ise $\tilde{X} \in \mathcal{T}$ olduğundan $F = F \Cap \tilde{X} \in \mathcal{T}$ olur.

$\Leftarrow$ Eğer $F \in \mathcal{T}$ ise her $U \in \mathcal{T}$ için $F \Cap U \in \mathcal{T}$ olup Önerme 5.1.1.'den $F \Cap U \in \mathcal{T}_F$ olur.

2. $U \in \mathcal{T}$ ve $U^C \in S(\tilde{X})$ olmak üzere $(F, \mathcal{T}_F, A)$ uzayında esnek kapalı olan $F \Cap U^{\mathbb{C}}$ esnek kümesi $(\tilde{X}, \mathcal{T}, A)$ uzayında esnek kapalı olsun. Buradan $\tilde{X}$ esnek kapalı olduğundan $U^{\mathbb{C}} = \tilde{X}$ alınırsa $F \Cap \tilde{X} = F$ esnek kapalı olur.

Önerme 5.1.7. $(\tilde{X}, \mathcal{T}, A)$ elemanter esnek uzay ve $(F, \mathcal{T}_F, A)$ elemanter esnek alt uzay olsun. $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ esnek baz ise $\mathcal{B}_F = \{F \Cap B : B \in \mathcal{B}\}$ sınıfı $\mathcal{T}_F$ için esnek bazdır.

İspat. B1. $\tilde{x} \tilde{\in} F$ olsun. $\tilde{x} \tilde{\in} \tilde{X}$ olur. $\mathcal{B}$ esnek baz olduğundan $\tilde{x} \in B$ olacak şekilde en az bir $B \in \mathcal{B}$ vardır. Buradan $\tilde{x} \tilde{\in} F \Cap B$ olup $F \Cap B \in \mathcal{B}_F$ olur.

B2. $C_1, C_2 \in \mathcal{B}_F$ olsun. Bu durumda $C_1 = F \Cap B_1$ ve $C_2 = F \Cap B_2$ olacak şekilde $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ vardır. $\tilde{x} \tilde{\in} C_1 \Cap C_2$ için $\tilde{x} \tilde{\in} \tilde{X}$ olur ve

$$\tilde{x} \tilde{\in} (F \Cap B_1) \Cap (F \Cap B_2) = F \Cap (B_1 \Cap B_2)$$

olur. Böylece $\tilde{x} \tilde{\in} B_1 \Cap B_2$ olup $\mathcal{B}$ esnek baz olduğundan $\tilde{x} \tilde{\in} B_3 \tilde{\subset} B_1 \Cap B_2$ olacak şekilde $B_3 \in \mathcal{B}$ vardır. Dolayısıyla $\tilde{x} \tilde{\in} F$ ve $\tilde{x} \tilde{\in} B_3$ olduğundan $\tilde{x} \tilde{\in} F \Cap B_3 \tilde{\subset} F \Cap (B_1 \Cap B_2)$ olur.

5.2. Esnek Çarpım Uzayı

Bu kısımda esnek kartezyen çarpımın bazı özellikleri ispatlandıktan sonra ilgili mevcut elemanter esnek topolojilerden ve esnek sürekli fonksiyonlardan faydalanarak yeni elemanter esnek topolojiler elde edilmiştir.

$\tilde{X}_1$ ve $\tilde{X}_2$ herhangi iki mutlak esnek küme olmak üzere her $\tilde{x}_1 \tilde{\in} \tilde{X}_1$ ve $\tilde{x}_2 \tilde{\in} \tilde{X}_2$ aynı zamanda tek elemanlı birer esnek kümeye karşılık geldiğinden tanımdan her $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \tilde{\in} \tilde{X}_1 \tilde{\times} \tilde{X}_2$ esnek elemanı $\tilde{x}_1$ ve $\tilde{x}_2$ esnek elemanlarının kartezyen çarpımı yoluyla elde edilen esnek elemandır. Ayrıca $F_1 \in S(\tilde{X}_1)$ ve $F_2 \in S(\tilde{X}_2)$ esnek kümeler olsun. $\mathfrak{B}_1 \subseteq SE(F_1)$ ve $\mathfrak{B}_2 \subseteq SE(F_2)$ sınıfları için $SS(\mathfrak{B}_1) = F_1$ ve $SS(\mathfrak{B}_2) = F_2$ olmak üzere $F_1 \tilde{\times} F_2 = SS(\mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2) = SS(SE(F_1) \times SE(F_2))$ elde edilir ve buradan $F_1 \tilde{\times} F_2 \in S(\tilde{X}_1 \tilde{\times} \tilde{X}_2)$ olduğu açıktır.

Önerme 5.2.1. Herhangi $F, G, H \in S(\tilde{X})$ esnek kümeleri verilsin. Aşağıdaki özellikler sağlanır.

1. $(F \Cap G) \tilde{\times} H = (F \tilde{\times} H) \Cap (G \tilde{\times} H)$,

2. $H \tilde{\times} (F \Cap G) = (H \tilde{\times} F) \Cap (H \tilde{\times} G)$,

3. $(F \Cup G) \tilde{\times} H \tilde{\supseteq} (F \tilde{\times} H) \Cup (G \tilde{\times} H)$,

4. $H \tilde{\times} (F \Cup G) \tilde{\supseteq} (H \tilde{\times} F) \Cup (H \tilde{\times} G)$.

İspat. Yalnızca 1. ve 3. özellikler ispatlanmıştır. 2. ve 4. benzer şekilde ispatlanır.

1.

$$\begin{aligned}
(F \Cap G) \tilde{\times} H &= SS(SE(F \Cap G) \times SE(H)) \\
&= SS((SE(F) \cap SE(G)) \times SE(H)) \\
&= SS((SE(F) \times SE(H)) \cap (SE(G) \times SE(H))) \\
&= SS((SE(F) \times SE(H))) \Cap SS(SE(G) \times SE(H)) \\
&= (F \tilde{\times} H) \Cap (G \tilde{\times} H).
\end{aligned}$$

3.

$$
\begin{aligned}
(F \Cup G) \tilde{\times} H &= SS(SE(F \Cup G) \times SE(H)) \\
&\tilde{\supseteq} SS((SE(F) \cup SE(G)) \times SE(H)) \\
&= SS((SE(F) \times SE(H)) \cup (SE(G) \times SE(H))) \\
&= SS((SE(F) \times SE(H))) \Cup SS(SE(G) \times SE(H)) \\
&= (F \tilde{\times} H) \Cup (G \tilde{\times} H).
\end{aligned}
$$

$\tilde{X}$ herhangi mutlak esnek küme, $(\tilde{Y}, \mathcal{T}', A)$ elemanter esnek topolojik uzay ve $f : SE(\tilde{X}) \to SE(\tilde{Y})$ esnek dönüşüm olmak üzere

$$
\mathcal{T} = \left\{ U \in S(\tilde{X}) : U = SS\left(f^{-1}(SE(U'))\right),\ U' \in \mathcal{T}' \right\}
$$

sınıfı $\tilde{X}$ üzerinde bir elemanter esnek topoloji değildir. Gerçekten, her $i \in I$ için $U_i \in \mathcal{T}$ verildiğinde $U_i = SS\left(f^{-1}(SE(U_i'))\right)$ olacak şekilde $U_i' \in \mathcal{T}'$ vardır. Buradan

$$
\begin{aligned}
\Cup_{i \in I} U_i = \Cup_{i \in I} SS\left(f^{-1}\left(SE\left(U_i'\right)\right)\right) &= SS\left(\bigcup_{i \in I} f^{-1}\left(SE\left(U_i'\right)\right)\right) && \text{(Önerme 2.3.2. (3))} \\
&= SS\left(f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} SE\left(U_i'\right)\right)\right) \\
&\tilde{\subseteq} SS\left(f^{-1}\left(SE\left(\Cup_{i \in I} U_i'\right)\right)\right) && \text{(Lemma 2.3.6. (2))}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece $\Cup_{i \in I} U_i' \in \mathcal{T}'$ olduğundan $SS\left(f^{-1}\left(SE\left(\Cup_{i \in I} U_i'\right)\right)\right) \in \mathcal{T}$ olur. Fakat $\Cup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$ olmayabilir.

Ayrıca $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$ olsun. Bu durumda

$$U_1 = SS\left(f^{-1}\left(SE\left(U_1'\right)\right)\right) \text{ ve } U_2 = SS\left(f^{-1}\left(SE\left(U_2'\right)\right)\right)$$

olacak şekilde $U_1', U_2' \in \mathcal{T}'$ vardır. Buradan

$$\begin{aligned} U_1 \Cap U_2 &= SS\left(f^{-1}\left(SE\left(U_1'\right)\right)\right) \Cap SS\left(f^{-1}\left(SE\left(U_2'\right)\right)\right) \\ &\tilde{\supseteq}\, SS\left(f^{-1}\left(SE\left(U_1'\right)\right) \cap f^{-1}\left(SE\left(U_2'\right)\right)\right) && \text{(Önerme 2.3.3. (5))} \\ &= SS\left(f^{-1}\left(SE\left(U_1'\right) \cap SE\left(U_2'\right)\right)\right) \\ &= SS\left(f^{-1}\left(SE\left(U_1' \Cap U_2'\right)\right)\right) && \text{(Lemma 2.3.6. (1))} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $U_1' \Cap U_2' \in \mathcal{T}'$ olduğundan $SS\left(f^{-1}\left(SE\left(U_1' \Cap U_2'\right)\right)\right) \in \mathcal{T}$ olur. Fakat $U_1 \Cap U_2 \in \mathcal{T}$ olmayabilir.

Bir elemanter esnek topolojik uzay verildiğinde esnek fonksiyonlardan faydalanarak bir başka esnek küme üzerine elemanter esnek topoloji kurmak aşağıdaki teorem ile mümkündür.

Teorem 5.2.2. $\tilde{X}$ herhangi mutlak esnek küme, $\left(\tilde{Y}, \mathcal{T}', A\right)$ elemanter esnek topolojik uzay ve $f : SE\left(\tilde{X}\right) \to SE\left(\tilde{Y}\right)$ esnek fonksiyon olmak üzere

$$\mathcal{T}^* = \left\{U \in S\left(\tilde{X}\right) : SE(U) = f^{-1}\left(SE(U')\right) \ \exists\, U' \in \mathcal{T}' \ \ni \ U = SS\left(f^{-1}\left(SE(U')\right)\right)\right\}$$

sınıfı $\tilde{X}$ üzerinde bir elemanter esnek topolojidir.

İspat. 1. $U' = \Phi \Rightarrow f^{-1}\left(SE(\Phi)\right) = \varnothing \Rightarrow U = SS(\varnothing) = \Phi \Rightarrow \Phi \in \mathcal{T}^*$.

$$U' = \tilde{Y} \Rightarrow f^{-1}\left(SE\left(\tilde{Y}\right)\right) = SE\left(\tilde{X}\right) \Rightarrow U = SS\left(SE\left(\tilde{X}\right)\right) = \tilde{X} \Rightarrow \tilde{X} \in \mathcal{T}^*.$$

2. Her $i \in I$ için $U_i \in \mathcal{T}^*$ verildiğinde $U_i = SS\left(f^{-1}\left(SE(U_i')\right)\right)$ olacak şekilde $U_i' \in \mathcal{T}'$ vardır. Buradan

$$\Cup_{i\in I} U_i = \Cup_{i\in I} SS\left(f^{-1}\left(SE\left(U_i'\right)\right)\right) = SS\left(\bigcup_{i\in I} f^{-1}\left(SE\left(U_i'\right)\right)\right) \quad \text{(Önerme 2.3.2. (3))}$$
$$= SS\left(f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} SE\left(U_i'\right)\right)\right)$$

olur. f esnek fonksiyon olduğundan Uyarı 4.1.13. gereği

$$\Cup_{i\in I} U_i = SS\left(f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} SE\left(U_i'\right)\right)\right) = SS\left(f^{-1}\left(SE\left(\Cup_{i\in I} U_i'\right)\right)\right)$$

olur. Dolayısıyla $\Cup_{i\in I} U_i' \in \mathcal{T}'$ ve $\bigcup_{i\in I} SE(U_i) = f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} SE\left(U_i'\right)\right)$ olduğundan $\Cup_{i\in I} U_i = SS\left(f^{-1}\left(SE\left(\Cup_{i\in I} U_i'\right)\right)\right) \in \mathcal{T}^*$ elde edilir.

3. $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$ olsun. Bu durumda

$$SE(U_1) = f^{-1}\left(SE\left(U_1'\right)\right) \text{ ve } SE(U_2) = f^{-1}\left(SE\left(U_2'\right)\right)$$

olacak şekilde $U_1', U_2' \in \mathcal{T}'$ vardır. Buradan

$$SE(U_1 \Cap U_2) = SE(U_1) \cap SE(U_2) \quad \text{(Lemma 2.3.6. (1))}$$
$$= f^{-1}\left(SE\left(U_1'\right)\right) \cap f^{-1}\left(SE\left(U_2'\right)\right)$$
$$= f^{-1}\left(SE\left(U_1'\right) \cap SE\left(U_2'\right)\right)$$
$$= f^{-1}\left(SE\left(U_1' \Cap U_2'\right)\right)$$

elde edilir. Böylece $U_1 \Cap U_2 = SS\left(f^{-1}\left(SE\left(U_1' \Cap U_2' \right)\right)\right)$ olur. Dolayısıyla $U_1' \Cap U_2' \in \mathcal{T}'$ olduğundan $SS\left(f^{-1}\left(SE\left(U_1' \Cap U_2' \right)\right)\right) \in \mathcal{T}^*$ olur.

Önerme 5.2.3. $\tilde{X}$ herhangi mutlak esnek küme, $\left(\tilde{Y}, \mathcal{T}', A\right)$ elemanter esnek topolojik uzay ve $f : SE\left(\tilde{X}\right) \to SE\left(\tilde{Y}\right)$ esnek fonksiyon olmak üzere $\mathcal{T}^*$ sınıfı f esnek fonksiyonunu esnek sürekli kılan en kaba elemanter esnek topolojidir.

İspat. $\mathcal{T}$, $\tilde{X}$ üzerinde $\mathcal{T}^*$ topolojisinden başka f esnek fonksiyonunu esnek sürekli kılan elemanter esnek topoloji olsun. Bu durumda f esnek sürekli olduğundan her $U' \in \mathcal{T}'$ için $SS\left(f^{-1}\left(SE\left(U'\right)\right)\right) \in \mathcal{T}$ olur. $\mathcal{T}^*$ topolojisinin tanımından her $U = SS\left(f^{-1}\left(SE\left(U'\right)\right)\right) \in \mathcal{T}^*$ için $U = SS\left(f^{-1}\left(SE\left(U'\right)\right)\right) \in \mathcal{T}$ olduğundan $\mathcal{T}^* \subset \mathcal{T}$ olur. Yani $\mathcal{T}^*$ sınıfı f esnek fonksiyonunu esnek sürekli kılan en kaba elemanter esnek topolojidir.

Tanım 5.2.4. $\tilde{X}$ herhangi mutlak esnek küme, $\left\{\left(\tilde{Y}_i, \mathcal{T}_i', A\right) : i \in I\right\}$ elemanter esnek topolojik uzaylar ailesi, her $i \in I$ için $f_i : SE\left(\tilde{X}\right) \to SE\left(\tilde{Y}_i\right)$ esnek fonksiyon ve her f_i esnek fonksiyonunu esnek sürekli kılan $\tilde{X}$ üzerindeki en kaba elemanter esnek topoloji $\mathcal{T}^*$ olsun. Bu durumda $\mathcal{T}^*$ topolojisine $\left\{\mathcal{T}_i' : i \in I\right\}$ topolojiler ailesinin $\left\{ f_i : i \in I\right\}$ esnek fonksiyonlarına göre $\tilde{X}$ üzerindeki elemanter esnek başlangıç topolojisi ve $\left(\tilde{X}, \mathcal{T}^*, A\right)$ uzayına da $\left\{\left(\tilde{Y}_i, \mathcal{T}_i', A\right) : i \in I\right\}$ uzaylarının $\left\{ f_i : i \in I\right\}$ esnek fonksiyonlarına göre elemanter esnek başlangıç uzayı denir.

Teorem 5.2.5. $\tilde{X}$ herhangi mutlak esnek küme, $\left\{\left(\tilde{Y}_i, \mathcal{T}_i', A\right) : i \in I\right\}$ elemanter esnek topolojik uzaylar ailesi ve her $i \in I$ için $f_i : SE\left(\tilde{X}\right) \to SE\left(\tilde{Y}_i\right)$ esnek fonksiyonu verilsin. Bu durumda

$$\mathcal{S} = \left\{ F_{i_j} \in S\left(\tilde{X}\right) : \exists i \in I,\ SE\left(F_{i_j}\right) = f_i^{-1}\left(SE\left(U'\right)\right)\ \exists U' \in \mathcal{T}_i' \ni F_{i_j} = SS\left(f_i^{-1}\left(SE\left(U'\right)\right)\right)\right\}$$

sınıfını esnek alt baz kabul eden $\tilde{X}$ üzerindeki en kaba elemanter esnek topoloji $\left\{\left(\tilde{Y}_i, \mathcal{T}_i', A\right) : i \in I\right\}$ uzaylarının $\left\{ f_i : i \in I\right\}$ esnek fonksiyonlarına göre elemanter esnek başlangıç topolojisidir.

İspat. $\mathcal{S}$ sınıfının ürettiği elemanter esnek topoloji $\mathcal{T}\left(\mathcal{S}\right)$ olsun. Herhangi bir $F \in \mathcal{T}\left(\mathcal{S}\right)$ alalım. $J \subset I$ sonlu alt ailesi ver herhangi $i \in I$ için $F_{i_j} \in \mathcal{S}$ olmak üzere

$$F = \bigcup_{i \in I}\left(\bigcap_{j \in J} F_{i_j}\right)$$

olur. Dolayısıyla $F_{i_j} \in \mathcal{S}$ olduğundan $F_{i_j} = SS\left(f_i^{-1}\left(SE\left(U_{i_j}'\right)\right)\right)$ olacak şekilde en az bir $U_{i_j}' \in \mathcal{T}_i'$ vardır. Her $i \in I$ için f_i esnek sürekli olduğundan $SS\left(f_i^{-1}\left(SE\left(U_{i_j}'\right)\right)\right)$ esnek kümesi $\tilde{X}$ üzerindeki $\mathcal{T}^*$ elemanter esnek başlangıç topolojisine aittir, yani $SS\left(f_i^{-1}\left(SE\left(U_{i_j}'\right)\right)\right) \in \mathcal{T}^*$ olur. Buradan $F \in \mathcal{T}^*$ elde edilir. O halde $\mathcal{T}\left(\mathcal{S}\right) \subset \mathcal{T}^*$ olur.

Diğer taraftan her $i \in I$ için her f_i esnek fonksiyonu $\mathcal{T}\left(\mathcal{S}\right)$ topolojisine göre $\tilde{X}$ üzerinde süreklidir. Elemanter esnek başlangıç topolojisi tanımı ve Teorem 5.2.5. gereği $\mathcal{T}^* \subset \mathcal{T}\left(\mathcal{S}\right)$ olur. Böylece $\mathcal{T}\left(\mathcal{S}\right) = \mathcal{T}^*$ elde edilir.

$\left(\tilde{X}_1, \mathcal{T}_1, A\right)$ ve $\left(\tilde{X}_2, \mathcal{T}_2, A\right)$ uzayları verilsin. $\tilde{X}_1$ ve $\tilde{X}_2$ esnek kümelerinin kartezyen çarpımı $\tilde{X} = \tilde{X}_1 \tilde{\times} \tilde{X}_2$ ile tanımlandığından her $i \in I$ için $\pi_i : SE\left(\tilde{X}\right) \to SE\left(\tilde{X}_i\right)$ esnek izdüşüm dönüşümü $\tilde{x} = \left(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2\right) \tilde{\in} \tilde{X}$ için $\pi_1\left(\tilde{x}\right) = \tilde{x}_1$ ve $\pi_2\left(\tilde{x}\right) = \tilde{x}_2$ şeklindedir.

Bundan sonraki kısımda her $i \in I$ için $\left(\tilde{X}_i, \mathcal{T}_i, A\right)$ elemanter esnek topolojik uzayları verildiğinde $\tilde{X} = \widetilde{\prod_{i \in I}} \tilde{X}_i$ çarpımı üzerine bir topolojik yapının nasıl kurulacağı açıklanmıştır. Bunun için öncelikle verilen iki elemanter esnek topolojik uzay için çarpım üzerinde elemanter esnek topoloji tanımlanmıştır.

Tanım 5.2.6. $\left(\tilde{X}_1, \mathcal{T}_1, A\right)$, $\left(\tilde{X}_2, \mathcal{T}_2, A\right)$ uzayları ve $\tilde{X} = \left(\tilde{X}_1 \tilde{\times} \tilde{X}_2\right)$ çarpımı verilsin. Her $i = 1, 2$ için $\pi_i : SE\left(\tilde{X}\right) \to SE\left(\tilde{X}_i\right)$ esnek izdüşüm fonksiyonlarını esnek sürekli kılan $\tilde{X}$ üzerindeki en kaba elemanter esnek topolojiye ya da $\tilde{X}$ üzerindeki elemanter esnek başlangıç topolojisine $\mathcal{T}_1$ ve $\mathcal{T}_2$ topolojilerinin elemanter esnek çarpım topolojisi denir.

$$SE\left(U_1 \tilde{\times} \tilde{X}_2\right) = \pi_1^{-1}\left(SE\left(U_1\right)\right)$$

olacak şekildeki her $U_1 \in \mathcal{T}_1$ için $U_1 \tilde{\times} \tilde{X}_2 = SS\left(\pi_1^{-1}\left(SE\left(U_1\right)\right)\right)$ ve

$$SE\left(\tilde{X}_1 \tilde{\times} U_2\right) = \pi_2^{-1}\left(SE\left(U_2\right)\right)$$

olacak şekildeki her $U_2 \in \mathcal{T}_2$ için $\tilde{X}_1 \tilde{\times} U_2 = SS\left(\pi_2^{-1}\left(SE\left(U_2\right)\right)\right)$ olduğundan Teorem 5.2.5.'den $\tilde{X}$ üzerindeki elemanter esnek çarpım topolojisinin bir esnek alt bazı

$$\mathcal{S} = \left\{SS\left(\pi_1^{-1}\left(SE\left(U_1\right)\right)\right), SS\left(\pi_2^{-1}\left(SE\left(U_2\right)\right)\right) : U_1 \in \mathcal{T}_1, U_2 \in \mathcal{T}_2\right\}$$

ya da

$$\mathcal{S} = \left\{U_1 \tilde{\times} \tilde{X}_2, \tilde{X}_1 \tilde{\times} U_2 : U_1 \in \mathcal{T}_1, U_2 \in \mathcal{T}_2\right\}$$

sınıfıdır.

Teorem 5.2.7. $\left(\tilde{X}_1, \mathcal{T}_1, A\right)$, $\left(\tilde{X}_2, \mathcal{T}_2, A\right)$ uzayları ve $\tilde{X} = \left(\tilde{X}_1 \tilde{\times} \tilde{X}_2\right)$ çarpımı verilsin. Her $U_1 \in \mathcal{T}_1$ için ve her $U_2 \in \mathcal{T}_2$ için

$$\mathcal{B} = \left\{U_1 \tilde{\times} U_2 : U_1 \in \mathcal{T}_1,\ U_2 \in \mathcal{T}_2\right\}$$

sınıfı $\tilde{X}$ üzerindeki elemanter esnek çarpım topolojisi için bir esnek bazdır.

İspat. Tanım 3.3.12.'den $\tilde{X}$ üzerindeki elemanter esnek çarpım topolojisinin esnek alt bazı $\mathcal{S}$ sınıfının elemanlarının sonlu elemanter kesişimleri esnek çarpım topolojisinin esnek bazının elemanlarını verir. $\mathcal{S}$ sınıfının elemanları

$$SE\left(U_1 \tilde{\times} \tilde{X}_2\right) = \pi_1^{-1}\left(SE\left(U_1\right)\right)$$

olmak üzere her $U_1 \in \mathcal{T}_1$ için $U_1 \tilde{\times} \tilde{X}_2 = SS\left(\pi_1^{-1}\left(SE\left(U_1\right)\right)\right)$ ve

$$SE\left(\tilde{X}_1 \tilde{\times} U_2\right) = \pi_2^{-1}\left(SE\left(U_2\right)\right)$$

olmak üzere her $U_2 \in \mathcal{T}_2$ için $\tilde{X}_1 \tilde{\times} U_2 = SS\left(\pi_2^{-1}\left(SE\left(U_2\right)\right)\right)$ oldup Önerme 5.2.1.'den

$$\begin{aligned}
\pi_1^{-1}\left(SE\left(U_1\right)\right) \cap \pi_2^{-1}\left(SE\left(U_2\right)\right) &= SE\left(U_1 \tilde{\times} \tilde{X}_2\right) \cap SE\left(\tilde{X}_1 \tilde{\times} U_2\right) \\
&= SE\left(\left(U_1 \tilde{\times} \tilde{X}_2\right) \Cap \left(\tilde{X}_1 \tilde{\times} U_2\right)\right) \\
&= SE\left(\left(U_1 \Cap \tilde{X}_1\right) \tilde{\times} \left(\tilde{X}_1 \Cap U_2\right)\right) \\
&= SE\left(U_1 \tilde{\times} U_2\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\left(U_1 \tilde{\times} \tilde{X}_2\right) \Cap \left(U_2 \tilde{\times} \tilde{X}_1\right) = SS\left(\pi_1^{-1}\left(SE\left(U_1\right)\right)\right) \Cap SS\left(\pi_2^{-1}\left(SE\left(U_2\right)\right)\right) = U_1 \tilde{\times} U_2$$

bulunur. O halde $\mathcal{B}$ sınıfı Tanım 3.3.12.'den $\tilde{X}$ üzerindeki elemanter esnek topoloji için bir esnek bazdır.

Sonuç 5.2.8. $(\tilde{X},\mathcal{T},A)$ elemanter esnek çarpım uzayında bir $F\in S(\tilde{X})$ esnek kümesinin esnek açık olması için gerek ve yeter şart her $\tilde{x}=(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)\tilde{\in}F$ için $\tilde{x}_1\tilde{\in}U_1$ ve $\tilde{x}_2\tilde{\in}U_2$ olacak şekilde $U_1\in\mathcal{T}_1$ ve $U_2\in\mathcal{T}_2$ olmak üzere

$$F=\tilde{\bigcup_{\tilde{x}\tilde{\in}F}}(U_1\tilde{\times}U_2)$$

olmasıdır.

Teorem 5.2.9. $(\tilde{X}_1,\mathcal{T}_1,A)$ ve $(\tilde{X}_2,\mathcal{T}_2,A)$ uzayları için sırasıyla $\mathcal{B}_1$ ve $\mathcal{B}_2$ birer esnek baz olsun.

$$\mathcal{B}=\{B_1\tilde{\times}B_2 : B_1\in\mathcal{B}_1 \text{ ve } B_2\in\mathcal{B}_2\}$$

sınıfı $\tilde{X}=\tilde{X}_1\tilde{\times}\tilde{X}_2$ üzerindeki elemanter esnek çarpım topolojisi $\mathfrak{P}$ için bir esnek bazdır.

İspat. B1. $\tilde{x}=(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)\tilde{\in}\tilde{X}$ olsun. $\mathcal{B}_1$ ve $\mathcal{B}_2$ birer esnek baz olduğundan sırasıyla $\tilde{x}_1\tilde{\in}B_1$ ve $\tilde{x}_2\tilde{\in}B_2$ olacak şekilde en az bir $B_1\in\mathcal{B}_1$ ve $B_2\in\mathcal{B}_2$ vardır. Buradan $\tilde{x}=(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)\tilde{\in}B_1\tilde{\times}B_2$ olup $B_1\tilde{\times}B_2\in\mathcal{B}$ olur.

B2. $T_1,T_2\in\mathcal{B}$ olsun. Bu durumda $T_1=B_1\tilde{\times}B_2$ ve $T_2=C_1\tilde{\times}C_2$ olacak şekilde $B_1,C_1\in\mathcal{B}_1$ ve $B_2,C_2\in\mathcal{B}_2$ vardır. $\tilde{x}=(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)\tilde{\in}T_1\tilde{\cap}T_2$ için $\tilde{x}\tilde{\in}\tilde{X}$ olur ve

$$T_1\tilde{\cap}T_2=(B_1\tilde{\times}B_2)\tilde{\cap}(C_1\tilde{\times}C_2)$$

olur. Böylece $\tilde{x}_1 \tilde{\in} B_1 \Cap C_1$ ve $\tilde{x}_2 \tilde{\in} B_2 \Cap C_2$ olup $\mathcal{B}_1$ ve $\mathcal{B}_2$ esnek baz olduğundan $\tilde{x}_1 \tilde{\in} D_1 \tilde{\subset} B_1 \Cap C_1$ ve $\tilde{x}_2 \tilde{\in} D_2 \tilde{\subset} B_2 \Cap C_2$ olacak şekilde $D_1 \in \mathcal{B}_1$ ve $D_2 \in \mathcal{B}_2$ vardır. Dolayısıyla $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \tilde{\in} D_1 \tilde{\times} D_2 = D$ olduğundan $\tilde{x} \tilde{\in} D \tilde{\subset} T_1 \Cap T_2$ elde edilir.

Tanım 5.2.6. genelleştirilerek aşağıdaki şekilde verilebilir.

Tanım 5.2.10. Her $i \in I$ için $(\tilde{X}_i, \mathcal{T}_i, A)$ elemanter esnek topolojik uzaylar ailesi verilsin. $\tilde{X} = \tilde{\prod\limits_{i \in I}} \tilde{X}_i$ çarpımı üzerinde her $i \in I$ için $\pi_i : SE(\tilde{X}) \to SE(\tilde{X}_i)$ esnek izdüşüm fonksiyonlarını esnek sürekli kılan $\tilde{X}$ üzerindeki en kaba elemanter esnek topolojiye veya $\tilde{X}$ üzerindeki elemanter esnek başlangıç topolojisine $(\tilde{X}_i, \mathcal{T}_i, A)$ uzaylarının elemanter esnek çarpım topolojisi denir ve $\mathfrak{P}$ ile gösterilir. $(\tilde{X}, \mathfrak{P}, A)$ uzayına $(\tilde{X}_i, \mathcal{T}_i, A)$ uzaylarının esnek çarpım uzayı $(\tilde{X}_i, \mathcal{T}_i, A)$ uzaylarının her birine de esnek çarpan uzayı denir.

Örnek 5.2.11. $X_1 = \{x, y, z\}$, $X_2 = \{a, b\}$ evrensel kümeler ve $A = \{\lambda, \mu\}$ parametreler kümesi olsun. $F_1, F_2 \in S(\tilde{X}_1)$ ve $G_1, G_2 \in S(\tilde{X}_2)$ esnek kümeleri

$$
\begin{aligned}
F_1 &= \{(\lambda, \{x, y\}), (\mu, \{x, z\})\}, \quad & G_1 &= \{(\lambda, \{a\}), (\mu, \{a, b\})\}, \\
F_2 &= \{(\lambda, \{z\}), (\mu, \{y, z\})\}, \quad & G_2 &= \{(\lambda, \{b\}), (\mu, \{a\})\}
\end{aligned}
$$

olmak üzere $\mathcal{T}_1 = \{\tilde{X}_1, \Phi, F_1, F_2\}$ ve $\mathcal{T}_2 = \{\tilde{X}_2, \Phi, G_1, G_2\}$ sırasıyla $\tilde{X}_1$ ve $\tilde{X}_2$ üzerinde elemanter esnek topolojiler olsun. Teorem 5.2.5.'den $\tilde{X} = \tilde{X}_1 \tilde{\times} \tilde{X}_2$ esnek çarpım kümesi üzerindeki bir elemanter esnek topoloji için bir esnek alt baz, $\pi_i : SE(\tilde{X}) \to SE(\tilde{X}_i)$, $i = 1, 2$ esnek izdüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$\pi_1^{-1}\left(SE\left(\tilde{X}_1\right)\right)=SE\left(\tilde{X}_1\tilde{\times}\tilde{X}_2\right),\quad \pi_1^{-1}\left(SE\left(F_1\right)\right)=SE\left(F_1\tilde{\times}\tilde{X}_2\right),$$
$$\pi_1^{-1}\left(SE\left(\Phi\right)\right)=SE\left(\Phi\tilde{\times}\tilde{X}_2\right),\quad \pi_1^{-1}\left(SE\left(F_2\right)\right)=SE\left(F_2\tilde{\times}\tilde{X}_2\right),$$
$$\pi_2^{-1}\left(SE\left(\tilde{X}_2\right)\right)=SE\left(\tilde{X}_1\tilde{\times}\tilde{X}_2\right),\quad \pi_2^{-1}\left(SE\left(\Phi\right)\right)=SE\left(\tilde{X}_1\tilde{\times}\Phi\right),$$
$$\pi_2^{-1}\left(SE\left(G_1\right)\right)=SE\left(\tilde{X}_1\tilde{\times}G_1\right),\quad \pi_2^{-1}\left(SE\left(G_2\right)\right)=SE\left(\tilde{X}_1\tilde{\times}G_2\right)$$

elde edilir ve buradan

$$SS\left(SE\left(\tilde{X}_1\tilde{\times}\tilde{X}_2\right)\right)=\tilde{X}_1\tilde{\times}\tilde{X}_2=\tilde{X},\ SS\left(SE\left(\Phi\tilde{\times}\tilde{X}_2\right)\right)=\Phi,\ SS\left(SE\left(\tilde{X}_1\tilde{\times}\Phi\right)\right)=\Phi,$$

$$SS\left(SE\left(F_1\tilde{\times}\tilde{X}_2\right)\right)=H_1=\left\{\begin{array}{l}\left((\lambda,\lambda),\left\{(x,a),(x,b),(y,a),(y,b)\right\}\right),\\ \left((\lambda,\mu),\left\{(x,a),(x,b),(y,a),(y,b)\right\}\right),\\ \left((\mu,\lambda),\left\{(x,a),(x,b),(z,a),(z,b)\right\}\right),\\ \left((\mu,\mu),\left\{(x,a),(x,b),(z,a),(z,b)\right\}\right)\end{array}\right\},$$

$$SS\left(SE\left(F_2\tilde{\times}\tilde{X}_2\right)\right)=H_2=\left\{\begin{array}{c}\left((\lambda,\lambda),\left\{(z,a),(z,b)\right\}\right),\left((\lambda,\mu),\left\{(z,a),(z,b)\right\}\right),\\ \left((\mu,\lambda),\left\{(y,a),(y,b),(z,a),(z,b)\right\}\right),\\ \left((\mu,\mu),\left\{(y,a),(y,b),(z,a),(z,b)\right\}\right)\end{array}\right\},$$

$$SS\left(SE\left(\tilde{X}_1\tilde{\times}G_1\right)\right)=H_3=\left\{\begin{array}{c}\left((\lambda,\lambda),\left\{(x,a),(y,a),(z,a)\right\}\right),\\ \left((\lambda,\mu),\left\{(x,a),(y,a),(z,a),(x,b),(y,b),(z,b)\right\}\right),\\ \left((\mu,\lambda),\left\{(x,a),(y,a),(z,a)\right\}\right),\\ \left((\mu,\mu),\left\{(x,a),(y,a),(z,a),(x,b),(y,b),(z,b)\right\}\right)\end{array}\right\},$$

$$SS\left(SE\left(\tilde{X}_1\tilde{\times}G_2\right)\right)=H_4=\left\{\begin{array}{l}\left((\lambda,\lambda),\left\{(x,b),(y,b),(z,b)\right\}\right),\\ \left((\lambda,\mu),\left\{(x,a),(y,a),(z,a)\right\}\right),\\ \left((\mu,\lambda),\left\{(x,b),(y,b),(z,b)\right\}\right),\\ \left((\mu,\mu),\left\{(x,a),(y,a),(z,a)\right\}\right)\end{array}\right\}$$

için $\mathcal{S}=\left\{\tilde{X},\Phi,H_1,H_2,H_3,H_4\right\}$ olur. Bu durumda

$$H_1 \Cap H_2 = \Phi,\ H_3 \Cap H_4 = \Phi,$$

$$H_1 \Cap H_3 = J_1 = \left\{ \begin{array}{c} ((\lambda,\lambda),\{(x,a),(y,a)\}),((\lambda,\mu),\{(x,a),(x,b),(y,a),(y,b)\}), \\ ((\mu,\lambda),\{(x,a),(z,a)\}),((\mu,\mu),\{(x,a),(x,b),(z,a),(z,b)\}) \end{array} \right\},$$

$$H_1 \Cap H_4 = J_2 = \left\{ \begin{array}{c} ((\lambda,\lambda),\{(x,b),(y,b)\}),((\lambda,\mu),\{(x,a),(y,a)\}), \\ ((\mu,\lambda),\{(x,b),(z,b)\}),((\mu,\mu),\{(x,a),(z,a)\}) \end{array} \right\},$$

$$H_2 \Cap H_3 = J_3 = \left\{ \begin{array}{c} ((\lambda,\lambda),\{(z,a)\}),((\lambda,\mu),\{(z,a),(z,b)\}),((\mu,\lambda),\{(y,a),(z,a)\}), \\ ((\mu,\mu),\{(y,a),(y,b),(z,a),(z,b)\}) \end{array} \right\},$$

$$H_2 \Cap H_4 = J_4 = \left\{ \begin{array}{c} ((\lambda,\lambda),\{(z,b)\}),((\lambda,\mu),\{(z,a)\}), \\ ((\mu,\lambda),\{(y,b),(z,b)\}),((\mu,\mu),\{(y,a),(z,a)\}) \end{array} \right\}$$

olmak üzere $\mathcal{B} = \{\tilde{X}, \Phi, H_1, H_2, H_3, H_4, J_1, J_2, J_3, J_4\}$ sınıfı $\tilde{X}$ üzerindeki bir elemanter esnek topoloji için esnek baz olur.

5.3. Esnek Bölüm Uzayı

Bu kısımda bir esnek fonksiyon ve bu fonksiyonun tanım kümesi üzerindeki elemanter esnek topoloji yardımıyla değer kümesi üzerine bir topolojik yapı kurulmuştur. Devamında esnek elemanlar yardımıyla esnek kümeler üzerinde bağıntı, denklik bağıntısı ve bölüm kümesi gibi kavramlar verilerek esnek bölüm topolojisi tanıtılmıştır.

$(\tilde{X}, \mathcal{T}, A)$ elemanter esnek topolojik uzay, $\tilde{Y}$ herhangi mutlak esnek küme ve $f : SE(\tilde{X}) \to SE(\tilde{Y})$ esnek dönüşüm olmak üzere

$$\mathcal{T}' = \left\{ U' \in S(\tilde{Y}) : SS\left(f^{-1}\left(SE(U')\right)\right) = U \in \mathcal{T} \right\}$$

sınıfı $\tilde{Y}$ üzerinde bir elemanter esnek topoloji değildir. Gerçekten, her $i \in I$ için $U_i' \in \mathcal{T}'$ olduğundan $U_i = SS\left(f^{-1}\left(SE(U_i')\right)\right) \in \mathcal{T}$ olur. Buradan

$$\bigcup_{i\in I} U_i = \bigcup_{i\in I} SS\left(f^{-1}\left(SE\left(U_i'\right)\right)\right) = SS\left(\bigcup_{i\in I} f^{-1}\left(SE\left(U_i'\right)\right)\right) \qquad \text{(Önerme 2.3.2. (3))}$$

$$= SS\left(f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} SE\left(U_i'\right)\right)\right)$$

$$\tilde{\subset} SS\left(f^{-1}\left(SE\left(\bigcup_{i\in I} U_i'\right)\right)\right) \qquad \text{(Lemma 2.3.6. (2))}$$

elde edilir. $\mathcal{T}$ elemanter esnek topoloji olduğundan $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}$ olur. Fakat $SS\left(f^{-1}\left(SE\left(\bigcup_{i\in I} U_i'\right)\right)\right) \in \mathcal{T}$ olmayabilir ve dolayısıyla $\bigcup_{i\in I} U_i' \in \mathcal{T}'$ olmayabilir.

Benzer şekilde $U_1', U_2' \in \mathcal{T}'$ olsun. Bu durumda $U_1 = SS\left(f^{-1}\left(SE\left(U_1'\right)\right)\right) \in \mathcal{T}$ ve $U_2 = SS\left(f^{-1}\left(SE\left(U_2'\right)\right)\right) \in \mathcal{T}$ olur. Buradan

$$U_1 \Cap U_2 = SS\left(f^{-1}\left(SE\left(U_1'\right)\right)\right) \Cap SS\left(f^{-1}\left(SE\left(U_2'\right)\right)\right)$$

$$\tilde{\supset} SS\left(f^{-1}\left(SE\left(U_1'\right)\right) \cap f^{-1}\left(SE\left(U_2'\right)\right)\right) \qquad \text{(Önerme 2.3.3. (5))}$$

$$= SS\left(f^{-1}\left(SE\left(U_1'\right) \cap SE\left(U_2'\right)\right)\right)$$

$$= SS\left(f^{-1}\left(SE\left(U_1' \Cap U_2'\right)\right)\right) \qquad \text{(Lemma 2.3.6. (1))}$$

elde edilir. $\mathcal{T}$ elemanter esnek topoloji olduğundan $U_1 \Cap U_2 \in \mathcal{T}$ olur. Fakat $SS\left(f^{-1}\left(SE\left(U_1' \Cap U_2'\right)\right)\right) \in \mathcal{T}$ olmayabilir ve dolayısıyla $U_1' \Cap U_2' \in \mathcal{T}'$ olmayabilir.

Bir esnek fonksiyonun tanım kümesi üzerindeki elemanter esnek topoloji yardımıyla, değer kümesi üzerine elemanter esnek topoloji kurmak aşağıdaki teorem ile sağlanır.

Teorem 5.3.1. $\left(\tilde{X},\mathcal{T},A\right)$ elemanter esnek topolojik uzay, $\tilde{Y}$ herhangi mutlak esnek küme ve $f:SE\left(\tilde{X}\right)\rightarrow SE\left(\tilde{Y}\right)$ esnek fonksiyon olmak üzere

$$\mathcal{T}_*=\left\{U'\in S\left(\tilde{Y}\right):U=SS\left(f^{-1}\left(SE\left(U'\right)\right)\right)\in\mathcal{T}\ni SE\left(U\right)=f^{-1}\left(SE\left(U'\right)\right)\right\}$$

sınıfı $\tilde{Y}$ üzerinde bir elemanter esnek topolojidir.

İspat. 1. $U'=\Phi\Rightarrow f^{-1}\left(SE\left(\Phi\right)\right)=\varnothing\Rightarrow U=SS\left(\varnothing\right)=\Phi\in\mathcal{T}\Rightarrow\Phi\in\mathcal{T}_*$.

$U'=\tilde{Y}\Rightarrow f^{-1}\left(SE\left(\tilde{Y}\right)\right)=SE\left(\tilde{X}\right)\Rightarrow U=SS\left(SE\left(\tilde{X}\right)\right)=\tilde{X}\in\mathcal{T}\Rightarrow\tilde{Y}\in\mathcal{T}_*$.

2. Her $i\in I$ için $U_i'\in\mathcal{T}_*$ olduğundan $U_i=SS\left(f^{-1}\left(SE\left(U_i'\right)\right)\right)\in\mathcal{T}$ olur. Buradan

$$\begin{aligned}\Cup_{i\in I}U_i=\Cup_{i\in I}SS\left(f^{-1}\left(SE\left(U_i'\right)\right)\right)&=SS\left(\bigcup_{i\in I}f^{-1}\left(SE\left(U_i'\right)\right)\right) \quad \text{(Önerme 2.3.2. (3))}\\&=SS\left(f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I}SE\left(U_i'\right)\right)\right)\end{aligned}$$

elde edilir. f esnek fonksiyon olduğundan Uyarı 4.1.13. gereği

$$\Cup_{i\in I}U_i=SS\left(f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I}SE\left(U_i'\right)\right)\right)=SS\left(f^{-1}\left(SE\left(\Cup_{i\in I}U_i'\right)\right)\right)$$

olur. Dolayısıyla $\mathcal{T}$ elemanter esnek topoloji ve $\bigcup_{i\in I}SE\left(U_i\right)=f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I}SE\left(U_i'\right)\right)$ olur ve $\Cup_{i\in I}U_i=SS\left(f^{-1}\left(SE\left(\Cup_{i\in I}U_i'\right)\right)\right)\in\mathcal{T}$ yazılır. Böylece $\Cup_{i\in I}U_i'\in\mathcal{T}_*$ elde edilir.

3. $U_1',U_2'\in\mathcal{T}_*$ olsun. Bu durumda

$$SE(U_1) = f^{-1}\left(SE\left(U_1'\right)\right) \text{ ve } SE(U_2) = f^{-1}\left(SE\left(U_2'\right)\right)$$

ile $U_1 = SS\left(f^{-1}\left(SE\left(U_1'\right)\right)\right) \in \mathcal{T}$ ve $U_2 = SS\left(f^{-1}\left(SE\left(U_2'\right)\right)\right) \in \mathcal{T}$ vardır. Buradan

$$\begin{aligned} SE(U_1 \Cap U_2) &= SE(U_1) \cap SE(U_2) \qquad \text{(Lemma 2.3.6. (1))} \\ &= f^{-1}\left(SE\left(U_1'\right)\right) \cap f^{-1}\left(SE\left(U_2'\right)\right) \\ &= f^{-1}\left(SE\left(U_1'\right) \cap SE\left(U_2'\right)\right) \\ &= f^{-1}\left(SE\left(U_1' \Cap U_2'\right)\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $U_1 \Cap U_2 = SS\left(f^{-1}\left(SE\left(U_1' \Cap U_2'\right)\right)\right)$ olur. Dolayısıyla $\mathcal{T}$ elemanter esnek topoloji olduğundan $U_1 \Cap U_2 = SS\left(f^{-1}\left(SE\left(U_1' \Cap U_2'\right)\right)\right) \in \mathcal{T}$ olur ve dolayısıyla $U_1' \Cap U_2' \in \mathcal{T}_*$ elde edilir.

Önerme 5.3.2. $\left(\tilde{X}, \mathcal{T}, A\right)$ elemanter esnek topolojik uzay, $\tilde{Y}$ herhangi mutlak esnek küme ve $f : SE\left(\tilde{X}\right) \to SE\left(\tilde{Y}\right)$ esnek fonksiyon olmak üzere $\mathcal{T}_*$ sınıfı f esnek fonksiyonunu esnek sürekli kılan en ince elemanter esnek topolojidir.

İspat. $\mathcal{T}'$, $\tilde{Y}$ üzerinde f esnek fonksiyonunu esnek sürekli kılan $\mathcal{T}_*$ topolojisinden farklı bir elemanter esnek topoloji olsun. Bu durumda f esnek sürekli olduğundan Teorem 4.2.2.'den her $U' \in \mathcal{T}'$ için $SS\left(f^{-1}\left(SE(U')\right)\right) \in \mathcal{T}$ olur. Dolayısıyla $\mathcal{T}_*$ topolojisinin tanımından $U' \in \mathcal{T}_*$ olduğundan $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}_*$ olur. Yani $\mathcal{T}_*$ sınıfı f esnek fonksiyonunu esnek sürekli kılan en ince elemanter esnek topolojidir.

Tanım 5.3.3. $\left\{\left(\tilde{X}_i, \mathcal{T}_i, A\right) : i \in I\right\}$ elemanter esnek topolojik uzaylar ailesi, $\tilde{Y}$ herhangi mutlak esnek küme, her $i \in I$ için $f_i : SE\left(\tilde{X}_i\right) \to SE\left(\tilde{Y}\right)$ esnek fonksiyonu ve her bir f_i esnek fonksiyonunu esnek sürekli kılan $\tilde{Y}$ üzerindeki en ince elemanter esnek topoloji $\mathcal{T}_*$ olsun. Bu durumda $\mathcal{T}_*$ topolojisine $\{\mathcal{T}_i : i \in I\}$ topolojiler ailesinin $\{f_i : i \in I\}$ esnek fonksiyonlarına göre $\tilde{Y}$ üzerindeki elemanter esnek sonuç topolojisi ve $\left(\tilde{Y}, \mathcal{T}_*, A\right)$ uzayına da $\left\{\left(\tilde{X}_i, \mathcal{T}_i, A\right) : i \in I\right\}$ uzaylarının $\{f_i : i \in I\}$ esnek fonksiyonlarına göre esnek sonuç uzayı denir.

Teorem 5.3.4. $\left\{\left(\tilde{X}_i, \mathcal{T}_i, A\right) : i \in I\right\}$ elemanter esnek topolojik uzaylar ailesi, $\tilde{Y}$ herhangi mutlak esnek küme, her $i \in I$ için $f_i : SE\left(\tilde{X}_i\right) \to SE\left(\tilde{Y}\right)$ esnek fonksiyon ve $\mathcal{T}_*$ topolojisi de $\tilde{Y}$ üzerindeki elemanter esnek sonuç topolojisi olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır.

1. Her $i \in I$ için $f_i : SE\left(\tilde{X}_i\right) \to SE\left(\tilde{Y}\right)$ fonksiyonu esnek süreklidir.

2. Her $i \in I$ için $f_i : SE\left(\tilde{X}_i\right) \to SE\left(\tilde{Y}\right)$ fonksiyonunu esnek sürekli kılan $\tilde{Y}$ üzerindeki herhangi elemanter esnek topoloji $\mathcal{T}'$ olmak üzere $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}_*$ olur.

İspat. Teorem 5.3.1.'in direkt sonucudur.

Teorem 5.3.5. $\left\{\left(\tilde{X}_i, \mathcal{T}_i, A\right) : i \in I\right\}$ elemanter esnek topolojik uzaylar ailesi, $\left(\tilde{Z}, \mathcal{T}', A\right)$ elemanter esnek topolojik uzay, $\tilde{Y}$ herhangi mutlak esnek küme, her $i \in I$ için $f_i : SE\left(\tilde{X}_i\right) \to SE\left(\tilde{Y}\right)$ esnek fonksiyon ve $\mathcal{T}_*$ topolojisi de $\tilde{Y}$ üzerindeki elemanter esnek sonuç topolojisi olsun. $g : SE\left(\tilde{Y}\right) \to SE\left(\tilde{Z}\right)$ esnek fonksiyonunun esnek sürekli olması için gerek ve yeter şart her $i \in I$ için $g \circ f_i : SE\left(\tilde{X}_i\right) \to SE\left(Z\right)$ bileşke fonksiyonunun esnek sürekli olmasıdır.

İspat. $\Rightarrow$ $g : SE(\tilde{Y}) \rightarrow SE(\tilde{Z})$ esnek fonksiyonu esnek sürekli olsun. Tanım 5.3.3. gereği her $i \in I$ için f_i fonksiyonları esnek sürekli olduğundan ve Teorem 4.2.8.'den her $i \in I$ için $g \circ f_i$ bileşke fonksiyonları esnek sürekli olur.

$\Leftarrow$ Her $i \in I$ için $g \circ f_i$ bileşke fonksiyonları esnek sürekli olsun. Keyfi $\tilde{x} \tilde{\in} \tilde{X}$ verilsin. Buradan her $N' \in N_{\mathcal{T}'}\left(g \circ f_i(\tilde{x})\right)$ için $SE(N_i) \subset f_i^{-1} \circ g^{-1}\left(SE(N')\right)$ olacak şekilde en az bir $N_i \in N_{\mathcal{T}_i}(\tilde{x})$ vardır. Tanım 5.3.3. gereği her $i \in I$ için f_i fonksiyonları esnek sürekli olduğundan her $N_* \in N_{\mathcal{T}_*}\left(f_i(\tilde{x})\right)$ için $SE(N_i) \subset f_i^{-1}\left(SE(N_*)\right)$ olacak şekilde en az bir $N_i \in N_{\mathcal{T}_i}(\tilde{x})$ vardır. Teorem 5.3.1.'den her $V \in \mathcal{T}_*$ ve $U_i \in \mathcal{T}_i$ için $SE(U_i) = f_i^{-1}\left(SE(V)\right)$ olur ve $N_i \in N_{\mathcal{T}_i}(\tilde{x})$ olduğundan Tanım 3.2.1.'den

$$SE(U_i) = f_i^{-1}\left(SE(V)\right) \subset SE(N_i) \subset f_i^{-1} \circ g^{-1}\left(SE(N')\right)$$

bulunur. Buradan $g\left(SE(V)\right) \subset SE(N')$ olup $V \in \mathcal{T}_*$, $f(\tilde{x})$ elemanının esnek açık komşuluğu olduğundan g esnek fonksiyonu esnek sürekli olur.

Tanım 5.3.6. $F, G \in S(\tilde{X})$ herhangi iki esnek küme olsun. $\mathcal{R} \subseteq SE(F) \times SE(G)$ sınıfına bir esnek bağıntı denir. Bu durumda $\tilde{x} \tilde{\in} F$ ve $\tilde{y} \tilde{\in} G$ için $\mathcal{R}$ bağıntısının bir elemanı $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \mathcal{R}$ ise $\tilde{x}$ esnek elemanı $\tilde{y}$ esnek elemanına $\mathcal{R}$ ile bağlıdır denir ve $\tilde{x}\mathcal{R}\tilde{y}$ ile gösterilir. Eğer $\mathcal{R} \subseteq SE(F) \times SE(F)$ ise $\mathcal{R}$'ye F üzerinde bir esnek bağıntı denir.

Tanım 5.3.7. $\mathcal{R} \subseteq SE(F) \times SE(G)$ esnek bağıntısı verilsin.

$$\mathcal{R}^{-1} = \left\{(\tilde{y}, \tilde{x}) : (\tilde{x}, \tilde{y}) \in \mathcal{R}\right\}$$

esnek bağıntısına $\mathcal{R}$ bağıntısının esnek ters bağıntısı adı verilir ve

$$\mathcal{R} \subseteq SE(F) \times SE(G) \Leftrightarrow \mathcal{R}^{-1} \subseteq SE(G) \times SE(F)$$

ile tanımlanır.

Örnek 5.3.8. X ve Y boştan farklı herhangi iki küme ve A boştan farklı parametreler kümesi olsun. $\mathcal{R}$, $\tilde{X}$ 'dan $\tilde{Y}$ 'ya bir esnek bağıntı olmak üzere her $\tilde{x} \tilde{\in} \tilde{X}$, $\tilde{y} \tilde{\in} \tilde{Y}$ ve her $\lambda \in A$ için $(\tilde{x}\mathcal{R}\tilde{y})(\lambda) = \tilde{x}(\lambda)\mathcal{R}_{\lambda}\tilde{y}(\lambda)$ olacak şekilde $\mathcal{R}_{\lambda}$, X 'den Y 'ye bir kesin bağıntı olur. Tersine, $\{\mathcal{R}_{\lambda} : \lambda \in A\}$, X 'den Y 'ye kesin bağıntıların herhangi parametrelendirilmiş ailesi olsun. Bu durumda her $\tilde{x} \tilde{\in} \tilde{X}$, $\tilde{y} \tilde{\in} \tilde{Y}$ ve her $\lambda \in A$ için $(\tilde{x}\mathcal{R}\tilde{y})(\lambda) = \tilde{x}(\lambda)\mathcal{R}_{\lambda}\tilde{y}(\lambda)$ şeklinde tanımlanan $\mathcal{R}$ bağıntısı bir esnek bağıntı olur.

Örnek 5.3.9. X ve Y boştan farklı herhangi iki küme ve A boştan farklı parametreler kümesi olsun. R, bir kesin bağıntı olmak üzere her $\tilde{x} \tilde{\in} \tilde{X}$, $\tilde{y} \tilde{\in} \tilde{Y}$ ve her $\lambda \in A$ için $(\tilde{x}\mathcal{R}\tilde{y})(\lambda) = \tilde{x}(\lambda)R\tilde{y}(\lambda)$ şeklinde tanımlanan $\mathcal{R}$ bağıntısı bir esnek bağıntı olur. Bu şekildeki bir esnek bağıntıya R kesin bağıntısı tarafından üretilen esnek bağıntı denir. Böylece, X 'den Y 'ye herhangi bir kesin bağıntı bir esnek bağıntıya genişletilebilir.

Tanım 5.3.10. $\mathcal{R}$, $F \in S(\tilde{X})$ üzerinde bir esnek bağıntı olsun.

3. Her $\tilde{x} \tilde{\in} F$ için $(\tilde{x}, \tilde{x}) \in \mathcal{R}$ ise $\mathcal{R}$ 'ye yansımalı esnek bağıntı denir.

4. Her $\tilde{x}, \tilde{y} \tilde{\in} X$ için $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \mathcal{R}$ iken $(\tilde{y}, \tilde{x}) \in \mathcal{R}$ ise $\mathcal{R}$ 'ye simetrik esnek bağıntı denir.

5. Her $\tilde{x}, \tilde{y} \tilde{\in} X$ için $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \mathcal{R}$ ve $(\tilde{y}, \tilde{x}) \in \mathcal{R}$ iken $\tilde{x} = \tilde{y}$ ise $\mathcal{R}$ 'ye ters simetrik esnek bağıntı denir.

6. Her $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z} \tilde{\in} X$ için $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \mathcal{R}$, $(\tilde{y}, \tilde{z}) \in \mathcal{R}$ iken $(\tilde{x}, \tilde{z}) \in \mathcal{R}$ ise $\mathcal{R}$ 'ye geçişli esnek bağıntı denir.

Tanım 5.3.11. $\mathcal{R}$, $F \in S(\tilde{X})$ üzerinde yansımalı, simetrik ve geçişli bir esnek bağıntı ise $\mathcal{R}$ 'ye esnek denklik bağıntısı denir.

Tanım 5.3.12. $\mathcal{R}$, $\tilde{X}$ üzerinde bir esnek denklik bağıntısı olmak üzere $\tilde{x} \tilde{\in} \tilde{X}$ için

$$[\tilde{x}]_{\mathcal{R}} = \left\{ \left(\lambda, \left[\tilde{x}(\lambda) \right]_{\mathcal{R}_\lambda} \right) : \lambda \in A \right\}$$

sınıfına $\tilde{x}$ elemanının $\mathcal{R}$ esnek denklik bağıntısına göre esnek denklik sınıfı denir.

$\mathcal{R}$ bağıntısının $\tilde{X}$ üzerindeki bütün denklik sınıflarının kümesine $\tilde{X}$ kümesinin $\mathcal{R}$ bağıntısına göre bölüm kümesi denir ve $SE\left(\tilde{X}\right)/\mathcal{R}$ ile gösterilir. Buradan $SE\left(\tilde{X}\right)/\mathcal{R}$ bölüm kümesinin ürettiği esnek kümeye de esnek bölüm kümesi denir ve $\tilde{X}/\mathcal{R}$ ile gösterilir.

Tanım 5.3.13. $\left(\tilde{X}, \mathcal{T}, A\right)$ elemanter esnek topolojik uzay ve $\tilde{X}$ üzerinde herhangi bir $\mathcal{R}$ esnek denklik bağıntısı verilsin. $\varphi : SE\left(\tilde{X}\right) \to SE\left(\tilde{X}\right)/\mathcal{R}$ esnek fonksiyonu her $\tilde{x} \tilde{\in} \tilde{X}$ için $\varphi(\tilde{x}) = [\tilde{x}]_{\mathcal{R}}$ ile tanımlansın. φ esnek fonksiyonunu esnek sürekli kılan, $\tilde{X}/\mathcal{R}$ esnek bölüm kümesi üzerindeki topolojilerin en incesine veya $\mathcal{T}$ topolojisinin $\tilde{X}/\mathcal{R}$ esnek bölüm kümesi üzerindeki esnek sonuç topolojisine, $\mathcal{T}$ topolojisinin $\mathcal{R}$ esnek bağıntısına göre elemanter esnek bölüm topolojisi denir ve $\mathfrak{R}$ ile gösterilir. $\left(\tilde{X}/\mathcal{R}, \mathfrak{R}, A\right)$ uzayına da $\left(\tilde{X}, \mathcal{T}, A\right)$ uzayının $\mathcal{R}$ esnek bağıntısına göre esnek bölüm uzayı denir.

Teorem 5.3.14. $\left(\tilde{X}, \mathcal{T}, A\right)$ elemanter esnek topolojik uzay ve $\tilde{X}$ üzerinde herhangi bir $\mathcal{R}$ esnek denklik bağıntısı verilsin. Bu durumda $\left(\tilde{X}/\mathcal{R}, \mathfrak{R}, A\right)$ esnek bölüm uzayı için aşağıdakiler sağlanır.

1. $W \in S\left(\tilde{X}/\mathcal{R}\right)$ kümesinin $\mathfrak{R}$ topolojisine ait olması için gerek ve yeter şart $SE(U) = \varphi^{-1}\left(SE(W)\right)$ olmak üzere $U = SS\left(\varphi^{-1}\left(SE(W)\right)\right) \in \mathcal{T}$ olmasıdır.

2. $\varphi : SE\left(\tilde{X}\right) \to SE\left(\tilde{X}\right)/\mathcal{R}$ esnek fonksiyonunu esnek sürekli kılan $\tilde{X}/\mathcal{R}$ üzerindeki en ince topoloji $\mathfrak{R}$ elemanter esnek bölüm topolojisidir.

3. $\left(\tilde{Z}, \mathcal{T}', A\right)$ elemanter esnek topoloji olmak üzere $g : SE\left(\tilde{X}\right) / \mathcal{R} \to SE\left(\tilde{Z}\right)$ esnek fonksiyonunun esnek sürekli olması için gerek ve yeter şart $g \circ \varphi : SE\left(\tilde{X}\right) \to SE\left(\tilde{Z}\right)$ bileşke fonksiyonunun esnek sürekli olmasıdır.

İspat. **1.** Teorem 5.3.1.'in direkt sonucudur.

2. Tanım 5.3.3.'den elde edilir.

3. Teorem 5.3.5. gereği ispat açıktır.

BÖLÜM 6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tez elemanter esnek topolojik uzaylara giriş niteliğindedir. Tezde ilk önce elemanter işlemlerin yeni özellikleri ispatlanmıştır. Bu özellikler esnek kümeler üzerine elemanter işlemler kullanılarak kurulacak yeni matematiksel yapılar için gereklidir.

Tezin asıl amacı doğrultusunda esnek kümeler üzerine elemanter işlemler kullanılarak elemanter esnek topoloji adında yeni bir topolojik yapı kurulmuş ve bu topolojinin literatürde verilen esnek topolojilerden farklı olduğu gösterilmiştir. Elemanter esnek topoloji için esnek açık ve esnek kapalı küme, esnek iç elemanı, esnek kapanış elemanı, esnek yığılma elemanı, esnek baz ve esnek yerel baz gibi temel topolojik kavramlar tanımlanmıştır. Bu kavramlar kullanılarak elemanter esnek topoloji üzerinde yakınsaklık, ayırma aksiyomları, kompaktlık, bağlantılılık gibi birçok topolojik yapı ve bu yapıların özellikleri incelenebilir.

Esnek eleman sınıfları üzerinde yeni bir esnek dönüşüm tanımlanmış ve bu dönüşümden elde edilecek parametrelendirilmiş dönüşümlerin birer kesin dönüşüm olması şarta bağlanmıştır. Bu şartı sağlayan esnek dönüşümlere esnek fonksiyon adı verilmiştir. Esnek kümeler üzerine ve elemanter esnek topolojik uzaylarda esnek fonksiyonlar, esnek sürekli fonksiyonlar ve onların özelliklerinden yararlanarak yeni matematiksel yapılar inşa edilebilir ve karar verme problemleri için yeni uygulamalar bulunabilir.

Son olarak elemanter esnek topolojik uzaylar üzerine esnek fonksiyonlardan yararlanarak elemanter esnek çarpım ve elemanter esnek bölüm uzayı gibi yeni topolojik yapılar kurulmuştur. Bu yapılar esnek metrik uzaylar üzerinde ya da esnek topolojik gruplar üzerinde çalışılabilir.

KAYNAKLAR

[1] Kolmogorov, A. N., Foundations of the Theory of Probability, Chelsea Publishing Company, 1950.

[2] Zadeh, L. A., Fuzzy sets. Inform. Control., 8(3): 338-353, 1965.

[3] Pawlak, Z., Rough sets. Int. J. Comput. Inf. Sci., 11(5): 341-356, 1982.

[4] Atanassov, K. T., Intuitionistic fuzzy sets. Fuzzy Set Syst., 20(1): 87-96, 1986.

[5] Gorzalzany, M. B., A method of inference in approximate reasoning based on interval-valued fuzzy sets. Fuzzy Set Syst., 21(1): 1-17, 1987.

[6] Molodtsov, D., Soft sets theory-First results. Comput. Math. Appl., 37(4-5): 19-31, 1999.

[7] Molodtsov, D., The theory of soft sets (in Russian), URSS Publishers, 2004.

[8] Molodtsov, D. A., Leonov, V. Y., Kovkov, D. V., Soft sets technique and its application. Nechetkie Sistemy i Myagkie Vychisleniya, 1(1): 8-39, 2006.

[9] Maji, P. K., Biswas, R., Roy, A. R., Soft set theory. Comput. Math. Appl, 45(4-5): 555-562, 2003.

[10] Maji, P. K., Roy, A. R., Biswas, R., An application of soft sets in a decision making problem. Comput. Math. Appl., 44(8-9): 1077-1083, 2002.

[11] Maji, P. K., Biswas, R., Roy, A. R., Fuzzy soft sets. J. Fuzzy Math., 9(3): 589-602, 2001.

[12] Maji, P. K., Biswas, R., Roy, A. R., Intuitionistic fuzzy soft sets. J. Fuzzy Math., 9(3): 677-692, 2001.

[13] Ahmad, B., Kharal, A., On fuzzy soft sets. Adv. Fuzzy Syst., 2009, Article ID 586507, 2009.

[14] Yang, X., Lin, T. Y., Yang, J., Li, Y., Yu, D., Combination of interval-valued fuzzy set and soft set. Comput. Math. Appl., 58(3): 521-527, 2009.

[15] Xu, W., Ma, J., Wang, S., Hao, G., Vague soft sets and their properties. Comput. Math. Appl., 59(2): 787-794, 2010.

[16] Feng, F., Li, C., Davvaz, B., Ali, M. I., Soft sets combined with fuzzy sets and rough sets: a tentative approach. Soft Comput., 14(9): 899-911, 2010.

[17] Ali, M. I., A note on soft sets, rough soft sets and fuzzy soft sets. Appl. Soft Comput., 11(4): 3329-3332, 2011.

[18] Feng, F., Liu, X., Leoreanu-Fotea, V., Jun, Y. B., Soft sets and soft rough sets. Inform. Sci., 181(6): 1125-1137, 2011.

[19] Maji, P. K., Neutrosophic soft set. Ann. Fuzzy Math. Inform., 5(1): 157-168, 2013.

[20] Yang, C.-F., A note on: Soft set theory. Comput. Math. Appl., 56(7): 1899-1900, 2008.

[21] Ali, M. I., Feng, F., Liu, X., Min, W. K., Shabir, M. On some new operations in soft set theory. Comput. Math. Appl., 57(9): 1547-1553, 2009.

[22] Sezgin, A., Atagün, A. O., On operations of soft sets. Comput. Math. Appl., 61(5): 1457-1467, 2011.

[23] Zhu, P., Wen, Q., Operations on soft sets revisited. J. Appl. Math., 2013, Article ID 105752, 2013.

[24] Babitha, K. V., Sunil, J. J., Soft set relations and functions. Comput. Math. Appl., 60(7): 1840-1849, 2010.

[25] Chen, D., Tsang, E. C. C., Yeung, D. S., Wang, X., The parameterization reduction of soft sets and its applications. Comput. Math. Appl., 49(5-6), 757-763, 2005.

[26] Kong, Z., Gao, L., Wang, L., Li, S., The normal parameter reduction of soft sets and its algorithm. Comput. Math. Appl., 56(12): 3029-3037, 2008.

[27] Majumdar, P., Samanta, S. K., Similarity measure of soft sets. New Math. Nat. Comput., 4(01): 1-12, 2008.

[28] Çağman, N., Enginoğlu, S., Soft set theory and uni-int decision making. Eur. J. Oper. Res., 207(2): 848-855, 2010.

[29] Çağman, N., Enginoğlu, S., Soft matrix theory and its decision making. Comput. Math. Appl., 59(10): 3308-3314, 2010.

[30] Pei, D., Miao, D., From soft sets to information systems. 2005 IEEE International Conference on Granular Computing, Vol. 2 . IEEE, 617-621, 2005.

[31] Aktaş, H., Çağman, N., Soft sets and soft groups. Inform. Sci., 177(13): 2726-2735, 2007.

[32] Jun, Y. B., Soft BCK/BCI-algebras. Comput. Math. Appl., 56(5): 1408-1413, 2008.

[33] Jun, Y. B., Park, C. H., Applications of soft sets in ideal theory of BCK/BCI-algebras. Inform. Sci., 178(11): 2466-2475, 2008.

[34] Feng, F., Jun, Y. B., Zhao, X., Soft semirings. Comput. Math. Appl., 56(10): 2621-2628, 2008.

[35] Park, C. H., Jun, Y. B., Öztürk, M. A., Soft WS-algebras. Commun. Korean Math. Soc., 23(3): 313-324, 2008.

[36] Jun, Y. B., Lee, K. J., Zhan, J., Soft p-ideals of soft BCI-algebras. Comput. Mathe. Appl., 58(10): 2060-2068, 2009.

[37] Jun, Y. B., Lee, K. J., Park, C. H., Soft set theory applied to ideals in d-algebras. Comput. Math. Appl., 57(3): 367-378, 2009.

[38] Aygünoğlu, A., Aygün, H., Introduction to fuzzy soft groups. Comput. Math. Appl., 58(6): 1279-1286, 2009.

[39] Qin, K., Hong, Z., On soft equality. J. Comput. Appl. Math., 234(5): 1347-1355, 2010.

[40] Acar, U., Koyuncu, F., Tanay, B., Soft sets and soft rings. Comput. Math. Appl., 59(11): 3458-3463, 2010.

[41] Kazancı, O., Yılmaz, S., Yamak, S., Soft sets and soft BCH-algebras. Hacet. J. Math. Stat., 39(2): 205-217, 2010.

[42] Jun, Y. B., Lee, K. J., Khan, A., Soft ordered semigroups. Math. Logic Quart., 56(1): 42-50, 2010.

[43] Atagün, A. O., Sezgin, A., Soft substructures of rings, fields and modules. Comput. Math. Appl., 61(3): 592-601, 2011.

[44] Ali, M. I., Shabir, M., Naz, M., Algebraic structures of soft sets associated with new operations. Comput. Math. Appl., 61(9): 2647-2654, 2011.

[45] Shabir, M., Naz, M., On soft topological spaces. Comput. Math. Appl., 61(7): 1786-1799, 2011.

[46] Min, W. K., A note on soft topological spaces. Comput. Math. Appl., 62(9): 3524-3528, 2011.

[47] Hazra, H., Majumdar, P., Samanta, S. K., Soft topology. Fuzzy Inf. Eng., 4(1): 105-115, 2012.

[48] Aygünoğlu, A., Aygün, H., Some notes on soft topological spaces. Neural Comput. Appl., 21(1): 113-119, 2012.

[49] Varol, B. P., Aygün, H., A new approach to soft topology. Hacet. J. Math. Stat.,41(5): 731-741, 2012.

[50] Varol, B. P., Aygün, H., Fuzzy soft topology. Hacet. J. Math. Stat., 41(3): 407-419, 2012.

[51] Varol, B. P., Aygün, H., On soft Hausdorff spaces. Ann. Fuzzy Math. Inform., 5(1): 15-24, 2013.

[52] Zorlutuna, I., Akdağ, M., Min, W. K., Atmaca, S., Remarks on soft topological spaces. Ann. Fuzzy Math. Inform., 3(2): 171-185, 2012.

[53] Hussain, S., Ahmad, B., Some properties of soft topological spaces. Comput. Math. Appl., 62(11): 4058-4067, 2011.

[54] Tanay, B., Kandemir, M. B., Topological structure of fuzzy soft sets. Comput. Math. Appl., 61(10): 2952-2957, 2011.

[55] Çağman, N., Karataş, S., Enginoglu, S., Soft topology. Comput. Math. Appl., 62(1): 351-358, 2011.

[56] Ahmad, B., Hussain, S., On some structures of soft topology. Math. Sci., 6: 64, 2012.

[57] Roy, S., Samanta, T. K., A note on fuzzy soft topological spaces. Ann. Fuzzy Math. Inform., 3(2): 305-311, 2012.

[58] Kannan, K., Soft generalized closed sets in soft topological spaces. J. Theor. Appl. Inf. Technol., 37(1): 17-21, 2012.

[59] Nazmul, S., Samanta, S. K., Neighbourhood properties of soft topological spaces. Ann. Fuzzy Math. Inform., 6(1): 1-15, 2013.

[60] Varol, B. P., Aygünoğlu, A., Aygün, H., Neighborhood structures of fuzzy soft topological spaces. J. Intell. Fuzzy Syst., 27(4): 2127-2135, 2014.

[61] Nazmul, S., Samanta, S. K., Fuzzy soft topological groups. Fuzzy Inform. Engin., 6(1), 71-92, 2014.

[62] Georgiou, D. N., Megaritis, A. C., Soft set theory and topology. Appl. Gen. Topol., 15(1): 93-109, 2014.

[63] Das, S., Samanta, S. K., Soft real sets, soft real numbers and their properties. J. Fuzzy Math., 20(3): 551-576, 2012.

[64] Das, S., Samanta, S. K., On soft complex sets and soft complex numbers. J. Fuzzy Math.,21(1): 195-216, 2013.

[65] Das, S., Samanta, S. K., On soft metric spaces. J. Fuzzy Math., 21(3): 707-734, 2013.

[66] Das, S., Samanta, S. K., On soft inner product spaces. Ann. Fuzzy Math. Inform., 6(1): 151-170, 2013.

[67] Das, S., Samanta, S. K., Soft linear operators in soft normed linear spaces. Ann. Fuzzy Math. Inform., 6(2): 295-314, 2013.

[68] Nazmul, S., Samanta, S. K., Some properties of soft topologies and group soft topologies. Ann. Fuzzy Math. Inform., 8(4): 645-661, 2014.

[69] Das, S., Majumdar, P., Samanta, S. K., On soft linear spaces and soft normed linear spaces. Ann. Fuzzy Math. Inform., 9(1): 91-109, 2015

[70] Chiney, M., Samanta, S. K., Vector soft topology. Ann. Fuzzy Math. Inform., 10(1): 45-64, 2015.

[71] Güler, A. C., Yıldırım, E. D., Ozbakır, O. B., A fixed point theorem on soft G-metric spaces. J. Nonlinear Sci. Appl., 9(3): 885-894, 2016.

[72] Chiney, M., Samanta, S. K., Soft topological vector space. Ann. of Fuzzy Math. Inform., 13(2): 153-174, 2017.

[73] Majumdar, P., Samanta, S. K., On soft mappings. Comput. Math. Appl., 60(9): 2666-2672, 2010.

[74] Kharal, A., Ahmad, B., Mappings on soft classes. New Math. Nat. Comput., 7(3): 471-481, 2011.

ÖZGEÇMİŞ

Kemal Taşköprü, 03.07.1987'de Edremit'de doğdu. İlk, orta ve lise eğitimini İstanbul'da tamamladı. 2005 yılında Behçet Kemal Çağlar Lisesi'nden mezun oldu. 2005 yılında başladığı Sakarya Üniversitesi Matematik Bölümü'nü 2009 yılında bitirdi. 2010 yılında Sakarya Üniversitesi Matematik Bölümü'nde yüksek lisans eğitimine başladı. 2013 yılında Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Matematik Bölümü'nde Araştırma Görevlisi olarak göreve atandı. 2013 yılında yüksek lisans eğitimini tamamladı akabinde yine Sakarya Üniversitesi Matematik Bölümü'nde doktora eğitimine başladı. Evli ve bir çocuğu olan Kemal TAŞKÖPRÜ halen Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Matematik Bölümünde Araştırma Görevlisi olarak görevini sürdürmektedir.