T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SEZGİSEL BULANIK NORMLU UZAYLARDA TANIMLANAN BAZI YAKINSAKLIK ÇEŞİTLERİ

DOKTORA TEZİ

Esra KAMBER

Enstitü Anabilim Dalı	**:**	**MATEMATİK**
Enstitü Bilim Dalı	**:**	**FONKSİYONLAR TEORİSİ VE FONKSİYONEL ANALİZ**
Tez Danışmanı	**:**	**Doç. Dr. Selma ALTUNDAĞ**

Ocak 2017

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SEZGİSEL BULANIK NORMLU UZAYLARDA TANIMLANAN BAZI YAKINSAKLIK ÇEŞİTLERİ

DOKTORA TEZİ

Esra KAMBER

Enstitü Anabilim Dalı	:	MATEMATİK
Enstitü Bilim Dalı	:	FONKSİYONLAR TEORİSİ VE FONKSİYONEL ANALİZ

Bu tez 01 / 02 / 2017 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği/oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Doç.Dr. Selma ALTUNDAĞ Jüri Başkanı	**Doç.Dr. Mustafa ERÖZ Üye**	**Doç.Dr. Filiz ERTUĞRAL Üye**

Doç.Dr. Fatma AYDIN AKGÜN Üye	**Doç.Dr. Emrah Evren KARA Üye**

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

Esra KAMBER

01 / 02 / 2017

TEŞEKKÜR

Doktora eğitimim boyunca değerli bilgi ve deneyimlerinden yararlandığım, her konuda bilgi ve desteğini almaktan çekinmediğim, teşvik eden, aynı titizlikte beni yönlendiren değerli danışman hocam sayın Doç. Dr. Selma ALTUNDAĞ'a teşekkür ederim.

Beni ve kardeşlerimi bugünlere getirme adına hiçbir fedakârlıktan kaçınmayan anneme ve babama teşekkür ederim.

Annemin ve babamın yetiştirilmesinde ve büyütülmesinde en büyük payı olan anneanneme ve Hüseyin dedeme, babaanneme ve rahmetli Nuri dedeme çok teşekkür ederim.

Doktora eğitimim boyunca hep yanımda olan Hamide anneme ve Ömer babama teşekkür ederim.

Eşim Mehmet Rıfat Kamber'e hayat yolunda yaşadığım tüm zorluklarda beni yalnız bırakmadığı ve bana destek olduğu için teşekkür ederim.

Ayrıca, bu çalışmanın maddi açıdan desteklenmesine olanak sağlayan TÜBİTAK'a teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\theta=(k_r)$	: Lacunary dizisi
$\varnothing$	: Boş küme
$\delta(K)$	: K kümesinin doğal yoğunluğu
$\delta_{\overline{N}}(K)$	: K kümesinin ağırlıklı yoğunluğu
$\delta_{(\overline{N},\theta)}(K)$	: K kümesinin ağırlıklı lacunary yoğunluğu
$\delta_{(\overline{N},\lambda)}(K)$	: K kümesinin ağırlıklı λ- yoğunluğu
$*$	: t- norm
$\circ$	: t- conorm
F	: Reel veya kompleks sayılar cismi
$(X,\lVert\,.\,\rVert)$	: Normlu lineer uzay
$(X,\mu,\upsilon,*,\circ)$	: Sezgisel bulanık normlu lineer uzay
$lim\,x$	: $\lim\limits_{k\to\infty} x_k$
$(\overline{N},p)$-$lim\,x=L$	: (x_k) dizisi L noktasına $(\overline{N},p)$- toplanabilirdir.

ÖZET

Anahtar kelimeler: Bulanık küme, sezgisel bulanık küme, sezgisel bulanık normlu lineer uzay, ağırlıklı istatistiksel yakınsaklık, mutlak toplanabilirlik, lacunary dizisi.

“Sezgisel bulanık normlu uzaylarda tanımlanan bazı yakınsaklık çeşitleri” isimli bu tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, normlu lineer uzaylarda tanımlanan bazı yakınsaklık çeşitleri hakkında kısa bir özet verildi. İkinci bölümde, diğer bölümlerde kullanılacak olan temel tanım ve teoremlere değinildi.

Üçüncü bölümde, ilk olarak, sezgisel bulanık normlu lineer uzaylarda $\left(\overline{N},p\right)$-toplanabilirlik ve ağırlıklı istatistiksel yakınsaklık kavramları verildi ve bu kavramlar arasındaki bağıntılar incelendi. Ardından, sezgisel bulanık normlu lineer uzaylarda $\left(\overline{N}_{\lambda},p\right)$-toplanabilme ve genelleştirilmiş ağırlıklı istatistiksel yakınsaklık kavramları tanımlandı ve bu kavramlarla ilgili bazı teoremler ispat edildi. Son olarak, sezgisel bulanık normlu lineer uzaylarda $\left(\overline{N},p_r,\theta\right)$-toplanabilirlik ve ağırlıklı lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramları tanımlandı ve bu kavramların bazı özellikleri incelendi.

Dördüncü bölümde ise fark dizisi ve lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramları birleştirilerek sezgisel bulanık n-normlu lineer uzaylarda lacunary Δ-istatistiksel yakınsak dizi ve lacunary Δ-istatistiksel Cauchy dizi tanımları verildi ve bu kavramlarla ilgili bazı teoremler ispat edildi.

Son bölümde ise bazı genel sonuçlar ve araştırma problemleri verildi.

SOME CONVERGENCE TYPES DEFINED IN INTUITIONISTIC FUZZY NORMED SPACES

SUMMARY

Keywords: Fuzzy set, intuitionistic fuzzy set, intuitionistic fuzzy normed linear space, weighted statistical convergence, strong summability, lacunary sequence.

This thesis which is entitled “Some convergence types defined in intuitionistic fuzzy normed spaces”consists of five sections. In the first section, a short abstract is given about some convergence types defined in normed linear spaces. In the second section, some basic definitions and theorems which will be used in the later sections are given.

In the third section, firstly, definitions of $\left(\overline{N},p\right)$-summability and weighted statistical convergence in intuitionistic fuzzy normed linear spaces are given and some relations between these concepts are investigated. After, concepts of $\left(\overline{N}_{\lambda},p\right)$-summability and generalized weighted statistical convergence in intuitionistic fuzzy normed linear spaces are introduced and some theorems related to these concepts are proved. Lastly, the concepts of $\left(\overline{N},p_r,\theta\right)$-summability and weighted lacunary statistical convergence in intuitionistic fuzzy normed linear spaces are introduced and some properties of these concepts are investigated.

In the fourth section, by combining the concepts of difference sequence and lacunary statistical convergence, definitions of lacunary Δ-statistical convergence sequence and lacunary Δ-statistical Cauchy sequence are given in intuitionistic fuzzy n-normed linear spaces and some theorems related to these concepts are given.

In the last section, some general conclusions and some investigation problems were given.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Aristo mantığında gelişen matematikte olaylar evet-hayır, beyaz-siyah, artı-eksi, 0-1 gibi ikili mantık ilkesine dayandırılarak çözüme kavuşturulmuştur. Buna rağmen günlük hayatta karşımıza çıkan havanın sıcak olması, kekin pişip pişmemesi, bir bireyin boyunun uzunluğu gibi durumlar kesinlik arzetmediği için Aristo mantığı bir süre sonra pek çok problemin çözümünde yetersiz kalmıştır.

1965 yılında Zadeh [1] tarafından yayınlanan makalede belirsizlik kavramından ilk defa söz edilmiş ve bu belirsizlik kavramının doğrultusunda bulanık mantığın temeli olan bulanık küme teorisi tanımlanmıştır. Aristo mantığına göre bir eleman bir kümeye ait olma veya ait olmama durumuna göre tanımlanırken, bulanık mantığa göre verilen bulanık küme tanımında "bir eleman bir kümeye belli bir dereceye kadar ait olabilir" görüşü hâkimdir. Bulanık küme tanımında yapılan bu derecelendirme değer kümesi $[0,1]$ olan üyelik fonksiyonu ile verilmektedir.

Zadeh tarafından tanımlanan bulanık mantık Batı'da büyük bir tepkiyle karşılanmıştır. Doğu'da ise ilkin buhar makinesinde, çimento fabrikasının sıcaklık kontrolünde bulanık mantık kullanılmaya başlanmıştır. Günümüzde ise, cep telefonu, klima, asansör, fotokopi makinesi, elektrik süpürgesi gibi pek çok aletin yapımında bulanık mantıktan faydalanılmaktadır. Bulanık mantık ayrıca nonlineer dinamik sistemler [2], popülâsyon dinamiği [3], kuantum fiziği [4] gibi mühendisliğin farklı alanlarına uygulanmış; ayrıca metrik ve topolojik uzaylar [5-7], fonksiyonlar teorisi [8,9] ve yaklaşım teorisi [10] gibi matematiğin pek çok alanına da ışık tutmuştur.

Atanassov [11], 1986 yılında sezgisel bulanık küme tanımını vererek bulanık küme kavramını genelleştirmiş ve böylece sezgisel bulanık mantığın temellerini atmıştır.

Karar verme problemlerinde [12] ve e^{∞}-teorisinde [13] sezgisel bulanık küme tanımından faydalanılmıştır. Park [14], Saadati ve Park [15] ve Vijayabalaji ve arkadaşları [16] tarafından sezgisel bulanık küme tanımı, norm ve conorm işlemcileri de kullanılarak, sırasıyla, sezgisel bulanık metrik uzay, sezgisel bulanık normlu lineer uzay ve sezgisel bulanık n-normlu lineer uzay tanımlarının verilmesiyle sezgisel bulanık mantık teorisi, fonksiyonel analizde önemli bir uygulama alanı haline gelmiştir.

Fonksiyonel analizde önemli yeri olan bir diğer alan, istatistiksel yakınsaklık teorisi olup, 1951 yılında Stenhaus [17] ve Fast [18] tarafından ortaya atılmıştır. İstatistiksel yakınsaklık kavramı Fourier analizi, ergodik teorisi ve sayılar teorisine uygulanmıştır. İstatistiksel yakınsaklığın toplanabilme teorisiyle olan ilişkisi Schoenberg [19], Šalát [20], Connor [21,22], Fridy [23], Fridy ve Miller [24], Fridy ve Orhan [25] ve Mursaleen [27] tarafından araştırılmıştır. Ayrıca son yıllarda Mursaleen ve ark. [26], Belen ve Mohiuddine [28], Bilgin [29], Karakaya ve Chisti [31] ve Başarır ve Konca [32] tarafından çeşitli istatistiksel yakınsaklık metodları tanımlanmış ve bu metodların bazı toplanabilme metodlarıyla olan ilişkileri araştırılmıştır. Bununla beraber Başarır [30], Karakuş [33], Mursaleen [34], Hazarika [35] ve Altundağ [36] tarafından istatistiksel yakınsaklık çeşitli şekillerde çalışılmıştır.

Karakuş ve ark. [37] ve Sen ve Debnath [38] tarafından, sırasıyla, istatistiksel yakınsaklığın sezgisel bulanık normlu lineer uzaylarda ve sezgisel bulanık n-normlu lineer uzaylarda tanımlanmasının ardından Savaş ve Gürdal [39,55], Savaş [40,41], Debnath [42] ve Hazarika ve ark. [43] tarafından sezgisel bulanık normlu lineer uzaylarda çeşitli istatistiksel yakınsaklık metodları ve toplanabilme metodları tanımlanmıştır. Dahası, Mursaleen ve Mohiuddine [44,46], Sen ve Debnath [45], Thillaigovindan ve ark. [47], Karakaya ve ark. [48-50], Altundağ ve Kamber [51], Alghamdi ve ark. [52], Mohiuddine ve Lohani [53] ve Kumar ve Mursaleen [54] tarafından istatistiksel yakınsaklık çeşitli şekillerde sezgisel bulanık mantık teorisine uygulanmıştır.

Bu çalışmada, sezgisel bulanık normlu lineer uzaylarda ağırlıklı istatistiksel yakınsaklık, ağırlıklı lacunary istatistiksel yakınsaklık ve genelleştirilmiş ağırlıklı istatistiksel yakınsaklık kavramları verilmiş ve bu kavramların, sırasıyla, sezgisel bulanık normlu lineer uzaylarda $\left(\overline{N}, p\right)$- toplanabilme, $\left(\overline{N}, p_r, \theta\right)$- toplanabilme ve $\left(\overline{N}_\lambda, p\right)$- toplanabilme metodlarıyla ilişkileri incelenmiştir. Ayrıca fark dizisi kullanılarak sezgisel bulanık n- normlu lineer uzaylarda Δ- yakınsaklık, lacunary Δ- istatistiksel yakınsaklık kavramları ile Δ- Cauchy ve lacunary Δ- istatistiksel Cauchy dizileri kavramları verilerek, verilen bu tanımlar arasındaki ilişkileri inceleyen teoremler ifade ve ispat edilmiştir.

BÖLÜM 2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

2.1. Normlu Lineer Uzaylar

Tanım 2.1.1. X boş olmayan bir küme ve F, reel veya kompleks sayılar cismi olsun.

$$+ : X \times X \to X \qquad\qquad \cdot : F \times X \to X$$
$$(x,y) \to x + y \qquad\qquad (x,y) \to x.y$$

ikili işlem olmak üzere $\forall x,y,z \in X$ ve $\forall \alpha, \beta \in F$ için,

1. $x + y = y + x,$
2. $x + (y + z) = (x + y) + z,$
3. $\forall x \in X$ için $x + \theta = \theta + x$ olacak şekilde bir $\theta \in X$ vardır.
4. $\forall x \in X$ için $x + (-x) = \theta$ olacak şekilde bir $(-x) \in X$ vardır.
5. $1.x = x,$
6. $\alpha.(x + y) = \alpha.x + \alpha.y,$
7. $(\alpha + \beta).x = \alpha.x + \beta.x,$
8. $(\alpha.\beta).x = \alpha.(\beta.x)$

özelliklerini sağlıyorsa X kümesine F cismi üzerinde lineer (vektör) uzay denir [56].

Tanım 2.1.2. X, F cismi üzerinde bir lineer uzay ve R de X 'in bir alt kümesi olsun. $x, y \in R$ ve $\alpha, \beta \in F$ olmak üzere $\alpha x + \beta y \in R$ ise R'ye X 'in lineer alt uzayı denir [56].

Tanım 2.1.3. X, F cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. $\|.\|: X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, $\forall x, y \in X$ ve $\forall \alpha \in F$ için,

1. $\|x\| \geq 0,$
2. $\|x\| \geq 0 \Leftrightarrow x = 0,$
3. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|,$
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

özelliklerini sağlıyorsa $\|.\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir norm ve $(X, \|.\|)$ ikilisine de normlu lineer uzay veya normlu uzay denir [56].

Tanım 2.1.4. $(X, \|.\|)$ bir normlu lineer uzay ve $x = (x_n)$ de X uzayında bir dizi olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için $n \geq n_0$ olduğunda $\|x_n - L\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı varsa $x = (x_n)$ dizisi $L \in X$ noktasına yakınsıyor denir. $x = (x_n)$ dizisi $L \in X$ noktasına yakınsaksa $\lim_{n \to \infty} x_n = L$ veya $x_n \longrightarrow L$ şeklinde yazılır [56].

Tanım 2.1.5. $(X, \|.\|)$ bir normlu lineer uzay ve $x = (x_n)$ de X uzayında bir dizi olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için $n, m \geq n_0$ olduğunda $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı varsa $x = (x_n)$ dizisine bir Cauchy dizisi denir [56].

Tanım 2.1.6. $(X, \|.\|)$ normlu lineer uzayında her Cauchy dizisi yakınsaksa bu normlu lineer uzaya tam normlu lineer uzay veya Banach uzayı denir [56].

Örnek 2.1.7. $x=(x_n)$ şeklindeki reel veya kompleks terimli bütün dizilerden oluşan uzay w ile gösterilsin. $x=(x_n)$, $y=(y_n)\in w$ ve α bir sabit sayı olmak üzere

$$x+y=(x_n+y_n) \qquad \alpha x=(\alpha x_n)$$

şeklinde tanımlanan işlemler altında w bir lineer uzaydır. İyi bilinen c_0, c, l_∞ dizi uzayları sırasıyla, sıfıra yakınsayan diziler uzayı, yakınsak diziler uzayı ve sınırlı diziler uzayı w dizi uzayının alt uzayıdır ve $\|x\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}}|x_k|$ normuyla birer Banach uzayıdırlar [56].

2.2. İstatistiksel Yakınsak Dizi Uzayları

İlk olarak toplanabilme teorisine temel teşkil eden bazı tanımlar ve dönüşümler verilecektir. Daha sonra, önceden tanımlanmış olan bazı istatistiksel yakınsaklık metodları ve toplanabilme metodları verilecek; bu metodlar arasındaki ilişkileri inceleyen bazı teoremlere kısaca değinilecektir.

Tanım 2.2.1. F reel veya kompleks sayılar cismi olsun. $n,k=0,1,2,....$ için $a_{nk}\in F$ olmak üzere bir $A=(a_{nk})$ sonsuz matrisi verilsin. Bu takdirde (x_n) dizisinden (t_n) dizisine bir dönüşüm

$$t_n=\sum_{k=0}^{\infty}a_{nk}x_k \tag{2.1}$$

olarak tanımlansın. (t_n) dizisine (x_n) dizisinin A dönüşüm dizisi ve A'ya diziden diziye bir dönüşüm denir. Bu dönüşümün mevcut olması için (2.1) ile verilen toplamın $\forall n\in\mathbb{N}$ için yakınsak olması gerekir [56].

Tanım 2.2.2. $n,k \in \mathbb{N}$ olmak üzere $A=(a_{nk})$ matrisi verilsin. Eğer A matrisiyle oluşturulan dönüşüm yakınsak her diziyi yakınsak bir diziye dönüştürüyor ve aynı zamanda limiti koruyorsa A matrisine regülerdir denir [58].

Toplanabilme teorisinde önemli bir yer teşkil eden Silverman-Toeplitz teoremi bir matrisin regüler olabilmesi için gerek ve yeter şartları verir.

Teorem 2.2.3. $n,k \in \mathbb{N}$ olmak üzere $A=(a_{nk})$ matrisinin regüler olabilmesi için gerek ve yeter şartlar

1. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}| \leq M$ olacak şekilde n doğal sayısından bağımsız bir

M pozitif reel sayısının bulunmasıdır.

2. $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} = 1,$
3. $\forall k \in \mathbb{N}$ için $\lim_{n\to\infty} a_{nk} = 0$

olmasıdır [58].

Tanım 2.2.4. (x_n) dizisinin $A=(a_{nk})$ matrisi yardımıyla oluşturulan dönüşüm dizisi (2.1) şeklinde tanımlansın. Eğer $\lim_{n\to\infty} t_n = L$ ise (x_n) dizisine L noktasına A - toplanabilirdir denir [58].

Tanım 2.2.5. (x_n) dizisinin $A=(a_{nk})$ matrisi yardımıyla oluşturulan dönüşüm dizisi (2.1) şeklinde tanımlansın. Eğer $\sum_{n=1}^{\infty} |t_n - t_{n-1}| < \infty$ ise (x_n) dizisine mutlak A- toplanabilirdir (veya $|A|$- toplanabilirdir) denir [59].

Tanım 2.2.6. (x_n) dizisinin matris elemanları

$$(a_{nk})=\begin{cases}\dfrac{1}{n+1}, & k\le n\\ 0 \quad , & k>n\end{cases}$$

ile verilen $A=(a_{nk})$ matrisi yardımıyla elde edilen (σ_n) dönüşüm dizisi

$$\sigma_n=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}x_k \tag{2.2}$$

olarak tanımlansın. Bu şekilde tanımlanan ortalamaya Cesáro ortalaması veya kısaca $(C,1)$ ortalaması denir. Eğer $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n=L$ ise (x_n) dizisi L noktasına $(C,1)$-toplanabilirdir denir [58].

Tanım 2.2.7. (σ_n), (2.2) ile tanımlanmak üzere, eğer

$$\sum_{n=0}^{\infty}|\sigma_n-\sigma_{n-1}|<\infty$$

ise (x_n) dizisi L noktasına mutlak $(C,1)$-toplanabilirdir (veya $|C,1|$-toplanabilirdir) denir ve tez boyunca $\lim x$ ile $\lim\limits_{k\to\infty}x_k$ gösterilmek üzere, bu durum $|C,1|$- $\lim x=L$ ile gösterilmektedir. $|C,1|$-toplanabilir dizilerin uzayı ise $|C,1|$ ile gösterilmektedir [60].

Tanım 2.2.8. $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesini göstersin. $K \subseteq \mathbb{N}$ ve $K_n = \{k \leq n : k \in K\}$ kümesi verilsin. $|K_n|$, K_n kümesinin eleman sayısını göstersin. Eğer limit mevcutsa $\delta(K) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}|K_n|$ ile tanımlı değere K kümesinin doğal yoğunluğu denir [63].

K kümesi sonlu elemanlı bir küme ise $\delta(K) = 0$ olduğu açıktır. $\delta(K) = 0$ ise K kümesine sıfır yoğunluklu küme denir. Doğal sayıların her bir sonlu alt kümesi sıfır yoğunlukludur. Ayrıca $\delta(\mathbb{N}) = 1$ olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Bir A kümesi $\delta(A)$ yoğunluğuna sahip ise $\delta(\mathbb{N}/A) = 1 - \delta(A)$ dır.

Yoğunluğu sıfır olan küme tanımından yola çıkarak istatistiksel yakınsaklık tanımı aşağıdaki şekilde verilebilir.

Tanım 2.2.9. $x = (x_k)$ bir kompleks sayı dizisi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\delta\left(\left\{k \in \mathbb{N} : |x_k - L| \geq \varepsilon\right\}\right) = 0$$

yani,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left|\left\{ j \leq n : |x_j - L| \geq \varepsilon\right\}\right| = 0$$

ise $x = (x_k)$ dizisine L noktasına istatistiksel yakınsaktır denir ve $S\text{-}\lim x = L$ veya $x_k \xrightarrow{\quad} L(S)$ ile gösterilecektir. İstatistiksel yakınsak dizilerin uzayı S ile gösterilir [17,18].

Tanımdan da anlaşıldığı gibi, eğer x dizisi L noktasına istatistiksel yakınsak ise, L noktasının herhangi bir ε komşuluğunda dizinin sonsuz çoklukta terimi bulunurken bu komşuluğun dışında, dizinin indis kümesinin yoğunluğu sıfır olmak üzere, dizinin sonsuz çoklukta terimi bulunabilir. Bu ise istatistiksel yakınsaklığın adi yakınsaklıktan daha genel olduğunu göstermektedir; fakat bu önermenin karşıtı her zaman doğru değildir. Bununla ilgili olarak aşağıdaki örnek verilebilir.

Örnek 2.2.10. $m \in \mathbb{N}$ olmak üzere $x = (x_k)$ dizisi

$$x_k = \begin{cases} 1, & k = m^2 \\ 0, & k \neq m^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu dizi adi anlamda yakınsak değildir. Fakat her $\varepsilon > 0$ için

$$0 \leq \left|\left\{ k \leq n : \left|x_k\right| \geq \varepsilon \right\}\right| \leq \left|\left\{ k \leq n : x_k \neq 0 \right\}\right| \leq \sqrt{n}$$

olduğundan

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left|\left\{ k \leq n : \left|x_k\right| \geq \varepsilon \right\}\right| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left|\left\{ k \leq n : x_k \neq 0 \right\}\right| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n}$$

bulunur. Böylece $S\text{-}\lim x = 0$ elde edilir [23].

Teorem 2.2.11. $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ istatistiksel yakınsak diziler ve α, β skaler değerler olmak üzere

1. $S\text{-}\lim(\alpha x + \beta y) = \alpha.(S\text{-}\lim x) + \beta.(S\text{-}\lim y)$,
2. $S\text{-}\lim(xy) = (S\text{-}\lim x)(S\text{-}\lim y)$,
3. $k \in \mathbb{N}$ ve $(Tx_k) = x_{k+1}$ olmak üzere $S\text{-}\lim x = S\text{-}\lim(Tx)$

dir [62].

Teorem 2.2.12. Bir reel sayı dizisinin istatistiksel limiti varsa tektir [62].

Tanım 2.2.13. $\theta = (k_r)$ pozitif tamsayıların bir dizisi olmak üzere

1. $k_0 = 0,$
2. $0 < k_r < k_{r+1},$ (2.3)
3. $r \to \infty$ için $h_r = k_r - k_{r-1} \to \infty$

şartlarını sağlasın. Bu durumda θ dizisine bir lacunary dizisi denir. θ ile belirlenen aralıklar $I_r = (k_{r-1}, k_r]$ ile $\frac{k_r}{k_{r-1}}$ oranı q_r ile gösterilmektedir. $K \subseteq \mathbb{N}$ olsun. Limit mevcutsa

$$\delta_\theta(K) = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \left|\{k \in I_r : k \in K\}\right|$$

sayısına K kümesinin lacunary yoğunluğu denir [25].

Tanım 2.2.14. $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\delta_\theta\left(\{k \in \mathbb{N} : |x_k - L| \geq \varepsilon\}\right) = 0$$

yani,

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \left|\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}\right| = 0$$

ise $x = (x_k)$ dizisi L noktasına lacunary istatistiksel yakınsaktır (veya S_θ-yakınsaktır) denir ve $S_\theta\text{-}\lim x = L$ veya $x_k \longrightarrow L(S_\theta)$ ile, lacunary istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı S_θ ile gösterilmektedir [25].

Tanım 2.2.15. θ bir lacunary dizisi olsun. Eğer

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}|x_k-L|=0$$

oluyorsa $x=(x_k)$ dizisi L noktasına mutlak lacunary yakınsaktır denir ve $|w_\theta|$-$\lim x=L$ veya $x_k \longrightarrow L(|w_\theta|)$ ile, mutlak lacunary yakınsak dizilerin uzayı $|w_\theta|$ ile gösterilmektedir [25].

Teorem 2.2.16. θ bir lacunary dizisi ve l_∞ sınırlı diziler uzayı olsun. O halde aşağıdaki şartlar sağlanır.

1. $|w_\theta|$-$\lim x=L$ ise S_θ-$\lim x=L$,
2. $x\in l_\infty$ ve S_θ-$\lim x=L$ ise $|w_\theta|$-$\lim x=L$,
3. $S_\theta\cap l_\infty=|w_\theta|\cap l_\infty$

dir [25].

Teorem 2.2.17. θ bir lacunary dizisi olsun. S-$\lim x=L$ iken S_θ-$\lim x=L$ olması için gerek ve yeter şart $\liminf_{r\to\infty} q_r>1$ olmasıdır [25].

Teorem 2.2.18. θ bir lacunary dizisi olsun. S_θ-$\lim x=L$ iken S-$\lim x=L$ olması için gerek ve yeter şart $\limsup_{r\to\infty} q_r<\infty$ olmasıdır [25].

Teorem 2.2.19. θ bir lacunary dizisi olsun. $S=S_\theta$ olması için gerek ve yeter şart $1<\liminf_{r\to\infty} q_r\le\limsup_{r\to\infty} q_r<\infty$ olmasıdır [25].

Teorem 2.2.19. $S=(s_{nk})$ toplam matrisi, $\Delta^{(1)}=(\delta_{nk})$, $\Delta=(d_{nk})$ fark operatörleri ve herhangi sabit bir $m\in\mathbb{N}$ için $\Delta^{(m)}=\left(\delta_{nk}^{(m)}\right)$, $m.$ dereceden fark matrisi $\forall n,k\in\mathbb{N}$ için, sırasıyla

$$s_{nk}=\begin{cases}1, & 0\le k\le n\\ 0, & k>n\end{cases}$$

$$\delta_{nk}=\begin{cases}(-1)^{n-k}, & n-1\le k\le n\\ 0, & 0\le k<n-1 \text{ ya da } k>n\end{cases}$$

ve

$$d_{nk}=\begin{cases}(-1)^{n-k}, & n\le k\le n+1\\ 0, & 0\le k<n \text{ ya da } k>n+1\end{cases}$$

şeklinde tanımlıdır [71]. Fark dizi uzayları, Kızmaz [64] tarafından $X=l_\infty, c$ ve c_0 olmak üzere

$$X(\Delta)=\left\{X=(x_k)\in w:(x_k-x_{k+1})\in X\right\}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Fark dizisi ve istatistiksel yakınsaklık tanımı birleştirilerek Δ- istatistiksel yakınsaklık tanımı aşağıdaki şekilde verilmiştir.

Tanım 2.2.20. Her $\varepsilon>0$ için

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left|\left\{j\le n:\left|\Delta x_j-L\right|\ge\varepsilon\right\}\right|=0$$

ise $x=(x_k)$ dizisine L noktasına Δ-istatistiksel yakınsaktır denir ve $S_\Delta\text{-}lim\, x = L$ veya $x_k \longrightarrow L(S_\Delta)$ ile, Δ-istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı S_Δ ile gösterilmektedir [30].

Tanım 2.2.21. θ bir lacunary dizisi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r}\left|\left\{ j\in I_r : \left|\Delta x_j - L\right| \geq \varepsilon \right\}\right| = 0$$

ise $x=(x_k)$ dizisine L noktasına lacunary Δ-istatistiksel yakınsaktır denir ve lacunary Δ-istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi $S_\theta(\Delta)$ ile gösterilmektedir [65].

Tanım 2.2.22. $p=(p_k)$ pozitif sayıların bir dizisi olmak üzere

1. $p_0 > 0,$ (2.4)
2. $n\to\infty$ için $P_n = \sum_{k=0}^{n} p_k \to \infty$

şartlarını sağlasın. (p_n), (2.4) şartlarını sağlayacak şekilde pozitif sayıların bir dizisi olmak üzere (x_n) dizisinden (u_n) dizisine

$$u_n = \frac{1}{P_n}\sum_{k=0}^{n} p_k x_k \tag{2.5}$$

ile verilen dönüşüme Riesz ortalaması veya Riesz dönüşümü (veya kısaca $(\overline{N},p)$ ortalaması ya da $(\overline{N},p)$ dönüşümü) denir [58].

(2.5) ile tanımlanan matrisin dönüşüm elemanları

$$\left(a_{nk}\right)=\begin{cases}\dfrac{p_k}{P_n}, & k\leq n\\ 0\quad, & k>n\end{cases}$$

şeklinde ifade edilmektedir [58].

Tanım 2.2.24. $\left(p_n\right)$ ve $\left(u_n\right)$ dizileri, sırasıyla, (2.4) ve (2.5) ile tanımlansın. Eğer $\lim_{n\to\infty} u_n = L$ ise $\left(x_n\right)$ dizisi L noktasına $\left(\overline{N},p\right)$- toplanabilirdir denir ve $\left(\overline{N},p\right)$- $\lim x = L$ ile gösterilmektedir [61].

Tanım 2.2.25. $\left(p_n\right)$, (2.4) şartlarını sağlayacak şekilde pozitif sayıların bir dizisi olsun. Eğer

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|u_n-u_{n-1}\right|<\infty$$

ise $\left(x_n\right)$ dizisi L noktasına mutlak $\left(\overline{N},p\right)$- toplanabilirdir (veya $\left|\overline{N},p\right|$- toplanabilirdir) denir ve $\left|\overline{N},p\right|$- $\lim x = L$ ile gösterilir. $\left|\overline{N},p\right|$ ile $\left|\overline{N},p\right|$- toplanabilir dizi uzayları gösterilmektedir [62].

Tanım 2.2.26. $x=\left(x_k\right)$ dizisi ve $0<q<\infty$ olacak şekilde bir q sayısı verilsin. Eğer

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{P_n}\sum_{k=0}^{n}p_k\left|x_k-L\right|^q=0$$

ise $x=\left(x_k\right)$ dizisi L noktasına mutlak $\left(\overline{N},p\right)_q$- toplanabilirdir (veya $\left|\overline{N},p\right|_q$- toplanabilirdir) denir [26].

Tanım 2.2.27. $x=(x_k)$ bir kompleks sayı dizisi olsun. $K \subseteq \mathbb{N}$ olmak üzere $K_{P_n}=\{k \le P_n : k \in K\}$ kümesi verilsin. $|K_{P_n}|$, K_{P_n} kümesinin eleman sayısını göstersin. Eğer limit mevcutsa

$$\delta_{\overline{N}}(K)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{P_n}|K_{P_n}|$$

ile tanımlı değere K kümesinin ağırlıklı yoğunluğu denir. Eğer her $\varepsilon>0$ için

$$\delta_{\overline{N}}\left(\{k\in\mathbb{N} : p_k|x_k-L|\ge\varepsilon\}\right)=0$$

yani,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{P_n}\left|\{k\le P_n : p_k|x_k-L|\ge\varepsilon\}\right|=0$$

ise $x=(x_k)$ dizisi L noktasına ağırlıklı istatistiksel yakınsaktır (veya $S_{\overline{N}}$-yakınsaktır) denir ve $S_{\overline{N}}\text{-}\lim x=L$ veya $x_k \longrightarrow L\left(S_{\overline{N}}\right)$ ile gösterilmektedir [26].

Teorem 2.2.28. $\forall n\in\mathbb{N}$ için $\frac{P_n}{n}\ge 1$ olsun. O halde aşağıdaki şartlar sağlanır.

1. Her istatistiksel yakınsak dizi ağırlıklı istatistiksel yakınsaktır; ancak tersi doğru değildir.
2. $\left(\frac{P_n}{n}\right)$ dizisi sınırlı ise o zaman istatistiksel yakınsaklık ağırlıklı istatistiksel yakınsaklığa denktir [26].

Aşağıdaki teoremde bir $x=(x_k)$ dizisinin $S_{\overline{N}}$-yakınsaklığı ve $(\overline{N},p)$-toplanabilirliği arasındaki ilişki verilmektedir.

Teorem 2.2.29. $\forall k\in\mathbb{N}$ için $p_k\left|x_k-L\right|\leq M$ olsun. Eğer $S_{\overline{N}}\text{-}lim\, x=L$ ise $(\overline{N},p)\text{-}lim\, x=L$ dir [26].

Tanım 2.2.30. $\forall n\in\mathbb{N}$ için $\lambda=(\lambda_n)$ pozitif sayıların bir dizisi olmak üzere

$$
\begin{aligned}
&1.\quad \lambda_{n+1}\leq\lambda_n+1,\ \lambda_1=1,\\
&2.\quad 0<\lambda_n<\lambda_{n+1},\\
&3.\quad n\to\infty \text{ için } \lambda_n\to\infty
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

şartlarını sağlasın. $I_n=[n-\lambda_n+1,\lambda_n]$ olmak üzere genelleştirilmiş de la Valée-Poussin ortalaması

$$s_n=\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n}x_k$$

ile tanımlansın. Eğer $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=L$ ise $x=(x_k)$ dizisi L noktasına (V,λ)-toplanabilirdir denir. Eğer $\forall n\in\mathbb{N}$ için $\lambda_n=n$ olarak alınırsa (V,λ)-toplanabilirlik kavramı Tanım 2.2.6. ile verilen $(C,1)$-toplanabilirlik kavramına indirgenir [27].

Tanım 2.2.31. $\lambda=(\lambda_n)$ dizisi (2.7) şartlarını sağlamak üzere

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n}\left|x_k-L\right|=0$$

oluyorsa $x=(x_k)$ dizisi L noktasına mutlak (V,λ)-toplanabilirdir (veya $|V,\lambda|$-toplanabilirdir) denir ve $|V,\lambda|\text{-}lim\, x = L$ veya $x_k \longrightarrow L|V,\lambda|$ ile, bu özelliği sağlayan dizilerin kümesi $|V,\lambda|$ ile gösterilmektedir [27].

Tanım 2.2.32. $x=(x_k)$ bir kompleks sayı dizisi ve $\lambda=(\lambda_n)$ (2.7) şartlarını sağlayan bir dizi olsun. $I_n=[n-\lambda_n+1,\lambda_n]$ olmak üzere eğer limit mevcutsa

$$\delta_\lambda(K)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\lambda_n}\left|\{k\in I_n : k\in K\}\right|$$

ile tanımlı değere K kümesinin λ-yoğunluğu denir. Eğer her $\varepsilon>0$ için

$$\delta_\lambda\left(\{k\in\mathbb{N} : |x_k-L|\geq\varepsilon\}\right)=0$$

yani,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\lambda_n}\left|\{k\in I_n : |x_k-L|\geq\varepsilon\}\right|=0$$

ise $x=(x_k)$ dizisi L noktasına λ-istatistiksel yakınsaktır (veya S_λ-yakınsaktır) denir ve $S_\lambda\text{-}lim\, x=L$ veya $x_k \longrightarrow L(S_\lambda)$ ile gösterilmektedir [27].

Λ, (2.7) şartlarını sağlayan dizilerin kümesi olmak üzere aşağıdaki teoremde S_λ-yakınsaklık ile $|V,\lambda|$-toplanabilirlik kavramları arasındaki ilişki verilmektedir.

Teorem 2.2.33. l_∞ sınırlı diziler uzayı ve $\lambda \in \Lambda$ olsun. O halde aşağıdaki şartlar sağlanır.

1. $x_k \longrightarrow L|V,\lambda|$ ise $x_k \longrightarrow L(S_\lambda)$,
2. $x \in l_\infty$ ve $x_k \longrightarrow L(S_\lambda)$ ise $x_k \longrightarrow L|V,\lambda|$,
3. $S_\lambda \cap l_\infty = |V,\lambda| \cap l_\infty$

dir [27].

Tanım 2.2.34. $p=(p_n)$, (2.4) şartlarını sağlayan pozitif sayıların bir dizisi ve $\lambda=(\lambda_n)$, (2.7) şartlarını sağlayan pozitif sayıların bir dizisi olmak üzere $n \to \infty$ iken

$$P_{\lambda_n} = \sum_{k \in I_n} p_k \to \infty$$

ve

$$\gamma_n = \frac{1}{P_{\lambda_n}} \sum_{k \in I_n} p_k x_k$$

olacak şekilde (P_{λ_n}) ve (γ_n) dizileri tanımlansın. $I_n = [n-\lambda_n+1, \lambda_n]$ olmak üzere $\lim_{n\to\infty} \gamma_n = L$ ise $x=(x_k)$ dizisi L noktasına $(\overline{N}_\lambda, p)$- toplanabilirdir denir ve bu durum $x_k \longrightarrow L(\overline{N}_\lambda, p)$ ile gösterilmektedir. Eğer

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{P_{\lambda_n}} \sum_{k \in I_n} p_k |x_k - L| = 0$$

ise $x=(x_k)$ dizisi L noktasına mutlak $\left(\overline{N}_\lambda, p\right)$- toplanabilirdir (veya $\left|\overline{N}_\lambda, p\right|$-toplanabilirdir) denir. Bu durum $x_k \longrightarrow L\left|\overline{N}_\lambda, p\right|$ veya $\left|\overline{N}_\lambda, p\right|$-$lim\, x = L$ ile, bu özelliği sağlayan dizilerin uzayı $\left|\overline{N}_\lambda, p\right|$ ile gösterilmektedir [28].

Tanım 2.2.35. $x=(x_k)$ bir kompleks sayı dizisi olsun. $K \subseteq \mathbb{N}$ olmak üzere $K_{P_{\lambda_n}} = \left\{k \le P_{\lambda_n} : k \in K\right\}$ kümesi verilsin. $\left|K_{P_{\lambda_n}}\right|$, $K_{P_{\lambda_n}}$ kümesinin eleman sayısını göstersin. Eğer limit mevcutsa

$$\delta_{\overline{N}_\lambda}(K) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{P_{\lambda_n}} \left|K_{P_{\lambda_n}}\right|$$

ile tanımlı değere K kümesinin ağırlıklı λ- yoğunluğu denir. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\delta_{\overline{N}_\lambda}\left(\left\{k \in \mathbb{N} : p_k |x_k - L| \ge \varepsilon\right\}\right) = 0$$

yani,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{P_{\lambda_n}} \left|\left\{k \le P_{\lambda_n} : p_k |x_k - L| \ge \varepsilon\right\}\right| = 0$$

ise $x=(x_k)$ dizisi L noktasına ağırlıklı λ- istatistiksel yakınsaktır (veya $S_{\overline{N}_\lambda}$-yakınsaktır) denir ve $S_{\overline{N}_\lambda}$-$lim\, x = L$ veya $x_k \longrightarrow L\left(S_{\overline{N}_\lambda}\right)$ ile, ağırlıklı λ-istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı $S_{\overline{N}_\lambda}$ ile gösterilmektedir [28].

Tanım 2.2.36. $\theta=(k_r)$ bir lacunary dizisi, $p=(p_k)$ pozitif sayıların (2.4) şartlarını sağlayan bir dizi ve $I_r=(k_{r-1},k_r]$ olmak üzere, $\theta'=(P_{k_r})$ dizisi

1. $P_0=0,$
2. $P_{k_r}=\sum_{k\in(0,k_r]} p_k,\ P_{k_{r-1}}=\sum_{k\in(0,k_{r-1}]} p_k,\ H_r=\sum_{k\in I_r} p_k,$
3. $0<P_{k_r}<P_{k_{r+1}},$ (2.8)
4. $r\to\infty$ için $H_r=P_{k_r}-P_{k_{r-1}}\to\infty$

şartlarını sağlasın. Bu durumda $\theta'=(P_{k_r})$ dizisine bir lacunary dizisi denir. θ' ile belirlenen aralıklar $I_r'=\left(P_{k_{r-1}},P_{k_r}\right]$ ile $\dfrac{P_{k_r}}{P_{k_{r-1}}}$ oranı Q_r ile gösterilmektedir. $\forall k\in\mathbb{N}$ için $p_k=1$ alındığında $H_r, P_{k_r}, P_{k_{r-1}}, Q_r, I_r'$ değerleri, sırasıyla, $h_r, k_r, k_{r-1}, q_r, I_r$ değerlerine indirgenir [32].

Tanım 2.2.37. $\theta=(k_r)$ bir lacunary dizisi olsun. Eğer her $\varepsilon>0$ için

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{H_r}\sum_{k\in I_r} p_k\left(x_k-L\right)=0$$

ise $x=(x_k)$ dizisi L noktasına $\left(\overline{N},p_r,\theta\right)$- toplanabilirdir denir ve $\left(\overline{N},p_r,\theta\right)$-$\lim x=L$ ile gösterilmektedir. Eğer

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{H_r}\sum_{k\in I_r} p_k\left|x_k-L\right|=0$$

ise $x=(x_k)$ dizisi L noktasına mutlak $(\overline{N},p_r,\theta)$- toplanabilirdir (veya $|\overline{N},p_r,\theta|$-toplanabilirdir) denir ve $|\overline{N},p_r,\theta|$-$lim\, x = L$ ile gösterilmektedir [32].

Tanım 2.2.38. $K \subseteq \mathbb{N}$ kümesinin ağırlıklı lacunary yoğunluğu, eğer limit mevcutsa

$$\delta_{(\overline{N},\theta)}(K) = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{H_r}\left|\left\{k \in I_r^{'} : k \in K\right\}\right|$$

ile verilsin. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$K(\varepsilon) = \left\{k \in \mathbb{N} : p_k |x_k - L| \geq \varepsilon\right\}$$

kümesi “0” ağırlıklı lacunary yoğunluğuna sahip ise, yani

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{H_r}\left|\left\{k \in I_r^{'} : p_k |x_k - L| \geq \varepsilon\right\}\right| = 0$$

ise $x=(x_k)$ dizisi L noktasına ağırlıklı lacunary istatistiksel yakınsaktır denir ve $S_{(\overline{N},\theta)}$-$lim\, x = L$ ile gösterilmektedir [32].

2.3. Sezgisel Bulanık Normlu Lineer Uzaylar

Tanım 2.3.1. $X \neq \emptyset$ herhangi bir küme ve $A \subseteq X$ olmak üzere $\mu_A : X \to [0,1]$ fonksiyonu ile karakterize edilen $A = \left\{(x, \mu_A(x)) \mid x \in X\right\}$ kümesine X üzerinde bir bulanık küme denir. μ_A fonksiyonuna A kümesinin üyelik fonksiyonu, her $x \in X$ için $\mu_A(x) \in [0,1]$ değerine de $x \in X$ ’in üyelik derecesi denir [1].

Tanım 2.3.2. $X \neq \varnothing$ herhangi bir küme ve $A \subseteq X$ olmak üzere $\mu_A : X \to [0,1]$ ve $\upsilon_A : X \to [0,1]$ üyelik fonksiyonları, sırasıyla, $x \in X$ 'in üye olma ve üye olmama derecesini göstersin. Eğer her $x \in X$ için $0 \leq \mu_A(x) + \upsilon_A(x) \leq 1$ eşitsizliği sağlanıyorsa $A = \{(x, \mu_A(x), \upsilon_A(x)) \mid x \in X\}$ ile verilen kümeye X üzerinde sezgisel bulanık küme denir [11].

Tanım 2.3.3. $* : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ şeklinde tanımlanan ikili işleme aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa sürekli $t-$norm denir.

1. $*$ işlemi kapalı ve değişmelidir,
2. $*$ işlemi süreklidir,
3. Her $a \in [0,1]$ için $a * 1 = a,$
4. Her $a,b,c,d \in [0,1]$ için $a \leq c$ ve $b \leq d$ iken $a * b \leq c * d$

dir. $a,b \in [0,1]$ olmak üzere $a * b = a.b$ ve $a * b = min\{a,b\}$ $t-$ norma örnek olarak verilebilir [66].

Tanım 2.3.4. $\circ : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ şeklinde tanımlanan ikili işleme aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa sürekli $t-$conorm denir.

1. $\circ$ işlemi kapalı ve değişmelidir,
2. $\circ$ işlemi süreklidir,
3. Her $a \in [0,1]$ için $a \circ 0 = a,$
4. Her $a,b,c,d \in [0,1]$ için $a \leq c$ ve $b \leq d$ iken $a \circ b \leq c \circ d$

dir [66]. $a,b \in [0,1]$ olmak üzere $a \circ b = min\{a+b,1\}$ ve $a * b = maks\{a,b\}$ t-conorma örnek olarak verilebilir [66].

Tanım 2.3.5. Eğer X, F cismi üzerinde bir lineer uzay, $*$ işlemi sürekli $t-$norm, $\circ$ işlemi sürekli $t-$conorm, her $x,y \in X$ ve $s,t > 0$ için μ, υ kümeleri $X \times (0,\infty)$ üzerinde aşağıdaki şartları sağlayan bulanık kümeler ise $(X, \mu, \upsilon, *, \circ)$ sıralı beşlisine sezgisel bulanık normlu lineer uzay denir.

1. $\mu(x,t)+\upsilon(x,t)\leq 1,$
2. $\mu(x,t)>0,$
3. $\mu(x,t)=1$ ancak ve ancak $x=0,$
4. $\alpha\neq 0$ olmak üzere $\mu(\alpha x,t)=\mu\left(x,\dfrac{t}{|\alpha|}\right),$
5. $\mu(x,t)*\mu(y,s)\leq\mu(x+y,t+s),$
6. $\mu(x,t):(0,\infty)\rightarrow(0,1],$ t üzerinde süreklidir,
7. $\lim\limits_{t\to\infty}\mu(x,t)=1$ ve $\lim\limits_{t\to 0}\mu(x,t)=0,$
8. $\upsilon(x,t)<1,$
9. $\upsilon(x,t)=0$ ancak ve ancak $x=0,$
10. $\alpha\neq 0$ ise $\upsilon(\alpha x,t)=\upsilon\left(x,\dfrac{t}{|\alpha|}\right),$
11. $\upsilon(x,t)\circ\upsilon(y,s)\geq\upsilon(x+y,s+t),$
12. $\upsilon(x,t):(0,\infty)\rightarrow[0,1),$ t üzerinde süreklidir,
13. $\lim\limits_{t\to 0}\upsilon(x,t)=1$ ve $\lim\limits_{t\to\infty}\upsilon(x,t)=0$

dır. Bu durumda (μ,υ) sıralı ikilisine de sezgisel bulanık lineer norm denir [15].

Örnek 2.3.6. $(\mathbb{R},|\,.\,|)$ reel sayıların alışılmış normlu lineer uzayını göstersin. Her $a,b\in[0,1]$ için $a*b=ab$ ve $a\circ b=\min\{a+b,1\}$ olsun. μ_0 ve υ_0 kümeleri her $t\in\mathbb{R}^+$ için $\mathbb{R}\times(0,\infty)$ üzerinde

$$\mu_0(x,t)=\frac{t}{t+|x|} \quad \text{ve} \quad \upsilon_0(x,t)=\frac{|x|}{t+|x|}$$

şeklinde tanımlansınlar. O halde $(\mathbb{R},\mu_0,\upsilon_0,*,\circ)$ sezgisel bulanık normlu lineer uzaydır [50].

Tanım 2.3.7. $(X,\mu,\upsilon,*,\circ)$ bir sezgisel bulanık normlu lineer uzay, $x=(x_k)$ X uzayında bir dizi olsun. Eğer $\forall\varepsilon>0$ ve $\forall t>0$ için $k\geq k_0$ olduğunda $\mu(x_k-L,t)>1-\varepsilon$ ve $\upsilon(x_k-L,t)<\varepsilon$ olacak şekilde bir $k_0=k_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ sayısı varsa $x=(x_k)$ dizisi $L\in X$ noktasına (μ,υ) sezgisel bulanık lineer normuna göre yakınsıyor denir ve $(\mu,\upsilon)\text{-}lim\,x=L$ veya $x_k\xrightarrow{(\mu,\upsilon)}L$ şeklinde gösterilmektedir [15].

Sonuç 2.3.8. $(X,\mu,\upsilon,*,\circ)$ bir sezgisel bulanık normlu lineer uzay ve $x=(x_k)$ X uzayında bir dizi olsun. $x=(x_k)$ dizisi $L\in X$ noktasına (μ,υ) sezgisel bulanık lineer normuna göre yakınsaktır ancak ve ancak $\lim\limits_{k\to\infty}\mu(x_k-L,t)=1$ ve $\lim\limits_{k\to\infty}\upsilon(x_k-L,t)=0$ dır [68].

Tanım 2.3.9. $(X,\mu,\upsilon,*,\circ)$ bir sezgisel bulanık normlu lineer uzay, $x=(x_k)$ X uzayında bir dizi olsun. Eğer $\forall\varepsilon>0$ ve $\forall t>0$ için $k,m\geq k_0$ olduğunda $\mu(x_k-x_m,t)>1-\varepsilon$ ve $\upsilon(x_k-x_m,t)<\varepsilon$ olacak şekilde bir $k_0=k_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ sayısı varsa $x=(x_k)$ dizisine (μ,υ) sezgisel bulanık lineer normuna göre bir Cauchy dizisi denir [15].

Tanım 2.3.10. $(X,\mu,\upsilon,*,\circ)$ sezgisel bulanık normlu lineer uzay ve $x=(x_k)$ X uzayında bir dizi olsun. Eğer $\forall\varepsilon>0$ ve $\forall t>0$ için

$$\delta\left(\left\{k\in\mathbb{N}:\mu(x_k-L,t)\leq 1-\varepsilon \text{ ya da } \upsilon(x_k-L,t)\geq\varepsilon\right\}\right)=0$$

yani,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left|\left\{ j\le n : \mu\left(x_j-L,t\right)\le 1-\varepsilon \text{ ya da } \upsilon\left(x_j-L,t\right)\ge\varepsilon\right\}\right|=0$$

oluyorsa $x=(x_k)$ dizisi $L\in X$ noktasına (μ,υ) sezgisel bulanık lineer normuna göre istatistiksel yakınsaktır (veya $L\in X$ noktasına $S^{(\mu,\upsilon)}$- yakınsaktır) denir. Bu durum $S^{(\mu,\upsilon)}$-$lim\, x=L$ şeklinde gösterilmektedir [37].

Teorem 2.3.11. $(X,\mu,\upsilon,*,\circ)$ sezgisel bulanık normlu lineer uzay ve $x=(x_k)$ X uzayında bir dizi olsun. $S^{(\mu,\upsilon)}$-$lim\, x=L_1$ ve $S^{(\mu,\upsilon)}$-$lim\, x=L_2$ ise $L_1=L_2$ dir [37].

Tanım 2.3.12. $(X,\mu,\upsilon,*,\circ)$ sezgisel bulanık normlu lineer uzay ve θ bir lacunary dizisi olsun. Eğer $\forall\varepsilon>0$ ve $\forall t>0$ için

$$\delta_\theta\left(\left\{k\in\mathbb{N} : \mu\left(x_k-L,t\right)\le 1-\varepsilon \text{ ya da } \upsilon\left(x_k-L,t\right)\ge\varepsilon\right\}\right)=0,$$

bir diğer ifadeyle,

$$\delta_\theta\left(\left\{k\in\mathbb{N} : \mu\left(x_k-L,t\right)>1-\varepsilon \text{ ve } \upsilon\left(x_k-L,t\right)<\varepsilon\right\}\right)=1$$

oluyorsa $x=(x_k)$ dizisi $L\in X$ noktasına (μ,υ) sezgisel bulanık lineer normuna göre lacunary istatistiksel yakınsaktır (veya $L\in X$ noktasına $S_\theta^{(\mu,\upsilon)}$- yakınsaktır) denir. Bu durum $S_\theta^{(\mu,\upsilon)}$-$lim\, x=L$ şeklinde gösterilmektedir [46].

Tanım 2.3.13. $(X,\mu,\upsilon,*,\circ)$ sezgisel bulanık normlu lineer uzay ve θ bir lacunary dizisi olsun. Eğer $\forall\varepsilon>0$ ve $\forall t>0$ için

$$\delta_\theta\left(\left\{k\in\mathbb{N}:\mu\left(x_k-x_m,t\right)\le 1-\varepsilon \text{ ya da } \upsilon\left(x_k-x_m,t\right)\ge\varepsilon\right\}\right)=0$$

olacak şekilde $m=m(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ sayısı mevcutsa $x=(x_k)$ dizisi (μ,υ) sezgisel bulanık lineer normuna göre lacunary istatistiksel Cauchy dizisidir denir [46].

Tanım 2.3.14. $(X,\mu,\upsilon,*,\circ)$ bir sezgisel bulanık normlu lineer uzay, θ bir lacunary dizisi ve $x=(x_k)$ X uzayında bir dizi olsun. Eğer $\forall\varepsilon>0$ ve $\forall t>0$ için $r\ge r_0$ olduğunda $\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\mu\left(x_k-L,t\right)>1-\varepsilon$ ve $\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\upsilon\left(x_k-L,t\right)<\varepsilon$ olacak şekilde bir $r_0=r_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ sayısı varsa $x=(x_k)$ dizisi $L\in X$ noktasına (μ,υ) sezgisel bulanık lineer normuna göre lacunary yakınsaktır denir ve bu durum $\left|w_\theta\right|^{(\mu,\upsilon)}\text{-}lim\, x=L$ ile gösterilmektedir [42].

Tanım 2.3.15. $(X,\mu,\upsilon,*,\circ)$ sezgisel bulanık normlu lineer uzay ve $x=(x_k)$, X uzayında bir dizi olsun. Eğer $\forall\varepsilon>0$ ve $\forall t>0$ için

$$\delta_\lambda\left(\left\{k\in\mathbb{N}:\mu\left(x_k-L,t\right)\le 1-\varepsilon \text{ ya da } \upsilon\left(x_k-L,t\right)\ge\varepsilon\right\}\right)=0,$$

bir diğer ifadeyle,

$$\delta_\lambda\left(\left\{k\in\mathbb{N}:\mu\left(x_k-L,t\right)>1-\varepsilon \text{ ve } \upsilon\left(x_k-L,t\right)<\varepsilon\right\}\right)=1$$

oluyorsa $x=(x_k)$ dizisi $L\in X$ noktasına (μ,υ) sezgisel bulanık lineer normuna göre λ-istatistiksel yakınsaktır denir. Bu durum $S_\lambda^{(\mu,\upsilon)}\text{-}lim\, x=L$ şeklinde gösterilmektedir [53].

Tanım 2.3.16. $(X,\mu,\upsilon,*,\circ)$ bir sezgisel bulanık normlu lineer uzay ve $x=(x_k)$ X uzayında bir dizi olsun. Eğer $\forall\varepsilon>0$ ve $\forall t>0$ için $n\geq n_0$ olduğunda $\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n}\mu(x_k-L,t)>1-\varepsilon$ ve $\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n}\upsilon(x_k-L,t)<\varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0=n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ sayısı varsa $x=(x_k)$ dizisi $L\in X$ noktasına (μ,υ) sezgisel bulanık lineer normuna göre (V,λ)-toplanabilirdir (veya $L\in X$ noktasına $(V,\lambda)^{(\mu,\upsilon)}$-toplanabilirdir) denir ve bu durum $(V,\lambda)^{(\mu,\upsilon)}\text{-}lim\, x=L$ ile gösterilmektedir [43].

2.4. Sezgisel Bulanık n-Normlu Lineer Uzaylar

Tanım 2.4.1. $n\in\mathbb{N}$ olmak üzere X reel vektör uzayı verilsin. Aşağıdaki şartları sağlayan $\|\bullet,\bullet,...,\bullet\|:\underbrace{X\times X\times...\times X}_{n}\to\mathbb{R}$ fonksiyonuna X üzerinde lineer n-norm ve $(X,\|\bullet,...,\bullet\|)$ sıralı ikilisine de n-normlu lineer uzay denir.

1. $\|x_1,x_2,...,x_n\|=0$ ancak ve ancak $x_1,x_2,...,x_n$ lineer bağımlıdır,
2. $\|x_1,x_2,...,x_n\|$, $x_1,x_2,...,x_n$'nin herhangi bir permütasyonu altında değişmezdir.
3. Her $\alpha\in\mathbb{R}$ için $\|x_1,x_2,...,\alpha x_n\|=|\alpha|\|x_1,x_2,...,x_n\|$,
4. $\|x_1,x_2,...,x_{n-1},y+z\|\leq\|x_1,x_2,...,x_{n-1},y\|+\|x_1,x_2,...,x_{n-1},z\|$

dır [69].

Tanım 2.4.2. $(X,\|\bullet,...,\bullet\|)$ n-normlu lineer uzay ve $x=(x_k)$ X uzayında bir dizi olsun. Eğer $\forall y_1, y_2,..., y_{n-1} \in X$ için

$$\lim_{k\to\infty} \|y_1, y_2,..., y_{n-1}, x_k - L\| = 0$$

oluyorsa $x=(x_k)$ dizisi $L\in X$ noktasına lineer n-norma göre yakınsaktır denir [69].

Tanım 2.4.3. $(X,\|\bullet,...,\bullet\|)$ n-normlu lineer uzay ve $x=(x_k)$ X uzayında bir dizi olsun. Eğer $\forall y_1, y_2,..., y_{n-1} \in X$ için

$$\lim_{k,m\to\infty} \|y_1, y_2,..., y_{n-1}, x_k - x_m\| = 0$$

oluyorsa $x=(x_k)$ dizisine lineer n-norma göre Cauchy dizisi denir [69].

Tanım 2.4.4. X, F cismi üzerinde lineer uzay, $*$ işlemi sürekli t-norm, $\circ$ işlemi sürekli t-conorm olsun. μ, υ kümeleri $X^n \times (0,\infty)$ üzerinde aşağıdaki şartları sağlayan bulanık kümeler ise $(X,\mu,\upsilon,*,\circ)$ sıralı beşlisine sezgisel bulanık n-normlu lineer uzay denir. Her $x_1, x_2,..., x_n, x_n^{'} \in X$ ve $s,t>0$ için

1. $\mu(x_1, x_2, \cdots, x_n, t) + \upsilon(x_1, x_2, \cdots, x_n, t) \le 1$,
2. $\mu(x_1, x_2, \cdots, x_n, t) > 0$,
3. $\mu(x_1, x_2, \cdots, x_n, t) = 1$ ancak ve ancak $x_1, x_2, \cdots, x_n$ lineer bağımlıdır,
4. $\mu(x_1, x_2, \cdots, x_n, t)$, $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 'nin herhangi bir permütasyonu altında

değişmezdir,

5. $\alpha \neq 0$ ve $\alpha \in F$ ise $\mu(x_1, x_2, \cdots, \alpha x_n, t) = \mu\left(x_1, x_2, \cdots, x_n, \frac{t}{|\alpha|}\right)$,

6. $\mu(x_1, x_2, \cdots, x_n, s) * \mu(x_1, x_2, \cdots, x_n^{'}, t) \leq \mu(x_1, x_2, \cdots, x_n + x_n^{'}, s+t)$,

7. $\mu(x_1, x_2, ..., x_n, t) : (0, \infty) \to (0,1]$, t noktasında süreklidir,

8. $\lim_{t \to \infty} \mu(x_1, x_2, \cdots, x_n, t) = 1$ ve $\lim_{t \to 0} \mu(x_1, x_2, \cdots, x_n, t) = 0$,

9. $\upsilon(x_1, x_2, \cdots, x_n, t) < 1$,

10. $\upsilon(x_1, x_2, \cdots, x_n, t) = 0$ ancak ve ancak $x_1, x_2, \cdots, x_n$ lineer bağımlıdır,

11. $\upsilon(x_1, x_2, \cdots, x_n, t)$, $x_1, x_2, \cdots, x_n$'nin herhangi bir permütasyonu altında değişmezdir,

12. $\alpha \neq 0$ ve $\alpha \in F$ ise $\upsilon(x_1, x_2, \cdots, \alpha x_n, t) = \upsilon\left(x_1, x_2, \cdots, x_n, \frac{t}{|\alpha|}\right)$,

13. $\upsilon(x_1, x_2, \cdots, x_n, s) \circ \upsilon(x_1, x_2, \cdots, x_n^{'}, t) \geq \upsilon(x_1, x_2, \cdots, x_n + x_n^{'}, s+t)$,

14. $\upsilon(x_1, x_2, ..., x_n, t) : (0, \infty) \to [0,1)$, t noktasında süreklidir,

15. $\lim_{t \to \infty} \upsilon(x_1, x_2, \cdots, x_n, t) = 0$ ve $\lim_{t \to 0} \upsilon(x_1, x_2, \cdots, x_n, t) = 1$

dir. Bu durumda $(\mu, \upsilon)^n$ sıralı ikilisine de sezgisel bulanık lineer n-norm denir [70].

Örnek 2.4.5. $(X, \|\bullet, ..., \bullet\|)$ n-normlu lineer uzay olsun. Her $a, b \in [0,1]$ için $a * b = min\{a, b\}$ ve $a \circ b = maks\{a, b\}$ olsun. μ_0 ve υ_0 kümeleri her $t \in \mathbb{R}^+$ için $X^n \times (0, \infty)$ üzerinde

$$\mu_0(x_1, x_2, ..., x_n, t) = \frac{t}{t + \|x_1, x_2, ..., x_n\|} \quad \text{ve} \quad \upsilon_0(x_1, x_2, ..., x_n, t) = \frac{\|x_1, x_2, ..., x_n\|}{t + \|x_1, x_2, ..., x_n\|}$$

şeklinde tanımlansınlar. O halde $(X,\mu_0,\upsilon_0,*,\circ)$ sezgisel bulanık n-normlu lineer uzaydır [70].

Tanım 2.4.6. $(X,\mu,\upsilon,*,\circ)$ bir sezgisel bulanık n-normlu lineer uzay, $x=(x_k)$ X uzayında bir dizi olsun. Eğer $\forall\varepsilon>0$, $\forall t>0$ ve $y_1,y_2,...,y_{n-1}\in X$ için $k\geq k_0$ olduğunda $\mu(y_1,y_2,...,y_{n-1},x_k-L,t)>1-\varepsilon$ ve $\upsilon(y_1,y_2,...,y_{n-1},x_k-L,t)<\varepsilon$ olacak şekilde bir $k_0=k_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ sayısı varsa $x=(x_k)$ dizisi $L\in X$ noktasına $(\mu,\upsilon)^n$ sezgisel bulanık lineer n-normuna göre yakınsıyor denir ve $(\mu,\upsilon)^n$-$lim\, x=L$ veya $x_k \xrightarrow{(\mu,\upsilon)^n} L$ şeklinde gösterilmektedir [70].

Tanım 2.4.7. $(X,\mu,\upsilon,*,\circ)$ bir sezgisel bulanık n-normlu lineer uzay, $x=(x_k)$ X uzayında bir dizi olsun. Eğer $\forall\varepsilon>0$, $\forall t>0$ ve $y_1,y_2,...,y_{n-1}\in X$ için $k,m\geq k_0$ olduğunda $\mu(y_1,y_2,...,y_{n-1},x_k-x_m,t)>1-\varepsilon$ ve $\upsilon(y_1,y_2,...,y_{n-1},x_k-x_m,t)<\varepsilon$ olacak şekilde bir $k_0=k_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ sayısı varsa $x=(x_k)$ dizisine $(\mu,\upsilon)^n$ sezgisel bulanık lineer n-normuna göre bir Cauchy dizisi denir [70].

Teorem 2.4.8. $(X,\mu,\upsilon,*,\circ)$ bir sezgisel bulanık n-normlu lineer uzay ve $x=(x_k)$ X uzayında bir dizi olsun. $x=(x_k)$ dizisi $L\in X$ noktasına $(\mu,\upsilon)^n$ sezgisel bulanık lineer n-normuna göre yakınsaktır ancak ve ancak $\lim_{k\to\infty}\mu(y_1,y_2,...,y_{n-1},x_k-L,t)=1$ ve $\lim_{k\to\infty}\upsilon(x_1,x_2,...,x_{k-1},x_k-L,t)=0$ dır [70].

Tanım 2.4.9. $(X,\mu,\upsilon,*,\circ)$ sezgisel bulanık n-normlu lineer uzay ve θ bir lacunary dizisi olsun. Eğer $\forall\varepsilon>0$, $\forall t>0$ ve $y_1,y_2,...,y_{n-1}\in X$ için

$$\delta_\theta\Big(\big\{k\in\mathbb{N}:\mu(y_1,y_2,...,y_{n-1},x_k-L,t)\leq 1-\varepsilon$$
$$\text{ya da } \upsilon(y_1,y_2,...,y_{n-1},x_k-L,t)\geq\varepsilon\big\}\Big)=0$$

ise $x=(x_k)$ dizisi $L\in X$ noktasına $(\mu,\upsilon)^n$ sezgisel bulanık lineer n- normuna göre lacunary istatistiksel yakınsaktır denir. Bu durum $S_\theta^{(\mu,\upsilon)^n}\text{-}lim\, x=L$ şeklinde gösterilmektedir [45].

Tanım 2.4.10. $(X,\mu,\upsilon,*,\circ)$ sezgisel bulanık n- normlu lineer uzay ve θ bir lacunary dizisi olsun. Eğer $\forall\varepsilon>0$, $\forall t>0$ ve $y_1,y_2,...,y_{n-1}\in X$ için

$$\delta_\theta\left(\{k\in\mathbb{N}:\mu(y_1,y_2,...,y_{n-1},x_k-x_m,t)\leq 1-\varepsilon\right.$$
$$\left.\text{ya da } \upsilon(y_1,y_2,...,y_{n-1},x_k-x_m,t)\geq\varepsilon\}\right)=0$$

olacak şekilde bir $m=m(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ sayısı mevcutsa $x=(x_k)$ dizisi $(\mu,\upsilon)^n$ sezgisel bulanık lineer n- normuna göre lacunary istatistiksel Cauchy dizisidir denir [45].

Teorem 2.4.11. $(X,\mu,\upsilon,*,\circ)$ sezgisel bulanık n- normlu lineer uzay ve θ bir lacunary dizisi olsun. Eğer $S_\theta^{(\mu,\upsilon)^n}\text{-}lim\, x=L_1$ ve $S_\theta^{(\mu,\upsilon)^n}\text{-}lim\, x=L_2$ ise $L_1=L_2$ dir [45].

BÖLÜM 3. SEZGİSEL BULANIK NORMLU LİNEER UZAYLARDA BAZI YAKINSAKLIK ÇEŞİTLERİ

3.1. Sezgisel Bulanık Normlu Lineer Uzaylarda Ağırlıklı İstatistiksel Yakınsaklık

Bu bölümde sezgisel bulanık normlu lineer uzaylarda $\left(\overline{N},p\right)$-toplanabilme kavramı ve ağırlıklı istatistiksel yakınsaklık kavramı verilecektir. Ayrıca bu kavramlar arasındaki ilişkileri inceleyen teoremler ifade ve ispat edilecektir.

Tanım 3.1.1. $\left(X,\mu,\upsilon,*,\circ\right)$ sezgisel bulanık normlu lineer uzay olsun. Eğer $\forall\varepsilon>0$ ve $\forall t>0$ için

$$\delta_{\overline{N}}\left(\left\{k\in\mathbb{N}:\mu\left(p_k\left(x_k-L\right),t\right)\leq 1-\varepsilon \text{ ya da } \upsilon\left(p_k\left(x_k-L\right),t\right)\geq\varepsilon\right\}\right)=0 \tag{3.1}$$

yani,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{P_n}\left|\left\{k\leq P_n:\mu\left(p_k\left(x_k-L\right),t\right)\leq 1-\varepsilon \text{ ya da } \upsilon\left(p_k\left(x_k-L\right),t\right)\geq\varepsilon\right\}\right|=0 \tag{3.2}$$

oluyorsa $x=\left(x_k\right)$ dizisi $L\in X$ noktasına $\left(\mu,\upsilon\right)$ sezgisel bulanık lineer normuna göre ağırlıklı istatistiksel yakınsaktır (veya $L\in X$ noktasına $S_{\overline{N}}^{(\mu,\upsilon)}$-yakınsaktır) denir. Bu durumda $S_{\overline{N}}^{(\mu,\upsilon)}\text{-}lim\,x=L$ şeklinde gösterilmektedir. Her $k\in\mathbb{N}$ için $p_k=1$

alındığında, (μ,υ) sezgisel bulanık lineer normuna göre ağırlıklı istatistiksel yakınsaklık, Karakuş ve ark. [37] tarafından tanımlanan, (μ,υ) sezgisel bulanık lineer normuna göre istatistiksel yakınsaklığa indirgenir.

(3.1) eşitliği ve ağırlıklı yoğunluğun özellikleri kullanılarak, aşağıdaki lemma elde edilir.

Lemma 3.1.2. $(X,\mu,\upsilon,*,\circ)$ sezgisel bulanık normlu lineer uzay olsun. $\forall\varepsilon>0$ ve $\forall t>0$ için aşağıdaki eşitlikler birbirine denktir.

1. $S_{\overline{N}}^{(\mu,\upsilon)}\text{-}lim\, x=L$ dir.
2. $\delta_{\overline{N}}\left(\left\{k\in\mathbb{N}:\mu\left(p_k\left(x_k-L\right),t\right)\leq 1-\varepsilon\right\}\right)=\delta_{\overline{N}}\left(\left\{k\in\mathbb{N}:\upsilon\left(p_k\left(x_k-L\right),t\right)\geq\varepsilon\right\}\right)=0$

dır.

3. $\delta_{\overline{N}}\left(\left\{k\in\mathbb{N}:\ \mu\left(p_k\left(x_k-L\right),t\right)>1-\varepsilon\right.\right.$

   ve $\left.\left.\upsilon\left(p_k\left(x_k-L\right),t\right)<\varepsilon\right\}\right)=1$

dir.

4. $\delta_{\overline{N}}\left(\left\{k\in\mathbb{N}:\mu\left(p_k\left(x_k-L\right),t\right)>1-\varepsilon\right\}\right)$

   $=\delta_{\overline{N}}\left(\left\{k\in\mathbb{N}:\upsilon\left(p_k\left(x_k-L\right),t\right)<\varepsilon\right\}\right)=1$

dir.

Tanım 3.1.3. $(X,\mu,\upsilon,*,\circ)$ bir sezgisel bulanık normlu lineer uzay, $x=(x_k)$ X uzayında bir dizi olsun. Eğer $\forall\varepsilon>0$ ve $\forall t>0$ için $n\geq n_0$ olduğunda

$$\frac{1}{P_n}\sum_{k=1}^{n}\mu\left(p_k\left(x_k-L\right),t\right)>1-\varepsilon \quad \text{ve} \quad \frac{1}{P_n}\sum_{k=1}^{n}\upsilon\left(p_k\left(x_k-L\right),t\right)<\varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_0=n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ sayısı varsa $x=(x_k)$ dizisi $L\in X$ noktasına (μ,υ) sezgisel bulanık lineer normuna göre $\left(\overline{N},p\right)$- toplanabilirdir (veya $L\in X$ noktasına $\left(\overline{N},p\right)^{(\mu,\upsilon)}$-toplanabilirdir) denir ve bu durum $\left(\overline{N},p\right)^{(\mu,\upsilon)}\text{-}lim\, x=L$ ile gösterilmektedir.

Aşağıdaki teoremde sezgisel bulanık normlu lineer uzaylarda ağırlıklı istatistksel yakınsaklık ve istatistiksel yakınsaklık kavramları arasındaki ilişki verilecektir.

Teorem 3.1.4. $(X,\mu,\upsilon,*,\circ)$ bir sezgisel bulanık normlu lineer uzay ve $x=(x_k)$, X uzayında bir dizi olsun. O halde aşağıdaki ifadeler geçerlidir.

1. $\forall k\in\mathbb{N}$ için $p_k\geq 1$, $\limsup\limits_{n\to\infty}\frac{P_n}{n}<\infty$ ve $S_{\overline{N}}^{(\mu,\upsilon)}$-$\lim x=L$ ise $S^{(\mu,\upsilon)}$-$\lim x=L$

dir.

2. $\forall k\in\mathbb{N}$ için $p_k\leq 1$, $\liminf\limits_{n\to\infty}\frac{P_n}{n}>0$ ve $S^{(\mu,\upsilon)}$-$\lim x=L$ ise $S_{\overline{N}}^{(\mu,\upsilon)}$-$\lim x=L$

dir.

İspat.

1. $\forall k\in\mathbb{N}$ için $p_k\geq 1$ ve $\limsup\limits_{n\to\infty}\frac{P_n}{n}<\infty$ olsun. O halde $1\leq\frac{P_n}{n}\leq K$ olacak

şekilde $K>0$ sayısı vardır. $S_{\overline{N}}^{(\mu,\upsilon)}$-$\lim x=L$ olduğu da kullanılarak $\forall\varepsilon>0$ ve $\forall t>0$ için

$$\frac{1}{n}\left|\left\{k\leq n:\mu(x_k-L,t)\leq 1-\varepsilon \text{ ya da } \upsilon(x_k-L,t)\geq\varepsilon\right\}\right|$$

$$\leq\frac{1}{n}\left|\left\{k\leq n:\mu\left(p_k\left(x_k-L\right),t\right)\leq 1-\varepsilon \text{ ya da } \upsilon\left(p_k\left(x_k-L\right),t\right)\geq\varepsilon\right\}\right|$$

$$\leq\frac{K}{P_n}\left|\left\{k\leq P_n:\mu\left(p_k\left(x_k-L\right),t\right)\leq 1-\varepsilon \text{ ya da } \upsilon\left(p_k\left(x_k-L\right),t\right)\geq\varepsilon\right\}\right|$$

dir. Böylece $S^{(\mu,\upsilon)}$-$\lim x=L$ olduğu gösterilmiş olur.

2. $\forall k \in \mathbb{N}$ için $p_k \leq 1$ ve $\liminf\limits_{n\to\infty} \frac{P_n}{n} > 0$ olsun. O halde $\delta \leq \frac{P_n}{n} \leq 1$ olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı vardır. $S^{(\mu,\upsilon)}$-$\lim x = L$ olduğu da kullanılarak $\forall \varepsilon > 0$ ve $\forall t > 0$ için

$$\frac{1}{n}\left|\left\{k \leq n : \mu\left(x_k - L, t\right) \leq 1-\varepsilon \text{ ya da } \upsilon\left(x_k - L, t\right) \geq \varepsilon\right\}\right|$$

$$\geq \frac{1}{n}\left|\left\{k \leq n : \mu\left(p_k\left(x_k - L\right), t\right) \leq 1-\varepsilon \text{ ya da } \upsilon\left(p_k\left(x_k - L\right), t\right) \geq \varepsilon\right\}\right|$$

$$\geq \frac{1}{n}\left|\left\{k \leq P_n : \mu\left(p_k\left(x_k - L\right), t\right) \leq 1-\varepsilon \text{ ya da } \upsilon\left(p_k\left(x_k - L\right), t\right) \geq \varepsilon\right\}\right|$$

$$\geq \frac{\delta}{P_n}\left|\left\{k \leq P_n : \mu\left(p_k\left(x_k - L\right), t\right) \leq 1-\varepsilon \text{ ya da } \upsilon\left(p_k\left(x_k - L\right), t\right) \geq \varepsilon\right\}\right|$$

dir. Böylece $S_{\overline{N}}^{(\mu,\upsilon)}$-$\lim x = L$ olduğu gösterilmiş olur.

Aşağıdaki örnekte, Teorem 3.1.4.(2)'nin tersinin her zaman geçerli olmadığı gösterilmektedir.

Örnek 3.1.5. $(\mathbb{R}, \mu_0, \upsilon_0, *, \circ)$ sezgisel bulanık normlu lineer uzayı Örnek 2.3.6.'daki gibi tanımlansın. (p_k) ve (x_k) dizileri sırasıyla $\forall k \in \mathbb{N}$ için $p_k = 3^{k-1}$ ve $[\sqrt{3}^{m-1}]$, $\sqrt{3}^{m-1}$ sayısından büyük olmayan en küçük tamsayıyı göstermek üzere

$$x_k = \begin{cases} 1, & \left(P_{m-1}, P_m\right] \text{ aralığında ilk } \left[\sqrt{3}^{m-1}\right] \text{ tamsayı} \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

ve her $0 < \varepsilon < 1$ ve her $t > 0$ için $K_{P_n}(\varepsilon)$ kümesi

$$K_{P_n}(\varepsilon)=\left\{k\le P_n\ :\mu_0\left(p_k x_k,t\right)\le 1-\varepsilon \text{ ya da } \upsilon_0\left(p_k x_k,t\right)\ge\varepsilon\right\}$$

olacak şekilde tanımlansın. O halde her $0<\varepsilon<1$ ve her $t>0$ için,

$$\begin{aligned}K_{P_n}(\varepsilon)&=\left\{k\le P_n\ :\frac{t}{t+3^{k-1}\left|x_k\right|}\le 1-\varepsilon \text{ ya da } \frac{3^{k-1}\left|x_k\right|}{t+3^{k-1}\left|x_k\right|}\ge\varepsilon\right\}\\&=\left\{k\le P_n\ :\left|x_k\right|\ge\frac{\varepsilon t}{3^{k-1}(1-\varepsilon)}\right\}\\&=\left\{k\le P_n\ :x_k=1\right\}\end{aligned}$$

olduğu için

$$\begin{aligned}\frac{1}{P_n}\left|K_{P_n}(\varepsilon)\right|&=\frac{2}{3^n-1}\left|\left\{k\le\frac{3^n-1}{2}\ :\ x_k=1\right\}\right|\\&\le\frac{2}{3^n-1}\left(1+(1.8)+(1.8)^2+...+(1.8)^{n-1}\right)\\&\le\frac{5}{2}\left(\frac{1.8}{3}\right)^n\frac{\left(1-\left(\frac{1}{1.8}\right)^n\right)}{\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)}\end{aligned}$$

dir. O halde $n\to\infty$ iken limite geçilirse $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{P_n}\left|K_{P_n}(\varepsilon)\right|=0$ olduğu gösterilmiş olur. O halde (x_k) dizisi (μ,υ) sezgisel bulanık lineer normuna göre 0 sayısına ağırlıklı istatistiksel yakınsaktır.

n yeterince büyük bir doğal sayı olsun. O halde $P_{m-1}<n\le P_m$ olacak şekilde m doğal sayısı mevcuttur. Her $0<\varepsilon<1$ ve her $t>0$ için $K_n(\varepsilon)$ kümesi

$$K_n(\varepsilon)=\left\{k\le n\ :\ \mu_0\left(x_k,t\right)\le 1-\varepsilon \text{ ya da } \upsilon_0\left(x_k,t\right)\ge\varepsilon\right\}$$

olacak şekilde tanımlansın. Her $0<\varepsilon<1$ ve her $t>0$ için

$$
\begin{aligned}
K_n(\varepsilon) &= \left\{ k \le n \,:\, \frac{t}{t+|x_k|} \le 1-\varepsilon \text{ ya da } \frac{|x_k|}{t+|x_k|} \ge \varepsilon \right\} \\
&= \left\{ k \le n \,:\, |x_k| \ge \frac{\varepsilon t}{(1-\varepsilon)} \right\} \\
&= \{ k \le n \,:\, x_k = 1 \}
\end{aligned}
$$

dir. O halde

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{n}|K_n(\varepsilon)| = \frac{1}{n}\left|\{k \le n \,:\, x_k = 1\}\right| \\
&> \frac{1}{n}\left(1+(1.2)+(1.2)^2+\ldots+(1.2)^{m-1}\right) \\
&> \frac{1}{n}(1.2)^m - \frac{1}{n} \\
&> \frac{1}{n}(1.2)^{\frac{n}{log\,3}} - \frac{1}{n} \quad \left(m > \frac{n}{log\,3} \right)
\end{aligned}
$$

dir. Yukardaki eşitsizlikte $n \to \infty$ iken limite geçilirse (x_k) dizisinin (μ,υ) sezgisel bulanık lineer normuna göre 0 sayısına istatistiksel yakınsak olmadığı görülür.

Aşağıdaki teoremde $S_{\overline{N}}^{(\mu,\upsilon)}$-yakınsaklık ve $\left(\overline{N},p\right)^{(\mu,\upsilon)}$-toplanabilirlik kavramları arasındaki ilişki verilmektedir.

Teorem 3.1.6. $(X,\mu,\upsilon,*,\circ)$ sezgisel bulanık normlu lineer uzay, $x=(x_k)$ X uzayında bir dizi ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\frac{P_n}{n} \ge 1$ olsun. O halde $x=(x_k)$ dizisi $L \in X$ noktasına $\left(\overline{N},p\right)^{(\mu,\upsilon)}$-toplanabilir ise $S_{\overline{N}}^{(\mu,\upsilon)}$-yakınsaktır.

İspat. Kabul edelim ki $\left(\overline{N},p\right)^{(\mu,\upsilon)}$-$lim\, x = L$ olsun. $\forall\varepsilon > 0$ ve $\forall t > 0$ için $K_{P_n}(\varepsilon)$ ve $K_{P_n}^{c}(\varepsilon)$ kümeleri

$$K_{P_n}(\varepsilon) = \left\{k \le P_n \,:\, \mu\left(p_k\left(x_k - L\right),t\right) \le 1-\varepsilon \text{ ya da } \upsilon\left(p_k\left(x_k - L\right),t\right) \ge \varepsilon\right\}$$

ve

$$K_{P_n}^{c}(\varepsilon) = \left\{k \le P_n \,:\, \mu\left(p_k\left(x_k - L\right),t\right) > 1-\varepsilon \text{ ve } \upsilon\left(p_k\left(x_k - L\right),t\right) < \varepsilon\right\}$$

olacak şekilde tanımlansın.

$$\begin{aligned}\frac{1}{P_n}\sum_{k=1}^{n}\mu\left(p_k\left(x_k-L\right),t\right) &= \frac{1}{P_n}\sum_{\substack{k=1\\ k\in K_{P_n}(\varepsilon)}}^{n}\mu\left(p_k\left(x_k-L\right),t\right)\\ &\quad+\frac{1}{P_n}\sum_{\substack{k=1\\ k\in K_{P_n}^{c}(\varepsilon)}}^{n}\mu\left(p_k\left(x_k-L\right),t\right)\\ &\ge \frac{1}{P_n}\sum_{\substack{k=1\\ k\in K_{P_n}^{c}(\varepsilon)}}^{n}\mu\left(p_k\left(x_k-L\right),t\right) > \frac{1}{P_n}\left|K_{P_n}^{c}(\varepsilon)\right|(1-\varepsilon)\end{aligned} \tag{3.3}$$

dır. (3.3) eşitsizliğinden, $\forall\varepsilon > 0$ için $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{P_n}\left|K_{P_n}^{c}(\varepsilon)\right| = 1$ elde edilir. Benzer şekilde $\forall\varepsilon > 0$ ve $\forall t > 0$ için,

$$\begin{aligned}\frac{1}{P_n}\sum_{k=1}^{n}\upsilon\left(p_k\left(x_k-L\right),t\right) &= \frac{1}{P_n}\sum_{\substack{k=1\\ k\in K_{P_n}(\varepsilon)}}^{n}\upsilon\left(p_k\left(x_k-L\right),t\right)\\ &\quad+\frac{1}{P_n}\sum_{\substack{k=1\\ k\in K_{P_n}^{c}(\varepsilon)}}^{n}\upsilon\left(p_k\left(x_k-L\right),t\right)\\ &\ge \frac{1}{P_n}\sum_{\substack{k=1\\ k\in K_{P_n}(\varepsilon)}}^{n}\upsilon\left(p_k(x_k-L),t\right) \ge \frac{1}{P_n}\sum_{\substack{k=1\\ k\in K_{P_n}(\varepsilon)}}^{n}\varepsilon = \frac{1}{P_n}\left|K_{P_n}(\varepsilon)\right|\varepsilon\end{aligned} \tag{3.4}$$

dır. (3.4) eşitsizliğinden $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{P_n}\left|K_{P_n}(\varepsilon)\right| = 0$ olduğu görülür. Böylece $x = \left(x_k\right)$ dizisi $L \in X$ noktasına $S_{\overline{N}}^{(\mu,\upsilon)}$-yakınsaktır.

Aşağıdaki örnekte Teorem 3.1.6.'nın tersinin her zaman doğru olmadığı gösterilmektedir.

Örnek 3.1.7. $(\mathbb{R},\mu_0,\upsilon_0,*,\circ)$ sezgisel bulanık normlu lineer uzayı Örnek 2.3.6.'daki gibi tanımlansın. $\forall k\in\mathbb{N}$ için $p_k=\dfrac{1}{k+1}$ olacak şekilde (p_k) dizisi, terimleri

$$x_k=\begin{cases} k, & k=m^2\ (m\in\mathbb{N}) \\ 0, & k\neq m^2 \end{cases}$$

olmak üzere (x_k) dizisi ve her $0<\varepsilon<1$ ve her $t>0$ için $K_{P_n}(\varepsilon)$ kümesi

$$K_{P_n}(\varepsilon)=\left\{k\le P_n\ :\ \mu_0(p_kx_k,t)\le 1-\varepsilon \text{ ya da } \upsilon_0(p_kx_k,t)\ge\varepsilon\right\}$$

olacak şekilde tanımlansın. Bu tanıma göre

$$K_{P_n}(\varepsilon)=\left\{k\le P_n\ :\ \frac{t}{t+\frac{|x_k|}{k+1}}\le 1-\varepsilon \text{ ya da } \frac{\frac{|x_k|}{k+1}}{t+\frac{|x_k|}{k+1}}\ge\varepsilon\right\}$$
$$=\left\{k\le P_n\ :\ |x_k|\ge\frac{(k+1)\varepsilon t}{(1-\varepsilon)}\right\}\subseteq\left\{k\le P_n : x_k=k\right\}$$

olduğu için

$$\frac{1}{P_n}\left|K_{P_n}(\varepsilon)\right|\le\frac{\sqrt{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}}{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}$$

dır. $n\to\infty$ iken limite geçilirse

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{P_n}\left|K_{P_n}(\varepsilon)\right|=0$$

olduğu görülür. O halde, $S_{\overline{N}}^{(\mu,\upsilon)}\text{-}lim\, x = 0$ dır.

Diğer taraftan $n \to \infty$ iken $\frac{1}{P_n}\sum_{k=1}^{n}\mu\left(p_k x_k, t\right) \to \infty$ ve $\frac{1}{P_n}\sum_{k=1}^{n}\upsilon\left(p_k x_k, t\right) \to \infty$ olduğu için, $x = (x_k)$ dizisi 0 sayısına (μ,υ) sezgisel bulanık lineer normuna göre $\left(\overline{N}, p\right)$-toplanabilir değildir.

Teorem 3.1.3. $(X,\mu,\upsilon,*,\circ)$ sezgisel bulanık normlu lineer uzay, $x = (x_k)$ X uzayında bir dizi ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\frac{P_n}{n} \geq 1$ olsun. O halde $M \in (0,1)$ olmak üzere $S_{\overline{N}}^{(\mu,\upsilon)}\text{-}lim\, x = L,$ $\mu\left(p_k\left(x_k - L\right), t\right) \geq 1 - M$ ve $\upsilon\left(p_k\left(x_k - L\right), t\right) \leq M$ ise, $\left(\overline{N}, p\right)^{(\mu,\upsilon)}\text{-}lim\, x = L$ dir.

İspat. Kabul edelim ki $S_{\overline{N}}^{(\mu,\upsilon)}\text{-}lim\, x = L$ olsun. O halde, $\forall \varepsilon > 0$ ve $\forall t > 0$ için $K_{P_n}(\varepsilon)$ ve $K_{P_n}^{c}(\varepsilon)$ kümeleri

$$K_{P_n}(\varepsilon) = \left\{k \leq P_n \ : \ \mu\left(p_k\left(x_k - L\right), t\right) \leq 1 - \varepsilon \ \text{ ya da } \ \upsilon\left(p_k\left(x_k - L\right), t\right) \geq \varepsilon\right\}$$

ve

$$K_{P_n}^{c}(\varepsilon) = \left\{k \leq P_n \ : \ \mu\left(p_k\left(x_k - L\right), t\right) > 1 - \varepsilon \ \text{ ve } \ \upsilon\left(p_k\left(x_k - L\right), t\right) < \varepsilon\right\}$$

olacak şekilde tanımlansın.

$$S_1(n) = \frac{1}{P_n}\sum_{\substack{k=1 \\ k \in K_{P_n}(\varepsilon)}}^{n} \mu\left(p_k\left(x_k - L\right), t\right) \tag{3.5}$$

ve

$$S_2(n)=\frac{1}{P_n}\sum_{\substack{k=1\\ k\in K^c_{P_n}(\varepsilon)}}^{n}\mu\left(p_k(x_k-L),t\right) \tag{3.6}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}\frac{1}{P_n}\sum_{k=1}^{n}\mu\left(p_k(x_k-L),t\right)&=\frac{1}{P_n}\sum_{\substack{k=1\\ k\in K_{P_n}(\varepsilon)}}^{n}\mu\left(p_k(x_k-L),t\right)\\&\quad+\frac{1}{P_n}\sum_{\substack{k=1\\ k\in K^c_{P_n}(\varepsilon)}}^{n}\mu\left(p_k(x_k-L),t\right)\\&=S_1(n)+S_2(n)\end{aligned}$$

dir. Eğer $k\in K_{P_n}(\varepsilon)$ ise,

$$S_1(n)=\frac{1}{P_n}\sum_{\substack{k=1\\ k\in K_{P_n}(\varepsilon)}}^{n}\mu\left(p_k(x_k-L),t\right)\geq\frac{\left|K_{P_n}(\varepsilon)\right|}{P_n}(1-M) \tag{3.7}$$

dir. $S_{\overline{N}}^{(\mu,\nu)}$-$lim\, x=L$ olduğundan

$$\lim_{n\to\infty}S_1(n)\geq 0 \tag{3.8}$$

dır. Eğer $k\in K^c_{P_n}(\varepsilon)$ ise,

$$S_2(n)=\frac{1}{P_n}\sum_{\substack{k=1\\ k\in K^c_{P_n}(\varepsilon)}}^{n}\mu\left(p_k(x_k-L),t\right)>\frac{\left|K^c_{P_n}(\varepsilon)\right|}{P_n}(1-\varepsilon) \tag{3.9}$$

dır. (3.9) eşitsizliğinde $n\to\infty$ iken limite geçilirse

$$\lim_{n\to\infty} S_2(n) > (1-\varepsilon) \tag{3.10}$$

dır. (3.5) ve (3.6) eşitliklerini ve (3.7) - (3.10) eşitsizlikleri kullanılarak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{P_n}\sum_{k=1}^{n} \mu\left(p_k\left(x_k - L\right),t\right) = 1 \tag{3.11}$$

eşitliği elde edilir. Benzer şekilde

$$S_3(n) = \frac{1}{P_n}\sum_{\substack{k=1 \\ k\in K_{P_n}(\varepsilon)}}^{n} \upsilon\left(p_k\left(x_k - L\right),t\right) \tag{3.12}$$

ve

$$S_4(n) = \frac{1}{P_n}\sum_{\substack{k=1 \\ k\in K_{P_n}^c(\varepsilon)}}^{n} \upsilon\left(p_k\left(x_k - L\right),t\right) \tag{3.13}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}\frac{1}{P_n}\sum_{k=1}^{n} \upsilon\left(p_k\left(x_k - L\right),t\right) &= \frac{1}{P_n}\sum_{\substack{k=1 \\ k\in K_{P_n}(\varepsilon)}}^{n} \upsilon\left(p_k\left(x_k - L\right),t\right) \\ &+ \frac{1}{P_n}\sum_{\substack{k=1 \\ k\in K_{P_n}^c(\varepsilon)}}^{n} \upsilon\left(p_k\left(x_k - L\right),t\right) \\ &= S_3(n) + S_4(n)\end{aligned}$$

dır. Eğer $k \in K_{P_n}(\varepsilon)$ ise,

$$S_3(n) = \frac{1}{P_n}\sum_{\substack{k=1 \\ k\in K_{P_n}(\varepsilon)}}^{n} \upsilon\left(p_k\left(x_k - L\right),t\right)$$

$$\leq \frac{1}{P_n} \sum_{\substack{k=1 \\ k \in K_{P_n}(\varepsilon)}}^{n} M = \frac{1}{P_n} \left| K_{P_n}(\varepsilon) \right| M$$

dır. $n \to \infty$ iken limite geçilirse $S_{\overline{N}}^{(\mu,\upsilon)}\text{-}lim\, x = L$ olduğu kullanılarak

$$\lim_{n\to\infty} S_3(n) \leq 0 \tag{3.14}$$

dır. Eğer $k \in K_{P_n}^{c}(\varepsilon)$ ise,

$$\begin{aligned} S_4(n) &= \frac{1}{P_n} \sum_{\substack{k=1 \\ k \in K_{P_n}^{c}(\varepsilon)}}^{n} \upsilon\left(p_k (x_k - L), t\right) \\ &< \frac{1}{P_n} \sum_{\substack{k=1 \\ k \in K_{P_n}^{c}(\varepsilon)}}^{n} \varepsilon = \frac{\left| K_{P_n}^{c}(\varepsilon) \right|}{P_n} \varepsilon \end{aligned} \tag{3.15}$$

dır. (3.15) eşitsizliğinde $n \to \infty$ iken limite geçilirse $S_{\overline{N}}^{(\mu,\upsilon)}\text{-}lim\, x = L$ olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} S_4(n) < \varepsilon \tag{3.16}$$

dir. (3.12) ve (3.13) eşitlikleri ve (3.14) - (3.16) eşitsizlikleri kullanılarak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{P_n} \sum_{k=1}^{n} \upsilon\left(p_k (x_k - L), t\right) = 0 \tag{3.17}$$

eşitliği elde edilir. (3.11) ve (3.17) eşitliklerinden $\left(\overline{N}, p\right)^{(\mu,\upsilon)}\text{-}lim\, x = L$ olduğu ispatlanmış olur.

3.2. Sezgisel Bulanık Normlu Lineer Uzaylarda Genelleştirilmiş Ağırlıklı İstatistiksel Yakınsaklık

Bu bölümde sezgisel bulanık normlu lineer uzaylarda $\left(\overline{N}_{\lambda}, p\right)$-toplanabilme kavramı ve ağırlıklı λ-istatistiksel yakınsaklık kavramı verilecektir. Ayrıca bu kavramlar arasındaki ilişkileri inceleyen teoremler ifade ve ispat edilecektir.

Tanım 3.2.1. $(X,\mu,\upsilon,*,\circ)$ sezgisel bulanık normlu lineer uzay olsun. $\forall\varepsilon>0$ ve $\forall t>0$ için

$$\delta_{\overline{N}_{\lambda}}\left(\left\{k\in\mathbb{N}:\mu\left(p_k\left(x_k-L\right),t\right)\le 1-\varepsilon \text{ ya da } \upsilon\left(p_k\left(x_k-L\right),t\right)\ge\varepsilon\right\}\right)=0 \tag{3.18}$$

yani,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{P_{\lambda_n}}\left|\left\{k\le P_{\lambda_n}:\mu\left(p_k\left(x_k-L\right),t\right)\le 1-\varepsilon \text{ ya da } \upsilon\left(p_k\left(x_k-L\right),t\right)\ge\varepsilon\right\}\right|=0 \tag{3.19}$$

oluyorsa $x=(x_k)$ dizisi $L\in X$ noktasına (μ,υ) sezgisel bulanık lineer normuna göre ağırlıklı λ-istatistiksel yakınsaktır (veya $L\in X$ noktasına $S_{\overline{N}_{\lambda}}^{(\mu,\upsilon)}$-yakınsaktır) denir. Bu durum $S_{\overline{N}_{\lambda}}^{(\mu,\upsilon)}\text{-}\lim x=L$ veya $x_k\xrightarrow{(\mu,\upsilon)}L\left(S_{\overline{N}_{\lambda}}\right)$ şeklinde gösterilmektedir.

Sonuç 3.2.2.

1. Tanım 3.2.1.'de her $n\in\mathbb{N}$ için $\lambda_n=n$ alındığında $S_{\overline{N}_{\lambda}}^{(\mu,\upsilon)}$-yakınsaklık Tanım 3.1.1. ile verilen $S_{\overline{N}}^{(\mu,\upsilon)}$-yakınsaklığa indirgenir.

2. Tanım 3.2.1.'de her $k\in\mathbb{N}$ için $p_k=1$ ve her $n\in\mathbb{N}$ için $\lambda_n=n$ alındığında (μ,υ) sezgisel bulanık lineer normuna göre ağırlıklı λ-istatistiksel yakınsaklık, Karakuş ve ark. [37] tarafından tanımlanan, (μ,υ) sezgisel bulanık lineer normuna göre istatistiksel yakınsaklığa indirgenir.

(3.18) eşitliği ve ağırlıklı λ-yoğunluğun özellikleri kullanılarak, aşağıdaki lemma elde edilir.

Lemma 3.2.3. $(X,\mu,\upsilon,*,\circ)$ sezgisel bulanık normlu lineer uzay olsun. $\forall\varepsilon>0$ ve $\forall t>0$ için aşağıdaki eşitlikler birbirine denktir.

1. $S_{\overline{N}_\lambda}^{(\mu,\upsilon)}\text{-}lim\, x=L$ dir.
2. $\delta_{\overline{N}_\lambda}\left(\left\{k\in\mathbb{N}:\mu\left(p_k\left(x_k-L\right),t\right)\le 1-\varepsilon\right\}\right)$ $=\delta_{\overline{N}_\lambda}\left(\left\{k\in\mathbb{N}:\upsilon\left(p_k\left(x_k-L\right),t\right)\ge \varepsilon\right\}\right)=0$ dir.
3. $\delta_{\overline{N}_\lambda}\left(\left\{\mu\left(p_k\left(x_k-L\right),t\right)>1-\varepsilon \text{ ve } \upsilon\left(p_k\left(x_k-L\right),t\right)<\varepsilon\right\}\right)=1$ dir.
4. $\delta_{\overline{N}_\lambda}\left(\left\{k\in\mathbb{N}:\mu\left(p_k\left(x_k-L\right),t\right)>1-\varepsilon\right\}\right)$ $=\delta_{\overline{N}_\lambda}\left(\left\{k\in\mathbb{N}:\upsilon\left(p_k\left(x_k-L\right),t\right)<\varepsilon\right\}\right)=1$ dir.

Tanım 3.2.4. $(X,\mu,\upsilon,*,\circ)$ bir sezgisel bulanık normlu lineer uzay ve $x=(x_k)$ X uzayında bir dizi olsun. Eğer $\forall\varepsilon>0$ ve $\forall t>0$ için $n\ge n_0$ olduğunda $\frac{1}{P_{\lambda_n}}\sum_{k\in I_n}\mu\left(p_k\left(x_k-L\right),t\right)>1-\varepsilon$ ve $\frac{1}{P_{\lambda_n}}\sum_{k\in I_n}\upsilon\left(p_k\left(x_k-L\right),t\right)<\varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0=n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ sayısı varsa $x=(x_k)$ dizisi $L\in X$ noktasına (μ,υ) sezgisel bulanık lineer normuna göre $\left(\overline{N}_\lambda,p\right)$-toplanabilirdir (veya $L\in X$ noktasına $\left(\overline{N}_\lambda,p\right)^{(\mu,\upsilon)}$-toplanabilirdir) denir ve bu durum $\left(\overline{N}_\lambda,p\right)^{(\mu,\upsilon)}\text{-}lim\, x=L$ ile gösterilmektedir.

Sonuç 3.2.5.

1. Tanım 3.2.4.'de her $k \in \mathbb{N}$ için $p_k = 1$ alındığında $\left(\overline{N}_{\lambda}, p\right)^{(\mu,\upsilon)}$-toplanabilme Hazarika ve ark. [43] tarafından Tanım 2.3.16.'da verilen $(V,\lambda)^{(\mu,\upsilon)}$-toplanabilmeye indirgenir.

2. Tanım 3.2.4.'de her $n \in \mathbb{N}$ için $\lambda_n = n$ alındığında $\left(\overline{N}_{\lambda}, p\right)^{(\mu,\upsilon)}$-toplanabilme kavramı Tanım 3.1.3.'de verilen $\left(\overline{N}, p\right)^{(\mu,\upsilon)}$-toplanabilme kavramına indirgenir.

Aşağıdaki teoremde sezgisel bulanık normlu lineer uzaylarda ağırlıklı λ- istatistiksel yakınsaklık ve ağırlıklı istatistiksel yakınsaklık kavramları arasındaki ilişki verilmiştir.

$\forall n \in \mathbb{N}$ için $\left(\dfrac{\lambda_n}{n}\right)$ dizisi 1 ile üstten sınırlı olduğundan $\left(\dfrac{P_{\lambda_n}}{P_n}\right)$ dizisi 1 ile üstten sınırlıdır. O halde $S_{\overline{N}_{\lambda}}^{(\mu,\upsilon)}$-$\lim x = L$ iken $S_{\overline{N}}^{(\mu,\upsilon)}$-$\lim x = L$ olduğu kolayca gösterilebilir.

Teorem 3.2.6. $(X, \mu, \upsilon, *, \circ)$ bir sezgisel bulanık normlu lineer uzay ve $x = (x_k)$, X uzayında bir dizi olsun. Eğer $S_{\overline{N}}^{(\mu,\upsilon)}$-$\lim x = L$ ve $\liminf\limits_{n\to\infty} \dfrac{P_{\lambda_n}}{P_n} > 0$ ise $S_{\overline{N}_{\lambda}}^{(\mu,\upsilon)}$-$\lim x = L$ dir.

İspat. Kabul edelim ki $\liminf\limits_{n\to\infty} \dfrac{P_{\lambda_n}}{P_n} > 0$ olsun. O halde $\delta \leq \dfrac{P_{\lambda_n}}{P_n} \leq 1$ olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı vardır. $S_{\overline{N}}^{(\mu,\upsilon)}$-$\lim x = L$ olduğu da kullanılarak her $\varepsilon > 0$ ve her $t > 0$ için

$$\frac{1}{P_n}\left|\left\{k \leq P_n \ : \mu\left(p_k\left(x_k - L\right), t\right) \leq 1-\varepsilon \text{ ya da } \upsilon\left(p_k\left(x_k - L\right), t\right) \geq \varepsilon\right\}\right|$$

$$\leq \frac{\delta}{P_{\lambda_n}}\left|\left\{k \leq P_{\lambda_n} \ : \mu\left(p_k\left(x_k - L\right), t\right) \leq 1-\varepsilon \text{ ya da } \upsilon\left(p_k\left(x_k - L\right), t\right) \geq \varepsilon\right\}\right|$$

dir. Böylece $S_{\overline{N}\lambda}^{(\mu,\upsilon)}\text{-}lim\, x = L$ olduğu gösterilmiş olur.

Aşağıdaki teoremde $S_{\overline{N}\lambda}^{(\mu,\upsilon)}$- yakınsaklık ve $\left(\overline{N}\lambda, p\right)^{(\mu,\upsilon)}$ -toplanabilme kavramları arasındaki ilişki verilmektedir.

Teorem 3.2.7. $\left(X, \mu, \upsilon, *, \circ\right)$ bir sezgisel bulanık normlu lineer uzay, $x = \left(x_k\right)$, X uzayında bir dizi ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\frac{P_{\lambda_n}}{\lambda_n} \geq 1$ olsun. O halde $x = \left(x_k\right)$ dizisi $L \in X$ noktasına $\left(\overline{N}\lambda, p\right)^{(\mu,\upsilon)}$ -toplanabilir ise $S_{\overline{N}\lambda}^{(\mu,\upsilon)}$-yakınsaktır.

İspat. Kabul edelim ki $\left(\overline{N}\lambda, p\right)^{(\mu,\upsilon)}\text{-}lim\, x = L$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ ve $\forall t > 0$ için $K_{P_{\lambda_n}}\left(\varepsilon\right)$ ve $K_{P_{\lambda_n}}^{c}\left(\varepsilon\right)$ kümeleri

$$K_{P_{\lambda_n}}\left(\varepsilon\right) = \left\{k \leq P_{\lambda_n} \ : \mu\left(p_k\left(x_k - L\right), t\right) \leq 1-\varepsilon \text{ ya da } \upsilon\left(p_k\left(x_k - L\right), t\right) \geq \varepsilon\right\}$$

ve

$$K_{P_{\lambda_n}}^{c}\left(\varepsilon\right) = \left\{k \leq P_{\lambda_n} \ : \mu\left(p_k\left(x_k - L\right), t\right) > 1-\varepsilon \text{ ve } \upsilon\left(p_k\left(x_k - L\right), t\right) < \varepsilon\right\}$$

olacak şekilde tanımlansın. O halde,

$$\frac{1}{P_{\lambda_n}}\sum_{k\in I_n}\mu\left(p_k\left(x_k-L\right),t\right)=\frac{1}{P_{\lambda_n}}\sum_{\substack{k\in I_n\\ k\in K_{P_{\lambda_n}}(\varepsilon)}}\mu\left(p_k\left(x_k-L\right),t\right)$$

$$+\frac{1}{P_{\lambda_n}}\sum_{\substack{k\in I_n\\ k\in K^c_{P_{\lambda_n}}(\varepsilon)}}\mu\left(p_k\left(x_k-L\right),t\right) \tag{3.20}$$

$$\geq\frac{1}{P_{\lambda_n}}\sum_{\substack{k\in I_n\\ k\in K^c_{P_{\lambda_n}}(\varepsilon)}}\mu\left(p_k\left(x_k-L\right),t\right)>\frac{1}{P_n}\left|K^c_{P_{\lambda_n}}(\varepsilon)\right|(1-\varepsilon)$$

dir. (3.20) eşitsizliğinden, $\forall\varepsilon>0$ için $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{P_{\lambda_n}}\left|K^c_{P_{\lambda_n}}(\varepsilon)\right|=1$ elde edilir. Benzer şekilde $\forall\varepsilon>0$ ve $\forall t>0$ için,

$$\frac{1}{P_{\lambda_n}}\sum_{k\in I_n}\upsilon\left(p_k\left(x_k-L\right),t\right)=\frac{1}{P_{\lambda_n}}\sum_{\substack{k\in I_n\\ k\in K_{P_{\lambda_n}}(\varepsilon)}}\upsilon\left(p_k\left(x_k-L\right),t\right)$$

$$+\frac{1}{P_{\lambda_n}}\sum_{\substack{k\in I_n\\ k\in K^c_{P_{\lambda_n}}(\varepsilon)}}\upsilon\left(p_k\left(x_k-L\right),t\right) \tag{3.21}$$

$$\geq\frac{1}{P_{\lambda_n}}\sum_{\substack{k\in I_n\\ k\in K_{P_{\lambda_n}}(\varepsilon)}}\upsilon\left(p_k\left(x_k-L\right),t\right)\geq\frac{1}{P_{\lambda_n}}\left|K_{P_{\lambda_n}}(\varepsilon)\right|\varepsilon$$

dir. (3.21) eşitsizliğinden $\forall\varepsilon>0$ için $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{P_{\lambda_n}}\left|K_{P_{\lambda_n}}(\varepsilon)\right|=0$ olduğu görülür. Böylece $x=\left(x_k\right)$ dizisi $L\in X$ noktasına $S^{(\mu,\upsilon)}_{\overline{N}\lambda}$-yakınsaktır.

Aşağıdaki örnekte Teorem 3.2.7.'nin tersinin her zaman doğru olmadığı gösterilmektedir.

Örnek 3.2.8. $(\mathbb{R},\mu_0,\upsilon_0,*,\circ)$ sezgisel bulanık normlu lineer uzayı Örnek 2.3.6.'daki gibi tanımlansın. $\forall n\in\mathbb{N}$ için $\lambda_n=n$ olacak şekilde (λ_n) dizisi, $\forall k\in\mathbb{N}$ için $p_k=\frac{1}{k+1}$ olacak şekilde (p_k) dizisi ve terimleri

$$x_k = \begin{cases} \sqrt{k}, & k = m^8 \left(m \in \mathbb{N}\right) \\ 0, & k \neq m^8 \end{cases}$$

olmak üzere (x_k) dizisi tanımlansın. Her $0<\varepsilon<1$ ve her $t>0$ için $K_{P_n}(\varepsilon)$ kümesi

$$K_{P_n}(\varepsilon) = \left\{k \leq P_n : \mu_0\left(p_k x_k, t\right) \leq 1-\varepsilon \text{ ya da } \upsilon_0\left(p_k x_k, t\right) \geq \varepsilon\right\}$$

olacak şekilde tanımlansın. Bu tanıma göre

$$K_{P_n}(\varepsilon) = \left\{ k \leq P_n : \frac{t}{t + \frac{|x_k|}{k+1}} \leq 1-\varepsilon \text{ ya da } \frac{\frac{|x_k|}{k+1}}{t + \frac{|x_k|}{k+1}} \geq \varepsilon \right\}$$

$$= \left\{ k \leq P_n : |x_k| \geq \frac{(k+1)\varepsilon t}{(1-\varepsilon)} \right\} \subseteq \left\{k \leq P_n : x_k = \sqrt{k}\right\}$$

olduğu için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{P_n}\left|K_{P_n}(\varepsilon)\right| = 0$$

olduğu görülür. O halde, $S_{\overline{N}_\lambda}^{(\mu,\upsilon)}\text{-}lim\, x = 0$ dır.

Diğer taraftan $n \to \infty$ iken $\frac{1}{P_n}\sum_{k=1}^{n}\mu\left(p_k x_k, t\right) \to \infty$ ve $\frac{1}{P_n}\sum_{k=1}^{n}\upsilon\left(p_k x_k, t\right) \to \infty$ olduğu için, $x=(x_k)$ dizisi 0 sayısına (μ,υ) sezgisel bulanık lineer normuna göre $\left(\overline{N}_\lambda, p\right)$- toplanabilir değildir.

Teorem 3.2.9. $(X,\mu,\upsilon,*,\circ)$ bir sezgisel bulanık normlu lineer uzay, $x=(x_k)$ X uzayında bir dizi ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\frac{P_{\lambda_n}}{\lambda_n} \geq 1$ olsun. O halde $M \in (0,1)$ olmak üzere

$S_{\overline{N}_\lambda}^{(\mu,\upsilon)}$-$lim\, x = L$, $\mu\left(p_k\left(x_k - L\right), t\right) \geq 1 - M$ ve $\upsilon\left(p_k\left(x_k - L\right), t\right) \leq M$ ise, $\left(\overline{N}_\lambda, p\right)^{(\mu,\upsilon)}$-$lim\, x = L$ dir.

İspat. Kabul edelim ki $S_{\overline{N}_\lambda}^{(\mu,\upsilon)}$-$lim\, x = L$ olsun. $\forall\varepsilon > 0$ ve $\forall t > 0$ için $K_{P_{\lambda_n}}(\varepsilon)$ ve $K_{P_{\lambda_n}}^c(\varepsilon)$ kümeleri

$$K_{P_{\lambda_n}}(\varepsilon) = \left\{k \leq P_{\lambda_n} : \mu\left(p_k\left(x_k - L\right), t\right) \leq 1 - \varepsilon \text{ ya da } \upsilon\left(p_k\left(x_k - L\right), t\right) \geq \varepsilon\right\}$$

ve

$$K_{P_{\lambda_n}}^c(\varepsilon) = \left\{k \leq P_{\lambda_n} : \mu\left(p_k\left(x_k - L\right), t\right) > 1 - \varepsilon \text{ ve } \upsilon\left(p_k\left(x_k - L\right), t\right) < \varepsilon\right\}$$

olacak şekilde tanımlansın. O halde,

$$S_1(n) = \frac{1}{P_{\lambda_n}} \sum_{\substack{k \in I_n \\ k \in K_{P_{\lambda_n}}(\varepsilon)}} \mu\left(p_k\left(x_k - L\right), t\right) \tag{3.22}$$

ve

$$S_2(n) = \frac{1}{P_{\lambda_n}} \sum_{\substack{k \in I_n \\ k \in K_{P_{\lambda_n}}^c(\varepsilon)}} \mu\left(p_k\left(x_k - L\right), t\right) \tag{3.23}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \frac{1}{P_{\lambda_n}} \sum_{k \in I_n} \mu\left(p_k\left(x_k - L\right), t\right) &= \frac{1}{P_{\lambda_n}} \sum_{\substack{k \in I_n \\ k \in K_{P_{\lambda_n}}(\varepsilon)}} \mu\left(p_k\left(x_k - L\right), t\right) \\ &\quad + \frac{1}{P_{\lambda_n}} \sum_{\substack{k \in I_n \\ k \in K_{P_{\lambda_n}}^c(\varepsilon)}} \mu\left(p_k\left(x_k - L\right), t\right) \\ &= S_1(n) + S_2(n) \end{aligned} \tag{3.24}$$

dir. Eğer $k \in K_{P_{\lambda_n}}(\varepsilon)$ ise,

$$S_1(n) = \frac{1}{P_{\lambda_n}} \sum_{\substack{k \in I_n \\ k \in K_{P_{\lambda_n}}(\varepsilon)}} \mu\left(p_k\left(x_k - L\right), t\right) \geq \frac{\left|K_{P_{\lambda_n}}(\varepsilon)\right|}{P_{\lambda_n}}(1 - M) \tag{3.25}$$

dir. $S_{\overline{N}_\lambda}^{(\mu,\upsilon)}$-$\lim x = L$ olduğundan

$$\lim_{n \to \infty} S_1(n) \geq 0 \tag{3.26}$$

dır. Eğer $k \in K_{P_{\lambda_n}}^c(\varepsilon)$ ise,

$$S_2(n) = \frac{1}{P_{\lambda_n}} \sum_{\substack{k \in I_n \\ k \in K_{P_{\lambda_n}}^c(\varepsilon)}} \mu\left(p_k\left(x_k - L\right), t\right) > \frac{\left|K_{P_{\lambda_n}}^c(\varepsilon)\right|}{P_{\lambda_n}}(1 - \varepsilon) \tag{3.27}$$

dır. (3.27) eşitsizliğinden

$$\lim_{n \to \infty} S_2(n) > (1 - \varepsilon) \tag{3.28}$$

dır. (3.22) - (3.24) eşitliklerini ve (3.25) - (3.28) eşitsizlikleri kullanılarak

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{P_{\lambda_n}} \sum_{k \in I_n} \mu\left(p_k\left(x_k - L\right), t\right) = 1 \tag{3.29}$$

dir. Benzer şekilde

$$S_3(n) = \frac{1}{P_{\lambda_n}} \sum_{\substack{k \in I_n \\ k \in K_{P_{\lambda_n}}(\varepsilon)}} \upsilon\left(p_k\left(x_k - L\right), t\right) \tag{3.30}$$

ve

$$S_4(n)=\frac{1}{P_{\lambda_n}}\sum_{\substack{k\in I_n\\ k\in K^c_{P_{\lambda_n}}(\varepsilon)}}\upsilon\big(p_k(x_k-L),t\big) \tag{3.31}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}\frac{1}{P_{\lambda_n}}\sum_{k\in I_n}\upsilon\big(p_k(x_k-L),t\big)&=\frac{1}{P_{\lambda_n}}\sum_{\substack{k\in I_n\\ k\in K_{P_{\lambda_n}}(\varepsilon)}}\upsilon\big(p_k(x_k-L),t\big)\\&+\frac{1}{P_{\lambda_n}}\sum_{\substack{k\in I_n\\ k\in K^c_{P_{\lambda_n}}(\varepsilon)}}\upsilon\big(p_k(x_k-L),t\big)\\&=S_3(n)+S_4(n)\end{aligned} \tag{3.32}$$

dir. Eğer $k\in K_{P_{\lambda_n}}(\varepsilon)$ ise,

$$\begin{aligned}S_3(n)&=\frac{1}{P_{\lambda_n}}\sum_{\substack{k\in I_n\\ k\in K_{P_{\lambda_n}}(\varepsilon)}}\upsilon\big(p_k(x_k-L),t\big)\\&\leq\frac{1}{P_{\lambda_n}}\left|K_{P_{\lambda_n}}(\varepsilon)\right|M\end{aligned}$$

dir. $n\to\infty$ iken limite geçilirse $S_{\overline{N}_\lambda}^{(\mu,\upsilon)}\text{-}lim\, x=L$ olduğu da kullanılarak

$$\lim_{n\to\infty}S_3(n)\leq 0 \tag{3.33}$$

dir. Eğer $k\in K^c_{P_{\lambda_n}}(\varepsilon)$ ise,

$$S_4(n) = \frac{1}{P_{\lambda_n}} \sum_{\substack{k\in I_n \\ k\in K^c_{P_{\lambda_n}}(\varepsilon)}} \upsilon\left(p_k(x_k - L), t\right)$$
$$< \frac{1}{P_{\lambda_n}} \sum_{\substack{k\in I_n \\ k\in K^c_{P_{\lambda_n}}(\varepsilon)}} \varepsilon = \frac{1}{P_{\lambda_n}} \left|K^c_{P_{\lambda_n}}(\varepsilon)\right| \varepsilon \tag{3.34}$$

dir. (3.34) eşitsizliğinde $n \to \infty$ iken limite geçilirse $S^{(\mu,\upsilon)}_{\overline{N}_\lambda}$-$lim\, x = L$ olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} S_4(n) < \varepsilon \tag{3.35}$$

dir. (3.30) - (3.32) eşitliklerini ve (3.33) - (3.35) eşitsizliklerini kullanarak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{P_{\lambda_n}} \sum_{k\in I_n} \upsilon\left(p_k(x_k - L), t\right) = 0 \tag{3.36}$$

olduğu gösterilmiş olur. (3.29) ve (3.36) eşitliklerinden $\left(\overline{N}_\lambda, p\right)^{(\mu,\upsilon)}$-$lim\, x = L$ dir.

3.3. Sezgisel Bulanık Normlu Lineer Uzaylarda Ağırlıklı Lacunary İstatistiksel Yakınsaklık

Bu bölümde sezgisel bulanık normlu lineer uzaylarda, ağırlıklı ortalama ve lacunary dizisi kavramları birleştirilerek oluşturulan $\left(\overline{N}, p_r, \theta\right)$-toplanabilme metodu ve ağırlıklı lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramı verilecektir. Ayrıca ağırlıklı lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramının lacunary istatistiksel yakınsaklıkla ve ağırlıklı istatistiksel yakınsaklıkla arasındaki ilişkileri inceleyen teoremler ifade ve ispat edilecektir.

Tanım 3.3.1. $(X, \mu, \upsilon, *, \circ)$ bir sezgisel bulanık normlu lineer uzay, $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi ve $x = (x_k)$, X uzayında bir dizi olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ ve $\forall t > 0$

için $r \geq r_0$ olduğunda $\frac{1}{H_r}\sum_{k\in I_r}\mu\left(p_k\left(x_k-L\right),t\right)>1-\varepsilon$ ve $\frac{1}{H_r}\sum_{k\in I_r}\upsilon\left(p_k\left(x_k-L\right),t\right)<\varepsilon$ olacak şekilde bir $r_0=r_0\left(\varepsilon\right)\in\mathbb{N}$ sayısı varsa $x=\left(x_k\right)$ dizisi $L\in X$ noktasına $\left(\mu,\upsilon\right)$ sezgisel bulanık lineer normuna göre $\left(\overline{N},p_r,\theta\right)$-toplanabilirdir (veya $L\in X$ noktasına $\left(\overline{N},p_r,\theta\right)^{(\mu,\upsilon)}$-toplanabilirdir) denir ve bu durum $\left(\overline{N},p_r,\theta\right)^{(\mu,\upsilon)}$-$lim\, x=L$ ile gösterilmektedir.

Sonuç 3.3.2.

1. Tanım 3.3.1.'de her $k\in\mathbb{N}$ için $p_k=1$ alındığında $\left(\overline{N},p_r,\theta\right)^{(\mu,\upsilon)}$-toplanabilme tanımı Debnath [42] tarafından Tanım 2.3.14.'de verilen lacunary yakınsaklık tanımına indirgenir.
2. Tanım 3.3.1.'de bir $r>0$ sayısı için $\theta=\left(k_r\right)=\left(2^r\right)$ alındığında $\left(\overline{N},p_r,\theta\right)^{(\mu,\upsilon)}$-toplanabilme kavramı Tanım 3.1.3.'de verilen $\left(\overline{N},p\right)^{(\mu,\upsilon)}$-toplanabilme kavramına indirgenir.

Tanım 3.3.3. $\left(X,\mu,\upsilon,*,\circ\right)$ bir sezgisel bulanık normlu lineer uzay, $\theta=\left(k_r\right)$ bir lacunary dizisi ve $x=\left(x_k\right)$, X uzayında bir dizi olsun. Eğer $\forall\varepsilon>0$ ve $\forall t>0$ için

$$\delta_{\left(\overline{N},\theta\right)}\left(\left\{k\in\mathbb{N}:\mu\left(p_k(x_k-L),t\right)\leq 1-\varepsilon \text{ ya da } \upsilon\left(p_k(x_k-L),t\right)\geq\varepsilon\right\}\right)=0 \tag{3.37}$$

yani,

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{H_r}\left|\left\{k\in I_r^{'}:\ \mu\left(p_k(x_k-L),t\right)\leq 1-\varepsilon \text{ ya da } \upsilon\left(p_k(x_k-L),t\right)\geq\varepsilon\right\}\right|=0 \tag{3.38}$$

oluyorsa $x=(x_k)$ dizisi $L\in X$ noktasına (μ,υ) sezgisel bulanık lineer normuna göre ağırlıklı lacunary istatistiksel yakınsaktır (veya $L\in X$ noktasına $S_{(\overline{N},\theta)}^{(\mu,\upsilon)}$-yakınsaktır) denir. Bu durum $S_{(\overline{N},\theta)}^{(\mu,\upsilon)}$-$\lim x=L$ şeklinde gösterilmektedir.

Sonuç 3.3.4.

1. Tanım 3.3.3.'de her $k\in\mathbb{N}$ için $p_k=1$ alındığında $S_{(\overline{N},\theta)}^{(\mu,\upsilon)}$-yakınsaklık kavramı Mursaleen ve Mohiuddine [46] tarafından Tanım 2.3.12.'de verilen $S_{\theta}^{(\mu,\upsilon)}$- yakınsaklık kavramına indirgenir.

2. Tanım 3.3.3.'de bir $r>0$ sayısı için $\theta=(k_r)=(2^r)$ alındığında $S_{(\overline{N},\theta)}^{(\mu,\upsilon)}$- yakınsaklık kavramı Tanım 3.1.1.'de verilen $S_{\overline{N}}^{(\mu,\upsilon)}$-yakınsaklık kavramına indirgenir.

3. Tanım 3.3.3.'de her $k\in\mathbb{N}$ için $p_k=1$ ve bir $r>0$ sayısı için $\theta=(k_r)=(2^r)$ alındığında $S_{(\overline{N},\theta)}^{(\mu,\upsilon)}$- yakınsaklık kavramı Karakuş ve ark. [37] tarafından verilen $S^{(\mu,\upsilon)}$-yakınsaklık kavramına indirgenir.

Teorem 3.3.5. $(X,\mu,\upsilon,*,\circ)$ bir sezgisel bulanık normlu lineer uzay, $\theta=(k_r)$ bir lacunary dizisi, $x=(x_k)$ X uzayında bir dizi ve $\forall n\in\mathbb{N}$ için $\frac{P_n}{n}\geq 1$ olsun. Eğer $\left(\overline{N},p_r,\theta\right)^{(\mu,\upsilon)}$-$\lim x=L$ ise $\left(\overline{N},p\right)^{(\mu,\upsilon)}$-$\lim x=L$ dir.

İspat. Kabul edelim ki $\left(\overline{N},p_r,\theta\right)^{(\mu,\upsilon)}$-$\lim x=L$ olsun. O halde $\forall\varepsilon>0$ ve $\forall t>0$ için $j\geq j_0$ olduğunda

$$\frac{1}{H_j}\sum_{k\in I_j}\mu\left(p_k\left(x_k-L\right),t\right)>1-\varepsilon \tag{3.39}$$

ve

$$\frac{1}{H_j}\sum_{k\in I_j}\upsilon\left(p_k\left(x_k-L\right),t\right)<\varepsilon \tag{3.40}$$

olacak şekilde bir $j_0\in\mathbb{N}$ mevcuttur.

(3.39) eşitsizliği ile

$$\frac{1}{H_j}\sum_{k\in I_j}\mu\left(p_k\left(x_k-L\right),t\right)\geq 1-M \tag{3.41}$$

olacak şekilde $M>0$ sayısı vardır. Böylece (3.39) ve (3.41) eşitsizlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
\frac{1}{P_{k_r}}\sum_{k=1}^{k_r}\mu\left(p_k\left(x_k-L\right),t\right) &= \frac{1}{P_{k_r}}\left(\sum_{k\in I_1}\mu\left(p_k\left(x_k-L\right),t\right)+\ldots+\sum_{k\in I_{j_0}}\mu\left(p_k\left(x_k-L\right),t\right)\right.\\
&\quad\left.+\sum_{k\in I_{j_0+1}}\mu\left(p_k\left(x_k-L\right),t\right)+\ldots.+\sum_{k\in I_r}\mu\left(p_k\left(x_k-L\right),t\right)\right)\\
&\geq \frac{(1-M)}{P_{k_r}}\left(H_1+H_2+\ldots+H_{j_0}\right)\\
&\quad+\frac{(1-\varepsilon)}{P_{k_r}}\left(H_{j_0+1}+H_{j_0+2}+\ldots+H_r\right)\\
&= \frac{(1-M)}{P_{k_r}}\left(P_{k_1}-P_{k_0}+P_{k_2}-P_{k_1}+\ldots+P_{k_{j_0}}-P_{k_{j_0-1}}\right)\\
&\quad+\frac{(1-\varepsilon)}{P_{k_r}}\left(P_{k_{j_0+1}}-P_{k_{j_0}}+P_{k_{j_0+2}}-P_{k_{j_0+1}}+\ldots+P_{k_r}-P_{k_{r-1}}\right)\\
&= (1-M)\frac{P_{k_{j_0}}}{P_{k_r}}+(1-\varepsilon)\frac{P_{k_r}-P_{k_{j_0}}}{P_{k_r}}
\end{aligned}$$

dir. $r \to \infty$ iken $P_{k_r} \to \infty$ olduğu için,

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{P_{k_r}} \sum_{k=1}^{k_r} \mu\left(p_k \left(x_k - L \right), t \right) = 1 \tag{3.42}$$

dir. Benzer adımlar ve (3.40) eşitsizliği kullanılarak,

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{P_{k_r}} \sum_{k=1}^{k_r} \upsilon\left(p_k \left(x_k - L \right), t \right) = 0 \tag{3.43}$$

olduğu kolayca görülür. (3.42) ve (3.43) eşitliğinden $\left(\overline{N}, p\right)^{(\mu,\upsilon)}$ -$\lim x = L$ dir.

Teorem 3.3.6. $\left(X, \mu, \upsilon, *, \circ\right)$ bir sezgisel bulanık normlu lineer uzay, $\theta = \left(k_r\right)$ bir lacunary dizisi ve $x = \left(x_k\right)$ X uzayında bir dizi olsun.

1. $\forall r \in \mathbb{N}$ için $\frac{H_r}{h_r} \leq 1$, $\liminf_{r\to\infty} \frac{H_r}{h_r} > 0$ ve $\left(\mu, \upsilon\right)^{\theta}$ -$\lim x = L$ ise $\left(\overline{N}, p_r, \theta\right)^{(\mu,\upsilon)}$ -$\lim x = L$ dir.
2. $\forall r \in \mathbb{N}$ için $\frac{H_r}{h_r} \geq 1$, $\limsup_{r\to\infty} \frac{H_r}{h_r} < \infty$ ve $\left(\overline{N}, p_r, \theta\right)^{(\mu,\upsilon)}$ -$\lim x = L$ ise $\left(\mu, \upsilon\right)^{\theta}$ -$\lim x = L$ dir.

İspat. 1. Kabul edelim ki $\forall r \in \mathbb{N}$ için $\frac{H_r}{h_r} \leq 1$, $\liminf_{r\to\infty} \frac{H_r}{h_r} > 0$ ve $\left(\mu, \upsilon\right)^{\theta}$ -$\lim x = L$ olsun. O halde $\forall r \in \mathbb{N}$ için $0 < \delta \leq \frac{H_r}{h_r} \leq 1$ olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı vardır. $\forall \varepsilon > 0$ ve $\forall t > 0$ için $r \geq r_0$ olduğunda

$$\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\mu\left(x_k-L,t\right)>1-\varepsilon \tag{3.44}$$

ve

$$\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\upsilon\left(x_k-L,t\right)<\varepsilon \tag{3.45}$$

olacak şekilde $r_0\in\mathbb{N}$ vardır. Böylece (3.44) eşitsizliği kullanılarak $\forall\varepsilon>0$ ve $\forall t>0$ için

$$\frac{1}{H_r}\sum_{k\in I_r}\mu\left(p_k\left(x_k-L\right),t\right)\geq\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\mu\left(x_k-L,t\right)>1-\varepsilon \tag{3.46}$$

dır. Benzer şekilde $\forall\varepsilon>0$ ve $\forall t>0$ için (3.45) eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}\frac{1}{H_r}\sum_{k\in I_r}\upsilon\left(p_k\left(x_k-L\right),t\right)&\leq\frac{1}{\delta}.\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\upsilon\left(x_k-L,t\right)\\&<\frac{1}{\delta}.\varepsilon\\&=\varepsilon'\end{aligned} \tag{3.47}$$

dır. (3.46) ve (3.47) eşitsizlikleri kullanılarak $\left(\overline{N},p_r,\theta\right)^{(\mu,\upsilon)}$-$lim\,x=L$ dır.

2. Kabul edelim ki $\forall r\in\mathbb{N}$ için $\frac{H_r}{h_r}\geq1$, $\limsup_{r\to\infty}\frac{H_r}{h_r}<\infty$ ve $\left(\overline{N},p_r,\theta\right)^{(\mu,\upsilon)}$-$lim\,x=L$ olsun. O halde $\forall r\in\mathbb{N}$ için $1\leq\frac{H_r}{h_r}\leq K<\infty$ olacak şekilde $K>0$ sayısı vardır. $\forall\varepsilon>0$ ve $\forall t>0$ için $r\geq r_0$ olduğunda

$$\frac{1}{H_r}\sum_{k\in I_r}\mu\left(p_k\left(x_k-L\right),t\right)>1-\varepsilon \tag{3.48}$$

ve

$$\frac{1}{H_r}\sum_{k\in I_r}\upsilon\left(p_k\left(x_k-L\right),t\right)<\varepsilon \tag{3.49}$$

olacak şekilde $r_0\in\mathbb{N}$ vardır. Böylece (3.48) eşitsizliği kullanılarak $\forall\varepsilon>0$ ve $\forall t>0$ için

$$\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\mu\left(x_k-L,t\right)\geq\frac{1}{H_r}\sum_{k\in I_r}\mu\left(p_k\left(x_k-L\right),t\right)>1-\varepsilon \tag{3.50}$$

dir. Benzer şekilde $\forall\varepsilon>0$ ve $\forall t>0$ için (3.49) eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\upsilon\left(x_k-L,t\right)&\leq K.\frac{1}{H_r}\sum_{k\in I_r}\upsilon\left(p_k\left(x_k-L\right),t\right)\\&<K.\frac{1}{H_r}.\varepsilon=\varepsilon'\end{aligned} \tag{3.51}$$

dir. (3.50) ve (3.51) eşitsizliklerini kullanarak $(\mu,\upsilon)^{\theta}$-$lim\,x=L$ dır.

Aşağıdaki teoremde sezgisel bulanık normlu lineer uzaylarda ağırlıklı istatistiksel yakınsaklık ile ağırlıklı lacunary istatistiksel yakınsaklık arasındaki ilişki verilmektedir.

Teorem 3.3.7. $(X,\mu,\upsilon,*,\circ)$ bir sezgisel bulanık normlu lineer uzay, $\theta=(k_r)$ bir lacunary dizisi, $x=(x_k)$ X uzayında bir dizi ve $\liminf_{r\to\infty} Q_r>1$ olsun. Eğer $S_{\overline{N}}^{(\mu,\upsilon)}$-$lim\,x=L$ ise $S_{(\overline{N},\theta)}^{(\mu,\upsilon)}$-$lim\,x=L$ dir.

İspat. Kabul edelim ki $\liminf_{r\to\infty} Q_r > 1$ olsun. O halde yeterince büyük r değerleri için $Q_r \geq 1+\delta$ olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı vardır. O halde $\dfrac{H_r}{P_{k_r}} \geq \dfrac{\delta}{1+\delta}$ dir. $\left(\overline{N}, p\right)^{(\mu,\upsilon)}$ - $\lim x = L$ olduğundan yeterince büyük r değerleri için

$$\frac{1}{P_{k_r}}\left|\left\{k \leq P_{k_r} : \mu\left(p_k\left(x_k - L\right), t\right) \leq 1-\varepsilon \text{ ya da } \upsilon\left(p_k\left(x_k - L\right), t\right) \geq \varepsilon\right\}\right|$$

$$\geq \frac{1}{P_{k_r}}\left|\left\{P_{k_r-1} < k \leq P_{k_r} : \mu\left(p_k\left(x_k - L\right), t\right) \leq 1-\varepsilon \text{ ya da } \upsilon\left(p_k\left(x_k - L\right), t\right) \geq \varepsilon\right\}\right|$$

$$= \frac{H_r}{P_{k_r}}\left(\frac{1}{H_r}\left|\left\{P_{k_r-1} < k \leq P_{k_r} : \mu\left(p_k\left(x_k - L\right), t\right) \leq 1-\varepsilon \text{ ya da } \upsilon\left(p_k\left(x_k - L\right), t\right) \geq \varepsilon\right\}\right|\right)$$

$$\geq \frac{\delta}{1+\delta}\left(\frac{1}{H_r}\left|\left\{k \in I_r' : \mu\left(p_k\left(x_k - L\right), t\right) \leq 1-\varepsilon \text{ ya da } \upsilon\left(p_k\left(x_k - L\right), t\right) \geq \varepsilon\right\}\right|\right)$$

dir. Böylece $r \to \infty$ iken limite geçilirse $S_{\left(\overline{N},\theta\right)}^{(\mu,\upsilon)}$-$\lim x = L$ dir.

Teorem 3.3.8. $\left(X, \mu, \upsilon, *, \circ\right)$ bir sezgisel bulanık normlu lineer uzay, $\theta = \left(k_r\right)$ bir lacunary dizisi, $x = \left(x_k\right)$ X uzayında bir dizi ve $\limsup_{r\to\infty} Q_r < \infty$ olsun. Eğer $S_{\left(\overline{N},\theta\right)}^{(\mu,\upsilon)}$-$\lim x = L$ ise $S_{\overline{N}}^{(\mu,\upsilon)}$-$\lim x = L$ dir.

İspat. Kabul edelim ki $\limsup_{r\to\infty} Q_r < \infty$ ve $S_{\left(\overline{N},\theta\right)}^{(\mu,\upsilon)}$-$\lim x = L$ olsun. O halde $\forall r \in \mathbb{N}$ için $Q_r \leq K$ olacak şekilde $K > 0$ sayısı mevcuttur. $\forall \varepsilon > 0$ ve $\forall t > 0$ için $r \in \mathbb{N}$ olmak üzere N_r kümesi

$$N_r = \left|\left\{k \in I_r' : \mu\left(p_k\left(x_k - L\right), t\right) \leq 1-\varepsilon \text{ ya da } \upsilon\left(p_k\left(x_k - L\right), t\right) \geq \varepsilon\right\}\right| \tag{3.52}$$

olacak şekilde tanımlansın. $S_{(\bar{N},\theta)}^{(\mu,\upsilon)}$-$\lim x = L$ olduğu için $\forall\varepsilon > 0$ için $r > r_0$ olduğunda $\frac{N_r}{H_r} < \varepsilon$ olacak şekilde $r_0 \in \mathbb{N}$ mevcuttur. $k_{r-1} < n \le k_r$ olacak şekilde $n \in \mathbb{N}$ verilsin. N değeri

$$N = maks\left\{N_r : 1 \le r \le r_0\right\} \tag{3.53}$$

olacak şekilde tanımlansın. O halde

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{P_n}\left|\left\{k \le P_n : \mu\left(p_k\left(x_k - L\right),t\right) \le 1-\varepsilon \text{ ya da } \upsilon\left(p_k\left(x_k - L\right),t\right) \ge \varepsilon\right\}\right| \\
&\le \frac{1}{P_{k_{r-1}}}\left|\left\{k \le P_{k_r} : \mu\left(p_k\left(x_k - L\right),t\right) \le 1-\varepsilon \text{ ya da } \upsilon\left(p_k\left(x_k - L\right),t\right) \ge \varepsilon\right\}\right| \\
&= \frac{1}{P_{k_{r-1}}}\left(N_1 + N_2 + \ldots + N_{r_0} + N_{r_0+1} + N_{r_0+2} + \ldots + N_r\right) \\
&\le \frac{N.r_0}{P_{k_{r-1}}} + \varepsilon\frac{\left(P_{k_r} - P_{k_{r_0}}\right)}{P_{k_{r-1}}} \\
&\le \frac{N.r_0}{P_{k_{r-1}}} + \varepsilon.Q_r \le \frac{M.r_0}{P_{k_{r-1}}} + \varepsilon K
\end{aligned}$$

dir. Bu eşitsizlikte $r \to \infty$ iken limite geçilirse $S_{\bar{N}}^{(\mu,\upsilon)}$-$\lim x = L$ olduğu görülür.

Sonuç 3.3.9. $(X,\mu,\upsilon,*,\circ)$ bir sezgisel bulanık normlu lineer uzay, $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi, $x = (x_k)$ X uzayında bir dizi ve $1 < \liminf_{r\to\infty} Q_r \le \limsup_{r\to\infty} Q_r < \infty$ olsun. O halde $S_{\bar{N}}^{(\mu,\upsilon)}$- yakınsaklık, $S_{(\bar{N},\theta)}^{(\mu,\upsilon)}$- yakınsaklığa denk olur.

Teorem 3.3.10. $(X,\mu,\upsilon,*,\circ)$ bir sezgisel bulanık normlu lineer uzay, $x=(x_k)$ X uzayında bir dizi ve $\forall r\in\mathbb{N}$ için $\dfrac{H_r}{h_r}\geq 1$ olsun. O halde $x=(x_k)$ dizisi $L\in X$ noktasına $\left(\overline{N},p_r,\theta\right)^{(\mu,\upsilon)}$ - toplanabilir ise $S_{\left(\overline{N},\theta\right)}^{(\mu,\upsilon)}$-yakınsaktır.

İspat. Kabul edelim ki $\left(\overline{N},p_r,\theta\right)^{(\mu,\upsilon)}$ - $lim\, x=L$ olsun. $\forall\varepsilon>0$ ve $\forall t>0$ için $K_r(\varepsilon)$ ve $K_r^c(\varepsilon)$ kümeleri

$$K_r(\varepsilon)=\left\{k\in I_r' : \mu\left(p_k(x_k-L),t\right)\leq 1-\varepsilon \text{ ya da } \upsilon\left(p_k(x_k-L),t\right)\geq\varepsilon\right\}$$

ve

$$K_r^c(\varepsilon)=\left\{k\in I_r' : \mu\left(p_k(x_k-L),t\right)>1-\varepsilon \text{ ve } \upsilon\left(p_k(x_k-L),t\right)<\varepsilon\right\}$$

olacak şekilde tanımlansın. O halde,

$$\begin{aligned}\frac{1}{H_r}\sum_{k\in I_r}\mu\left(p_k(x_k-L),t\right) &= \frac{1}{H_r}\sum_{\substack{k\in I_r\\ k\in K_r(\varepsilon)}}\mu\left(p_k(x_k-L),t\right)\\ &\quad+\frac{1}{H_r}\sum_{\substack{k\in I_r\\ k\in K_r^c(\varepsilon)}}\mu\left(p_k(x_k-L),t\right)\\ &\geq\frac{1}{H_r}\sum_{\substack{k\in I_r\\ k\in K_r^c(\varepsilon)}}\mu\left(p_k(x_k-L),t\right)\\ &>\frac{1}{H_r}\left|K_r^c(\varepsilon)\right|(1-\varepsilon)\end{aligned} \tag{3.54}$$

dir. (3.54) eşitsizliğinden, $\forall\varepsilon>0$ için $\lim\limits_{r\to\infty}\dfrac{1}{H_r}\left|K_r^c(\varepsilon)\right|=1$ olduğu görülür. Benzer şekilde $\forall\varepsilon>0$ ve $\forall t>0$ için,

$$\frac{1}{H_r}\sum_{k\in I_r}\upsilon\left(p_k\left(x_k-L\right),t\right)=\frac{1}{H_r}\sum_{\substack{k\in I_r\\ k\in K_r(\varepsilon)}}\upsilon\left(p_k\left(x_k-L\right),t\right)$$
$$+\frac{1}{H_r}\sum_{\substack{k\in I_r\\ k\in K_r^c(\varepsilon)}}\upsilon\left(p_k\left(x_k-L\right),t\right) \tag{3.55}$$
$$\geq\frac{1}{H_r}\sum_{\substack{k\in I_r\\ k\in K_r(\varepsilon)}}\upsilon\left(p_k\left(x_k-L\right),t\right)\geq\frac{1}{H_r}\left|K_r\left(\varepsilon\right)\right|\varepsilon$$

dir. (3.55) eşitsizliğinden, $\forall\varepsilon>0$ için $\lim_{r\to\infty}\frac{1}{H_r}\left|K_r\left(\varepsilon\right)\right|=0$ olduğu görülür. Böylece $x=\left(x_k\right)$ dizisi $L\in X$ noktasına $S_{\left(\overline{N},\theta\right)}^{(\mu,\upsilon)}$-yakınsaktır.

Aşağıdaki örnekte Teorem 3.3.10.'un tersinin her zaman doğru olmadığı gösterilmektedir.

Örnek 3.3.11. $\left(\mathbb{R},\mu_0,\upsilon_0,*,\circ\right)$ sezgisel bulanık normlu lineer uzayı Örnek 2.3.6.'daki gibi tanımlansın. $x=\left(x_k\right)$ ve $p=\left(p_k\right)$ dizilerinin terimleri, $k\in I_r$ aralığındaki ilk $\sqrt{h_r}$ tamsayı değerleri, sırasıyla $1,2,...,\sqrt{h_r}$ ve $1^2,2^2,...,h_r$, diğer tüm terimleri 0, her $0<\varepsilon<1$ ve her $t>0$ için $K_r\left(\varepsilon\right)$ kümesi

$$K_r\left(\varepsilon\right)=\left\{k\in I_r^{'}:\mu\left(p_kx_k,t\right)\leq 1-\varepsilon\ \text{ ya da }\ \upsilon\left(p_kx_k,t\right)\geq\varepsilon\right\}$$

olacak şekilde tanımlansın. Bu tanıma göre

$$K_r\left(\varepsilon\right)=\left\{k\in I_r^{'}:\frac{t}{t+\left|p_kx_k\right|}\leq 1-\varepsilon\ \text{ ya da }\ \frac{\left|p_kx_k\right|}{t+\left|p_kx_k\right|}\geq\varepsilon\right\}$$
$$=\left\{k\in I_r^{'}:\ \left|p_kx_k\right|\geq\frac{\varepsilon t}{\left(1-\varepsilon\right)}\right\}$$

olduğu için

$$\frac{1}{H_r}\left|K_r(\varepsilon)\right| \le \frac{h_r}{H_r} = \frac{r^2}{1^2+2^2+\ldots+r^2} = \frac{6r^2}{r(r+1)(2r+1)}$$

dir. Bu eşitsizlikte $r \to \infty$ iken limite geçilirse $\lim\limits_{r\to\infty}\frac{1}{H_r}\left|K_r(\varepsilon)\right| = 0$ olduğu görülür. Diğer taraftan $r \to \infty$ iken $\frac{1}{H_r}\sum\limits_{k\in I_r}\mu(p_k x_k,t) \to \infty$ ve $\frac{1}{H_r}\sum\limits_{k\in I_r}\upsilon(p_k x_k,t) \to \infty$ olduğu için, $x=(x_k)$ dizisi 0 sayısına (μ,υ) sezgisel bulanık lineer normuna göre $(\overline{N},p_r,\theta)$- toplanabilir değildir.

Teorem 3.3.12. $(X,\mu,\upsilon,*,\circ)$ sezgisel bulanık normlu lineer uzay, $\theta=(k_r)$ bir lacunary dizisi, $x=(x_k)$ X uzayında bir dizi ve $\forall r\in\mathbb{N}$ için $\frac{H_r}{h_r}\ge 1$ olsun. O halde $M\in(0,1)$ olmak üzere $S_{(\overline{N},\theta)}^{(\mu,\upsilon)}$-$\lim x = L$, $\mu(p_k(x_k-L),t)\ge 1-M$ ve $\upsilon(p_k(x_k-L),t)\le M$ ise $(\overline{N},p_r,\theta)^{(\mu,\upsilon)}$-$\lim x = L$ dir.

İspat. Kabul edelim ki $S_{(\overline{N},\theta)}^{(\mu,\upsilon)}$-$\lim x = L$ olsun. $\forall\varepsilon>0$ ve $\forall t>0$ için $K_r(\varepsilon)$ ve $K_r^c(\varepsilon)$ kümeleri

$$K_r(\varepsilon)=\left\{k\in I_r' : \mu(p_k(x_k-L),t)\le 1-\varepsilon \text{ ya da } \upsilon(p_k(x_k-L),t)\ge\varepsilon\right\} \text{ ve}$$

$$K_r^c(\varepsilon)=\left\{k\in I_r' : \mu(p_k(x_k-L),t)> 1-\varepsilon \text{ ve } \upsilon(p_k(x_k-L),t)<\varepsilon\right\}$$

olacak şekilde tanımlansın.

$$S_1(r)=\frac{1}{H_r}\sum_{\substack{k\in I_r\\ k\in K_r(\varepsilon)}}\mu\left(p_k\left(x_k-L\right),t\right) \tag{3.56}$$

ve

$$S_2(r)=\frac{1}{H_r}\sum_{\substack{k\in I_r\\ k\in K_r^c(\varepsilon)}}\mu\left(p_k\left(x_k-L\right),t\right) \tag{3.57}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}\frac{1}{H_r}\sum_{k\in I_r}\mu\left(p_k\left(x_k-L\right),t\right)&=\frac{1}{H_r}\sum_{\substack{k\in I_r\\ k\in K_r(\varepsilon)}}\mu\left(p_k\left(x_k-L\right),t\right)\\&+\frac{1}{H_r}\sum_{\substack{k\in I_r\\ k\in K_r{}^c(\varepsilon)}}\mu\left(p_k\left(x_k-L\right),t\right)\\&=S_1(r)+S_2(r)\end{aligned} \tag{3.58}$$

dir. Eğer $k\in K_r(\varepsilon)$ ise,

$$S_1(r)=\frac{1}{H_r}\sum_{k\in I_r}\mu\left(p_k\left(x_k-L\right),t\right)\geq\frac{\left|K_r(\varepsilon)\right|}{H_r}(1-M) \tag{3.59}$$

dir. $S_{(\overline{N},\theta)}^{(\mu,\upsilon)}$-$lim\, x=L$ olduğundan

$$\lim_{r\to\infty}S_1(r)\geq 0 \tag{3.60}$$

dir. Eğer $k\in K_r^c(\varepsilon)$ ise,

$$S_2(r)=\frac{1}{H_r}\sum_{\substack{k\in I_r\\ k\in K_r^c(\varepsilon)}}\mu\left(p_k\left(x_k-L\right),t\right)>\frac{\left|K_r^c(\varepsilon)\right|}{H_r}(1-\varepsilon) \tag{3.61}$$

dir. (3.61) eşitsizliğinde $r\to\infty$ iken her iki tarafın limiti alındığında

$$\lim_{r\to\infty}S_2(r)>(1-\varepsilon) \tag{3.62}$$

dir. (3.56) - (3.58) eşitlikleri ve (3.59) - (3.62) eşitsizlikleri kullanılarak

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{H_r}\sum_{k\in I_r}\mu\left(p_k\left(x_k-L\right),t\right)=1 \tag{3.63}$$

olduğu görülür. Benzer şekilde

$$S_3(r)=\frac{1}{H_r}\sum_{\substack{k\in I_r\\ k\in K_r(\varepsilon)}}\upsilon\left(p_k\left(x_k-L\right),t\right) \tag{3.64}$$

ve

$$S_4(r)=\frac{1}{H_r}\sum_{\substack{k\in I_r\\ k\in K_r^c(\varepsilon)}}\upsilon\left(p_k\left(x_k-L\right),t\right) \tag{3.65}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}\frac{1}{H_r}\sum_{k\in I_r}\upsilon\left(p_k\left(x_k-L\right),t\right)&=\frac{1}{H_r}\sum_{\substack{k\in I_r\\ k\in K_r(\varepsilon)}}\upsilon\left(p_k\left(x_k-L\right),t\right)\\&+\frac{1}{H_r}\sum_{\substack{k\in I_r\\ k\in K_r^c(\varepsilon)}}\upsilon\left(p_k\left(x_k-L\right),t\right)\\&=S_3(r)+S_4(r)\end{aligned} \tag{3.66}$$

dir. Eğer $k \in K_r(\varepsilon)$ ise,

$$S_3(r) = \frac{1}{H_r} \sum_{\substack{k \in I_r \\ k \in K_r(\varepsilon)}} \upsilon\left(p_k(x_k - L), t \right) \leq \frac{1}{H_r} \left| K_r(\varepsilon) \right| M \tag{3.67}$$

dir. $r \to \infty$ iken limite geçilirse $S_{(\overline{N},\theta)}^{(\mu,\upsilon)}\text{-}\lim x = L$ olduğundan

$$\lim_{r\to\infty} S_3(r) \leq 0 \tag{3.68}$$

olduğu görülür. Eğer $k \in K_r^c(\varepsilon)$ ise,

$$S_4(r) = \frac{1}{H_r} \sum_{\substack{k \in I_r \\ k \in K_r^c(\varepsilon)}} \upsilon\left(p_k(x_k - L), t \right) < \frac{1}{H_r} \sum_{\substack{k \in I_r \\ k \in K_r^c(\varepsilon)}} \varepsilon = \frac{1}{H_r} \left| K_r^c(\varepsilon) \right| \varepsilon \tag{3.69}$$

dır. (3.69) eşitsizliğinde $r \to \infty$ iken limite geçilirse $S_{(\overline{N},\theta)}^{(\mu,\upsilon)}\text{-}\lim x = L$ olduğundan

$$\lim_{r\to\infty} S_4(r) < \varepsilon \tag{3.70}$$

eşitsizliği elde edilir. (3.64) - (3.66) eşitlikleri ve (3.67) - (3.70) eşitsizlikleri kullanılarak

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{H_r} \sum_{k \in I_r} \upsilon\left(p_k(x_k - L), t \right) = 0 \tag{3.71}$$

olduğu gösterilmiş olur. (3.63) ve (3.71) eşitliklerinden $\left(\overline{N}, p_r, \theta\right)^{(\mu,\upsilon)}$ -$lim\, x = L$ olduğu görülür.

Teorem 3.3.13. $(X, \mu, \upsilon, *, \circ)$ bir sezgisel bulanık normlu lineer uzay, $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi ve $x = (x_k)$ X uzayında bir dizi olsun.

1. $\forall r \in \mathbb{N}$ için $\dfrac{H_r}{h_r} \leq 1$, $\liminf\limits_{r\to\infty} \dfrac{H_r}{h_r} > 0$ ve $S_{\theta}^{(\mu,\upsilon)}$-$lim\, x = L$

ise $S_{(\overline{N},\theta)}^{(\mu,\upsilon)}$-$lim\, x = L$ dir.

2. $\forall r \in \mathbb{N}$ için $\dfrac{H_r}{h_r} \geq 1$, $\limsup\limits_{r\to\infty} \dfrac{H_r}{h_r} < \infty$ ve $S_{(\overline{N},\theta)}^{(\mu,\upsilon)}$-$lim\, x = L$

ise $S_{\theta}^{(\mu,\upsilon)}$-$lim\, x = L$ dir.

İspat. 1. Kabul edelim ki $\forall r \in \mathbb{N}$ için $\dfrac{H_r}{h_r} \leq 1$, $\liminf\limits_{n\to\infty} \dfrac{H_r}{h_r} > 0$ ve $S_{\theta}^{(\mu,\upsilon)}$-$lim\, x = L$ olsun. O halde $\forall r \in \mathbb{N}$ için $0 < \delta \leq \dfrac{H_r}{h_r} \leq 1$ olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı vardır. Böylece $\forall \varepsilon > 0$ ve $\forall t > 0$ için

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{H_r}\left|\left\{k \in I_r^{'} : \mu\left(p_k\left(x_k - L\right), t\right) \leq 1-\varepsilon \text{ ya da } \upsilon\left(p_k\left(x_k - L\right), t\right) \geq \varepsilon\right\}\right| \\
&= \frac{1}{H_r}\left|\left\{P_{k_{r-1}} < k \leq P_{k_r} : \mu\left(p_k\left(x_k - L\right), t\right) \leq 1-\varepsilon \text{ ya da } \upsilon\left(p_k\left(x_k - L\right), t\right) \geq \varepsilon\right\}\right| \\
&\leq \frac{1}{\delta}.\frac{1}{h_r}\left|\left\{P_{k_{r-1}} \leq k_{r-1} < k \leq P_{k_r} \leq k_r : \mu\left(x_k - L, t\right) \leq 1-\varepsilon \text{ ya da } \upsilon\left(x_k - L, t\right) \geq \varepsilon\right\}\right| \\
&\leq \frac{1}{\delta}.\frac{1}{h_r}\left|\left\{k_{r-1} < k \leq k_r : \mu\left(x_k - L, t\right) \leq 1-\varepsilon \text{ ya da } \upsilon\left(x_k - L, t\right) \geq \varepsilon\right\}\right|
\end{aligned}
$$

dir. Böylece $r \to \infty$ iken limit alındığında $S_{(\overline{N},\theta)}^{(\mu,\upsilon)}\text{-}\lim x = L$ olduğu gösterilmiş olur.

2. Kabul edelim ki $\forall r \in \mathbb{N}$ için $\frac{H_r}{h_r} \geq 1$, $\limsup_{r\to\infty} \frac{H_r}{h_r} < \infty$ ve $S_{(\overline{N},\theta)}^{(\mu,\upsilon)}\text{-}\lim x = L$ olsun. O halde $\forall r \in \mathbb{N}$ için $1 \leq \frac{H_r}{h_r} \leq K < \infty$ olacak şekilde $K > 0$ sayısı vardır. Böylece $\forall \varepsilon > 0$ ve $\forall t > 0$ için

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{h_r}\left|\left\{k \in I_r : \mu\left(x_k - L, t\right) \leq 1-\varepsilon \text{ ya da } \upsilon\left(x_k - L, t\right) \geq \varepsilon\right\}\right| \\
&= \frac{1}{h_r}\left|\left\{k_{r-1} < k \leq k_r : \mu\left(x_k - L, t\right) \leq 1-\varepsilon \text{ ya da } \upsilon\left(x_k - L, t\right) \geq \varepsilon\right\}\right| \\
&\leq K.\frac{1}{H_r}\left|\left\{k_{r-1} \leq P_{k_{r-1}} < k \leq P_{k_r} \leq k_r : \mu\left(p_k\left(x_k - L\right), t\right) \leq 1-\varepsilon \text{ ya da } \upsilon\left(p_k\left(x_k - L\right), t\right) \geq \varepsilon\right\}\right| \\
&\leq K.\frac{1}{H_r}\left|\left\{k \in I_r' : \mu\left(p_k\left(x_k - L\right), t\right) \leq 1-\varepsilon \text{ ya da } \upsilon\left(p_k\left(x_k - L\right), t\right) \geq \varepsilon\right\}\right|
\end{aligned}
$$

dir. Böylece $r \to \infty$ iken limit alındığında $S_{\theta}^{(\mu,\upsilon)}\text{-}\lim x = L$ olduğu gösterilmiş olur.

BÖLÜM 4. SEZGİSEL BULANIK *n*- NORMLU LİNEER UZAYLARDA LACUNARY Δ- İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

4.1. Sezgisel Bulanık n-Normlu Lineer Uzaylarda Lacunary Δ-İstatistiksel Yakınsaklık

Bu bölümde sezgisel bulanık n-normlu lineer uzaylarda Δ-yakınsaklık ve lacunary Δ-istatistiksel yakınsaklık tanımları verilecektir. Ardından sezgisel bulanık n-normlu lineer uzaylarda Δ-Cauchy ve lacunary Δ-istatitiksel Cauchy dizileri tanımlanıp bu tanımlar arasındaki ilişkileri inceleyen teoremlerin ifade ve ispatları verilecektir.

Tanım 4.1.1. $(X,\mu,\upsilon,*,\circ)$ bir sezgisel bulanık n-normlu lineer uzay, $x=(x_k)$ X uzayında bir dizi olsun. Eğer $\forall\varepsilon>0$, $\forall t>0$ ve $y_1,y_2,...,y_{n-1}\in X$ için $k\geq k_0$ olduğunda $\mu(y_1,y_2,...,y_{n-1},\Delta x_k-L,t)>1-\varepsilon$ ve $\upsilon(y_1,y_2,...,y_{n-1},\Delta x_k-L,t)<\varepsilon$ olacak şekilde bir $k_0=k_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ sayısı varsa $x=(x_k)$ dizisi $L\in X$ noktasına $(\mu,\upsilon)^n$ sezgisel bulanık lineer n-normuna göre Δ-yakınsaktır denir ve $(\mu,\upsilon)^n$-$lim\,\Delta x=L$ veya $\Delta x_k \xrightarrow{(\mu,\upsilon)^n} L$ şeklinde gösterilmektedir.

Tanım 4.1.2. $(X,\mu,\upsilon,*,\circ)$ sezgisel bulanık n-normlu lineer uzay ve θ bir lacunary dizisi olsun. Eğer $\forall\varepsilon>0$, $\forall t>0$ ve $y_1,y_2,...,y_{n-1}\in X$ için

$$\delta_\theta(\Delta)\Big(\big\{k\in\mathbb{N}:\mu\left(y_1,y_2,\cdots,y_{n-1},\Delta x_k-L,t\right)\le 1-\varepsilon$$
$$\text{ya da } \upsilon\left(y_1,y_2,\cdots,y_{n-1},\Delta x_k-L,t\right)\ge\varepsilon\big\}\Big)=0,$$

bir diğer ifadeyle,

$$\delta_\theta(\Delta)\Big(\big\{k\in\mathbb{N}:\mu\left(y_1,y_2,\cdots,y_{n-1},\Delta x_k-L,t\right)>1-\varepsilon$$
$$\text{ve } \upsilon\left(y_1,y_2,\cdots,y_{n-1},\Delta x_k-L,t\right)<\varepsilon\big\}\Big)=1$$

ise $x=(x_k)$ dizisi $(\mu,\upsilon)^n$ sezgisel bulanık lineer n-normuna göre $L\in X$ noktasına lacunary Δ-istatistiksel yakınsaktır (veya $S_\theta^{(\mu,\upsilon)^n}(\Delta)$-yakınsaktır) denir. Bu durum $S_\theta^{(\mu,\upsilon)^n}(\Delta)\text{-}lim\, x=L$ veya $x_k\xrightarrow{(\mu,\upsilon)^n}L\left(S_\theta(\Delta)\right)$ şeklinde gösterilmektedir.

Tanım 4.1.2. ve lacunary yoğunluğun özellikleri kullanılarak aşağıdaki lemma kolaylıkla elde edilir.

Lemma 4.1.3. $(X,\mu,\upsilon,*,\circ)$ sezgisel bulanık n-normlu lineer uzay ve θ bir lacunary dizisi olsun. O halde $\forall\varepsilon>0$, $\forall t>0$ ve $y_1,y_2,\ldots,y_{n-1}\in X$ için aşağıdaki ifadeler denktir.

1. $S_\theta^{(\mu,\upsilon)^n}(\Delta)\text{-}lim\, x=L,$
2. $\delta_\theta(\Delta)\left(\left\{k\in\mathbb{N}:\mu\left(y_1,y_2,\ldots,y_{n-1},\Delta x_k-L,t\right)\le 1-\varepsilon\right\}\right)$
   $=\delta_\theta(\Delta)\left(\left\{k\in\mathbb{N}:\mu\left(y_1,y_2,\ldots,y_{n-1},\Delta x_k-L,t\right)\ge\varepsilon\right\}\right)=0,$
3. $\delta_\theta(\Delta)\Big(\big\{k\in\mathbb{N}:\mu\left(y_1,y_2,\cdots,y_{n-1},\Delta x_k-L,t\right)>1-\varepsilon$
   ve $\upsilon\left(y_1,y_2,\cdots,y_{n-1},\Delta x_k-L,t\right)<\varepsilon\big\}\Big)=1,$

4. $\delta_\theta(\Delta)\left(\left\{k\in\mathbb{N}:\mu\left(y_1,y_2,\cdots,y_{n-1},\Delta x_k-L,t\right)>1-\varepsilon\right\}\right)$

$=\delta_\theta(\Delta)\left(\left\{k\in\mathbb{N}:\upsilon\left(y_1,y_2,...,y_{n-1},\Delta x_k-L,t\right)<\varepsilon\right\}\right)=1,$

5. $S_\theta\text{-}lim\,\mu\left(y_1,y_2,\cdots,y_{n-1},\Delta x_k-L,t\right)=1$

ve $S_\theta\text{-}lim\,\upsilon\left(y_1,y_2,\cdots,y_{n-1},\Delta x_k-L,t\right)=0$

dir.

Teorem 4.1.4. $(X,\mu,\upsilon,*,\circ)$ sezgisel bulanık n-normlu lineer uzay ve θ bir lacunary dizisi olsun. $S_\theta^{(\mu,\upsilon)^n}(\Delta)\text{-}lim\,x=L_1$ ve $S_\theta^{(\mu,\upsilon)^n}(\Delta)\text{-}lim\,x=L_2$ ise $L_1=L_2$ dir.

Teorem 4.1.5. $(X,\mu,\upsilon,*,\circ)$ sezgisel bulanık n-normlu lineer uzay ve θ bir lacunary dizisi olsun. $(\mu,\upsilon)^n\text{-}lim\,\Delta x=L$ ise $S_\theta^{(\mu,\upsilon)^n}(\Delta)\text{-}lim\,x=L$ dir.

İspat. Kabul edelim ki $(\mu,\upsilon)^n\text{-}lim\,\Delta x=L$ olsun. O halde, $\forall\varepsilon>0$, $\forall t>0$ ve $y_1,y_2,...,y_{n-1}\in X$ için $k\geq k_0$ olduğunda $\mu\left(y_1,y_2,...,y_{n-1},\Delta x_k-L,t\right)>1-\varepsilon$ ve $\upsilon\left(y_1,y_2,...,y_{n-1},\Delta x_k-L,t\right)<\varepsilon$ olacak şekilde bir $k_0=k_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ sayısı vardır. Böylece,

$$\left\{k\in\mathbb{N}:\mu\left(y_1,y_2,\cdots,y_{n-1},\Delta x_k-L,t\right)\leq 1-\varepsilon \text{ ya da } \upsilon\left(y_1,y_2,\cdots,y_{n-1},\Delta x_k-L,t\right)\geq\varepsilon\right\}$$

kümesi sonlu sayıda elemana sahiptir. $\mathbb{N}$'nin her sonlu alt kümesi 0 lacunary yoğunluğuna sahip olduğundan

$$\delta_\theta(\Delta)\left(\left\{k\in\mathbb{N}:\mu\left(y_1,y_2,\cdots,y_{n-1},\Delta x_k-L,t\right)\leq 1-\varepsilon\right.\right.$$
$$\left.\left.\text{ya da } \upsilon\left(y_1,y_2,\cdots,y_{n-1},\Delta x_k-L,t\right)\geq\varepsilon\right\}\right)=0$$

olup $S_\theta^{(\mu,\upsilon)^n}(\Delta)\text{-}lim\,x=L$ olduğu gösterilmiş olur.

Örnek 4.1.6. $X=\mathbb{R}^n$ ve $i=1,2,\ldots,n$ için $x_i=\left(x_{i1},x_{i2},\ldots,x_{in}\right)\in\mathbb{R}^n$ olacak şekilde

$$\left\|x_1,x_2,\ldots,x_n\right\|=\left|\det\left(\begin{vmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn}\end{vmatrix}\right)\right|$$

lineer n-normu tanımlansın. $\forall a,b\in[0,1]$ için $a*b=ab$ ve $a\circ b=\min\{a+b,1\}$ olsun. $\forall y_1,y_2,\cdots,y_{n-1},x\in\mathbb{R}^n$ ve $\forall t>0$ için μ_0 ve υ_0 bulanık kümeleri

$$\mu_0\left(y_1,y_2,\cdots,y_{n-1},x,t\right)=\frac{t}{t+\left\|y_1,y_2,\ldots,y_{n-1},x\right\|} \quad \text{ve}$$

$$\upsilon_0\left(y_1,y_2,\cdots,y_{n-1},x,t\right)=\frac{\left\|y_1,y_2,\ldots,y_{n-1},x\right\|}{t+\left\|y_1,y_2,\ldots,y_{n-1},x\right\|}$$

olacak şekilde tanımlansın. O halde $\left(\mathbb{R}^n,\mu_0,\upsilon_0,*,\circ\right)$ bir sezgisel bulanık n-normlu lineer uzaydır. $[\sqrt{h_r}]$, $\sqrt{h_r}$ sayısından büyük olmayan en küçük tamsayıyı göstermek üzere, $x=(x_k)$ dizisi

$$x_k=\begin{cases}\left(\dfrac{\left(n-\left[\sqrt{h_r}\right]+1\right)\left(-n+\left[\sqrt{h_r}\right]\right)}{2},0,\ldots,0\right)\in\mathbb{R}^n, & 1\le k\le n\text{-}\left[\sqrt{h_r}\right] \\ \left(-\dfrac{1}{2}k^2+\dfrac{1}{2}k,0,\ldots,0\right)\in\mathbb{R}^n, & n\text{-}\left[\sqrt{h_r}\right]+1\le k\le n \\ \left(-\dfrac{1}{2}n^2-\dfrac{1}{2}n,0,\ldots,0\right)\in\mathbb{R}^n, & k>n\end{cases}$$

olacak şekilde tanımlansın. O halde $\Delta x = (\Delta x_k)$ dizisi

$$\Delta x_k = \begin{cases} (k,0,...,0) \in \mathbb{R}^n, & n - \left[\sqrt{h_r}\right] + 1 \le k \le n \\ (0,0,...,0) \in \mathbb{R}^n, & \text{diğer} \end{cases}$$

olarak elde edilir. Her $0 < \varepsilon < 1$, $y_1, y_2, \cdots, y_{n-1} \in X$ ve $t > 0$ için

$$K_r(\varepsilon,t) = \{k \in I_r : \mu(y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}, \Delta x_k - L, t) \le 1 - \varepsilon$$
$$\text{ya da } \upsilon(y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}, \Delta x_k - L, t) \ge \varepsilon\}$$

kümesi tanımlansın. O halde

$$K_r(\varepsilon,t) = \left\{ k \in I_r : \|y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}, \Delta x_k\| \ge \frac{\varepsilon t}{(1-\varepsilon)} > 0 \right\}$$
$$\subseteq \{k \in I_r : \Delta x_k = (k,0,...,0) \in \mathbb{R}^n\}$$

olduğu için $r \longrightarrow \infty$ iken $\frac{1}{h_r}\left|k \in I_r : k \in K_r(\varepsilon,t)\right| \le \frac{\left[\sqrt{h_r}\right]}{h_r} \longrightarrow 0$ dır. Böylece $S_\theta^{(\mu,\upsilon)^n}(\Delta)\text{-}lim\, x = 0$ dır. Diğer taraftan

$$\mu_0(y_1, y_2, ..., y_{n-1}, \Delta x_k, t) = \frac{t}{t + \|y_1, y_2, ..., y_{n-1}, \Delta x_k\|}$$
$$= \begin{cases} \dfrac{t}{t + \|y_1, y_2, ..., y_{n-1}, \Delta x_k\|}, & n - \left[\sqrt{h_r}\right] + 1 \le k \le n, \\ 1, & \text{diğer} \end{cases}$$
$$\le 1$$

ve

$$\mu_0\left(y_1, y_2, ..., y_{n-1}, \Delta x_k, t\right) = \frac{\left\|y_1, y_2, ..., y_{n-1}, \Delta x_k\right\|}{t + \left\|y_1, y_2, ..., y_{n-1}, \Delta x_k\right\|}$$
$$= \begin{cases} \dfrac{\left\|y_1, y_2, ..., y_{n-1}, \Delta x_k\right\|}{t + \left\|y_1, y_2, ..., y_{n-1}, \Delta x_k\right\|}, & n - \left[\sqrt{h_r}\right] + 1 \le k \le n, \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$
$$\ge 0$$

dır. Bu durumda ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.1.7. $(X, \mu, \upsilon, *, \circ)$ sezgisel bulanık n-normlu lineer uzay ve θ bir lacunary dizisi olsun. $S_\theta^{(\mu,\upsilon)^n}(\Delta)\text{-}\lim x = L$ ancak ve ancak $\delta_\theta(\Delta)(K) = 1$ ve $(\mu,\upsilon)^n\text{-}\lim_{k\in K} \Delta x_k = L$ olacak şekilde $K = (k_n)$ artan tamsayı dizisi vardır.

İspat. Gerek şart: Her $y_1, y_2, \cdots, y_{n-1} \in X$ ve her $t > 0$ için $j \in \mathbb{N}$ olmak üzere $K(j,t)$ ve $M(j,t)$ kümeleri

$$K(j,t) = \{k \in \mathbb{N} : \ \mu(y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}, \Delta x_k - L, t) > 1 - 1/j$$
$$\text{ve } \ \upsilon(y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}, \Delta x_k - L, t) < 1/j\}$$

ve

$$M(j,t) = \{k \in \mathbb{N} : \mu(y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}, \Delta x_k - L, t) \le 1 - 1/j$$
$$\text{ya da } \ \upsilon(y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}, \Delta x_k - L, t) \ge 1/j\}$$

olacak şekilde tanımlansın. O halde her $t > 0$ ve $j \in \mathbb{N}$ için

$$K(j,t) \supset K(j+1,t) \tag{4.1}$$

ve

$$\delta_\theta(\Delta)\left(K(j,t)\right)=1 \tag{4.2}$$

olduğundan

$$\delta_\theta(\Delta)\left(M(j,t)\right)=0$$

dir. Şimdi, bazı $k\in K(j,t)$ değerlerİ için $\Delta x_k \xrightarrow{(\mu,\upsilon)^n} L$ olduğu gösterilsin. Kabul edelim ki bazı $k\in K(j,t)$ değerleri için $x=(x_k)$ dizisi sezgisel bulanık lineer n-normuna göre Δ- yakınsak olmasın. Şu halde $\forall k\geq k_0$ için $\mu(y_1,y_2,\cdots,y_{n-1},\Delta x_k$-$L,t)\leq 1-\alpha$ ya da $\upsilon(y_1,y_2,...,y_{n-1},\Delta x_k-L,t)\geq\alpha$ olacak şekilde $\alpha>0$ ve $k_0\in\mathbb{N}$ sayıları mevcuttur. Kabul edelim ki $\alpha>1/j$ olsun. $K(\alpha,t)$ kümesi

$$\begin{aligned}K(\alpha,t)=\{k\in\mathbb{N}:\ &\mu(y_1,y_2,\cdots,y_{n-1},\Delta x_k-L,t)>1-\alpha\\ &\text{ve }\mu(y_1,y_2,...,y_{n-1},\Delta x_k-L,t)<\alpha\}\end{aligned}$$

olacak şekilde tanımlansın. O halde, $\delta_\theta(\Delta)\left(K(\alpha,t)\right)=0$ dir. $\alpha>1/j$ olduğu için $\delta_\theta(\Delta)\left(K(\alpha,t)\right)=0$ olması (4.2) eşitliği ile çelişir. Böylece $\Delta x_k \xrightarrow{(\mu,\upsilon)^n} L$ olduğu gösterilmiş olur. Teorem 4.1.5. ile $S_\theta^{(\mu,\upsilon)^n}(\Delta)$-$lim\, x=L$ olduğu kolayca görülür.

Yeter şart: Kabul edelim ki $\delta_\theta(\Delta)(K)=1$ ve $(\mu,\upsilon)^n$-$\lim_{k\in K}\Delta x_k=L$ olacak şekilde $K=(k_n)$ artan tamsayı dizisi bulunsun; yani her $y_1,y_2,\cdots,y_{n-1}\in X$, $\varepsilon>0$ ve $t>0$ için $\mu(y_1,y_2,\cdots,y_{n-1},\Delta x_k-L,t)>1-\varepsilon$ ve $\upsilon(y_1,y_2,\cdots,y_{n-1},\Delta x_k-L,t)<\varepsilon$ olacak şekilde $k_0\in\mathbb{N}$ sayısı mevcut olsun. $M(\varepsilon,t)$ kümesi

$$M(\varepsilon,t)=\{k\in\mathbb{N}:\mu(y_1,y_2,\cdots,y_{n-1},\Delta x_k-L,t)\leq 1-\varepsilon$$
$$\text{ya da } \upsilon(y_1,y_2,\cdots,y_{n-1},\Delta x_k-L,t)\geq\varepsilon\}$$

olacak şekilde tanımlansın. O halde

$$M(\varepsilon,t)=\{k\in\mathbb{N}:\mu(y_1,y_2,\cdots,y_{n-1},\Delta x_k-L,t)\leq 1-\varepsilon$$
$$\text{ya da } \upsilon(y_1,y_2,\cdots,y_{n-1},\Delta x_k-L,t)\geq\varepsilon\}$$
$$\subseteq\mathbb{N}-\{k_{n_0+1},k_{n_0+2},...\}$$

olduğundan $\delta_\theta(\Delta)(M(\varepsilon,t))\leq 1-1=0$ dır. Böylece $S_\theta^{(\mu,\upsilon)^n}(\Delta)\text{-}lim\, x=L$ olup ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.8. $(X,\mu,\upsilon,*,\circ)$ sezgisel bulanık n-normlu lineer uzay ve θ lacunary dizisi olsun. $S_\theta^{(\mu,\upsilon)^n}(\Delta)\text{-}lim\, x=L$ dir ancak ve ancak $(\mu,\upsilon)^n\text{-}lim\, y=L$, $\Delta x=y+\Delta z$ ve $\delta_\theta(\Delta)(\{k\in\mathbb{N}:\Delta z_k=0\})=1$ olacak şekilde $x=(x_k)$, $y=(y_k)$ dizileri ve "0" sayısına lacunary Δ- istatistiksel yakınsak olan $z=(z_k)$ dizisi mevcuttur.

İspat. Gerek şart : Kabul edelim ki $S_\theta^{(\mu,\upsilon)^n}(\Delta)\text{-}lim\, x=L$ olsun. $K(j,t)$ kümesi

$$K(j,t)=\{k\in\mathbb{N}:\ \mu(y_1,y_2,\cdots,y_{n-1},\Delta x_k-L,t)>1-1/j$$
$$\text{ve } \upsilon(y_1,y_2,\cdots,y_{n-1},\Delta x_k-L,t)<1/j\}$$

olacak şekilde tanımlansın. $\forall y_1,y_2,\cdots,y_{n-1}\in X$, $t>0$ ve $j\in\mathbb{N}$ için Teorem 4.1.7. ile $r_j\in K(j,t)$, $\delta_\theta(\Delta)(K(j,t))=1$ olacak şekilde doğal sayıların (r_j) artan indeks dizisi oluşturulabilir. Böylece $r>r_j$ $(j\in\mathbb{N})$ için,

$$\frac{1}{h_r}\Big|\Big\{k\in I_r:\ \mu\left(y_1,y_2,\cdots,y_{n-1},\Delta x_k-L,t\right)>1-1/j$$
$$\text{ve }\ \upsilon\left(y_1,y_2,\cdots,y_{n-1},\Delta x_k-L,t\right)<1/j\Big\}\Big|>1-1/j$$

dir. $y=\left(y_k\right)$ ve $z=\left(z_k\right)$ dizileri şöyle tanımlansın. $1<k<r_1$ ise $y_k=\Delta x_k$ ve $z_k=0$ olsun. $j\geq 1$ ve $r_j<k\leq r_{j+1}$ olarak alınsın. Eğer $k\in K\left(j,t\right)$ ise; yani $\mu\left(y_1,y_2,...,y_{n-1},\Delta x_k-L,t\right)>1-1/j$ ve $\upsilon\left(y_1,y_2,...,y_{n-1},\Delta x_k-L,t\right)<1/j$ ise $y_k=\Delta x_k$ ve $\Delta z_k=0$ dır. Aksi takdirde $y_k=L$ ve $\Delta z_k=\Delta x_k-L$ dir. Böylece açıktır ki $\Delta x=y+\Delta z$ dir.

$\varepsilon>1/j$ olarak alınsın. Eğer $k>r_j$ için $k\in K\left(j,t\right)$ ise, $\mu\left(y_1,y_2,...,y_{n-1},\right.$ $\left.y_k-L,t\right)>1-\varepsilon$ ve $\upsilon\left(y_1,y_2,...,y_{n-1},\Delta x_k-L,t\right)<\varepsilon$ dur. $\varepsilon>0$ sayısı keyfi bir sayı olduğundan $\left(\mu,\upsilon\right)^n$ - $lim\ y=L$ olduğu gösterilmiş olur.

Son olarak $S_\theta^{(\mu,\upsilon)^n}\left(\Delta\right)$-$lim\, z=0$ olduğu gösterilsin. Bunun için

$$\delta_\theta\left(\Delta\right)\left(\left\{k\in\mathbb{N}:\Delta z_k=0\right\}\right)=1$$

olduğunun gösterilmesi yeterlidir. Herhangi bir $r\in\mathbb{N}$ ve $\varepsilon>0$ sayısı için

$$\left|\left\{k\in I_r:\Delta z_k=0\right\}\right|$$
$$\leq\left|\left\{k\in I_r:\mu\left(y_1,y_2,...,y_{n-1},\Delta z_k,t\right)>1-\varepsilon\ \text{ve}\ \upsilon\left(y_1,y_2,...,y_{n-1},\Delta z_k,t\right)<\varepsilon\right\}\right|$$

olduğu görülürse ispat tamamlanır. O halde $1/j<\delta$ olacak şekilde $\delta>0$ ve $j\in\mathbb{N}$ ise, $\forall r>r_j$ için $\frac{1}{h_r}\left|\left\{k\in I_r:\Delta z_k=0\right\}\right|>1-\delta$ olduğu gösterilsin. Eğer $k\in K\left(j,t\right)$ ise, $r_j<k\leq r_{j+1}$ olacak şekilde $\Delta z_k=0$ dır. $t>0$ ve $s\in\mathbb{N}$ için $K\left(s,t\right)$ kümesi

$$K(s,t)=\{k\in\mathbb{N}:\ \mu(y_1,y_2,\cdots,y_{n-1},\Delta x_k-L,t)>1-1/s$$
$$\text{ve}\ \upsilon(y_1,y_2,...,y_{n-1},\Delta x_k-L,t)<1/s\}$$

olacak şekilde tanımlansın. $s>j$ ve $r_s<k\le r_{s+1}$ olmak üzere (4.2) eşitliği kullanılarak

$$K(s,t)=\left\{k\in\mathbb{N}:\mu(y_1,y_2,...,y_{n-1},\Delta x_k-L,t)>1-\frac{1}{s}\right.$$
$$\left.\text{ve}\ \upsilon(y_1,y_2,...,y_{n-1},\Delta x_k-L,t)<\frac{1}{s}\right\}$$
$$\subset\{k\in\mathbb{N}:\Delta z_k=0\}$$

dir. Sonuç olarak, $r_s<k\le r_{s+1}$ ve $s>j$ ise

$$\frac{1}{h_r}\left|\{k\in I_r:\Delta z_k=0\}\right|$$
$$\ge\frac{1}{h_r}\left|\{k\in I_r:\mu(y_1,y_2,...,y_{n-1},\Delta z_k,t)>1-\varepsilon\right.$$
$$\left.\text{ve}\ \upsilon(y_1,y_2,...,y_{n-1},\Delta z_k,t)<\varepsilon\}\right|$$
$$>1-1/s>1-1/j>1-\delta$$

dir. Böylece $\delta_\theta(\Delta)(\{k\in\mathbb{N}:\Delta z_k=0\})=1$ elde edilir.

Yeter şart: $x=(x_k)$, $y=(y_k)$ ve $z=(z_k)$ dizileri $(\mu,\upsilon)^n$-$lim\,y=L$, $\Delta x=y+\Delta z$ ve $\delta_\theta(\Delta)(\{k\in\mathbb{N}:\Delta z_k=0\})=1$ olacak şekilde mevcut olsun. O halde, $\forall y_1,y_2,...,y_{n-1}\in X$, $\varepsilon>0$ ve $t>0$ için

$$\{k\in\mathbb{N}:\ \mu(y_1,y_2,\cdots,y_{n-1},\Delta x_k-L,t)\le1-\varepsilon$$
$$\text{ya da}\ \upsilon(y_1,y_2,\cdots,y_{n-1},\Delta x_k-L,t)\ge\varepsilon\}$$
$$\subseteq\{k\in\mathbb{N}:\ \mu(y_1,y_2,\cdots,y_{n-1},y_k-L,t)\le1-\varepsilon$$

ya da $\upsilon\left(y_1, y_2, ..., y_{n-1}, y_k - L, t\right) \geq \varepsilon\} \cup \{k \in \mathbb{N} : \Delta z_k \neq 0\}$

dir. Böylece

$$\delta_\theta\left(\Delta\right)\left(\{k \in \mathbb{N} :\ \mu\left(y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}, \Delta x_k - L, t\right) \leq 1 - \varepsilon\right.$$

$$\left.\text{ya da } \upsilon\left(y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}, \Delta x_k - L, t\right) \geq \varepsilon\}\right)$$

$$\leq \delta_\theta\left(\{k \in \mathbb{N} : \mu\left(y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}, y_k - L, t\right) \leq 1 - \varepsilon\right.$$

$$\left.\text{ya da } \upsilon\left(y_1, y_2, ..., y_{n-1}, y_k - L, t\right) \geq \varepsilon\}\right)\Big\} + \delta_\theta\left(\{k \in \mathbb{N} : \Delta z_k \neq 0\}\right)$$

dır. $(\mu,\upsilon)^n$ - $lim\, y = L$ olduğu için

$$\{k \in \mathbb{N} : \mu\left(y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}, y_k - L, t\right) \leq 1 - \varepsilon$$

$$\text{ya da } \upsilon\left(y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}, y_k - L, t\right) \geq \varepsilon\}$$

kümesi sonlu sayıda terim içerir. O halde,

$$\delta_\theta\left(\{k \in \mathbb{N} :\ \mu\left(y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}, y_k - L, t\right) \leq 1 - \varepsilon\right.$$

$$\left.\text{ya da } \upsilon\left(y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}, y_k - L, t\right) \geq \varepsilon\}\right) = 0$$

dır. Ayrıca hipoteze göre $\delta_\theta\left(\Delta\right)\left(\{k \in \mathbb{N} : \Delta z_k \neq 0\}\right) = 0$ dir. Böylece

$$\delta_\theta\left(\{k \in \mathbb{N} :\ \mu\left(y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}, \Delta x_k - L, t\right) \leq 1 - \varepsilon\right.$$

$$\left.\text{ya da } \upsilon\left(y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}, y_k - L, t\right) \geq \varepsilon\}\right) = 0$$

olmasından görülür ki $S_\theta^{(\mu,\upsilon)^n}\left(\Delta\right)$- $lim\, x = L$ dir.

Tanım 4.1.9. $\left(X, \mu, \upsilon, *, \circ\right)$ bir sezgisel bulanık n- normlu lineer uzay, $x = \left(x_k\right)$ X uzayında bir dizi olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0,$ $\forall t > 0$ ve $y_1, y_2, ..., y_{n-1} \in X$ için $k, m \geq k_0$ olduğunda $\mu\left(y_1, y_2, ..., y_{n-1}, \Delta x_k - \Delta x_m, t\right) > 1 - \varepsilon$ ve $\upsilon\left(y_1, y_2, ..., y_{n-1}, \Delta x_k - \Delta x_m, t\right) < \varepsilon$

olacak şekilde bir $k_0 = k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisine $(\mu, \upsilon)^n$ sezgisel bulanık lineer n-normuna göre Δ-Cauchy dizisi denir.

Tanım 4.1.10. $(X, \mu, \upsilon, *, \circ)$ sezgisel bulanık n-normlu lineer uzay ve θ bir lacunary dizisi olsun. Eğer her $\forall \varepsilon > 0$, $\forall t > 0$ ve $\forall y_1, y_2, ..., y_{n-1} \in X$ için

$$\delta_\theta(\Delta)\Big(\big\{k \in \mathbb{N} : \mu(y_1, y_2, ..., y_{n-1}, \Delta x_k - \Delta x_m, t) \le 1 - \varepsilon$$
$$\text{ya da } \upsilon(y_1, y_2, ..., y_{n-1}, \Delta x_k - \Delta x_m, t) \ge \varepsilon\big\}\Big) = 0$$

oluyorsa $x = (x_k)$ dizisi $(\mu, \upsilon)^n$ sezgisel bulanık lineer n-normuna göre lacunary Δ- istatistiksel Cauchy dizisidir (veya $S_\theta^{(\mu,\upsilon)^n}(\Delta)$- Cauchy dizisidir) denir.

Teorem 4.1.11. $(X, \mu, \upsilon, *, \circ)$ bir sezgisel bulanık n-normlu lineer uzay olsun. $x = (x_k)$ dizisi $(\mu, \upsilon)^n$ sezgisel bulanık lineer n-normuna göre lacunary Δ-istatistiksel yakınsaktır ancak ve ancak $x = (x_k)$ dizisi $(\mu, \upsilon)^n$ sezgisel bulanık lineer n-normuna göre lacunary Δ-istatistiksel Cauchy dizisidir.

İspat. Kabul edelim ki $x = (x_k)$ dizisi L noktasına $(\mu, \upsilon)^n$ sezgisel bulanık lineer n-normuna göre lacunary Δ-istatistiksel yakınsak olsun. $\varepsilon > 0$ sayısı için $(1-\varepsilon) * (1-\varepsilon) > 1 - s$ ve $\varepsilon \circ \varepsilon < s$ olacak şekilde $s > 0$ seçilsin. $\forall \varepsilon > 0$ ve $\forall t > 0$ için $A(\varepsilon, t)$ kümesi

$$A(\varepsilon, t) = \big\{k \in \mathbb{N} : \mu(y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}, \Delta x_k - L, t/2) \le 1 - \varepsilon$$
$$\text{ya da } \upsilon(y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}, \Delta x_k - L, t/2) \ge \varepsilon\big\}$$

olacak şekilde tanımlansın. O halde $\forall t > 0$ ve $\forall y_1, y_2, \cdots, y_{n-1} \in X$ için

$$\delta_\theta(\Delta)\left(A(\varepsilon,t)\right)=0 \tag{4.3}$$

olması gösterir ki

$$\delta_\theta(\Delta)\left(A^c(\varepsilon,t)\right)=1$$

dir. Kabul edelim ki $q\in A^c(\varepsilon,t)$ olsun. O halde,

$$\mu\left(y_1,y_2,\cdots,y_{n-1},\Delta x_q-L,t/2\right)>1-\varepsilon$$

ve

$$\upsilon\left(y_1,y_2,\cdots,y_{n-1},\Delta x_q-L,t/2\right)<\varepsilon.$$

dir. $s>0$ ve $t>0$ için $B(s,t)$ kümesi

$$B(s,t)=\Big\{k\in\mathbb{N}:\mu\left(y_1,y_2,\cdots,y_{n-1},\Delta x_k-\Delta x_q,t\right)\le 1-s$$
$$\text{ya da }\upsilon\left(y_1,y_2,\cdots,y_{n-1},\Delta x_k-\Delta x_q,t\right)\ge s\Big\}$$

olacak şekilde tanımlansın. Kabul edelim ki $k\in B(s,t)\cap A^c(\varepsilon,t)$ olsun. Bu durumda,

$$\mu\left(y_1,y_2,\cdots,y_{n-1},\Delta x_k-\Delta x_q,t\right)\le 1-s$$

ve

$$\mu\left(y_1,y_2,\cdots,y_{n-1},\Delta x_k-L,t/2\right)>1-\varepsilon,$$

özel olarak,

$$\mu\left(y_1,y_2,\cdots,y_{n-1},\Delta x_q-L,t/2\right)>1-\varepsilon$$

olacak şekilde $q\in\mathbb{N}$ sayısı seçilsin. O halde,

$$
\begin{aligned}
1-s &\geq \mu\left(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, \Delta x_k - \Delta x_q, t\right) \\
&\geq \mu\left(y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}, \Delta x_k - L, t/2\right) * \mu\left(y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}, \Delta x_q - L, t/2\right) \\
&> (1-\varepsilon) * (1-\varepsilon) > (1-s)
\end{aligned}
$$

olur ki bu mümkün değildir. Diğer taraftan,

$$\upsilon\left(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, \Delta x_k - \Delta x_q, t\right) \geq s$$

ve

$$\upsilon\left(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, \Delta x_k - L, t/2\right) < \varepsilon,$$

özel olarak,

$$\upsilon\left(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, \Delta x_q - L, t/2\right) < \varepsilon$$

olacak şekilde $q \in \mathbb{N}$ sayısı seçilsin. Böylece,

$$
\begin{aligned}
s &\leq \upsilon\left(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, \Delta x_k - \Delta x_q, t\right) \\
&\leq \upsilon\left(y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}, \Delta x_k - L, t/2\right) \circ \upsilon\left(y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}, \Delta x_q - L, t/2\right) \\
&< \varepsilon * \varepsilon < s
\end{aligned}
$$

olur ki bu mümkün değildir. O halde, $B(s,t) \subset A(\varepsilon,t)$ ve (4.3) eşitliği ile $\delta_\theta(\Delta)(B(s,t)) = 0$ dır. Bu eşitlikten ise x dizisinin $(\mu,\upsilon)^n$ sezgisel bulanık lineer n-normuna göre lacunary Δ-istatistiksel Cauchy dizisi olduğu görülür.

Tersine, $x = (x_k)$ dizisi $(\mu,\upsilon)^n$ sezgisel bulanık lineer n-normuna göre lacunary Δ-istatistiksel Cauchy dizisi olsun; fakat lacunary Δ-istatistiksel yakınsak dizi olmasın. $\varepsilon > 0$ sayısı için $(1-\varepsilon)*(1-\varepsilon) > 1-s$ ve $\varepsilon \circ \varepsilon < s$ olacak şekilde $s > 0$ seçelim. x lacunary Δ-istatistiksel yakınsak dizi olmadığı için

$$\mu\left(y_1, y_2, ..., y_{n-1}, \Delta x_k - \Delta x_q, t\right)$$
$$\geq \mu\left(y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}, \Delta x_k - L, t/2\right) * \mu\left(y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}, \Delta x_q - L, t/2\right)$$
$$> (1-\varepsilon) * (1-\varepsilon) > 1 - s,$$

$$\upsilon\left(y_1, y_2, ..., y_{n-1}, \Delta x_k - \Delta x_q, t\right)$$
$$\leq \upsilon\left(y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}, \Delta x_k - L, t/2\right) \circ \upsilon\left(y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}, \Delta x_q - L, t/2\right)$$
$$\varepsilon \circ \varepsilon < s$$

dir. Böylece $B(s,t)$ kümesi

$$B(s,t) = \Big\{k \in \mathbb{N} : \mu\left(y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}, \Delta x_k - \Delta x_q, t\right) \leq 1 - s$$
$$\text{ya da } \upsilon\left(y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}, \Delta x_k - \Delta x_q, t\right) \geq s\Big\}$$

olarak tanımlanmak üzere

$\delta_\theta(\Delta)\left(B^c(s,t)\right) = 0$ ve böylece $\delta_\theta(\Delta)\left(B(s,t)\right) = 1$ elde edilir ki $x = (x_k)$ dizisi $(\mu,\upsilon)^n$ sezgisel bulanık lineer n-normuna göre lacunary Δ-istatistiksel Cauchy dizisi olduğu için bu bir çelişkidir. Şu halde $x = (x_k)$ dizisi $(\mu,\upsilon)^n$ sezgisel bulanık lineer n-normuna göre lacunary Δ-istatistiksel yakınsak dizidir.

Teorem 4.1.7. ile Teorem 4.1.11. kullanılarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.1.1. $(X, \mu, \upsilon, *, \circ)$ sezgisel bulanık lineer n-normlu lineer uzay ve θ bir lacunary dizisi olsun. O halde, $x = (x_k) \in X$ için aşağıdaki koşullar denktir.

1. x dizisi $S_\theta^{(\mu,\upsilon)^n}(\Delta)$-yakınsaktır,
2. x dizisi $S_\theta^{(\mu,\upsilon)^n}(\Delta)$-Cauchy dizisidir,

3. $\delta_\theta(\Delta)(K)=1$ ve (x_{k_n}) alt dizisi $S_\theta^{(\mu,\upsilon)^n}(\Delta)$-Cauchy dizisi olacak şekilde $K=(k_n)$ artan tamsayı dizisi vardır.

BÖLÜM 5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu bölümde, tez çalışmasının orijinal kısmı olan üçüncü ve dördüncü bölümde elde edilen sonuçlar özet olarak verilecektir.

Bölüm 3'ün ilk kısmında, sezgisel bulanık normlu lineer uzaylarda istatistiksel yakınsaklığın bir çeşidi olan ağırlıklı istatistiksel yakınsaklık kavramı tanımlanmış ve ağırlıklı istatistiksel yakınsaklık kavramının aynı uzayda istatistiksel yakınsaklıktan daha genel olduğu teoremlerle ifade ve ispat edilmiştir. Ayrıca normlu lineer uzaylarda verilen $\left(\overline{N}, p\right)$- toplanabilme kavramına paralel olarak sezgisel bulanık normlu lineer uzaylarda $\left(\overline{N}, p\right)$- toplanabilme kavramı verilmiş ve bu kavramın ağırlıklı istatistiksel yakınsaklıkla olan ilişkisi incelenmiştir. Ağırlıklı istatistiksel yakınsaklık ve $\left(\overline{N}, p\right)$- toplanabilme kavramı, sezgisel bulanık normlu lineer uzay yerine farklı özelliklere sahip normlu lineer uzaylarda tanımlanabilir ve bu kavramlar arasındaki ilişkiler araştırılabilir.

Bölüm 3'ün ikinci kısmında ağırlıklı λ- istatistiksel yakınsaklık ve $\left(\overline{N}_{\lambda}, p\right)$- toplanabilme kavramları verilmiş; sonrasında bu kavramlar arasındaki ilişkileri inceleyen teoremler ispatlanmıştır. $\lambda = (\lambda_n)$ dizisine benzer özelliklere sahip farklı bir dizi tanımı verilerek sezgisel bulanık normlu lineer uzaylarda ağırlıklı istatistiksel yakınsaklık ve $\left(\overline{N}, p\right)$- toplanabilme kavramları Bölüm 3'ün ikinci kısmındaki yöntemlere benzer olarak genelleştirilebilir.

Bölüm 3'ün son kısmında ise Başarır ve Konca [32] tarafından verilen yeni lacunary dizisinden faydalanarak sezgisel bulanık normlu lineer uzaylarda $\left(\overline{N}, p_r, \theta\right)$-

toplanabilme kavramı tanımlanmıştır. Ayrıca, sezgisel bulanık normlu lineer uzaylarda ağırlıklı lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramı verilerek bu kavramın sezgisel bulanık normlu lineer uzaylarda ağırlıklı istatistiksel yakınsaklık kavramı ile Mursaleen ve Mohiuddine [46] tarafından verilen sezgisel bulanık normlu lineer uzaylarda lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramı arasındaki ilişkiler bazı teoremler vasıtasıyla elde edilmiştir. Fridy ve Orhan [25] ve ve Başarır ve Konca [32] tarafından verilen lacunary dizilerine benzer olarak farklı lacunary dizileri tanımlanarak Bölüm 3'ün son kısmında yapıldığı gibi sezgisel bulanık normlu lineer uzaylarda çeşitli ağırlıklı istatistiksel yakınsaklık metodları ve çeşitli toplanabilme metodları tanımlanabilir.

Bölüm 4'de ise Kızmaz [64] tarafından verilen fark dizisi kullanılarak sezgisel bulanık n-normlu lineer uzaylarda lacunary Δ-istatistiksel yakınsak ve lacunary Δ-istatistiksel yakınsak Cauchy dizileri tanıtılmış ve bu kavramların birbirleriyle olan ilişkilerini veren teoremler ifade ve ispat edilmiştir. [71] ile verilen genelleştirilmiş fark matrisi tanımından faydalanılarak Bölüm 4'de elde edilen sonuçlar genelleştirilebilir.

Bu çalışmalara benzer bir yol izleyerek, sezgisel bulanık normlu lineer uzaylarda ağırlıklı istatistiksel yakınsaklık kavramının genelleştirilmişi olan sezgisel bulanık normlu lineer uzaylarda ağırlıklı I-yakınsaklık (ideal yakınsaklık) kavramı kullanılarak sezgisel bulanık normlu lineer uzaylarda daha genel sonuçlar elde edilebilir.

KAYNAKLAR

[1] Zadeh, L.A., Fuzzy Sets, Information and Control, 8, 338-353, 1965.

[2] Hong, L, Sun, J.Q., Bifurcations of fuzzy nonlinear dynamical systems, Commun. Nonlinear Sci., 11, 1-12, 2006.

[3] Barros, L.C., Bassanezi, R.C., Tonelli, P.A., Fuzzy modelling in population dynamics, Ecol. Model., 128, 27-33, 2000.

[4] Madore, J., Fuzzy physics, Ann. Phys., 219, 187-198, 1992.

[5] Erceg, M.A., Metric spaces in fuzzy set theory, J. Math. Anal. Appl., 69, 205-230, 1979.

[6] George, A., Veeramani, P., On some results in fuzzy metric space, Fuzzy Sets and Systems, 64, 395-399, 1994.

[7] Kaleva, O., Seikkala, S., On fuzzy metric spaces, Fuzzy Sets and Systems, 12, 215-229, 1984.

[8] Jäger, G., Fuzzy uniform convergence and equicontinuity, Fuzzy Sets and Systems, 109, 187-198, 2000.

[9] Wu, K., Convergences of fuzzy sets based on decomposition theory and fuzzy polynomial function, Fuzzy Sets and Systems, 109, 173-185, 2000.

[10] Anastassiou, G.A., Fuzzy approximation by fuzzy convolution type operators, Comput. Math. Appl., 48, 1369-1386, 2004.

[11] Atanassov, K., Intuitionistic fuzzy sets, Fuzzy Sets and Systems, 20, 87-96, 1986.

[12] Atanassov, K., Pasi, G., Yager, R., Intuitionistic fuzzy interpretations of multi-person multicriteria decision making, in: Proceedings of 2002 First International IEEE Symposium Intelligent Systems, 1, 115-119, 2002.

[13] El Naschie, M.S., On the unification of heterotic strings, m-theory and e^{∞}-theory, Chaos, Solitons & Fractals, 11, 2397-2408, 2000.

[14] Park, J.H., Intuitionistic fuzzy metric spaces, Chaos, Solitons & Fractals, 22, 1039-1046, 2004.

[15] Saadati, R., Park, J.H., On the intuitionistic fuzzy topological spaces, Chaos, Solitons & Fractals, 27, 331-344, 2006.

[16] Vijayabalaji, S., Thillaigovindan, N., Jun, Y.B., Intuitionistic fuzzy n-normed linear space, B. Korean Math. Soc., 44, 291-308, 2007.

[17] Steinhaus, H., Sur la convergence ordinaire et la convergence asymptotique, Colloq. Math., 2, 73-74, 1951.

[18] Fast, H., Sur la convergence statistique, Colloq. Math. 2, 241-244, 1951.

[19] Schoenberg, J., The integrability of certain functions and related summability methods, American Mathematical Monthly, 66, 361-375, 1959.

[20] Šalát, T., On statistical convergence of real numbers, Math. Slovaca, 30, 139-150, 1980.

[21] Connor, J.S., The statistical and strong p-Cesaro convergence of sequences, Analysis, 8, 47-63, 1988.

[22] Connor, J.S., Some Applications of Functional Analysis to Summability Theory, Ph.D. thesis, Kent State University, 1985.

[23] Fridy, J.A., On Statistical Convergence, Analysis, 5, 301-313, 1985.

[24] Fridy, J. A., Miller, H.I, A matrix characterization of statistical convergence, Analysis, 11, 59-66. 1991.

[25] Fridy, J.A., Orhan, C., Lacunary statistical convergence, Pac. J. Math., 160, 43-51, 1993.

[26] Mursaleen, M., Karakaya, V., Ertürk, M., Gürsoy, F., Weighted statistical convergence and its application to Korovkin type approximation theorem, Appl. Math. and Comput., 218, 9132-9137, 2012.

[27] Mursaleen, M., λ-statistical convergence, Math. Slovaca, 50, 111-115, 2000.

[28] Belen, C., Mohiuddine, S.A., Generalized weighted statistical convergence and application, Appl. Math. Comput., 219, 9821-9826, 2013.

[29] Bilgin, T., Lacunary strongly Δ-convergent sequences of fuzzy numbers, Inform. Sciences, 160, 201-206, 2004.

[30] Başarır, M., On the Δ-statistical convergence of sequences, Fırat Univ. Jour. of Sci., 2, 1-6, 1995.

[31] Karakaya, V., Chishti, T.A., Weighted statistical convergence, Iran. J. Sci. Technol.,Trans. A, 33(A3), 219-223, 2009.

[32] Başarır, M., Konca, Ş., On some spaces of lacunary convergent sequences derived by Nörlund-type mean and weighted lacunary statistical convergence, Arab J. Math. Sci., 20(2), 250-263, 2014.

[33] Karakuş, S., Statistical convergence on probabilistic normed spaces, Math. Commun., 12, 11-23, 2007.

[34] Mursaleen, M., On statistical convergence in random 2-normed spaces, Acta Sci. Math.(Szeged), 76, 101-109, 2010.

[35] Hazarika, B., Lacunary generalized difference statistical convergence in random 2-normed spaces, Proyecciones Journal of Mathematics, 31, 373-390, 2012.

[36] Altundağ, S., On generalized difference lacunary statistical convergence in a paranormed space, Journal of inequalities and applications, 2013(256), 1-7, 2013.

[37] Karakuş, S., Demirci, K., Duman, O., Statistical convergence on intuitionistic fuzzy normed spaces, Chaos, Solitons & Fractals, 35, 763-769, 2008.

[38] Sen, M., Debnath, P., Statistical convergence in intuitionistic fuzzy n- normed linear spaces, Fuzzy Information and Engineering, 3(3), 259–273, 2011.

[39] Savaş, E., Gürdal, M., Certain summability methods in intuitionistic fuzzy normed spaces, Journal of Intelligent & Fuzzy Systems, 27(4), 1621-1629, 2014.

[40] Savaş, E., λ-statistical convergence in intuitionistic fuzzy 2-normed space, Appl. Math. Inf. Sci., 9(1), 501-505, 2015.

[41] Savaş, E., On I_θ-statistical convergence of order α in intuitionistic fuzzy normed spaces, Proceedings of the Romanian Academy, 16, 121-129, 2015.

[42] Debnath, P., Lacunary ideal convergence in intuitionistic fuzzy normed linear spaces, Computes & Mathematics with Applications, 63(3), 708-715, 2012.

[43] Hazarika, B., Kumar, V., Guillén, B.L., Generalized ideal convergence in intuitionistic fuzzy normed linear spaces, Filomat 27(5), 811-820, 2013.

[44] Mursaleen, M., Mohiuddine, S.A., Statistical convergence of double sequences in intuitionistic fuzzy normed spaces, Chaos, Solitons & Fractals, 41(5), 2414-2421, 2009.

[45] Sen, M., Debnath, P., Lacunary statistical convergence in intuitionistic fuzzy n-normed spaces, Math. Comput. Model., 54, 2978-2985, 2011.

[46] Mursaleen, M., Mohiuddine, S.A., On lacunary statistical convergence with respect to the intuitionistic fuzzy normed space, J. Comput. Appl. Math. 233, 142-149, 2009.

[47] Thillaigovindan, N., Shanthı, S.A., Jun, Y.B., On lacunary statistical convergence in intuitionistic fuzzy n-normed spaces, Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics, 1(2), 119-131, 2011.

[48] Karakaya, V., Şimşek, N., Ertürk, Gürsoy, F., Statistical convergence of sequences of functions in intuitionistic fuzzy normed spaces, Abstract and Applied Analysis, 2012, 1-19, 2012.

[49] Karakaya, V., Şimşek, N., Ertürk, M., Gürsoy, F., Lacunary statistical convergence of sequences of functions in intuitionistic fuzzy normed space, Journal of Intelligent & Fuzzy Systems, 26, 1289-1299, 2013.

[50] Karakaya, V., Şimşek, N., Ertürk, M., Gürsoy, F., λ-statistical convergence of sequences of functions in intuitionistic fuzzy normed spaces, Journal of function spaces and applications 2012, 1-14, 2012.

[51] Altundağ, S., Kamber, E., Lacunary Δ-statistical convergence in intuitionistic fuzzy n-normed spaces, Journal of inequalities and applications, 2014(40), 1-12, 2014.

[52] Alghamdi, M.A., Alotaibi, A., Lohani, Q.M.D., Mursaleen, M., Statistical limit superior and limit inferior in intuitionistic fuzzy normed spaces, Journal of inequalities and applications, 2012(96), 1-12, 2012.

[53] Mohiuddine, S.A., Lohani, Q.M.D., On generalized statistical convergence in intuitionistic fuzzy normed space, Chaos, Solitons & Fractals, 42(3), 1731-1737, 2009.

[54] Kumar, V., Mursaleen, M., On (λ,μ)-statistical convergence of double sequences on intuitionistic fuzzy normed spaces, Filomat, 25, 109-120, 2011.

[55] Savaş, E., Gürdal, M., A generalized statistical convergence in intuitionistic fuzzy normed spaces, ScienceAsia, 41, 289-294, 2015.

[56] Maddox, I.J., Elements of Functional Analysis, Camb. Univ. Press, 1970.

[57] Mc Fadden, Absolute Nörlund summability, Duke Mathematical Journal, 9, 168-207, 1942.

[58] Petersen, G.M., Regular matrix transformations, Mc Graw Hill Publishing Company Limited, London -New York-Toronto, 1966.

[59] Das, G., Tauberian theorems for absolute Nörlund summability, Proceedings of the London Mathematical Society, 19(3), 357-394, 1969.

[60] Fekete, M., Zur theorie der divergenten reihen., Math. ès Termezs Èrtesitö (Budapest), 29, 719-726, 1960.

[61] Hardy, G. H., Divergent Series , Oxford University Press, Oxford, 1949.

[62] Sunouchi, G., Notes on Fourier analysis (XVIII): Absolute summability of series with constant terms, Tohoku. Math. Journ., 1(2), 57-65, 1949.

[63] Niven, I., Zuckerman, H.S., An Introduction to the Theory of Numbers, John Wiley, New York, 1980.

[64] Kızmaz, H., On certain sequence spaces, Can. Math. Bulletin, 24, 169-176, 1981.

[65] Güngör, M., Altın, Y., Et, M., On Δ-Lacunary Statistical Convergence, Fırat University Journal of Science, 14, 167-173, 2002.

[66] Schweizer, B., Sklar, A., Statistical metric spaces, Pacific Journal of Mathematics, 10, 313-334, 1960.

[67] Dinda, B., Samanta, T., Intuitionistic fuzzy continuity and uniform convergence, International Journal of Open Problems in Computer Science and Mathematics, 3, 8-26, 2010.

[68] Samanta, T.K., Jebril, Iqbal H., Finite Dimensional Intuitionistic Fuzzy Normed Linear Space, International Journal of Open Problems in Computer Science and Mathematics, 2, 1-16, 2012.

[69] Gunawan, H., Mashadi, M., On n-normed spaces, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 27 (10), 631-639, 2001.

[70] Vijayabalaji, S., Thillaigovindan, N., Jun, Y.B., Intuitionistic fuzzy n-normed linear space, Bulletin of the Korean Mathematical Society, 44(2), 291-308, 2007.

[71] Başar, F., Summability Theory and Its Applications, Bentham Science Publishers, İstanbul, 2011.

ÖZGEÇMİŞ

Esra Kamber, 11.09.1987'de İstanbul'da doğdu. İlk, orta ve lise eğitimini İstanbul'da tamamladı. 2005 yılında Semiha Şakir Lisesi (y.d.a.)'nden okul birincisi olarak mezun oldu. 2005 yılında başladığı Sakarya Üniversitesi Matematik Bölümü'nü 2009 yılında bölüm üçüncüsü olarak bitirdi. 2009 yılında Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda başladığı Yüksek Lisans eğitimini, 2011 yılında Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda tamamladı. Aynı yıl Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda Doktora eğitimine başladı.