T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATRİS DENKLEMLERİ İLE İLİŞKİLİ BAZI ÖZEL TİPLİ MATRİSLER İÇİN MATRİS YAKINLIK PROBLEMİ

DOKTORA TEZİ

Sinem ŞİMŞEK

Enstitü Anabilim Dalı	:	**MATEMATİK**
Enstitü Bilim Dalı	:	**UYGULAMALI MATEMATİK**
Tez Danışmanı	:	**Prof. Dr. Halim ÖZDEMİR**
Ortak Danışman	:	**Yrd. Doç. Dr. Murat SARDUVAN**

Ekim 2016

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATRİS DENKLEMLERİ İLE İLİŞKİLİ BAZI ÖZEL TİPLİ MATRİSLER İÇİN MATRİS YAKINLIK PROBLEMİ

DOKTORA TEZİ

Sinem ŞİMŞEK

Enstitü Anabilim Dalı	**:**	**MATEMATİK**
Enstitü Bilim Dalı	**:**	**UYGULAMALI MATEMATİK**

Bu tez 14/10/2016 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. **Refik KESKİN** **Jüri Başkanı**	**Prof. Dr.** **Halim ÖZDEMİR** **Üye**	**Prof. Dr.** **Ahmet Yaşar ÖZBAN** **Üye**
Prof. Dr. **Halis AYGÜN** **Üye**		**Doç. Dr.** **Nesrin GÜLER** **Üye**

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

Sinem ŞİMŞEK

08/11/2016

ÖNSÖZ

Doktora çalışmam boyunca bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım danışmanım sayın Prof. Dr. Halim ÖZDEMİR'e ve ortak danışmanım sayın Yrd. Doç. Dr. Murat SARDUVAN'a teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Hayatımın her aşamasında varlıklarından güç aldığım değerli aileme teşekkür ederim.

Bu çalışmayı maddi açıdan destekleyen Sakarya Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri (BAP) Komisyon Başkanlığına ayrıca teşekkürlerimi sunarım (FBEDTEZ 2013-50-02-012, SAUBAP 2014-02-00-001).

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Karmaşık sayılar kümesi
H	: Kuaterniyon sayılar kümesi
$\mathbb{R}_{m\times n}$	: $m\times n$ boyutlu reel matrisler kümesi
$\mathbb{C}_{m\times n}$	: $m\times n$ boyutlu karmaşık matrisler kümesi
$\mathrm{H}_{m\times n}$	: $m\times n$ boyutlu kuaterniyon matrisler kümesi
$\mathbb{R}^{SO}_{n\times n}$	: $n\times n$ boyutlu reel *genelleştirilmiş yansımalı* matrisler kümesi
$\mathbb{C}^{SO}_{n\times n}$	: $n\times n$ boyutlu *genelleştirilmiş yansımalı* matrisler kümesi
$\mathbb{R}^{S}_{n\times n}$	: $n\times n$ boyutlu reel *simetrik* matrisler kümesi
$\mathbb{R}^{SS}_{n\times n}$	: $n\times n$ boyutlu reel *ters-simetrik* matrisler kümesi
$\mathbb{R}^{PQS}_{n\times n}$	: $n\times n$ boyutlu reel (P,Q)*-ortogonal simetrik* matrisler kümesi
$\mathbb{R}^{PQSS}_{n\times n}$	: $n\times n$ boyutlu reel (P,Q)*-ortogonal ters-simetrik* matrisler kümesi
$\mathrm{H}^{CH}_{m\times n}$	: $m\times n$ boyutlu *kuaterniyon merkezi-hermityen* matrisler kümesi
$\mathrm{H}^{SCH}_{m\times n}$	: $m\times n$ boyutlu *kuaterniyon ters-merkezi-hermityen* matrisler kümesi
Φ	: $\mathbb{R}^{S}_{n\times n}$ yada $\mathbb{R}^{SS}_{n\times n}$ matris kümelerinden biri
Ψ	: $\mathbb{R}^{PQS}_{n\times n}$ yada $\mathbb{R}^{PQSS}_{n\times n}$ matris kümelerinden biri
Ω	: $\mathrm{H}^{CH}_{m\times n}$ yada $\mathrm{H}^{SCH}_{m\times n}$ matris kümelerinden biri
I_n	: $n\times n$ boyutlu birim matris
$0_{m,n}$	: $m\times n$ boyutlu sıfır matris
$\lVert A\rVert$	: Bir A matrisinin Frobenius normu
A^T	: Bir A matrisinin devriği

$\overline{A}$: Bir A matrisinin eşleniği

A^* : Bir A matrisinin eşlenik devriği

A^+ : Bir A matrisinin Moore-Penrose tersi

$iz(A)$: Bir A kare matrisinin izi

$\det(A)$: Bir A kare matrisinin determinantı

$A \otimes B$: A ve B matrislerinin Kronecker çarpımı

$vec(\cdot)$: vec operatörü

$\cdot$: Tam değer fonksiyonu

$\Leftrightarrow$: Gerek ve yeter koşul

SVD : Singüler değer ayrışımı

GSVD : Genelleştirilmiş singüler değer ayrışımı

CCD : Kanonik korelasyon ayrışımı

□ : İspat sonu

TABLOLAR LİSTESİ

ÖZET

Anahtar Kelimeler: minimum kalan problemi, matris yakınlık problemi, en iyi yaklaşık çözüm, Moore-Penrose ters.

İlk bölümde lineer matris denklem problemleri ile ilgili literatür bilgisine yer verilmiş ve çalışmanın içeriğini oluşturan problemler tanıtılmıştır.

İkinci bölümde çalışmada kullanılan bazı tanımlar ve temel teoremlerden bahsedilmiştir.

Üçüncü bölümün ilk kısmında $\left(A_1XB_1, A_2XB_2, \ldots, A_kXB_k\right) = \left(C_1, C_2, \ldots, C_k\right)$ matris denkleminin *simetrik* ve *ters-simetrik* matrisler için genel çözümlerinin kümesi ve en küçük kareler çözümlerinin kümesi, Moore-Penrose ters ve Kronecker çarpım kullanılarak incelenmiştir. Bu matris denkleminin en iyi yaklaşık *simetrik* çözümü ve en iyi yaklaşık *ters-simetrik* çözümü ortaya konulmuştur. İkinci kısmında $AXB = C$ matris denkleminin $\left(P, Q\right)$*-ortogonal simetrik* ve $\left(P, Q\right)$*-ortogonal ters-simetrik* matrisler için genel çözümlerinin kümesi ve en küçük kareler çözümlerinin kümesi Moore-Penrose ters ve spektral ayrışım kullanılarak incelenmiştir. Daha sonra, en iyi yaklaşık $\left(P, Q\right)$*-ortogonal simetrik* çözümü ve $\left(P, Q\right)$*-ortogonal ters-simetrik* çözümü elde edilmiştir. Son olarak, her iki kısmın sonunda ele alınan problemlerin çözümünü elde etmek için kullanılan bir algoritma, iki örnek ve literatürden seçilmiş örnekler için karşılaştırmalı bir tablo verilmiştir.

Dördüncü bölümde $\left(AXB, CXD\right) = \left(E, F\right)$ kuaterniyon matris denkleminin *merkezi-hermityen* ve *ters-merkezi-hermityen* matrisler üzerinde minimum kalan problemi Moore-Penrose ters, Kronecker çarpım ve *vec* operatörü kullanılarak incelenmiştir. Daha sonra ise $\left(AXB, CXD\right) = \left(E, F\right)$ kuaterniyon matris denkleminin en iyi yaklaşık *merkezi-hermityen* çözümü ve *ters-merkezi-hermityen* çözümü verilmiştir. Son olarak, bölüm sonunda ele alınan problemlerin çözümünü elde etmek için kullanılan bir algoritma ve iki sayısal örnek verilmiştir.

Son bölüm ise sonuçların kısa bir tartışmasına ayrılmıştır.

THE MATRIX NEARNESS PROBLEM FOR SOME SPECIAL TYPE OF MATRICES ASSOCIATED WITH MATRIX EQUATIONS

SUMMARY

Keywords: minimum residual problem, matrix nearness problem, the best approximate solution, Moore-Penrose inverse.

In the first section, literature review related to the lineer matrix equation problems is provided and the problems that constitute the content of the study are introduced.

In the second section, some definitions and fundamental theorems used within the study are mentioned.

In the first part of the third section, the sets of general solutions and least squares solutions of the matrix equation $\left(A_1XB_1, A_2XB_2, \ldots, A_kXB_k\right) = \left(C_1, C_2, \ldots, C_k\right)$ for *symmetric* and *skew-symmetric* matrices are examined by using Moore-Penrose inverse and Kronecker product. The best approximate *symmetric* solution and *skew-symmetric* solution of this matrix equation are established. In the second part, the sets of general solutions and least squares solutions of the matrix equation $AXB = C$ for (P,Q)*-orthogonal symmetric* and (P,Q)*-orthogonal skew-symmetric* matrices are examined by using Moore-Penrose inverse and spectral decomposition. Then, the best approximate (P,Q)*-orthogonal symmetric* solution and (P,Q)*-orthogonal skew-symmetric* solution of this matrix equation are obtained. Finally, an algorithm to get the solutions of the considered problems, two numerical examples and a comparative table for the numerical examples taken from the literature are given at the end of the both parts.

In the fourth section, the minimum residual problem of the quaternion matrix equation $(AXB, CXD) = (E, F)$ is examined for *centrohermitian* and *skew-centrohermitian* matrices by using Moore-Penrose inverse, Kronecker product and vec operator. Then, the best approximate *centrohermitian* solution and *skew-centrohermitian* solution of this matrix equation are given. Finally, an algorithm to get the solutions of the considered problems and two numerical examples are given at the end of the section.

The last section is devoted to a brief discussion of the results.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Yaşamın gereklerinden biri de dünyanın işleyişini matematiksel kurallar ile ifade edebilmektir. Matris denklemleri ise bu işi yapmak için gerekli matematiksel araçlardan bir tanesidir. Ekonomiden istatistiğe, mühendislikten fiziğe birçok problem matris denklemleri ile ifade edilebilir. Bu problemlerin bir kısmı lineer matris denklemleri, bir kısmı ise lineer olmayan matris denklemleri ile ifade edilebilir.

Gündelik hayatta karşımıza çıkan birçok problem ile ilgili çözüme yönelik bir lineer model tasarlamak mümkündür. Genel olarak bir lineer model

$$y = X\beta + \varepsilon \tag{1.1}$$

biçiminde tanımlanır. Burada y gözlenebilir rastgele değişkenler vektörü, X bilinenler matrisi, β bilinmeyen parametrelerin vektörü ve ε ise gözlenebilir olmayan hataların bir vektörüdür. (1.1) lineer modeli aslında $Ax = g$ lineer denklemler sisteminden başka birşey değildir. Genel biçimde ele alınırsa (1.1) denklemi,

$$AX = B \tag{1.2}$$

lineer matris denklemidir.

Lineer denklemler sistemi, yani lineer matris denklemi birçok bilim alanında yoğun olarak kullanılmaktadır. Örneğin, istatistikçilerin büyük verilerin analizi için kullandıkları singüler değer ayrışımı (SVD), temel bileşen analizi, bağımsız bileşen analizi gibi yöntemler lineer matris denklemleri içerir. Benzer şekilde diferansiyel denklemler ile ifade edilen fizik problemlerinin çözümünde kullanılan yöntemler ve sayısal simülasyon yöntemleri lineer matris denklemi içerir. Yine süper bilgisayarların çoğunun tüm gün boyunca yaptığı iş lineer matris denklemi çözmekten başka bir şey değildir.

Lineer matris denklemleri geniş kullanım alanına sahip olduğundan, bu matris denklemlerinin çözümünü bulma problemi de bilim dünyasında önem arz etmektedir. Bir lineer matris denkleminin çözümünü bulmada kullanılan yöntemler, iteratif yöntemler veya doğrudan yöntemler olmak üzere iki ana başlıkta toplanabilir.

A, B, C uygun boyutlu bilinen matrisler ve X bilinmeyenler matrisi olmak üzere,

$$AXB = C \tag{1.3}$$

matris denklemi göz önüne alınsın. (1.3) matris denkleminin genel çözümünü ve özel tipli çözümlerini bulma problemlerini bir çok yazar matris ayrışımları, genelleştirilmiş ters, iteratif metotlar gibi farklı yöntemler kullanarak ele almıştır [1-11]. Lineer kısıtlamalı tüm matrislerin kümesini α ile gösterelim.

Problem 1.1. $A \in \mathbb{R}_{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}_{n\times p}$ ve $C \in \mathbb{R}_{m\times p}$ verilen matrisler olmak üzere

$$\left\| AXB - C \right\| = \min_{X \in \alpha} \| AXB - C \|$$

olacak şekilde $X \in \alpha$ matrisini bulmak ve

Problem 1.2. S_{E_X}, Problem 1.1'in çözümlerinin kümesi olmak üzere, verilen bir $X_0 \in \mathbb{R}_{n\times n}$ matrisi için

$$\left\| X - X_0 \right\| = \min_{X \in S_{E_X}} \| X - X_0 \|$$

olacak şekilde $X \in S_{E_X}$ matrisini bulmak,

problemleri ele alınsın. Literatürde Problem 1.1, *minimum kalan problemi* ve Problem 1.2, *matris yakınlık problemi* olarak isimlendirilir. Bu problemleri ele alan birçok çalışma vardır. Örneğin, (1.3) matris denkleminin *yansımalı* ve *anti-yansımalı* matrisler için çözülebilir olmasının gerek ve yeter koşulunu ve Problem 1.1'deki çözüm matrisinin, *yansımalı* ve *anti-yansımalı* olduğu durumda Problem 1.2'nin optimum çözümlerinin kapalı ifadesini Peng ortaya koymuştur [12]. Buna ilaveten Peng, (1.3) matris denkleminin *simetrik* çözümünü bulmak için bir iteratif yöntem ortaya koymuş ve bu yöntem ile (1.3) matris denkleminin *simetrik* X matrisi için çözünebilirliğini belirlemiş ve Problem 1.1'deki çözüm matrisinin *simetrik* olması koşulu altında, Problem 1.2'nin optimum çözümünü elde etmiştir [13].

(1.3) matris denklemindeki A, B ve C matrisleri pratikte deneylerden elde edildiğinden dolayı, (1.3) denklemi nadiren tutarlıdır. Tutarsız olduğu durumlarda ise çözüm bulmak için genellikle iteratif yöntemler kullanılır. Örneğin, Qui ve diğerleri (1.3) matris denkleminin tutarsız olması durumunda *simetrik*, *ters-simetrik*, *simetrik* P *değişmeli*, *ters-simetrik* P *değişmeli* matrisler üzerinde (1.3) matris denkleminin en küçük kareler problemi için iteratif yöntem ortaya koymuştur [14]. Liao ve Lei Problem 1.1'deki çözüm matrisinin *simetrik* olması durumunda genelleştirilmiş singüler değer ayrışımı (GSVD) ve kanonik korelasyon ayrışımı (CCD) kullanarak Problem 1.2'nin açık çözümünü elde etmiştir [15]. Benzer şekilde Huang ve diğerleri, Problem 1.2'nin *simetrik* veya *ters-simetrik* çözümlerini GSVD kullanarak ortaya koymuştur [16]. Lei ve Liao ise benzer problemlerin çözümü için bir algoritma sunmuşlardır [17]. Zhao ve diğerleri ise (1.3) matris denkleminin tutarsız olduğu durumda Problem 1.2'nin (P,Q)*-ortogonal simetrik* ve (P,Q)*-ortogonal ters-simetrik* çözümlerini GSVD ve CCD kullanarak ele almıştır [18]. Birden fazla matris denkleminin birlikte ele alınması, örneğin iki matris denkleminin birlikte ele alınması durumunda minimum kalan problemi ve matris yakınlık problemi sırasıyla aşağıdaki gibi olur.

Problem 1.3. $i=1,2,$ olmak üzere $A_i \in \mathbb{R}^{m_i \times n}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n \times p_i}$, $C_i \in \mathbb{R}^{m_i \times p_i}$ matrisleri verilsin. $\|\cdot\|_H$ normu Bölüm 3'te tanımlandığı gibi olmak üzere,

$$\left\| \left[A_1 X B_1 - C_1, A_2 X B_2 - C_2 \right] \right\|_H = \min_{X \in \alpha} \left\| \left[A_1 X B_1 - C_1, A_2 X B_2 - C_2 \right] \right\|_H$$

olacak şekildeki $X \in \alpha$ matrisini bulmak.

Problem 1.4. S_{E_X}, Problem 1.3'ün çözüm kümesi olmak üzere, verilen bir $X_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrisi için

$$\left\| X - X_0 \right\| = \min_{X \in S_{E_X}} \left\| X - X_0 \right\|$$

olacak şekilde $X \in S_{E_X}$ bulmak.

Bu tür problemler uzun yıllardır çalışılmaktadır. Örneğin, Problem 1.3'ün çözümünün olabilmesinin koşulları ve çözümün genel ifadesi [19] ve [20] çalışmalarında ortaya koyulmuştur. Buna ilaveten Özgüler, Van Der Woude ve Liu Problem 1.3'ün çözümünün olabilmesi için gerek ve yeter koşulları türetmişlerdir [21-23]. Problem 1.3'ün (R,S) *simetrik* ve (R,S)-*ters-simetrik* çözümlerinin varlığı için koşullar Dehghan ve Hajarian tarafından elde edilmiştir [24]. Ding ve diğerleri, Problem 1.3'deki matris denklemlerinin tutarsız olması durumunda çözüm için iteratif bir yöntem ortaya koymuşlardır [25].

Problem 1.3'ün çözümüne ilişkin çalışmalara ilaveten, matris denklem ikilisinin matris yakınlık problemini de ele alan çalışmalar vardır. Örneğin, Problem 1.3'deki matris denklemlerinin tutarlı olması durumda çözüm matrisi üzerine konulan koşullar (*simetrik, yansımalı, bisimetrik, genelleştirilmiş merkezi simetrik* matrisler) ile birlikte Problem 1.4'ün çözümü için iteratif algoritmalar sunulmuştur [26-30]. Problem 1.3'deki matris denklemlerinin tutarsız olması durumunda, *bisimetrik* çözümler ve *simetrik* çözümler için iteratif algoritmalar [31] ve [32] çalışmalarında verilmiştir.

Yukarıda bahsedilen problemlerdeki matrislerin *kuaterniyon matrisler* olma durumunda ise, kuaterniyon matris denklemlerinden söz edilir. Kuaterniyon matris denklemleri kuantum mekaniği, sinyal ve görüntü işleme gibi birçok alanda yaygın olarak kullanılmaktadır [33-34]. Kuaterniyon matris denklemleri ile ilgili çok sayıda çalışma mevcuttur [35-50]. Örneğin, [39] ve [40] çalışmalarında, $AXB-CYD=E$ kuaterniyon matris denkleminin genel çözümü, kuaterniyon matrisler için GSVD ayrışımı ve kuaterniyon matrislerin reel gösterimleri kullanılarak ele alınmıştır. $(AXB,CXD)=(E,F)$ kuaterniyon matris denkleminin η*-bi-hermityen* en küçük kareler çözümleri ve $AXB+CYD=E$ kuaterniyon matris denkleminin lineer kısıtlamalı matrisler için en küçük kareler çözümleri Yuan ve diğerleri tarafından çalışılmıştır [49-50]. Wang, bazı matris denklemlerinin *bisimetrik, merkezi simetrik* çözümlerini ve reel kuaterniyon yarı cismi üzerinde $A_1X=C_1$, $A_2X=C_2$, $A_3X=C_3$, $A_4X=C_4$ matris denklemler sisteminin genel çözümünü ve ortaya koymuştur [37-38].

Bu çalışmada, (1.3) biçimindeki lineer matris denklemleri için minimum kalan problemi ve matris yakınlık problemi ele alınmaktadır. Üçüncü bölümün ilk kısmında, $(A_1XB_1, A_2XB_2, \ldots, A_kXB_k)=(C_1, C_2, \ldots, C_k)$ reel matris denkleminin en iyi yaklaşık *simetrik* ve *ters-simetrik* çözümleri, Moore Penrose ters kullanılarak elde edilmiştir. İkinci kısmında ise $AXB=C$ reel matris denkleminin en iyi yaklaşık (P,Q)*-ortogonal simetrik* ve (P,Q)*-ortogonal ters-simetrik* çözümleri, Moore Penrose ters ve spektral ayrışım kullanılarak ortaya koyulmuştur. Dördüncü bölümde, $(AXB,CXD)=(E,F)$ kuaterniyon matris denkleminin en iyi yaklaşık *merkezi-hermityen* ve *ters-merkezi-hermityen* çözümleri, Moore Penrose ters yardımıyla verilmiştir. Lineer olmayan matris denklemlerinin de lineerleştirilerek sayısal olarak çözülebileceği göz önüne alındığında, bu çalışmanın literatürde mevcut birçok problemin çözümü için yararlı olacağı düşünülmektedir.

BÖLÜM 2. TANIMLAR VE TEMEL TEOREMLER

Bu bölümde, sonraki bölümlere hazırlık niteliğinde olan, bazı tanımlar ve teoremler verilecektir.

2.1. Temel Kavramlar

Tanım 2.1. a_{ij}, $i=1,2,\ldots,m$, $j=1,2,\ldots,n$, sayılarının m satır ve n sütun şeklindeki dikdörtgensel bir dizisine $m\times n$ boyutlu bir matris denir. Böyle bir matris $A=\left[a_{ij}\right]$ ile gösterilir [51].

a_{ij}, $i=1,2,\ldots,m$, $j=1,2,\ldots,n$, sayılarına A matrisinin elemanları denir. Bir A matrisi, elemanlarının ait oldukları cisme göre isimlendirilir. Örneğin, bir A matrisi, elemanları reel sayılar ise reel matris, elemanları karmaşık sayılar ise karmaşık matris, elemanları kuaterniyon sayılar ise kuaterniyon matris olarak adlandırılır [52]. İki matrisin toplamı, bir matrisin bir skaler ile çarpımı gibi temel cebirsel özelliklere burada değinilmeyecektir.

Tanım 2.2. $A=\left[a_{ij}\right]\in\mathbb{C}_{m\times n}$ olsun. A matrisinin devriği $ij.$ elemanı a_{ji} olan $n\times m$ matristir ve A^T ile gösterilir [53].

Tanım 2.3. $A=\left[a_{ij}\right]\in\mathbb{C}_{m\times n}$ olsun. $z=a+bi$ karmaşık sayısının eşleniği $\bar{z}=a-bi$ olmak üzere, A matrisinin eşleniği $\bar{A}$ ile gösterilir ve $\bar{A}=\left[\overline{a_{ij}}\right]$ olarak tanımlanır. Benzer şekilde, A matrisinin eşlenik devriği A^* ile gösterilir ve $A^*=\bar{A}^T=\overline{A^T}$ olarak tanımlanır [53].

Tanım 2.4. Bir A kare matrisi için,

i. $A^* = A$ ($A^T = A$) ise A matrisine *hermityen* (*simetrik*) matris,

ii. $A^* = -A$ ($A^T = -A$) ise A matrisine *ters-hermityen* (*ters-simetrik*) matris,

iii. $A^* A = I$ ($A^T A = I$) ise A matrisine *üniter* (*ortogonal*) matris,

iv. $A^* A = AA^*$ ise A matrisine *normal* matris denir [53].

Tanım 2.5. $P \in \mathbb{C}_{n\times n}$ olmak üzere, $P^* = P$ ve $P^2 = I$ ise P matrisine *genelleştirilmiş yansımalı* matris denir ve tüm $n\times n$ genelleştirilmiş yansımalı matrislerin kümesi $\mathbb{C}^{SO}_{n\times n}$ ile gösterilir [12].

$P \in \mathbb{R}_{n\times n}$ olması durumunda ise tüm $n\times n$ reel genelleştirilmiş yansımalı matrislerin kümesi $\mathbb{R}^{SO}_{n\times n}$ ile gösterilecektir.

Tanım 2.6. $P, Q \in \mathbb{R}^{SO}_{n\times n}$ olsun. Eğer

$$\left(PXQ\right)^T = PXQ$$

ise X matrisine (P,Q)-*ortogonal simetrik* matris denir. (P,Q)-*ortogonal simetrik* matrislerin kümesi $\mathbb{R}^{PQS}_{n\times n}$ ile gösterilir [18]. Benzer şekilde,

$$\left(PXQ\right)^T = -PXQ$$

ise X matrisine (P,Q)-*ortogonal ters-simetrik* matris denir ve (P,Q)-*ortogonal ters-simetrik* matrislerin kümesi $\mathbb{R}^{PQSS}_{n\times n}$ ile gösterilir.

Tanım 2.7. $A = \left[a_{ij} \right] \in \square_{n \times n}$ olsun. $iz\left(A\right)$ ile gösterilen A matrisinin izi

$$iz\left(A\right) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$$

şeklinde tanımlanır [52].

$A \in \square_{m \times n}$ ve $B \in \square_{n \times m}$ olmak üzere

$$iz\left(AB\right) = iz\left(B^T A^T\right) = iz\left(BA\right) = iz\left(A^T B^T\right) = iz\left(AB^T\right) = iz\left(A^T B\right) \qquad (2.1)$$

eşitlikleri vardır [54].

Tanım 2.8. A matrisi sütunları $a_i \in \square_{m \times 1}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, olan $m \times n$ boyutlu bir matris olsun. $mn \times 1$ boyutlu $vec\left(A\right)$ vektörü,

$$vec\left(A\right) = \left[a_1^T \quad \ldots \quad a_n^T \right]^T$$

olarak tanımlanır [55]. Dikkat edilirse $vec\left(A\right)$, A matrisinin sütunlarının sırasıyla alt alta yazılması ile elde edilen vektördür.

Tanım 2.9. V, F $\left(\square \text{ veya } \square\right)$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Her $x, y, z \in V$ ve her $c \in$ F için, $\left\langle \cdot, \cdot \right\rangle : V \times V \to$ F fonksiyonu,

i. $\left\langle x, x \right\rangle \geq 0$ ve $\left\langle x, x \right\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

ii. $\left\langle x + y, z \right\rangle = \left\langle x, z \right\rangle + \left\langle y, z \right\rangle$

iii. $\left\langle cx, y \right\rangle = c\left\langle x, y \right\rangle$

iv. $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$

aksiyomlarını sağlıyor ise bir iç çarpımdır [53].

Tanım 2.10. V, F $(\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C})$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Her $x, y \in V$ ve her $c \in \mathrm{F}$ için, $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ fonksiyonu,

i. $\|x\| \geq 0$

ii. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

iii. $\|cx\| = |c|\|x\|$

iv. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

aksiyomlarını sağlıyor ise bir normdur [53].

Tanım 2.11. $\mathbb{C}_{m\times n}$ vektör uzayında $\langle A, B\rangle = iz(B^{*}A)$ fonksiyonu bir iç çarpımdır. Bu iç çarpım ile üretilen norma Frobenius norm denir ve $\|\cdot\|_2$ ile gösterilir [53]. Çalışmada, kısalık olması açısından, Frobenius norm $\|\cdot\|$ sembolü ile gösterilecektir.

2.2. Moore-Penrose Ters

Öncelikle, geleneksel anlamda, bir matrisin tersi tanımını verelim.

Tanım 2.12. $A \in C_{n\times n}$ olsun. $AB = BA = I_n$ olacak şekilde B matrisi varsa, B matrisine A matrisinin tersi denir ve A^{-1} ile gösterilir. Ayrıca A matrisine de tersinir matris denir [53].

Teorem 2.1. Eğer bir matrisin tersi varsa tektir [56].

Şimdi, 1920'de Moore tarafından karakterize edilen ve 1955 yılında Penrose tarafından, varlığı ve tekliği ispat edilen genelleştirilmiş ters matris kavramını yani, Moore-Penrose ters tanımını verelim.

Tanım 2.13. $A \in \mathbb{C}_{m\times n}$ ve $G \in \mathbb{C}_{n\times m}$ matris olmak üzere, eğer

i. $AGA = A$

ii. $GAG = G$

iii. $(GA)^* = GA$

iv. $(AG)^* = AG$

ise G matrisine A matrisinin Moore-Penrose tersi denir ve A^+ ile gösterilir [57].

Teorem 2.2. Her matrisin bir Moore-Penrose tersi vardır ve tektir [56].

Teorem 2.3. Herhangi bir A matrisinin Moore-Penrose tersi A^+ olmak üzere;

1. tersinir bir A matrisi için $A^+ = A^{-1}$,

2. $A = 0_{m\times n}$ ise $A^+ = 0_{n\times m}$,

3. $\left(A^+\right)^+ = A$,

4. $\left(A^T\right)^+ = \left(A^+\right)^T$,

5. $\left(AA^T\right)^+ = \left(A^T\right)^+ A^+$ ve $\left(A^T A\right)^+ = A^+\left(A^T\right)^+$,

6. $\left(AA^+\right)^+ = AA^+$ ve $\left(A^+ A\right)^+ = A^+ A$,

7. $A_{m\times n}$ matrisinin Moore-Penrose tersi $A^+_{n\times m}$ olur,

8. $P_{m\times m}$, $Q_{n\times n}$ ortogonal matrisler ve $A_{m\times n}$ keyfi bir matris olsun. Bu durumda, $\left(PAQ\right)^+ = Q^+ A^+ P^+$ şeklindedir [56].

Tanım 2.14. Bir A matrisi satır veya sütunları arasına yatay veya dikey çizgiler çizilerek alt matrislere parçalanabilir. Bu durumda, matrise parçalanmış matris (blok matris) denir ve alt matrislere de bloklar denir [55].

Tanım 2.15. $A_{m_1\times n_1}$ ve $B_{m_2\times n_2}$ keyfi iki matris olsun. Bu durumda A ve B matrislerinin Kronecker çarpımı $A\otimes B$ olarak gösterilen C matrisidir ve

$$C = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n_1}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n_1}B \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m_1 1}B & a_{m_1 2}B & \cdots & a_{m_1 n_1}B \end{pmatrix}$$

olarak tanımlanır. C matrisi $C = \left(a_{ij}B\right)$, $i = 1,2,\ldots,m_1$, $j = 1,2,\ldots,n_1$ şeklinde de yazılabilir [54].

Teorem 2.4. A, B, C ve D uygun boyutlu karmaşık matrisleri için, aşağıdaki özellikler vardır.

1. $A\otimes B\otimes C = \left(A\otimes B\right)\otimes C = A\otimes\left(B\otimes C\right)$,

2. $(A+B)\otimes(C+D)=A\otimes C+A\otimes D+B\otimes C+B\otimes D,$

3. $(A\otimes B)(C\otimes D)=AC\otimes BD,$

4. $(A\otimes B)^{+}=A^{+}\otimes B^{+},$

5. $vec(ABC)=\left(C^{T}\otimes A\right)vec(B)$ [56].

2.3. Bir Matrisin Özdeğeri, Özvektörü ve Spektral Ayrışımı

Tanım 2.16. $A\in\mathbb{C}_{n\times n}$ olmak üzere $Ax=\lambda x$ denklemini sağlayan sıfırdan farklı bir x vektörü varsa λ skalerine A matrisinin bir özdeğeri ve x vektörüne de λ özdeğeri ile ilişkili bir özvektör denir [53].

Tanım 2.17. $A\in\mathbb{C}_{n\times n}$ bir matris olsun. Eğer $\mathbb{C}_{n\times 1}$’deki sıfır olmayan her x vektörü için $x^{*}Ax\geq 0$ eşitsizliği sağlanıyorsa, A matrisine pozitif yarı kararlı matris denir. Pozitif yarı kararlı matrislerin hiçbir özdeğeri negatif değildir [53].

Tanım 2.18. $D=[d_{ij}]\in\mathbb{C}_{n\times n}$ matrisi, $i\neq j$ için $d_{ij}=0$ koşulunu sağlıyorsa D matrisine köşegen matris denir ve $diag(d_1,d_2,\ldots,d_n)$ ile gösterilir [53].

Tanım 2.19. D köşegen bir matris olsun. $D=S^{-1}AS$ olacak şekilde tersinir bir S kare matrisi bulunabiliyorsa $A\in\mathbb{C}_{n\times n}$ matrisine köşegenleştirilebilir matris denir [53].

Bir matrisin köşegenleştirilebilir olması ile ilgili birçok denk ifade verilebilir. Bu denk ifadelerden bir tanesi aşağıdaki gibidir.

Teorem 2.5. Bir $A \in \mathbb{R}_{n\times n}$ matrisinin köşegenleştirilebilir olması için gerek ve yeter koşul A matrisinin n tane lineer bağımsız özvektöre sahip olmasıdır [53].

Teorem 2.6. $A \in \mathbb{R}_{n\times n}$ simetrik bir matris olsun. Bu durumda, $D = P^T AP$ olacak şekilde P ortogonal matrisi vardır. Burada, D matrisi, A'nın özdeğerlerinden oluşan köşegen matris ve P matrisi de, bu özdeğerlere karşılık gelen lineer bağımsız özvektörlerden oluşan ortogonal bir matristir [55].

Tanım 2.20. $A \in \mathbb{R}_{n\times n}$ simetrik ve pozitif yarı kararlı matris olsun. D köşegen elemanları A matrisinin pozitif özdeğerleri olan köşegen matris ve V bu özdeğerlere karşılık gelen n tane lineer bağımsız özvektörden oluşan ortogonal matris olmak üzere, A matrisinin spektral ayrışımı,

$$A = V\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}V^T \tag{2.2}$$

şeklinde ifade edilir.

Gerçekten pozitif yarı kararlı A matrisinin hiçbir özdeğeri negatif değildir ve bu özdeğerlerden pozitif olanlar D köşegen matrisini oluşturur. Yine $A_{n\times n}$ simetrik matrisinin n tane lineer bağımsız özvektörü vardır ve bu özvektörler ortogonaldir. Bu durumda $V_{n\times n}$ ortogonal bir matristir.

A matrisi r ranklı bir matris olsun. V matrisinin ilk r sütunu V_1 sonraki $n-r$ sütunu V_2 matrisi olmak üzere $V = (V_1, V_2)$ olarak yazılsın. Bu durumda (2.2) eşitliği, $\Sigma = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ olmak üzere

$$A = (V_1, V_2)\,\Sigma (V_1, V_2)^T \tag{2.3}$$

olarak yazılabilir [55].

Teorem 2.7. A matrisinin spektral ayrışımı olan (2.2) eşitliğindeki D matrisinin köşegen elemanları $s_1, s_2, \ldots, s_r$ olsun. Bu durumda, $E = diag\left(\frac{1}{s_1}, \ \frac{1}{s_2}, \ \cdots \ , \frac{1}{s_r}\right)$ olmak üzere A matrisinin Moore-Penrose tersi,

$$A^{+} = V\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}V^{T}$$

biçiminde ifade edilebilir [55].

2.4. Lineer Denklemler Sistemi

İstatistikte ve diğer birçok bilim dalında, bir problemin çözümü lineer denklemler sisteminin çözümüne indirgenebilir. Örneğin, bir lineer istatistik modelindeki parametrelerin en küçük kareler tahminlerini bulma problemi, normal denklemleri denen lineer denklemler sisteminin çözümlerini bulma problemine indirgenebilir. Bu kısımda lineer denklemler sisteminden, lineer denklemler sisteminin çözümlerinin varlığından, çözümü var ise çözümlerinin genel ifadesinden, çözümü yok ise en küçük kareler çözümlerinin ifadesinden ve en iyi yaklaşık çözümünden bahsedilecektir.

Tanım 2.21. $x_j, \ \ j = 1, 2, \ldots, n,$ bilinmeyenler olmak üzere, n tane bilinmeyen ve m tane denklemden oluşan

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= g_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n &= g_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n &= g_m \end{aligned} \tag{2.4}$$

ifadesine lineer denklemler sistemi denir. Burada a_{ij}, $i=1,2,\ldots,m$, $j=1,2,\ldots,n$, sayılarına (2.4) lineer denklemler sisteminin katsayıları ve g_i, $i=1,2,\ldots,m$, sayılarına da sistemin sabitleri denir. (2.4) lineer denklemler sistemi,

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad g=\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_m \end{pmatrix}$$

olmak üzere, $Ax=g$ şeklinde ifade edilebilir. Buradaki $A\in\mathbb{R}_{mxn}$ matrisine sistemin katsayılar matrisi ve $[A\,|\,g]$ blok matrisine sistemin artırılmış (ekli) matrisi denir. Ayrıca $m=n$ olması durumunda $Ax=g$ lineer denklemler sistemine kare sistem, $g=0$ özel durumunda da homojen sistem denir [51].

A, B, C uygun boyutlu bilinen matrisler ve X uygun boyutlu bilinmeyenler matrisi olmak üzere, $AXB=C$ şeklindeki bir denkleme genel olarak bir lineer matris denklemi denir. Lineer matris denklemleri, lineer denklemler sisteminin bir genelleştirilmiş hali olarak ele alınabilir. Çünkü $AXB=C$ lineer matris denklemi Kronecker çarpım yardımıyla $\left(B^T\otimes A\right)vec\left(X\right)=vec\left(C\right)$ şeklinde de yazılabilir.

Bir matris denklemi veya bir lineer denklemler sistemi en az bir çözüme sahip ise tutarlı, aksi halde tutarsız olarak adlandırılır. Şimdi bir lineer denklemler sistemin tutarlı olup olmadığını karakterize eden teoremi verelim.

Teorem 2.8. $A\in\mathbb{R}_{m\times n}$ bilinenler matrisi, $x\in\mathbb{R}_{n\times 1}$ bilinmeyenler vektörü ve $g\in\mathbb{R}_{m\times 1}$ bilinenler vektörü olmak üzere $Ax=g$ lineer denklemler sisteminin tutarlı olması için gerek ve yeter koşul $AA^{+}g=g$ olmasıdır.

İspat. $Ax = g$ sistemi tutarlı olsun. O halde $Ax_1 = g$ olacak şekilde en az bir x_1 vektörü vardır. $Ax_1 = g$ lineer denklemler sistemi soldan AA^+ ile çarpılırsa $g = AA^+g$ olduğu görülür. Tersine $AA^+g = g$ olduğunu kabul edelim. $x = A^+g$ olsun. $Ax = g$ sisteminde x yerine A^+g konulursa $AA^+g = g$ eşitliği sağlanır yani $x = A^+g$ bir çözümdür. $\square$

Teorem 2.9. $A \in \mathbb{R}_{m\times n}$ bilinenler matrisi, $x \in \mathbb{R}_{n\times 1}$ bilinmeyenler vektörü ve $g \in \mathbb{R}_{m\times 1}$ bilinenler vektörü olmak üzere $Ax = g$ tutarlı lineer denklemler sistemi göz önüne alınsın. Bu durumda, her $h \in \mathbb{R}_{n\times 1}$ vektörü için,

$$x = A^+g + (I - A^+A)h \tag{2.5}$$

şeklinde yazılan x vektörü $Ax = g$ lineer denklemler sistemi için bir çözümdür. Ayrıca, $Ax = g$ lineer denklemler sisteminin her çözümü bir $h \in \mathbb{R}_{n\times 1}$ vektörü için (2.5) şeklinde yazılabilir [57].

$A \in \mathbb{R}_{m\times n}$ bilinenler matrisi, $x \in \mathbb{R}_{n\times 1}$ bilinmeyenler vektörü ve $g \in \mathbb{R}_{m\times 1}$ bilinenler vektörü olmak üzere $Ax = g$ lineer denklemler sistemini göz önüne alalım. $Ax = g$ lineer denklemler sisteminin tutarsız olduğu yani, sistemi sağlayan herhangi bir x vektörünün olmadığı durumda $Ax = g$ sistemi, $Ax - g = e(x)$ olarak yazılabilir. Burada $e(x)$ bir kalan vektörü ya da sapmalar vektörü olarak adlandırılır. $Ax = g$ sistemini sağlayan bir x vektörü olsaydı, bu vektör için $e(x) = 0$ olacaktı. Eğer $e(x) = 0$ olacak şekilde bir x vektörü yoksa $e(x)$ "en küçük" olacak şekilde bir x vektörü araştırılmak istenebilir. Böyle bir x vektörünü bulmak için

$$f(x)=\langle e(x),e(x)\rangle=\langle Ax-g,Ax-g\rangle=\langle Ax,Ax\rangle-\langle Ax,g\rangle-\langle g,Ax\rangle+\langle g,g\rangle$$

$$=(Ax)^{*}Ax-g^{*}Ax-(Ax)^{*}g+g^{*}g$$

$$=x^{*}A^{*}Ax-g^{*}Ax-x^{*}A^{*}g+g^{*}g$$

fonksiyonunun x vektörüne göre türevi alınır ve çıkan sonuç 0'a eşitlenir. Burada, $\frac{\partial\left(x^{*}A^{*}Ax\right)}{\partial x}=\overline{A^{*}Ax}$, $\frac{\partial\left(g^{*}Ax\right)}{\partial x}=\overline{A^{*}g}$, $\frac{\partial\left(x^{*}A^{*}g\right)}{\partial x}=0$ ve $\frac{\partial g^{*}g}{\partial x}=0$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x}=\overline{A^{*}Ax}-\overline{A^{*}g}$$

olarak bulunur. $\frac{\partial f(x)}{\partial x}=0$ 'dan

$$A^{*}Ax=A^{*}g \tag{2.6}$$

elde edilir [58-59]. (2.6) lineer denklemler sistemine, $Ax=g$ lineer denklemler sisteminin normal denklemleri denir. (2.6) normal denklemleri Teorem 2.8'e göre tutarlı lineer denklemler sistemidir. $A\in\mathbb{R}_{m\times n}$, $x\in\mathbb{R}_{n\times 1}$ ve $g\in\mathbb{R}_{m\times 1}$ olması durumunda, (2.6) normal denklemlerinin

$$A^{T}Ax=A^{T}g \tag{2.7}$$

olacağına dikkat ediniz.

Şimdi en küçük kareler ve en iyi yaklaşık çözüm kavramlarına ilişkin tanımları verelim.

Tanım 2.22. $A \in \mathbb{R}_{m\times n}$ bilinenler matrisi, $x \in \mathbb{R}_{n\times 1}$ bilinmeyenler vektörü ve $g \in \mathbb{R}_{m\times 1}$ bilinenler vektörü olmak üzere $Ax = g$ tutarsız lineer denklemler sistemi göz önüne alınsın. $\mathbb{R}_{n\times 1}$'deki tüm x vektörleri için,

$$\|Ax_0 - g\| = \min_{x\in \mathbb{R}_{n\times 1}} \|Ax - g\|$$

koşulunu sağlayan x_0 vektörüne $Ax = g$ tutarsız lineer denklemler sisteminin bir en küçük kareler çözümü denir. En küçük kareler çözümü olan bir x_0 vektörü,

$$\|Ax_0 - g\| = \|Ax - g\|$$

koşulunu sağlayan tüm $x \neq x_0$ vektörleri için,

$$\|x\| > \|x_0\|$$

bağıntısını sağlıyorsa, x_0 vektörü $Ax = g$ sisteminin en iyi yaklaşık çözümü olarak tanımlanır [57].

Dikkat edilirse bir sistemin birçok en küçük kareler çözümü olabilir, fakat en iyi yaklaşık çözüm tektir ve en iyi yaklaşık çözüm her zaman bir en küçük kareler çözümüdür. Ancak bu durumun tersi her zaman doğru değildir. Dolayısıyla en iyi yaklaşık çözüm, en küçük kareler çözümlerinin kümesi içinden aranır [60].

Teorem 2.10. $A \in \mathbb{R}_{m\times n}$ bilinenler matrisi, $x \in \mathbb{R}_{n\times 1}$ bilinmeyenler vektörü ve $g \in \mathbb{R}_{m\times 1}$ bilinenler vektörü olmak üzere $Ax = g$ tutarsız lineer denklemler sistemi göz önüne alınsın. Bu durumda, her $h \in \mathbb{R}_{n\times 1}$ vektörü için,

$$x = A^{+}g + (I - A^{+}A)h \tag{2.8}$$

şeklinde yazılan x vektörü $Ax = g$ lineer denklemler sistemi için bir en küçük kareler çözümdür. Ayrıca $Ax = g$ lineer denklemler sisteminin her en küçük kareler çözümü bir $h \in \mathbb{C}_{n\times 1}$ parametreler vektörü için (2.8) şeklinde yazılabilir [61].

İspat. $Ax = g$ tutarsız lineer denklemler sisteminin normal denklemleri (2.6) biçimindedir. (2.6) normal denklemleri tutarlı olduğundan dolayı Teorem 2.9'a göre

$$x = (A^*A)^+ A^* g + \left(I - (A^*A)^+ (A^*A)\right)h \tag{2.9}$$

yazılabilir. (2.9) eşitliğinde

$$(A^*A)^+ A^* = A^+ \left(A^*\right)^+ A^* = A^+ \left(AA^+\right)^* = A^+AA^+ = A^+$$

olduğu göz önüne alınır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$x = A^+ g + (I - A^+A)h$$

olarak elde edilir. Dolayısıyla ispat tamamlanır. $\square$

Teorem 2.9 ve Teorem 2.10'dan $Ax = g$ lineer denklemler sisteminin tutarlı olması durumunda genel çözümlerinin ifadesi ile tutarsız olması durumunda en küçük kareler çözümlerinin ifadesinin aynı biçimde olduğu görülür.

Teorem 2.11. x vektörünün $Ax = g$ sisteminin bir en küçük kareler çözümü olması için gerek ve yeter koşul x vektörünün $A^*Ax = A^*g$ normal denklemlerinin bir çözümü olmasıdır [61].

Teorem 2.12. $Ax = g$ lineer denklemler sisteminin en iyi yaklaşık çözümü $x = A^+ g$ biçimindedir. En iyi yaklaşık çözüm daima vardır ve tektir [60].

BÖLÜM 3. REEL MATRİS DENKLEMLERİ İÇİN MİNİMUM KALAN VE MATRİS YAKINLIK PROBLEMLERİ

3.1. Giriş

Bu bölümde, öncelikle $\left(A_1XB_1, A_2XB_2, \ldots, A_kXB_k\right) = \left(C_1, C_2, \ldots, C_k\right)$ matris denkleminin, verilen bir X_0 matrisine en yakın olacak şekildeki *simetrik* ve *ters-simetrik* çözümleri Moore-Penrose ters kullanılarak verilecektir. Daha sonraki kısımda ise $AXB = C$ matris denkleminin, verilen bir X_0 matrisine en yakın olacak şekilde (P,Q)*-ortogonal simetrik* ve (P,Q)*-ortogonal ters-simetrik* çözümleri Moore Penrose ters ve spektral ayrışım kullanılarak verilecektir. Her iki kısımda ele alınan problemlerdeki matrisler reel matrislerdir.

3.2. $\left(A_1XB_1, A_2XB_2, \ldots, A_kXB_k\right) = \left(C_1, C_2, \ldots, C_k\right)$ Matris Denkleminin *Simetrik* ve *Ters-Simetrik* Çözümleri

$\mathbb{R}_{m_1 \times n_1} \times \mathbb{R}_{m_2 \times n_2} \times \ldots \times \mathbb{R}_{m_k \times n_k} = \left\{\left[A_1, A_2, \ldots, A_k\right] : A_i \in \mathbb{R}_{m_i \times n_i},\ i = 1, 2, \ldots, k\right\}$ kümesinin reel sayılar cismi üzerinde bir vektör uzayı olduğu açıktır. Her $\left[A_1, A_2, \ldots, A_k\right],\ \left[B_1, B_2, \ldots, B_k\right] \in \mathbb{R}_{m_1 \times n_1} \times \mathbb{R}_{m_2 \times n_2} \times \ldots \times \mathbb{R}_{m_k \times n_k}$ için

$$\left\langle \left[A_1, A_2, \ldots, A_k\right], \left[B_1, B_2, \ldots, B_k\right] \right\rangle = iz\left(B_1^T A_1\right) + iz\left(B_2^T A_2\right) + \ldots + iz\left(B_k^T A_k\right)$$

olmak üzere $\left\|\cdot\right\|_H$ normu

$$\left\|\left[A_1, A_2, \ldots, A_k\right]\right\|_H = \left\langle \left[A_1, A_2, \ldots, A_k\right], \left[A_1, A_2, \ldots, A_k\right] \right\rangle^{1/2}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $\|\cdot\|$ ifadesi Frobenius normu göstermek üzere,

$$\left\|[A_1, A_2, \ldots, A_k]\right\|_H = \left(\|A_1\|^2 + \|A_2\|^2 + \ldots + \|A_k\|^2\right)^{1/2}$$

olduğu açıktır.

$\Phi = \mathbb{R}^{S}_{n\times n}$ veya $\Phi = \mathbb{R}^{SS}_{n\times n}$ olmak üzere, aşağıdaki problemleri ele alalım.

Problem 3.1. $A_i \in \mathbb{R}_{m_i\times n}$, $B_i \in \mathbb{R}_{n\times p_i}$ ve $C_i \in \mathbb{R}_{m_i\times p_i}$, $i = 1, 2, \ldots, k,$ matrisleri verilsin.

$$\left\|\left[A_1 X B_1 - C_1, \ldots, A_k X B_k - C_k\right]\right\|_H = \min_{X\in\Phi}\left\|[A_1 X B_1 - C_1, \ldots, A_k X B_k - C_k]\right\|_H$$

olacak şekilde $X \in \Phi$ matrislerini bulmak.

Problem 3.2. S_{E_X}, Problem 3.1'in çözüm kümesi olmak üzere, verilen bir $X_0 \in \mathbb{R}_{n\times n}$ matrisi için

$$\left\|X - X_0\right\| = \min_{X\in S_{E_X}}\|X - X_0\|$$

olacak şekilde $X \in S_{E_X}$ matrisini bulmak.

Aşağıdaki teorem $Ax = g$ lineer denklemler sisteminin verilen bir $x_0 \in \mathbb{R}_{n\times 1}$ vektörü için $\|x - x_0\|$ ifadesi minimum olacak şekildeki çözümünü ortaya koymaktadır.

Teorem 3.1. $A \in \mathbb{R}_{m\times n}$ bilinenler matrisi, $g \in \mathbb{R}_{m\times 1}$ bilinenler vektörü ve $x \in \mathbb{R}_{n\times 1}$ bilinmeyenler vektörü ve $Ax = g$ tutarlı lineer denklemler sisteminin tüm çözümlerinin kümesi S_g olmak üzere $x_0 \in \mathbb{R}_{n\times 1}$ vektörü verilsin.

$$\|\hat{x}-x_0\| = \min_{x\in S_g}\|x-x_0\|$$

olacak şekildeki $\hat{x} \in S_g$ vektörü,

$$\hat{x} = A^+g + \left(I - A^+A\right)x_0$$

ile verilir.

İspat. Teorem 2.9'a göre $Ax = g$ tutarlı lineer denklemler sisteminin genel çözümleri

$$x = A^+g + (I - A^+A)h \tag{3.1}$$

eşitliğiyle verilir. Bu çözümler arasından $\|\hat{x}-x_0\| = \min_{x\in S_g}\|x-x_0\|$ olacak şekildeki $\hat{x}$ vektörünü bulabilmek için

$$x_0 = A^+g + \left(I - A^+A\right)h \tag{3.2}$$

eşitliğini göz önüne alalım. (3.2) eşitliğinden, h vektörü için en iyi yaklaşık çözüm vektörü, Teorem 2.12'ye göre

$$(I - A^+A)^+(x_0 - A^+g)$$

vektörü olarak yazılır. Bu vektör, (3.1) eşitliğinde yerine yazılırsa $Ax = g$ tutarlı lineer denklemler sisteminin, $\|\hat{x}-x_0\| = \min_{x\in S_g}\|x-x_0\|$ olacak şekildeki $\hat{x}$ vektörü,

$$\hat{x} = A^+g + \left(I - A^+A\right)x_0 \tag{3.3}$$

olarak elde edilir. $\square$

Teorem 3.2. $A \in \mathbb{R}_{m\times n}$ bilinenler matrisi, $g \in \mathbb{R}_{m\times 1}$ bilinenler vektörü ve $x \in \mathbb{R}_{n\times 1}$ bilinmeyenler vektörü ve $Ax = g$ tutarsız lineer denklemler sisteminin en küçük kareler çözümlerinin kümesi S_e olmak üzere $x_0 \in \mathbb{R}_{n\times 1}$ vektörü verilsin.

$$\left\|\hat{x} - x_0\right\| = \min_{x \in S_e} \left\|x - x_0\right\|$$

olacak şekildeki $\hat{x} \in S_e$ vektörü,

$$\hat{x} = A^{+} g + \left(I - A^{+} A\right) x_0$$

ile verilir.

İspat. $Ax = g$ tutarsız reel lineer denklemler sisteminin normal denklemleri (2.7) biçimindedir. S_g, (2.7) tutarlı lineer denklemler sisteminin tüm çözümlerinin kümesi olmak üzere Teorem 3.1’den $\left\|\hat{x} - x_0\right\| = \min_{x \in S_g} \left\|x - x_0\right\|$ olacak şekildeki $\hat{x} \in S_g$ çözümü,

$$\hat{x} = (A^T A)^{+} A^T g + \left(I - (A^T A)^{+} (A^T A)\right) x_0 \tag{3.4}$$

olarak yazılır. (3.4) eşitliğinde, $\left(A^T A\right)^{+} A^T = A^{+}$ olduğu göz önüne alınır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa $Ax = g$ tutarsız lineer denklemler sisteminin $\left\|\hat{x} - x_0\right\| = \min_{x \in S_e} \left\|x - x_0\right\|$ olacak şekilde en iyi yaklaşık çözümü

$$\hat{x} = A^{+} g + \left(I - A^{+} A\right) x_0 \tag{3.5}$$

biçiminde elde edilir. $\square$

(3.3) ve (3.5) eşitliklerinden görüldüğü üzere $\hat{x}$ vektörünün yapısı $Ax = g$ lineer denklemler sisteminin tutarlı ve tutarsız olması durumunda tamamen aynıdır.

Esas teoremi vermeden önce, teorem ile ilişkili bir uyarı verelim.

Uyarı 3.1. $X_0 \in \mathbb{R}_{n\times n}$ verilen bir matris olsun. $\mathbb{R}_{n\times n}^{S}$ kümesi üzerinde $\|X - X_0\|$ ifadesini minimumlaştırma problemi ile $\left\|X - \frac{1}{2}\left(X_0 + X_0^T\right)\right\|$ ifadesini minimumlaştırma problemi birbirine denktir.

Benzer şekilde $\mathbb{R}_{n\times n}^{SS}$ kümesi üzerinde $\|X - X_0\|$ ifadesini minimumlaştırma problemi ile $\left\|X - \frac{1}{2}\left(X_0 - X_0^T\right)\right\|$ ifadesini minimumlaştırma problemi birbirine denktir.

İspat. $\mathbb{R}_{n\times n}^{S}$ kümesi üzerinde $\|X - X_0\|$ ifadesini minimumlaştırma problemini ele alalım**.**

$$\|X - X_0\| = \left\|X - \left(\frac{1}{2}\left(X_0 + X_0^T\right) + \frac{1}{2}\left(X_0 - X_0^T\right)\right)\right\|$$

$$= \left\|X - \frac{1}{2}\left(X_0 + X_0^T\right) - \frac{1}{2}\left(X_0 - X_0^T\right)\right\|$$

$$= \left\|\left(X - \frac{1}{2}\left(X_0 + X_0^T\right)\right) - \left(\frac{1}{2}\left(X_0 - X_0^T\right)\right)\right\|$$

yazılabilir. Dikkat edilirse $\left(X - \frac{1}{2}\left(X_0 + X_0^T\right)\right)$ simetrik matris ve $\frac{1}{2}\left(X_0 - X_0^T\right)$ ters simetrik matristir. Ayrıca, bu iki matris birbirine diktir, gerçekten,

$$\left\langle X-\frac{1}{2}\left(X_0+X_0^T\right),\frac{1}{2}\left(X_0-X_0^T\right)\right\rangle=\left\langle X,\frac{1}{2}\left(X_0-X_0^T\right)\right\rangle-\left\langle\frac{1}{2}\left(X_0+X_0^T\right),\frac{1}{2}\left(X_0-X_0^T\right)\right\rangle$$

$$=iz\left(\left(\frac{1}{2}\left(X_0-X_0^T\right)\right)^T X\right)-iz\left(\left(\frac{1}{2}\left(X_0-X_0^T\right)\right)^T,\frac{1}{2}\left(X_0+X_0^T\right)\right)$$

$$=iz\left(\frac{1}{2}X_0^T X\right)-iz\left(\frac{1}{2}X_0 X\right)-iz\left(\frac{1}{4}X_0^T X_0\right)-iz\left(\frac{1}{4}X_0^T X_0^T\right)$$
$$+iz\left(\frac{1}{4}X_0 X_0\right)+iz\left(\frac{1}{4}X_0 X_0^T\right)$$

olup, (2.1) eşitlikleri göz önüne alındığında,

$$\left\langle X-\frac{1}{2}\left(X_0+X_0^T\right),\frac{1}{2}\left(X_0-X_0^T\right)\right\rangle=0$$

olduğu görülür. Dolayısıyla $\left(X-\frac{1}{2}\left(X_0+X_0^T\right)\right)$ ve $\frac{1}{2}\left(X_0-X_0^T\right)$ matrisleri diktir. Buradan, $\|X-X_0\|=\left\|X-\frac{1}{2}\left(X_0+X_0^T\right)\right\|$ eşitliğinin doğruluğu görülür.

$\mathbb{R}_{n\times n}^{SS}$ kümesi üzerinde $\|X-X_0\|=\left\|X-\frac{1}{2}\left(X_0-X_0^T\right)\right\|$ eşitliğinin olduğu da benzer şekilde gösterilir. □

Teorem 3.3. Problem 3.1'in çözümlerinin kümesi S_{E_X} olsun. Keyfi bir $X_0\in\mathbb{R}_{n\times n}$ matrisi verilsin. Bu durumda, Problem 3.2 için

$$\left\|X-X_0\right\|=\min_{X\in S_{E_X}}\|X-X_0\|$$

olacak şekildeki $X\in S_{E_X}$ matrisi, $x=vec(X)$ eşitliği ile verilen matris ve x,

$$x=\begin{bmatrix} B_1^T\otimes A_1 \\ A_1\otimes B_1^T \\ B_2^T\otimes A_2 \\ A_2\otimes B_2^T \\ \vdots \\ B_k^T\otimes A_k \\ A_k\otimes B_k^T \end{bmatrix}^{+}\begin{bmatrix} vec(C_1) \\ vec(\Delta C_1^T) \\ vec(C_2) \\ vec(\Delta C_2^T) \\ \vdots \\ vec(C_k) \\ vec(\Delta C_k^T) \end{bmatrix}+x_0-\begin{bmatrix} B_1^T\otimes A_1 \\ A_1\otimes B_1^T \\ B_2^T\otimes A_2 \\ A_2\otimes B_2^T \\ \vdots \\ B_k^T\otimes A_k \\ A_k\otimes B_k^T \end{bmatrix}^{+}\begin{bmatrix} B_1^T\otimes A_1 \\ A_1\otimes B_1^T \\ B_2^T\otimes A_2 \\ A_2\otimes B_2^T \\ \vdots \\ B_k^T\otimes A_k \\ A_k\otimes B_k^T \end{bmatrix}x_0$$

ile verilen vektördür. Burada, eğer *simetrik* çözüm bulunmak isteniyorsa Δ sembolü $"+"$ işareti ve x_0 vektörü $x_0=vec\left(\frac{1}{2}\left(X_0+X_0^T\right)\right)$, eğer *ters-simetrik* çözüm bulunmak isteniyorsa Δ sembolü $"-"$ işareti ve x_0 vektörü $x_0=vec\left(\frac{1}{2}\left(X_0-X_0^T\right)\right)$ şeklindedir.

İspat. Önce, Problem 3.2'nin *simetrik* çözümünü bulmak isteyelim. Bu durumda $\left(A_1XB_1, A_2XB_2,\ldots,A_kXB_k\right)=\left(C_1,C_2,\ldots,C_k\right)$ matris denklemi,

$$\begin{aligned} A_1XB_1 &= C_1 \\ B_1^TXA_1^T &= C_1^T \\ A_2XB_2 &= C_2 \\ B_2^TXA_2^T &= C_2^T \\ &\vdots \\ A_kXB_k &= C_k \\ B_k^TXA_k^T &= C_k^T \end{aligned}$$

biçiminde veya vec operatörü yardımıyla

$$\begin{bmatrix} B_1^T \otimes A_1 \\ A_1 \otimes B_1^T \\ B_2^T \otimes A_2 \\ A_2 \otimes B_2^T \\ \vdots \\ B_k^T \otimes A_k \\ A_k \otimes B_k^T \end{bmatrix} vec(X) = \begin{bmatrix} vec\left(C_1\right) \\ vec\left(C_1^T\right) \\ vec\left(C_2\right) \\ vec\left(C_2^T\right) \\ \vdots \\ vec\left(C_k\right) \\ vec\left(C_k^T\right) \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

lineer denklemler sistemi biçiminde yazılabilir. $x_0 = vec\left(\frac{1}{2}\left(X_0 + X_0^T\right)\right)$ olmak üzere Teorem 3.2'den, (3.6) lineer denklemler sisteminin en iyi yaklaşık *simetrik* çözüm vektörü,

$$x = \begin{bmatrix} B_1^T \otimes A_1 \\ A_1 \otimes B_1^T \\ B_2^T \otimes A_2 \\ A_2 \otimes B_2^T \\ \vdots \\ B_k^T \otimes A_k \\ A_k \otimes B_k^T \end{bmatrix}^+ \begin{bmatrix} vec\left(C_1\right) \\ vec\left(C_1^T\right) \\ vec\left(C_2\right) \\ vec\left(C_2^T\right) \\ \vdots \\ vec\left(C_k\right) \\ vec\left(C_k^T\right) \end{bmatrix} + x_0 - \begin{bmatrix} B_1^T \otimes A_1 \\ A_1 \otimes B_1^T \\ B_2^T \otimes A_2 \\ A_2 \otimes B_2^T \\ \vdots \\ B_k^T \otimes A_k \\ A_k \otimes B_k^T \end{bmatrix}^+ \begin{bmatrix} B_1^T \otimes A_1 \\ A_1 \otimes B_1^T \\ B_2^T \otimes A_2 \\ A_2 \otimes B_2^T \\ \vdots \\ B_k^T \otimes A_k \\ A_k \otimes B_k^T \end{bmatrix} x_0 \tag{3.7}$$

biçiminde elde edilir. Böylece, Problem 3.2'nin en iyi yaklaşık *simetrik* çözümü olan X matrisi, $x = vec\left(X\right)$ ile belirlenen matristir.

Problem 3.2'nin en iyi yaklaşık *ters-simetrik* çözümleri bulunmak istenildiğinde ise ispatta $i = 1, 2, \ldots, k$ için C_i^T matrisleri yerine $-C_i^T$, $vec\left(C_i^T\right)$ vektörleri yerine $vec\left(-C_i^T\right)$ ve x_0 vektörü yerine $x_0 = vec\left(\frac{1}{2}\left(X_0 - X_0^T\right)\right)$ alarak ilerlemek yeterlidir.□

3.2.1. Algoritma ve sayısal örnekler

Şimdi ele alınan problemler için bir algoritma ve iki sayısal örnek verilsin.

Algoritma 3.1.

Adım 1. $i=1,2,\ldots,k$ için $A_i \in \mathbb{R}_{m_i\times n}$, $B_i \in \mathbb{R}_{n\times p_i}$, $C_i \in \mathbb{R}_{m_i\times p_i}$ matrislerini ve $X_0 \in \mathbb{R}_{n\times n}$ matrisini giriniz.

Adım 2. $i=1,2,\ldots,k$ için $vec(C_i)$, $vec\left(\Delta C_i^T\right)$ vektörlerini ve $x_0 = vec\left(\frac{1}{2}\left(X_0 \ \Delta \ X_0^T\right)\right)$ vektörünü hesaplayınız.

Adım 3. (3.7)'den

$$x=\begin{bmatrix} B_1^T\otimes A_1 \\ A_1\otimes B_1^T \\ B_2^T\otimes A_2 \\ A_2\otimes B_2^T \\ \vdots \\ B_k^T\otimes A_k \\ A_k\otimes B_k^T \end{bmatrix}^+ \begin{bmatrix} vec(C_1) \\ vec\left(\Delta C_1^T\right) \\ vec(C_2) \\ vec\left(\Delta C_2^T\right) \\ \vdots \\ vec(C_k) \\ vec\left(\Delta C_k^T\right) \end{bmatrix} + x_0 - \begin{bmatrix} B_1^T\otimes A_1 \\ A_1\otimes B_1^T \\ B_2^T\otimes A_2 \\ A_2\otimes B_2^T \\ \vdots \\ B_k^T\otimes A_k \\ A_k\otimes B_k^T \end{bmatrix}^+ \begin{bmatrix} B_1^T\otimes A_1 \\ A_1\otimes B_1^T \\ B_2^T\otimes A_2 \\ A_2\otimes B_2^T \\ \vdots \\ B_k^T\otimes A_k \\ A_k\otimes B_k^T \end{bmatrix} x_0$$

vektörünü hesaplayınız.

Adım 4. $x = vec\left(X\right)$ olacak şekildeki X matrisini oluşturunuz. $\square$

Algoritmadaki Δ sembolünün *simetrik* çözüm için "$+$" işareti, *ters-simetrik* çözüm için "$-$" işareti anlamına geldiğine dikkat ediniz.

Örnek 3.1.

$$A_1=\begin{pmatrix}-4&-2&-1&-4&-1\\-1&-1&-3&2&5\\0&-5&0&-2&-2\\-1&5&-2&-1&2\\2&-3&5&0&2\\1&-4&4&4&0\end{pmatrix},\ B_1=\begin{pmatrix}2&-3&-3&4\\2&-5&-1&1\\-3&1&0&-1\\-4&4&5&-3\\5&2&-3&-1\end{pmatrix},$$

$$A_2=\begin{pmatrix}0&-3&-2&-2&2\\-4&-1&-2&3&-2\\1&1&1&5&1\end{pmatrix},\ B_2=\begin{pmatrix}-4&1&-3&2&-2&2\\4&-5&-1&2&0&5\\4&-1&-4&1&2&0\\3&-2&1&-5&-1&-2\\-2&-3&0&-4&3&-4\end{pmatrix},$$

$$C_1=\begin{pmatrix}1&-2&4&2\\3&-1&1&2\\-1&0&5&-4\\-4&0&-3&-2\\-2&4&2&-3\\-3&0&-2&2\end{pmatrix},\ C_2=\begin{pmatrix}3&2&-1&0&3&0\\-2&-5&4&-1&-2&-5\\3&1&-5&0&3&-3\end{pmatrix}$$

ve

$$X_0=\begin{pmatrix}2&-3&3&2&2\\0&2&-3&0&1\\-3&-3&-2&-1&4\\-2&4&-4&1&-3\\1&-2&1&1&2\end{pmatrix}$$

olsun. Algoritma 3.1 kullanılarak Problem 3.2’nin en iyi yaklaşık simetrik çözümü,

$$X = \begin{pmatrix} -0.0573 & 0.0369 & 0.1919 & -0.0543 & 0.0440 \\ 0.0369 & -0.0516 & -0.0470 & -0.0233 & -0.0214 \\ 0.1919 & -0.0470 & 0.0565 & 0.1294 & -0.0038 \\ -0.0543 & -0.0233 & 0.1294 & -0.0975 & 0.0515 \\ 0.0440 & -0.0214 & -0.0038 & 0.0515 & -0.0263 \end{pmatrix}$$

olarak bulunur. $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} B_1^T \otimes A_1 \\ A_1 \otimes B_1^T \\ B_2^T \otimes A_2 \\ A_2 \otimes B_2^T \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} vec(C_1) \\ vec(C_1^T) \\ vec(C_2) \\ vec(C_2^T) \end{pmatrix}$ ve $x = vec(X)$ olmak üzere $\mathrm{A}\mathbf{x} = g$ reel lineer denklemler sistemini göz önüne alınsın. $\mathrm{A}\mathbf{x} = g$ lineer denklemler sisteminin normal denklemleri $\mathrm{A}^T\mathrm{A}\mathbf{x} = \mathrm{A}^T g$ şeklindedir. $A_1 = \mathrm{A}^T\mathrm{A}$ ve $g_1 = \mathrm{A}^T g$ olsun. Bu durumda $\left\|\left[A_1XB_1 - C_1, A_2XB_2 - C_2\right]\right\|_H = 15.1969$, $\|X - X_0\| = 11.9243$ ve $\|A_1x - g_1\| = 9.8769e-11$ olarak bulunur.

Örnek 3.2.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & 4 & -5 \\ 2 & 0 & -4 & -1 & -4 \\ 4 & -1 & -4 & -4 & -4 \\ -4 & -3 & -1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -4 & 4 & 0 \\ -5 & -2 & -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \; B_1 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -4 & 2 & 0 \\ 4 & -4 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 3 & -2 & 2 \\ -3 & 5 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & -3 & -1 & 2 & -4 \end{pmatrix}, \; B_2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 5 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 5 & 4 & -5 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ -3 & 4 & 4 & -1 & 4 & 5 \\ -4 & -5 & -4 & -2 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 & -3 \\ 5 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \\ -1 & 3 & -4 & 1 \\ -3 & 0 & 2 & -4 \\ -3 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \; C_2 = \begin{pmatrix} -5 & -3 & -4 & -5 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 5 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & -5 & 5 & 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

ve

$$X_0 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 & -4 & -1 \\ 2 & 5 & 5 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -4 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 3 & -4 & -4 \end{pmatrix}$$

olsun. Algoritma 3.1 kullanılarak Problem 3.2'nin en iyi yaklaşık *ters-simetrik* çözümü

$$X = \begin{pmatrix} \text{-5.5555e-15} & -0.013518 & 0.094846 & 0.027408 & 0.056478 \\ 0.013518 & \text{-2.7311e-16} & 0.078569 & -0.015056 & -0.0084807 \\ -0.094846 & -0.078569 & \text{-9.3226e-15} & 0.05387 & 0.039981 \\ -0.027408 & 0.015056 & -0.05387 & \text{-9.4239e-16} & -0.023694 \\ -0.056478 & 0.0084807 & -0.039981 & 0.023694 & \text{4.3585e-17} \end{pmatrix}$$

olarak bulunur. $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} B_1^T \otimes A_1 \\ A_1 \otimes B_1^T \\ B_2^T \otimes A_2 \\ A_2 \otimes B_2^T \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} vec(C_1) \\ vec(-C_1^T) \\ vec(C_2) \\ vec(-C_2^T) \end{pmatrix}$ ve $x = vec(X)$ olmak üzere $\mathrm{A}\mathbf{x} = g$ reel lineer denklemler sistemini göz önüne alınsın. $\mathrm{A}\mathbf{x} = g$ lineer denklemler sisteminin normal denklemleri $\mathrm{A}^T\mathrm{A}\mathbf{x} = \mathrm{A}^T g$ şeklindedir. $A_1 = \mathrm{A}^T\mathrm{A}$ ve $g_1 = \mathrm{A}^T g$ olsun. Bu durumda, $\left\| \left[A_1XB_1 - C_1, A_2XB_2 - C_2 \right] \right\|_H = 17.5849$, $\|X - X_0\| = 13.8818$ ve $\|A_1x - g_1\| = 7.8063\text{e-}11$ olarak bulunur.

Dikkat edilirse $A_1x = g_1$ normal denklemleri için hesaplanan $\|A_1x - g_1\|$ ifadesi, her iki örnek için de sıfıra çok yakın, hatta hesaplama hataları göz önüne alındığında sıfır bile denebilecek bir sayıdır. Dolayısıyla, Örnek 3.1 için bulunan X matrisi en iyi yaklaşık *simetrik* çözüm, Örnek 3.2 için bulunan X matrisi en iyi yaklaşık *ters-simetrik* çözümdür.

Literatürde matris ayrışımları veya iteratif yöntemlerle, benzer problemlere çözüm arayan çalışmalarda yer alan örnekler, bu çalışmada verilen algoritma ile tekrar çözülmüş ve bulunan sonuçlar ile makalelerde bulunan sonuçlar karşılaştırmalı olarak tabloda verilmiştir. Tablonun her bir hücresinde iki değer olup, üstteki değer referans alınan çalışmadaki sonucu, alttaki değer ise bu çalışmada verilen algoritma ile elde edilen sonucu göstermektedir. Tüm hesaplamalar Matlab 7.5 paket program kullanılarak hesaplanmıştır.

Tablo 3.1. Sonuçların Karşılaştırmalı Tablosu I

	ε	$\|X - X_0\|$	$\|[A_1XB_1 - C_1, \ldots, A_kXB_k - C_k]\|_H$
[62]'da Örnek 2	1	43.6600 43.6600	4.5687e+003 4.5687e+003
	0,01	0.4366 0.4366	45.6873 45.6873
	0,0001	0.0044 0.0044	0.4569 0.4569
	0,000001	4.3660e-005 4.3660e-005	0.0046 0.0046
[63]'de Örnek 3	1	33.6729 28.7113	4.5687e+003 6.1988e+003
	0,01	0.3367 0.2871	48.1408 61.9884
	0,0001	0.0034 0.0029	0.4568 0.6199
	0,000001	3.3673e-005 2.8711e-005	0.0046 0.0062
[27]'de Örnek 1		20.3343 20.3343	2.4134e-011 7.3117e-011
[30]'de Örnek 4.1		8.3666 8.3666	6.1338e-12 6.1412e-11

Burada ε ifadesi [62] ve [63] makalelerinde açıklandığı üzere negatif olmayan keyfi bir sayıdır.

3.3. $AXB=C$ Matris Denkleminin (P,Q)-*Ortogonal Simetrik* ve (P,Q)-*Ortogonal Ters-Simetrik* Çözümleri

Bu kısımda $AXB=C$ lineer matris denkleminin, verilen bir X_0 matrisine en yakın olacak şekilde (P,Q)-*ortogonal simetrik* ve (P,Q)-*ortogonal ters-simetrik* çözümleri ele alınacaktır. Öncelikle ele alınacak çalışma ile ilişkili problemler tanıtılacaktır.

$\Phi=\mathbb{R}_{n\times n}^{S}$ ve $\Psi=\mathbb{R}_{n\times n}^{PQS}$ veya $\Phi=\mathbb{R}_{n\times n}^{SS}$ ve $\Psi=\mathbb{R}_{n\times n}^{PQSS}$ olmak üzere aşağıdaki problemleri göz önüne alalım.

Problem 3.3. $A\in\mathbb{R}_{m\times n}$, $B\in\mathbb{R}_{n\times p}$, ve $C\in\mathbb{R}_{m\times p}$ matrisleri verilsin.

$$\left\|AXB-C\right\|=\min_{X\in\Psi}\|AXB-C\|$$

olacak şekilde $X\in\Psi$ matrisini bulmak.

Problem 3.4. S_{E_X}, Problem 3.3'ün çözüm kümesi olmak üzere, verilen bir $X_0\in\mathbb{R}_{n\times n}$ matrisi için

$$\left\|X-X_0\right\|=\min_{X\in S_{E_X}}\|X-X_0\|$$

olacak şekilde $X\in S_{E_X}$ matrisini bulmak.

Problem 3.5. $A\in\mathbb{R}_{m\times n}$, $B\in\mathbb{R}_{n\times p}$, $C\in\mathbb{R}_{m\times p}$ ve $P,Q\in\mathbb{R}_{n\times n}^{SO}$ matrisleri verilsin.

$$\left\|(AP)Y(QB)-C\right\|=\min_{Y\in\Phi}\|(AP)Y(QB)-C\|$$

olacak şekilde $Y\in\Phi$ matrisini bulmak.

Problem 3.6. S_{E_Y}, Problem 3.5'in çözüm kümesi, $P,Q \in \mathbb{R}_{n\times n}^{SO}$ ve verilen bir $X_0 \in \mathbb{R}_{n\times n}$ matrisi için $Y_0 = PX_0Q$ olmak üzere,

$$\left\|Y - Y_0\right\| = \min_{Y \in S_{E_Y}} \left\|Y - Y_0\right\|$$

olacak şekilde $Y \in S_{E_Y}$ matrisini bulmak.

Bu bölümde, Problem 3.4'ün $\left(P,Q\right)$*-ortogonal simetrik* ve $\left(P,Q\right)$*-ortogonal ters-simetrik* matrisler kümeleri üzerinde en iyi yaklaşık çözümlerini bulmak yerine, denk olarak Problem 3.6 için *simetrik* ve *ters-simetrik* matrisler kümeleri üzerinde en iyi yaklaşık çözümleri bulunacaktır. Daha sonra, $X = PYQ$ eşitliği göz önüne alınarak asıl bulunmak istenen çözüm matrisi elde edilecektir. En iyi yaklaşık çözümleri bulmak için ise spektral ayrışım kullanılacaktır.

Teorem 3.4. $A \in \mathbb{R}_{n\times n}^{S}$ pozitif yarı kararlı r ranklı bir matris olsun. Bu durumda $A \in \mathbb{R}_{n\times n}^{S}$ matrisinin spektral ayrışımı (2.3) ifadesindeki gibi olmak üzere, $Ax = g$ lineer denklemler sisteminin tutarlı olmasının gerek ve yeter koşulu $V_2^T g = 0$ olmasıdır. Ayrıca, herhangi bir $h \in \mathbb{R}_{n\times 1}$ vektörü ve $I \in \mathbb{R}_{(n-r)\times(n-r)}$ için $Ax = g$ lineer denklemler sisteminin genel çözümü,

$$x = A^{+}g + V\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}h \tag{3.8}$$

ile verilir.

İspat. $Ax = g$ lineer denklemler sistemi tutarlı olsun. Bu durumda $Ax = g$ olacak şekilde en az bir x vektörü vardır. A matrisinin (2.3) ifadesindeki spektral ayrışımı

$Ax = g$ lineer denklemler sisteminde yerine yazılır ve $\Sigma = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$(V_1, V_2)\Sigma(V_1, V_2)^T x = g,$$

yani

$$(V_1, V_2)\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{pmatrix} x = g,$$

dolayısıyla

$$V_1 D V_1^T x = g \tag{3.9}$$

elde edilir. (3.9) eşitliği soldan V_2^T ile çarpılırsa, $V_2^T g = 0$ olduğu görülür.

Şimdi $V_2^T g = 0$ olsun. Her şeyden önce $x_1 = V^T x$ ve $g_1 = V^T g$ olmak üzere, $Ax = g$ lineer denklemler sistemi

$$\Sigma x_1 = g_1 \tag{3.10}$$

lineer denklemler sistemine denktir. $V_2^T g = 0$ olduğundan

$$g_1 = V^T g = \begin{pmatrix} V_1^T \\ 0 \end{pmatrix} g$$

olur.

$$\Sigma\Sigma^+ g_1 = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^+ \begin{pmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} V_1^T \\ 0 \end{pmatrix} g = g_1$$

olduğundan, Teorem 2.8'den $\sum x_1 = g_1$ sistemi tutarlı, dolayısıyla $Ax = g$ lineer denklemler sistemi tutarlıdır. Ayrıca, Teorem 2.9'dan $\sum x_1 = g_1$ sisteminin genel çözümü

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \Sigma^+ g_1 + \left(I - \Sigma^+ \Sigma\right) h \\
&= \Sigma^+ g_1 + \left(I - \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^+ \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) h \\
&= \Sigma^+ g_1 + \left(\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) h \\
&= \Sigma^+ g_1 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} h
\end{aligned}
$$

şeklindedir. $x_1 = V^T x$ ve $g_1 = V^T g$ olduğu göz önüne alınırsa, $Ax = g$ lineer denklemler sisteminin genel çözümü,

$$
x = A^+ g + V \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} h
$$

olarak bulunur. $\square$

Teorem 3.5. $P, Q \in \mathbb{R}_{n\times n}^{SO}$ ve $X = PYQ$ olsun. Bu durumda $X \in \mathbb{R}_{n\times n}^{PQS}$ matrisinin Problem 3.4'ün çözümü olması için gerek ve yeter koşul $Y \in \mathbb{R}_{n\times n}^{S}$ matrisinin Problem 3.6'nın çözümü olmasıdır.

İspat. S_{E_X} ve S_{E_Y} sırasıyla Problem 3.3 ve Problem 3.5'in çözüm kümeleri olsun.

$$\left\| X - X_0 \right\| = \min_{X \in S_{E_X}} \| X - X_0 \|$$

eşitliği $P, Q \in \mathbb{R}^{SO}_{n \times n}$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$\left\| X - X_0 \right\| = \min_{X \in S_{E_X}} \| X - X_0 \| = \min_{X \in S_{E_X}} \| PXQ - PX_0Q \|$$

olarak yazılabilir. $Y = PXQ$ ve $Y_0 = PX_0Q$ olmak üzere $\min_{X \in S_{E_X}} \| PXQ - PX_0Q \| = \min_{Y \in S_{E_Y}} \| Y - Y_0 \|$ eşitliği vardır ve buradan

$$\left\| X - X_0 \right\| = \left\| Y - Y_0 \right\| \tag{3.11}$$

olarak elde edilir. Şimdi $X \in \mathbb{R}^{PQS}_{n \times n}$, Problem 3.4'ün (P, Q)*-ortogonal simetrik* çözümü olsun. Bu durumda

$$\left\| AXB - C \right\| = \min_{X \in \mathbb{R}^{PQS}_{n \times n}} \| AXB - C \|, \tag{3.12}$$

$$\left\| X - X_0 \right\| = \min_{X \in S_{E_X}} \| X - X_0 \|$$

ve

$$\left(PXQ \right)^T = \left(PXQ \right)$$

eşitlikleri vardır. (3.12) eşitliğinin sol yanında X matrisi yerine PYQ, sağ yanında X matrisi yerine PYQ yazılırsa,

$$\left\| (AP) Y (QB) - C \right\| = \min_{Y \in \mathbb{R}^{S}_{n \times n}} \left\| (AP) Y (QB) - C \right\| \tag{3.13}$$

elde edilir. Dolayısıyla (3.11) ve (3.13) eşitliklerinden Y matrisinin Problem 3.6 için çözüm olduğu görülür.

Şimdi $Y \in \mathbb{R}^{S}_{n\times n}$, Problem 3.6'nın *simetrik* çözümü olsun. Bu durumda

$$\left\|(AP)Y(QB)-C\right\| = \min_{Y\in \mathbb{R}^{S}_{n\times n}} \left\|(AP)Y(QB)-C\right\|, \tag{3.14}$$

$$\left\|Y - Y_0\right\| = \min_{Y\in S_{E_Y}} \left\|Y - Y_0\right\|$$

ve

$$Y^T = Y$$

eşitlikleri vardır. (3.14) eşitliğinin sol yanında PYQ matrisi yerine X, sağ yanında PYQ matrisi yerine X yazılırsa

$$\left\|AXB-C\right\| = \min_{X\in \mathbb{R}^{PQS}_{n\times n}} \left\|AXB-C\right\| \tag{3.15}$$

elde edilir. Dolayısıyla, (3.11) ve (3.15) eşitliklerinden X matrisinin Problem 3.4'ün $(P,Q)-$ *ortogonal simetrik* çözümü olduğu görülür. $\square$

Teorem 3.6. $P,Q \in \mathbb{R}^{SO}_{n\times n}$ ve $X = PYQ$ olsun. Bu durumda $X \in \mathbb{R}^{PQSS}_{n\times n}$ matrisinin Problem 3.4'ün çözümü olması için gerek ve yeter koşul $Y \in \mathbb{R}^{SS}_{n\times n}$ matrisinin Problem 3.6'nın çözümü olmasıdır.

Teorem 3.6'nın ispatı, Teorem 3.5'in ispatı ile "$-$" işaret farklılığı haricinde tamamen aynıdır.

Teorem 3.7. $P,Q \in \mathbb{R}_{n\times n}^{SO}$, $X_0 \in \mathbb{R}_{n\times n}$ ve $X = PYQ$ olsun. Bu durumda, $Y_0 = PX_0Q$ ve $y_0 = vec\left(\frac{1}{2}\left(Y_0 + Y_0^T\right)\right)$ $\left(y_0 = vec\left(\frac{1}{2}\left(Y_0 - Y_0^T\right)\right)\right)$ olmak üzere Problem 3.6'nın en iyi yaklaşık *simetrik (ters-simetrik)* çözümü olan Y matrisi $\hat{y} = vec\left(Y\right)$ eşitliği ile verilen matris ve $\hat{y}$ vektörü,

$$\hat{y} = \mathrm{A}^{+}g + \left(V_{\mathrm{A}^T\mathrm{A}}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}\right)\left(V_{\mathrm{A}^T\mathrm{A}}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}\right)^{+}\left(y_0 - \mathrm{A}^{+}g\right) \tag{3.16}$$

biçiminde olan vektördür. Dolayısıyla, $X = PYQ$ matrisi Problem 3.4'ün $\left(P,Q\right)$-*ortogonal simetrik* $\left(\left(P,Q\right) - ortogonal\ ters - simetrik\right)$ çözümüdür. Burada, $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \left(QB\right)^T \otimes \left(AP\right) \\ \left(AP\right) \otimes \left(QB\right)^T \end{pmatrix}$ matrisidir.

İspat. $X_0 \in \mathbb{R}_{n\times n}$ matrisi verilsin. $Y_0 = PX_0Q$ olmak üzere, Problem 3.4'ün $\left(P,Q\right)$-*ortogonal simetrik* çözümlerini bulmak isteyelim. Teorem 3.5'e göre Problem 3.4'ün $\left(P,Q\right)$-*ortogonal simetrik* çözümlerini bulmak yerine, denk olarak Problem 3.6'nın *simetrik* çözümleri araştırılabilir. Dolayısıyla, $\left(AP\right)Y\left(QB\right) = C$ matris denkleminin simetrik çözümünü bulmak için,

$$\begin{aligned} \left(AP\right)Y\left(QB\right) &= C \\ \left(QB\right)^T Y \left(AP\right)^T &= C^T \end{aligned} \tag{3.17}$$

lineer matris denklem ikilisi veya $y = vec\left(Y\right)$ olmak üzere $vec\left(\cdot\right)$ operatörü ve Kronecker çarpım yardımıyla, denk olarak

$$\begin{pmatrix} \left(QB\right)^T \otimes \left(AP\right) \\ \left(AP\right) \otimes \left(QB\right)^T \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} vec\left(C\right) \\ vec\left(C^T\right) \end{pmatrix} \tag{3.18}$$

lineer denklemler sistemi ele alınsın. (3.18) lineer denklemler sisteminin katsayılar matrisi olan $\begin{pmatrix} (QB)^T \otimes (AP) \\ (AP) \otimes (QB)^T \end{pmatrix}$ matrisi, A ile; sabitler vektörü olan $\begin{pmatrix} vec(C) \\ vec(C^T) \end{pmatrix}$ vektörü g ile gösterilsin. Bu durumda, $y_0 = vec\left(\frac{1}{2}\left(Y_0 + Y_0^T\right)\right)$ olmak üzere, $(AP)Y(QB) = C$ lineer matris denkleminin $\left\|Y - Y_0\right\| = \min_{Y \in S_{E_Y}} \left\|Y - Y_0\right\|$ olacak şekildeki Y *simetrik* çözüm matrisini bulma problemi $\mathrm{A}y = g$ lineer denklemler sisteminin $\left\|\hat{y} - y_0\right\| = \min_{y \in S_{E_y}} \left\|y - y_0\right\|$ olacak şekildeki $\hat{y}$ çözüm vektörünü bulma problemine dönüşür. Burada, S_{E_y}, $\min\left\|\mathrm{A}y - g\right\|$ şartını sağlayan y vektörlerinin çözüm kümesidir. $A_1 = \mathrm{A}^T\mathrm{A}$ ve $g_1 = \mathrm{A}^T g$ olmak üzere $\mathrm{A}y = g$ lineer denklem sisteminin normal denklemleri

$$A_1 y = g_1 \tag{3.19}$$

şeklinde yazılır. Teorem 3.4'ten (3.19)'un genel çözümü

$$\begin{aligned} y &= A_1^+ g_1 + V_{A_1}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} h \\ &= (\mathrm{A}^T\mathrm{A})^+ \mathrm{A}^T g + V_{A_1}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} h \\ &= \mathrm{A}^+ (\mathrm{A}\mathrm{A}^+)^T g + V_{A_1}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} h \\ &= \mathrm{A}^+ g + V_{\mathrm{A}^T\mathrm{A}}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} h \end{aligned} \tag{3.20}$$

biçiminde yazılır. $\left\|y - y_0\right\|$ ifadesini minimumlaştırmak için,

$$\mathrm{A}^{+}g + V_{\mathrm{A}^T\mathrm{A}}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} h = y_0$$

eşitliğinden h vektörü için en iyi yaklaşık çözüm vektörü olan $h,$ Teorem 2.12'den

$$h = \left(V_{\mathrm{A}^T\mathrm{A}}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \right)^{+} \left(y_0 - \mathrm{A}^{+}g \right) \tag{3.21}$$

olarak elde edilir. (3.21) eşitliği, (3.20) denkleminde yerine yazılırsa $\mathrm{A}y = g$ lineer denklemler sisteminin $\|\hat{y} - y_0\| = \min_{y \in S_{E_y}} \|y - y_0\|$ olacak şekildeki $\hat{y}$ en iyi yaklaşık çözüm vektörü

$$\hat{y} = \mathrm{A}^{+}g + \left(V_{\mathrm{A}^T\mathrm{A}}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \right)\left(V_{\mathrm{A}^T\mathrm{A}}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \right)^{+} \left(y_0 - \mathrm{A}^{+}g \right) \tag{3.22}$$

şeklinde elde edilir. Böylece, $\hat{y} = vec(Y)$ olacak şekildeki Y matrisi Problem 3.6'nın en iyi yaklaşık *simetrik* çözümüdür. Dolayısıyla, $X = PYQ$ matrisi de Teorem 3.5'ten, Problem 3.4'ün en iyi yaklaşık (P,Q)*-ortogonal simetrik* çözümüdür.

(P,Q)*-ortogonal ters-simetrik* çözüm matrisi için ispat, C^T yerine $-C^T$ matrisi, $vec(C^T)$ yerine $vec(-C^T)$ vektörü ve $y_0 = vec\left(\frac{1}{2}\left(Y_0 + Y_0^T\right)\right)$ yerine $y_0 = vec\left(\frac{1}{2}\left(Y_0 - Y_0^T\right)\right)$ vektörü alınarak benzer şekilde yapılır. $\square$

3.3.1. Algoritma ve sayısal örnekler

Bu kısımda, Problem 3.12’nin (P,Q)*-ortogonal simetrik* veya (P,Q)*-ortogonal ters-simetrik* çözümünü bulmak için bir algoritma ve iki sayısal örnek verilecektir.

Algoritma 3.2

Adım 1. $A \in \mathbb{R}_{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}_{n\times p}$, $C \in \mathbb{R}_{m\times p}$, $P,Q \in \mathbb{R}_{n\times n}^{SO}$ ve $X_0 \in \mathbb{R}_{n\times n}$ matrislerini giriniz.

Adım 2. $c_1 = vec(C)$, $c_2 = vec\left(C^T\right)$, $y_0 = vec\left(\frac{1}{2}\left((PY_0Q)\Delta\left(PY_0^TQ\right)\right)\right)$ vektörlerini hesaplayınız.

Adım 3. $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} (QB)^T \otimes (AP) \\ (AP)\otimes(QB)^T \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} vec(C) \\ vec\left(\Delta C^T\right) \end{pmatrix}$, $A_1 = \mathrm{A}^T\mathrm{A}$ ve $g_1 = \mathrm{A}^T g$ ’yi hesaplayınız.

Adım 4. A_1 matrisinin $V_{A_1}\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}V_{A_1}^T$ olacak şekilde spektral ayrışımını yapınız.

Adım 5. $s = \operatorname{rank}\left(\mathrm{A}^T\mathrm{A}\right)$, $k = \dim\left(\mathrm{A}^T\mathrm{A}\right)$ olarak hesaplayınız ve $M = \begin{pmatrix} 0_{s\times s} & 0_{s\times(k-s)} \\ 0_{(k-s)\times s} & I_{(k-s)\times(k-s)} \end{pmatrix}$ matrisini oluşturunuz.

Adım 6. $\hat{y} = \mathrm{A}^+ g + \left(V_{\mathrm{A}^T\mathrm{A}}M\right)^+\left(V_{\mathrm{A}^T\mathrm{A}}M\right)\left(y_0 - \mathrm{A}^+ g\right)$ vektörünü hesaplayınız.

Adım 7. $\hat{y} = vec(Y)$ olan Y matrisini oluşturunuz.

Adım 8. $X = PYQ$ çözüm matrisini hesaplayınız.

Algoritmadaki Δ sembolü, Problem 3.4'ün (P,Q)-*ortogonal simetrik* çözümü bulunmak isteniyorsa $"+"$ işareti, (P,Q)-*ortogonal ters-simetrik* çözümü bulunmak isteniyorsa $"-"$ işareti anlamında kullanılmaktadır.

Örnek 3.3.

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & -4 & 4 & 1 & -4 \\ -2 & 0 & 5 & 5 & -3 & 5 \\ 5 & 0 & 3 & -4 & -1 & 4 \\ 3 & 5 & 2 & -5 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 2 \\ -5 & -2 & 3 & 3 \\ -2 & 5 & -3 & -2 \\ -5 & -5 & 0 & 2 \\ -4 & -1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & -3 \end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix} -4 & -3 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & 5 & 3 \\ 5 & -2 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & -4 & 3 \\ 1 & 2 & -4 & -3 \end{pmatrix},\ X_0=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 7 & -3 & -3 \\ -1 & -2 & 7 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ Q=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

olmak üzere Algoritma 3.2 kullanılarak Problem 3.4'ün (P,Q)-*ortogonal simetrik* çözümü

$$X=\begin{pmatrix} -0.3611 & 0.1639 & -0.1055 & -0.1320 & -0.0473 & 0.0989 \\ 0.1639 & 0.0702 & -0.0493 & -0.0919 & -0.1786 & -0.1073 \\ -0.1055 & -0.0493 & 0.0260 & -0.1016 & -0.0889 & -0.1362 \\ 0.1320 & 0.0919 & 0.1016 & -0.0763 & 0.7916 & 0.5744 \\ -0.0473 & -0.1786 & -0.0889 & -0.7916 & 3.0676 & 1.3081 \\ -0.0989 & 0.1073 & 0.1362 & 0.5744 & -1.3081 & -0.8052 \end{pmatrix}$$

matrisi olarak bulunur. $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} (QB)^T \otimes (AP) \\ (AP)\otimes(QB)^T \end{pmatrix}$, $g=\begin{pmatrix} vec(C) \\ vec(C^T) \end{pmatrix}$, $Y=PXQ$ ve $y=vec(Y)$ olmak üzere $A_1=\mathrm{A}^T\mathrm{A}$ ve $g_1=\mathrm{A}^T g$ denilsin. Bu durumda $AXB=C$ matris denkleminin normal denklemleri $A_1 y=g_1$ olmak üzere $\|AXB-C\|=1.3147$, $\|X-X_0\|=13.6252$ ve $\|A_1 y-g_1\|=1.1854\text{e-}11$ olarak bulunur.

Örnek 3.4.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -4 & -4 & 2 \\ 1 & -3 & -1 & 1 & 1 & -4 \\ -3 & -5 & -1 & 0 & -3 & 2 \\ -5 & -4 & 5 & 5 & -5 & 0 \\ 4 & -3 & 3 & 3 & 1 & -5 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 5 & 3 \\ 4 & 5 & -4 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & -4 \\ -1 & -2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -4 & -1 \\ -3 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ -4 & 4 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & -2 & -3 \\ -3 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix},\quad X_0=\begin{pmatrix} 0 & -1.5 & -1.5 & -1 & 0 & -1.5 \\ 1.5 & 0 & -0.5 & 1 & 2.5 & 0 \\ 1.5 & 0.5 & 0 & -0.5 & -1.5 & 1 \\ 1 & -1 & 0.5 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2.5 & 1.5 & 2 & 0 & -1.5 \\ 1.5 & 0 & -1 & 2 & 1.5 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&-1&0&0&0\\0&0&0&-1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{pmatrix},\quad Q=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&-1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&-1\end{pmatrix}$$

olmak üzere Algoritma 3.2 kullanılarak, Problem 3.4'ün (P,Q)*-ortogonal ters-simetrik* çözümü

$$X=\begin{pmatrix}-0.0000&0.1491&0.0731&-0.0204&-0.1807&0.1656\\-0.1491&0.0000&-0.0276&0.2880&0.1096&-0.0704\\-0.0731&0.0276&-0.0000&0.2410&-0.0533&0.0760\\-0.0204&0.2880&0.2410&0.0000&-0.2477&0.4148\\0.1807&-0.1096&0.0533&-0.2477&0.0000&0.1263\\0.1656&-0.0704&0.0760&-0.4148&0.1263&-0.0000\end{pmatrix}$$

matrisi olarak bulunur. $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}(QB)^T\otimes(AP)\\(AP)\otimes(QB)^T\end{pmatrix}$, $g=\begin{pmatrix}vec(C)\\vec(-C^T)\end{pmatrix}$, $Y=PXQ$ ve $y=vec(Y)$ olmak üzere $A_1=\mathrm{A}^T\mathrm{A}$ ve $g_1=\mathrm{A}^Tg$ denilsin. Bu durumda $AXB=C$ matris denkleminin normal denklemleri $A_1y=g_1$ olmak üzere $\|AXB-C\|=7.7696$, $\|X-X_0\|=7.8860$ ve $\|A_1y-g_1\|=2.5960\text{e-}12$ olarak bulunur.

Şimdi literatürdeki çalışmalardan alınan örnekler için karşılaştırmalı bir tablo verilecektir. Bu tabloda, literatürde benzer problemlere matris ayrışımları veya iteratif yöntemlerle çözüm arayan mevcut çalışmalardaki örnekleri, bu çalışmada verilen algoritma ile tekrar çözüp bulunan sonuçlar ve daha önceki sonuçlar karşılaştırmalı olarak verilmiştir.

Tablo 3.2. Sonuçların Karşılaştırmalı Tablosu II

NORMLAR	Örnek 3.1 [9]	Örnek 1 [10]	Örnek 4.1 [18]	Örnek 4.2 [18]
$\|AXB-C\|$	179.0445 179.0445	0 2.3595e-12	2.5165 1.3734	2.6037 2.6036
$\|X-X_0\|$	16.7482 16.7482	17.6635 17.6635	2.5409 2.9980	60.9637 60.9128
$\|A_1y-g_1\|$	5.0700 3.9208e-10	0 1.3583e-09	23.7777 4.5113e-14	0.1250 5.2939e-13

Tabloda her bir hücredeki ilk değer referans alınan çalışmadaki sonucu, ikinci değer ise bu çalışmadaki yöntem ile elde edilen sonucu göstermektedir. $AXB=C$ lineer matris denkleminin normal denklemlerinin kalan vektörünün büyüklüğü $\|A_1y-g_1\|$ olmak üzere, tabloda son satırdaki değerler beklenildiği üzere sıfıra çok yakın olarak bulunmuştur. [10] makalesindeki Örnek 1 ile [18] makalesindeki Örnek 4.2 için burada elde edilen sonuçlar ile makalelerdeki sonuçlar aynıdır. [9] makalesindeki Örnek 3.1 için ise, $\|A_1y-g_1\|$'nin değerinde kayda değer farklılık vardır. Teorem 2.11'den de biliyoruz ki bir vektörün en küçük kareler çözümü olmasının gerek ve yeter koşulu normal denklemlerini sağlamasıdır. Bu durum göz önüne alındığında ise bulunan çözümün en iyi yaklaşık çözüm dolayısıyla bir en küçük kareler çözümü olması için $\|A_1y-g_1\|$ ifadesinin değeri, bilgisayar hesaplamalarından kaynaklanan hata payı hariç tutulmak üzere sıfır çıkmalıdır. Benzer şekilde [18] makalesindeki Örnek 4.1 için referans alınan çalışmadaki sonuç için $\|A_1y-g_1\|=23.7777$ olarak hesaplanırken, bu çalışmada verilen algoritma ile elde edilen sonuç için $\|A_1y-g_1\|=4.5113e-14$ olarak hesaplanmıştır.

BÖLÜM 4. KUATERNİYON MATRİS DENKLEMLERİ İÇİN MATRİS YAKINLIK PROBLEMİ

4.1. Giriş

Bu bölümde, minimum kalan problemi ve matris yakınlık problemi, $(AXB, CXD) = (E, F)$ matris denklemi için matrislerin kuaterniyon olması durumunda ele alınacaktır. Öncelikle kuaterniyon matrisler ile ilgili bazı temel tanımlar ve notasyonlar tanıtılacaktır.

Kuaterniyonlar kümesi, ilk defa İrlandalı matematikçi Sir William Rowan Hamilton tarafından 1843 yılında tanımlanmıştır ve karmaşık sayılar cisminin genişlemesi olan bir yarı cisimdir. Şimdi bu yarı cisim tanıtılacaktır.

a_0, a_1, a_2, a_3 reel sayılar ve

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1,$$

$$ij = -ji = k,\ jk = -kj = i,\ ki = -ik = j,$$

olmak üzere bir a kuaterniyon sayısı tek türlü olarak $a = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$ şeklinde ifade edilir. Ayrıca, $c_1 = a_0 + a_1 i$ ve $c_2 = a_2 + a_3 i$ olmak üzere bir a kuaterniyon sayısı iki karmaşık sayının toplamı olarak $a = c_1 + c_2 j$ biçiminde de yazılabilir. Bir a kuaterniyon sayısının reel kısmı $\mathrm{Re}(a) = a_0$, sanal kısmı $\mathrm{Im}(a) = a_1 i + a_2 j + a_3 k$, eşleniği $\overline{a} = a_0 - a_1 i - a_2 j - a_3 k$ ve normu $\|a\| = \sqrt{a\overline{a}} = \sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ biçiminde tanımlanır.

Benzer şekilde, bir $A_{m\times n}$ kuaterniyon matrisi, $\mathrm{A}_0,\ \mathrm{A}_1,\ \mathrm{A}_2,\ \mathrm{A}_3 \in \mathbb{R}_{m\times n}$ olmak üzere, tek türlü olarak

$$A = \mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_1 i + \mathrm{A}_2 j + \mathrm{A}_3 k$$

veya $A_1 = \mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_1 i \in \mathbb{C}_{m\times n}$ ve $A_2 = \mathrm{A}_2 + \mathrm{A}_3 i \in \mathbb{C}_{m\times n}$ olmak üzere, tek türlü olarak

$$A = A_1 + A_2 j$$

biçiminde de ifade edilir. $A_{m\times n}$ kuaterniyon matrisinin eşleniği $\overline{A} = \mathrm{Re}(A_1) - \mathrm{Im}(A_1)i - \mathrm{Re}(A_2)\, j - \mathrm{Im}(A_2)k$ şeklinde tanımlanır. Bir A kuaterniyon matrisinin karmaşık gösterim matrisi $f\left(A\right)$ ile gösterilir ve

$$f\left(A\right) = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ -\overline{A_2} & \overline{A_1} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}_{2m\times 2n}$$

biçiminde tanımlanır. Bu gösterim tek türlüdür. Bir a kuaterniyon sayısı, $c_1,\ c_2 \in \mathbb{C}$ olmak üzere "$\cong$" sembolü kullanılarak $\vec{a} \in \mathbb{C}^2$ karmaşık vektörü ile

$$c_1 + c_2 j = a \cong \vec{a} = (c_1, c_2)$$

biçiminde gösterilsin. Benzer gösterim, $A_1,\ A_2 \in \mathbb{C}_{m\times n}$ olmak üzere $A = A_1 + A_2 j \in \mathrm{H}_{m\times n}$ matrisi için

$$A_1 + A_2 j = A \cong A = (A_1, A_2)$$

biçiminde yapılır. Bu gösterimler göz önüne alındığında

$$vec\left(A_1\right)+vec\left(A_2\right)j=vec\left(A\right)\cong vec\left(A\right)=\begin{pmatrix} vec\left(A_1\right) \\ vec\left(A_2\right) \end{pmatrix}$$

eşitliği yazılabilir. $\vec{A}=(Re(A_1),Im(A_1),Re(A_2),Im(A_2))$ olsun. Bu durumda

$$vec\left(\vec{A}\right)=\begin{pmatrix} vec\left(Re(A_1)\right) \\ vec\left(Im(A_1)\right) \\ vec\left(Re(A_2)\right) \\ vec\left(Im(A_2)\right) \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

olur. $A=A_1+A_2 j$ ve $B=B_1+B_2 j$ kuaterniyon matrisler olmak üzere, iki kuaterniyon matrisin toplamı ve çarpımı sırasıyla

$$\left(A_1+B_1\right)+\left(A_2+B_2\right)j=\left(A+B\right)\cong A+B=\left(A_1+B_1,A_2+B_2\right)$$

ve

$$\left(A_1+A_2 j\right)\left(B_1+B_2 j\right)=AB\cong AB=\left(A_1B_1-A_2\overline{B_2}\right)+\left(A_1B_2-A_2\overline{B_1}\right)j$$

şeklinde tanımlıdır [42]. Lee tarafından verilen *merkezi-hermityen* ve *ters-merkezi-hermityen* matris tanımları aşağıdaki gibidir.

Tanım 4.1. $A=\left(a_{ij}\right)\in\mathbb{C}_{m\times n}$ matrisine, eğer $a_{ij}=\overline{a}_{m-i+1,n-j+1}$, $1\le i\le m,\ 1\le j\le n,$ ise *merkezi-hermityen* matris, eğer $a_{ij}=-\overline{a}_{m-i+1,n-j+1}$, $1\le i\le m,\ 1\le j\le n,$ ise *ters-merkezi-hermityen* matris denir [64].

Bu tanım çerçevesinde, *kuaterniyon merkezi-hermityen* ve *kuaterniyon ters-merkezi-hermityen* matris aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 4.2. $A=\left(a_{ij}\right)\in \mathrm{H}_{m\times n}$ matrisine, eğer $a_{ij}=\overline{a}_{m-i+1,n-j+1},\ 1\le i\le m,\ 1\le j\le n,$ ise *kuaterniyon merkezi-hermityen* matris, eğer $a_{ij}=-\overline{a}_{m-i+1,n-j+1},\ 1\le i\le m,\ 1\le j\le n,$ ise *kuaterniyon ters-merkezi-hermityen* matris denir. Burada $\overline{a}$ ile a kuaterniyon sayısının eşleniği kastedilmektedir.

$e_l,\ I_k$ matrisinin l. sütunu ve $J_k=\left(e_k,e_{k-1},\dots,e_1\right)$ olsun. Bu durumda, literatürdeki mevcut tanımlamalar dikkate alındığında, eğer bir $A\in \mathrm{H}_{m\times n}$ matrisi *kuaterniyon merkezi-hermityen* matris ise

$$J_m A J_n=\overline{A}, \tag{4.2}$$

kuaterniyon ters-merkezi-hermityen matris ise

$$J_m A J_n=-\overline{A} \tag{4.3}$$

eşitliklerinin sağlandığına ve tersinine (4.2) ve (4.3) eşitlikleri sağlanıyorsa, $A\in \mathrm{H}_{m\times n}$ matrisine sırasıyla *kuaterniyon merkezi-hermityen* matris ve *kuaterniyon ters-merkezi-hermityen* matris denileceğine dikkat ediniz.

4.2. $\left(AXB,CXD\right)=\left(E,F\right)$ Kuaterniyon Matris Denkleminin *Kuaterniyon Merkezi-Hermityen* ve *Kuaterniyon Ters-Merkezi-Hermityen* Çözümleri

$A=\left(a_{ij}\right)\in \mathrm{H}_{m\times n}$ matrisi için $a_k=\left[a_{1k}\ a_{2k}\ \dots\ a_{mk}\right]^T,\ k=1,2,\dots,n,$ olsun. $r=\left[\dfrac{n+1}{2}\right]$ olmak üzere $vec_r\left(A\right)$

$$vec_r\left(A\right)=\left[a_1^T\ a_2^T\ \dots\ a_{r-1}^T\ a_r^T\right]^T$$

biçiminde tanımlansın. $vec_r\left(A\right)$ ile, A matrisinin ilk r sütunundan oluşan matrise vec operatörü uygulanması ile elde edilen vektörün gösterildiğine dikkat etmek gerekir. $vec_{\Phi}\left(\vec{A}\right)$

$$vec_{\Phi}\left(\vec{A}\right)=\begin{pmatrix} vec_r\left(Re(A_1)\right) \\ vec_r\left(Im(A_1)\right) \\ vec_r\left(Re(A_2)\right) \\ vec_r\left(Im(A_2)\right) \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda

$$\left\|vec\left(A\right)\right\|=\left\|vec\left(A\right)\right\|=\left\|vec\left(\vec{A}\right)\right\|$$

eşitliğinin doğru olduğu görülür.

Bundan sonra Ω sembolü ya $\mathrm{H}_{p\times q}^{CH}$ ya da $\mathrm{H}_{p\times q}^{SCH}$ kümelerinden birini gösterecektir. Aşağıdaki problemleri ele alalım.

Problem 4.1. $A\in \mathrm{H}_{m_1\times p}$, $B\in \mathrm{H}_{q\times n_1}$, $C\in \mathrm{H}_{m_1\times n_1}$, $D\in \mathrm{H}_{m_2\times p}$, $E\in \mathrm{H}_{q\times n_2}$, ve $F\in \mathrm{H}_{m_2\times n_2}$ olsun. Bu durumda,

$$\left\|AXB-C\right\|+\left\|DXE-F\right\|=\min_{X\in\Omega}\left\{\left\|AXB-C\right\|+\left\|DXE-F\right\|\right\}$$

olacak şekilde $X\in\Omega$ matrisini bulmak.

Problem 4.2. S_{E_X}, Problem 4.1'in çözüm kümesi olmak üzere verilen bir $X_0\in \mathrm{H}_{p\times q}$ matrisi için,

$$\left\| X - X_0 \right\| = \min_{X \in S_{E_X}} \left\| X - X_0 \right\|$$

olacak şekilde $X \in S_{E_X}$ matrisini bulmak.

Bu bölümde, Problem 4.1 ve Problem 4.2’nin *kuaterniyon merkezi-hermityen* ve *kuateniyon ters-merkezi-hermityen* çözümleri ele alınacaktır.

$S = \left(s_{ij} \right) \in \mathbb{Q}^{p \times q}$ *merkezi-hermityen (ters-merkezi-hermityen)* matrisi ele alınsın. Satır ve sütun sayıları göz önüne alındığında vektör notasyonu ile, $S_{p \times q}$ matrisi aşağıdaki biçimlerde ifade edilebilir.

Durum I. Eğer q çift sayı (p çift veya tek sayı) ise,

$$\begin{aligned} S = {} & \sum_{i=1}^{p} s_{i1}(e_i, 0, \ldots, 0, \pm e_{p+1-i}) + \sum_{i=1}^{p} s_{i2}(0, e_i, 0, \ldots, 0, \pm e_{p+1-i}, 0) + \ldots \\ & + \sum_{i=1}^{p} s_{i,r-1}(0, \ldots, 0, e_i, 0, 0, \pm e_{p+1-i}, 0, \ldots, 0) + \sum_{i=1}^{p} s_{ir}(0, \ldots, 0, e_i, \pm e_{p+1-i}, 0, \ldots, 0), \end{aligned} \tag{4.4}$$

Durum II. Eğer q tek sayı ve p çift sayı ise,

$$\begin{aligned} S = {} & \sum_{i=1}^{p} s_{i1}(e_i, 0, \ldots, 0, \pm e_{p+1-i}) + \sum_{i=1}^{p} s_{i2}(0, e_i, 0, \ldots, 0, \pm e_{p+1-i}, 0) + \ldots \\ & + \sum_{i=1}^{p} s_{i,r-1}(0, \ldots, 0, e_i, 0, \pm e_{p+1-i}, 0, \ldots, 0) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{p} s_{ir}(0, \ldots, 0, e_i + \pm e_{p+1-i}, 0, \ldots, 0), \end{aligned} \tag{4.5}$$

Durum III. Eğer q ve p tek sayı ise,

$$
\begin{aligned}
S = & \sum_{i=1}^{p} s_{i1}(e_i, 0, \ldots, 0, \pm e_{p+1-i}) + \sum_{i=1}^{p} s_{i2}(0, e_i, 0, \ldots, 0, \pm e_{p+1-i}, 0) + \ldots \\
& + \sum_{i=1}^{p} s_{i,r-1}(0, \ldots, 0, e_i, 0, \pm e_{p+1-i}, 0, \ldots, 0) \\
& + \frac{1}{2}\Big(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq \left(\frac{p+1}{2}\right)}}^{p} s_{ir}(0, \ldots, 0, e_i \pm e_{p+1-i}, 0, \ldots, 0)\Big) + s_{\left(\frac{p+1}{2}\right), r}(0, \ldots, 0, e_{\left(\frac{p+1}{2}\right)}, 0, \ldots, 0).
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

Burada e_l, I_p matrisinin l. sütununu, 0 $p \times 1$ boyutlu sıfır vektörünü ve r, $\left(\frac{q+1}{2}\right)$ sayısını göstermektedir. (4.4), (4.5) ve (4.6) denklemlerinde, eğer S matrisi *merkezi-simetrik* bir matris ise "$\pm$" sembolü "$+$" işareti anlamına, *ters-merkezi-simetrik* bir matris ise "$-$" işareti anlamına gelir.

Bir kuaterniyon matrisin, *kuaterniyon merkezi-hermityen* veya *kuaterniyon ters-merkezi-hermityen* olup olmadığını test etmek için bir kriter ortaya koyan teoremi vermeden önce teoremin ifadesinde geçen K^+ ve K^- blok matrislerini tanıtalım.

K^+ ve K^- matrisleri $\left[K_1^{\pm}, K_2^{\pm}, \ldots, K_r^{\pm}\right]$ biçimindeki blok matrisler olmak üzere $pq \times p$ boyutlu $K_j^{\pm}$ matrislerinin i. sütunu $K_j^{i^{\pm}}$, $i = 1, 2, \ldots, p$, $j = 1, 2, \ldots, r$, ile gösterilsin. $K_j^{i^{\pm}}$, $i = 1, 2, \ldots, p$, $j = 1, 2, \ldots, r$, aşağıdaki şekilde tanımlanır:

Durum I. $j < r$ ise,

$$K_j^{i^{\pm}} = e_{i+(j-1)p} \pm e_{pq-(i-1)-(j-1)p}.$$

Durum II. $j = r$ ise,

i. q çift sayı (p çift veya tek sayı) olduğunda $K_r^{i^{\pm}} = e_{i+(r-1)p} \pm e_{pq-(i-1)-(r-1)p}$,

ii. q tek sayı ve p çift sayı olduğunda $K_r^{i^{\pm}} = \frac{1}{2}(e_{i+(r-1)p} \pm e_{pq-(i-1)-(r-1)p})$,

iii. q ve p tek sayı olduğunda $i \neq \left[\frac{p+1}{2}\right]$ için

$K_r^{i^{\pm}} = \frac{1}{2}(e_{i+(r-1)p} \pm e_{pq-(i-1)-(r-1)p})$ ve $i = \left[\frac{p+1}{2}\right]$ için $K_r^{i^{\pm}} = e_r$

şeklindedir. Burada e_l, I_p matrisinin l. sütunudur. Ayrıca, "$\pm$" sembolünün yalnızca "$+$" işaretini veya yalnızca "$-$" işaretini gösterdiğini, yani bu işaretlerden biri kullanıldığında tüm işaretlerin onunla aynı olduğunu hatırlatmakta yarar vardır. Diğer deyişle eğer onlardan biri "$+$" işareti ise hepsi "$+$" işareti olmalı, örneğin, $K^{+} = \left[K_1^{+}, K_2^{+}, \ldots, K_r^{+}\right]$ gibi.

Şimdi sıradaki teoremi verelim.

Teorem 4.1. $X_1,\ X_2 \in \mathbb{C}_{p\times q}$ ve $X = X_1 + X_2 j \in \mathrm{H}_{p\times q}$ olsun. Bu durumda,

$$X \in \mathrm{H}_{p\times q}^{CH} \Leftrightarrow vec(X) = K^{+}vec_r(\mathrm{Re}(X_1)) + K^{-}vec_r(\mathrm{Im}(X_1))i + K^{-}vec_r(\mathrm{Re}(X_2))j + K^{-}vec_r(\mathrm{Im}(X_2))k$$

ve

$$X \in \mathrm{H}_{p\times q}^{SCH} \Leftrightarrow vec(X) = K^{-}vec_r(\mathrm{Re}(X_1)) + K^{+}vec_r(\mathrm{Im}(X_1))i + K^{+}vec_r(\mathrm{Re}(X_2))j + K^{+}vec_r(\mathrm{Im}(X_2))k$$

dır. Burada K^{+} ve K^{-} matrisleri yukarıda tanımlandığı gibidir.

İspat. $X = \mathrm{Re}(X_1) + \mathrm{Im}(X_1)i + \mathrm{Re}(X_2)j + \mathrm{Im}(X_2)k \in \Omega$ olsun. S matrisi $\mathrm{Re}(X_1)$, $\mathrm{Im}(X_1)$, $\mathrm{Re}(X_2)$, $\mathrm{Im}(X_2)$ matrislerinden birini göstersin. $X \in \mathrm{H}_{p\times q}^{CH}$ için S matrisi

$\mathrm{Re}\left(X_1\right)$ matrisini gösteriyorsa "$\pm$" sembolü yerine "$+$" işareti, eğer S matrisi $\mathrm{Im}(X_1),\ \mathrm{Im}(X_2),\ \mathrm{Re}(X_2)$ matrislerinden birini gösteriyor ise "$\pm$" sembolü yerine "$-$" işareti alınır. $X \in \mathrm{H}_{p\times q}^{SCH}$ için ise işaretler söylendiği sıranın tersine kullanılır. Böylece "$\pm$" sembolü "$+$" alındığında

$$vec(S) = K^{+} vec_r(S)$$

ve "$-$" işareti olarak alındığında

$$vec(S) = K^{-} vec_r(S)$$

olduğu görülür. Böylece ispat tamamlanır. □

Teorem 4.2. Her $X = X_1 + X_2 j \in \Omega$ matrisi için

$$\begin{pmatrix} vec\left(X\right) \\ vec\left(-jXj\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & iI & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & iI \\ I & -iI & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & -iI \end{pmatrix} W vec_{\Phi}\left(\vec{X}\right) \tag{4.7}$$

eşitliği doğrudur. (4.7) eşitliğindeki W matrisi $X \in \mathrm{H}_{p\times q}^{CH}$ olduğunda $W = diag\left(K^{+}, K^{-}, K^{-}, K^{-}\right)$ ve $X \in \mathrm{H}_{p\times q}^{SCH}$ olduğunda $W = diag\left(K^{-}, K^{+}, K^{+}, K^{+}\right)$ şeklindedir.

İspat. $X \in \mathrm{H}_{p\times q}^{CH}$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{pmatrix} vec(X) \\ vec(-jXj) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} vec(X_1) \\ vec(X_2) \\ vec(\overline{X_1}) \\ vec(\overline{X_2}) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} vec(X_1) \\ vec(\overline{X_1}) \\ vec(X_2) \\ vec(\overline{X_2}) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} I & iI & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & iI \\ I & -iI & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & -iI \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K^+ & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K^- & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K^- & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} vec_r\left(\mathrm{Re}(X_1)\right) \\ vec_r\left(\mathrm{Im}(X_1)\right) \\ vec_r\left(\mathrm{Re}(X_2)\right) \\ vec_r\left(\mathrm{Im}(X_2)\right) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} I & iI & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & iI \\ I & -iI & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & -iI \end{pmatrix} W vec_{\Phi}\left(\vec{X}\right)$$

şeklindedir. Dolayısıyla iddia doğrudur. İspat $X \in \mathrm{H}_{p\times q}^{SCH}$ olması durumunda benzer şekilde yapılır. $\square$

Kuaterniyonlar yarı cismi çarpma işlemi altında değişmeli olmadığından, karmaşık matrisler kümesinde sağlanan

$$vec(ABC) = \left(C^T \otimes A\right) vecB \tag{4.8}$$

eşitliği, kuaterniyon matrisler kümesinde sağlanmaz. Diğer taraftan, $A = A_1 + A_2 j \in \mathrm{H}_{m\times p}$, $X = X_1 + X_2 j \in \mathrm{H}_{p\times q}$ ve $B = B_1 + B_2 j \in \mathrm{H}_{q\times n}$ olmak üzere,

$$vec\left(AXB\right) = (f(B)^T \otimes A_1, f(Bj)^* \otimes A_2)\begin{pmatrix} vec\left(X\right) \\ vec\left(-jXj\right) \end{pmatrix} \tag{4.9}$$

eşitliği vardır [41]. Teorem 4.2'den $X = X_1 + X_2 j \in \Omega$ için $vec\left(AXB\right)$ vektörü,

$$vec\left(AXB\right) = (f(B)^T \otimes A_1, f(Bj)^* \otimes A_2)\begin{pmatrix} I & iI & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & iI \\ I & -iI & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & -iI \end{pmatrix} W vec_{\Phi}\left(\vec{X}\right) \tag{4.10}$$

biçiminde yazılabilir. (4.10) eşitliğindeki W matrisinin, $X \in \mathrm{H}_{p\times q}^{CH}$ için $W = diag\left(K^+, K^-, K^-, K^-\right)$ ve $X \in \mathrm{H}_{p\times q}^{SCH}$ için $W = diag\left(K^-, K^+, K^+, K^+\right)$ biçiminde olduğuna dikkat ediniz.

Şimdi esas teorem verilmeden önce, basitlik açısından bazı ek gösterimler verelim.

$$Q_1 = (f(B)^T \otimes A_1, f(Bj)^* \otimes A_2)\begin{pmatrix} I & iI & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & iI \\ I & -iI & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & -iI \end{pmatrix}W,$$

$$Q_2 = (f(E)^T \otimes D_1, f(Ej)^* \otimes D_2)\begin{pmatrix} I & iI & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & iI \\ I & -iI & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & -iI \end{pmatrix}W,$$

$$Q_0 = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}, \; P_1 = Re(Q_0), \; P_2 = Im(Q_0),$$

$$e = \begin{pmatrix} vec\left(Re(C)\right) \\ vec\left(Re(F)\right) \\ vec\left(Im(C)\right) \\ vec\left(Im(F)\right) \end{pmatrix} \tag{4.11}$$

olsun. Burada $A = A_1 + A_2 j \in \mathrm{H}_{m_1 \times p}$, $B = B_1 + B_2 j \in \mathrm{H}_{q \times n_1}$, $C = C_1 + C_2 j \in \mathrm{H}_{m_1 \times n_1}$, $D = D_1 + D_2 j \in \mathrm{H}_{m_2 \times p}$, $E = E_1 + E_2 j \in \mathrm{H}_{q \times n_2}$ ve $F = F_1 + F_2 j \in \mathrm{H}_{m_2 \times n_2}$ ’dir. Ayrıca W matrisi Teorem 4.2’nin ifadesinde açıklandığı gibidir.

Teorem 4.3. $A \in \mathrm{H}_{m_1 \times p}$, $B \in \mathrm{H}_{q \times n_1}$, $C \in \mathrm{H}_{m_1 \times n_1}$, $D \in \mathrm{H}_{m_2 \times p}$, $E \in \mathrm{H}_{q \times n_2}$ ve $F \in \mathrm{H}_{m_2 \times n_2}$ bilinen matrisler olsun. Bu durumda $X_0 \in \mathrm{H}_{p \times q}$ verilen bir matris ve h uygun boyutlu herhangi bir vektör olmak üzere,

$$vec\left(\overrightarrow{X}\right) = W\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}^{+} e + W\left(I - \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}^{+}\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}\right)h$$

olacak şekildeki X matrisi Problem 4.1 için bir çözümdür. Bundan başka,

$$vec\left(\overrightarrow{X}\right) = W\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}^{+} e + W\left(I - \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}^{+}\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}\right) vec_{\Phi}(X_0)$$

olacak şekildeki X matrisi Problem 4.2'nin çözümüdür. Burada W matrisi, Teorem 4.2'nin ifadesinde açıklandığı gibidir.

İspat. Ω kümesi üzerinde $\|AXB-C\|+\|DXE-F\|$ ifadesini göz önüne alalım. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
\|AXB-C\|+\|DXE-F\| &= \|vec(AXB)-vec(C)\|+\|vec(DXE)-vec(F)\| \\
&= \left\|vec\left(AXB\right)-vec\left(C\right)\right\|+\left\|vec\left(DXE\right)-vec\left(F\right)\right\| \\
&= \left\| Q_0 vec_{\Phi}\left(\overrightarrow{X}\right) - \begin{pmatrix} vec\left(\vec{C}\right) \\ vec\left(\vec{F}\right) \end{pmatrix} \right\| \\
&= \left\| \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} vec_{\Phi}\left(\overrightarrow{X}\right) - e \right\|
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Dolayısıyla, Ω kümesi üzerinde $\|AXB-C\|+\|DXE-F\|$ ifadesini minimum yapmak, $\left\| \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} vec_{\Phi}\left(\vec{X}\right) - e \right\|$ ifadesini minimum yapmaya denktir. Öte yandan, Teorem 2.9'dan biliyoruz ki, h uygun boyutlu keyfi bir vektör olmak üzere, $A^{+}g+(I-A^{+}A)h$ biçimindeki her vektör $Ax=g$ tutarlı lineer denklemler sisteminin bir çözümüdür. Benzer şekilde, Teorem 2.10'dan $Ax=g$ lineer denklemler sistemi tutarsız ise, en küçük kareler çözümlerinin kümesi tamamen aynı biçimde ifade edilir ve Teorem 2.12'den $Ax=g$ lineer denklemler sisteminin en iyi yaklaşık çözümü $A^{+}g$ biçimindedir. Sonuç olarak, $\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} vec_{\Phi}\left(\vec{X}\right) = e$ lineer denklemler sisteminin tutarlı olması durumunda genel çözüm ile tutarsız olması durumunda en küçük kareler çözümü,

$$vec_{\Phi}\left(\overrightarrow{X}\right) = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}^{+} e + \left(I - \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}^{+} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} \right) h \tag{4.12}$$

şeklindedir. Teorem 3.1 ve Teorem 3.2 göz önüne alındığında $\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} vec_{\Phi}\left(\vec{X}\right) = e$ lineer denklemler sisteminin $\left\| vec_{\Phi}\left(X\right) - vec_{\Phi}\left(X_0\right) \right\|$ değeri en küçük olacak şekildeki $vec_{\Phi}\left(\overrightarrow{X}\right)$ çözüm vektörü,

$$vec_{\Phi}\left(\overrightarrow{X}\right) = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}^{+} e + \left(I - \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}^{+} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} \right) vec_{\Phi}(X_0) \tag{4.13}$$

olarak elde edilir. $vec(\cdot) = W vec_{\Phi}(\cdot)$ eşitliği göz önüne alınırsa, (4.12) ve (4.13) yerine sırasıyla,

$$vec\left(\overrightarrow{X}\right) = W \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}^{+} e + W \left(I - \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}^{+} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} \right) h \tag{4.14}$$

ve

$$vec\left(\overrightarrow{X}\right) = W \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}^{+} e + W \left(I - \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}^{+} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} \right) vec_{\Phi}(X_0) \tag{4.15}$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. □

4.2.1. Algoritma ve sayısal örnekler

Problem 4.1’in çözüm kümesi üzerinde Problem 4.2’nin çözümünü bulmak için bir algoritma aşağıdaki gibi verilebilir.

Algoritma 4.1.

Adım 1. $A \in \mathrm{H}_{m_1 \times p}$, $B \in \mathrm{H}_{q \times n_1}$, $C \in \mathrm{H}_{m_1 \times n_1}$, $D \in \mathrm{H}_{m_2 \times p}$, $E \in \mathrm{H}_{q \times n_2}$, $F \in \mathrm{H}_{m_2 \times n_2}$ ve $X_0 \in \mathrm{H}_{p \times q}$ matrislerini giriniz.

Adım 2.

i. q çift sayı (p çift veya tek sayı) ise K^+ ve K^- matrislerini

$$K^+ = \begin{pmatrix} I_{p\left\lfloor \frac{q+1}{2} \right\rfloor} \\ J_{p\left\lfloor \frac{q+1}{2} \right\rfloor} \end{pmatrix}, \; K^- = \begin{pmatrix} I_{p\left\lfloor \frac{q+1}{2} \right\rfloor} \\ -J_{p\left\lfloor \frac{q+1}{2} \right\rfloor} \end{pmatrix}$$

şeklinde oluşturunuz.

ii. q tek sayı ve p çift sayı ise K^+ ve K^- matrislerini

$$K^+ = \begin{pmatrix} I_{p(\left\lfloor \frac{q+1}{2} \right\rfloor - 1)} & 0_{p(\left\lfloor \frac{q+1}{2} \right\rfloor - 1), \frac{p}{2}} & 0_{p(\left\lfloor \frac{q+1}{2} \right\rfloor - 1), \frac{p}{2}} \\ 0_{\frac{p}{2}, p(\left\lfloor \frac{q+1}{2} \right\rfloor - 1)} & I_{\frac{p}{2}} & J_{\frac{p}{2}} \\ 0_{\frac{p}{2}, p(\left\lfloor \frac{q+1}{2} \right\rfloor - 1)} & J_{\frac{p}{2}} & I_{\frac{p}{2}} \\ J_{p(\left\lfloor \frac{q+1}{2} \right\rfloor - 1)} & 0_{p(\left\lfloor \frac{q+1}{2} \right\rfloor - 1), \frac{p}{2}} & 0_{p(\left\lfloor \frac{q+1}{2} \right\rfloor - 1), \frac{p}{2}} \end{pmatrix},$$

$$K^{-}=\begin{pmatrix} I_{p\left(\left\lfloor\frac{q+1}{2}\right\rfloor-1\right)} & 0_{p\left(\left\lfloor\frac{q+1}{2}\right\rfloor-1\right),\frac{p}{2}} & 0_{p\left(\left\lfloor\frac{q+1}{2}\right\rfloor-1\right),\frac{p}{2}} \\ 0_{\frac{p}{2},p\left(\left\lfloor\frac{q+1}{2}\right\rfloor-1\right)} & I_{\frac{p}{2}} & J_{\frac{p}{2}} \\ 0_{\frac{p}{2},p\left(\left\lfloor\frac{q+1}{2}\right\rfloor-1\right)} & -J_{\frac{p}{2}} & I_{\frac{p}{2}} \\ -J_{p\left(\left\lfloor\frac{q+1}{2}\right\rfloor-1\right)} & 0_{p\left(\left\lfloor\frac{q+1}{2}\right\rfloor-1\right),\frac{p}{2}} & 0_{p\left(\left\lfloor\frac{q+1}{2}\right\rfloor-1\right),\frac{p}{2}} \end{pmatrix}$$

şeklinde oluşturunuz.

iii. q ve p tek sayı ise K^{+} ve K^{-} matrislerini

$$K^{+}=\begin{pmatrix} I_{p\left(\left\lfloor\frac{q+1}{2}\right\rfloor-1\right)} & 0_{p\left(\left\lfloor\frac{q+1}{2}\right\rfloor-1\right),\frac{p-1}{2}} & 0_{p\left(\left\lfloor\frac{q+1}{2}\right\rfloor-1\right),1} & 0_{p\left(\left\lfloor\frac{q+1}{2}\right\rfloor-1\right),\frac{p-1}{2}} \\ 0_{\frac{p-1}{2},p\left(\left\lfloor\frac{q+1}{2}\right\rfloor-1\right)} & I_{\frac{p-1}{2}} & 0_{\frac{p-1}{2},1} & J_{\frac{p-1}{2}} \\ 0_{1,p\left(\left\lfloor\frac{q+1}{2}\right\rfloor-1\right)} & 0_{1,\frac{p-1}{2}} & I_1 & 0_{1,\frac{p-1}{2}} \\ 0_{\frac{p-1}{2},p\left(\left\lfloor\frac{q+1}{2}\right\rfloor-1\right)} & J_{\frac{p-1}{2}} & 0_{\frac{p-1}{2},1} & I_{\frac{p-1}{2}} \\ J_{p\left(\left\lfloor\frac{q+1}{2}\right\rfloor-1\right)} & 0_{p\left(\left\lfloor\frac{q+1}{2}\right\rfloor-1\right),\frac{p-1}{2}} & 0_{p\left(\left\lfloor\frac{q+1}{2}\right\rfloor-1\right),1} & 0_{p\left(\left\lfloor\frac{q+1}{2}\right\rfloor-1\right),\frac{p-1}{2}} \end{pmatrix},$$

$$K^{-}=\begin{pmatrix} I_{p\left(\left\lfloor\frac{q+1}{2}\right\rfloor-1\right)} & 0_{p\left(\left\lfloor\frac{q+1}{2}\right\rfloor-1\right),\frac{p-1}{2}} & 0_{p\left(\left\lfloor\frac{q+1}{2}\right\rfloor-1\right),1} & 0_{p\left(\left\lfloor\frac{q+1}{2}\right\rfloor-1\right),\frac{p-1}{2}} \\ 0_{\frac{p-1}{2},p\left(\left\lfloor\frac{q+1}{2}\right\rfloor-1\right)} & I_{\frac{p-1}{2}} & 0_{\frac{p-1}{2},1} & J_{\frac{p-1}{2}} \\ 0_{1,p\left(\left\lfloor\frac{q+1}{2}\right\rfloor-1\right)} & 0_{1,\frac{p-1}{2}} & I_1 & 0_{1,\frac{p-1}{2}} \\ 0_{\frac{p-1}{2},p\left(\left\lfloor\frac{q+1}{2}\right\rfloor-1\right)} & -J_{\frac{p-1}{2}} & 0_{\frac{p-1}{2},1} & -I_{\frac{p-1}{2}} \\ -J_{p\left(\left\lfloor\frac{q+1}{2}\right\rfloor-1\right)} & 0_{p\left(\left\lfloor\frac{q+1}{2}\right\rfloor-1\right),\frac{p-1}{2}} & 0_{p\left(\left\lfloor\frac{q+1}{2}\right\rfloor-1\right),1} & 0_{p\left(\left\lfloor\frac{q+1}{2}\right\rfloor-1\right),\frac{p-1}{2}} \end{pmatrix}$$

şeklinde oluşturunuz.

Adım 3. Q_1, Q_2 matrislerini ve e vektörünü (4.11)'deki gibi oluşturunuz.

Adım 4. $Q_0 = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}$, $P_1 = \mathrm{real}(Q_0)$, $P_2 = \mathrm{imag}(Q_0)$, $P = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}$ ve W matrislerini oluşturunuz.

Adım 5. $vec\left(\overrightarrow{X}\right)$ vektörünü (4.15) eşitliğini kullanarak hesaplayınız.

Adım 6. $vec\left(\overrightarrow{X}\right)$ ifadesinden X matrisini yazınız.

Bu algoritmada W matrisi eğer *kuaterniyon merkezi-hermityen* çözüm bulunmak isteniyor ise $W = diag(K^+, K^-, K^-, K^-)$ şeklinde, eğer *kuaterniyon ters-merkezi-hermityen* çözüm bulmak isteniyor ise $W = diag(K^-, K^+, K^+, K^+)$ şeklindedir.

Bu kısım, Ω sembolünün sırasıyla H^{CH} ve H^{SCH} kümelerini temsil etmesi durumlarında Problem 4.2 ile ilgili örnekler verilerek tamamlanacaktır.

Örnek 4.1.

$$A = \begin{pmatrix} 4+5i-5j+5k & -2+3i+5j-3k & -5+2i-3k & 2+i-4j+k \\ 1+5j+2k & 1+i+3j+2k & 2+4j-4k & 1-4i+4j-4k \\ -3-5i-j+4k & 3+i-4j+3k & -1-4i+2j-4k & 1+3i-5j+3k \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1-2i+3k & 2-2i-2j+2k & 3-i-3j+4k & 5-3i+j-4k & 2i+3k \\ -4+2i-j-3k & 3+i+3j+k & 5+3k & -3-3i-2j+2k & -3+2i-5j-4k \\ 2+i+j & 4+4i-3j+3k & 2+3i-2j-4k & -3+5i-2j & -1+i-4j-3k \\ -1-4i+j-3k & 2+3i-5j+4k & 1-3i-3j-2k & 5-2k & -3-4i-4j-2k \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 3-5j-4k & -1+2i-5j-2k & -1-3i+3j+2k & -3j-4k & -2i+2j-2k \\ -1-2i-3j+k & -1+3i+3j+2k & 4+5i+3k & -1-i-j+5k & 4-i+4j+2k \\ -2-2i+2j & 2i+2j & 4+i+5j+2k & -2-4i+j-2k & -4+3i+4j-4k \end{pmatrix},$$

$$D=\begin{pmatrix} -2-2i+3j+4k & 1-i-5j-5k & -2-i-4j & -4-4i+j-2k \\ 2-4i+2j-4k & 2+i+2j+3k & 2-5i+3j+3k & 4+5i-4j+k \\ 2i+4j+4k & 4+5i+j-3k & 4-j+3k & 4+5i-3j \\ -2-4i+5j+4k & 2+i-5k & 5i+4j-2k & 3i-5j-3k \\ 5-4i-4j+4k & -4i+j-3k & 4+5i+3j+2k & i-3j-k \end{pmatrix},$$

$$E=\begin{pmatrix} 1-2i-4j+4k & 1+3i+3j+4k \\ 3+2i+2j-5k & 3+5i+2j+k \\ 2-2i-3j & 3+i+4j \\ -3-i+2j+k & -2-3i-3j-4k \end{pmatrix},$$

$$F=\begin{pmatrix} -2-5i+3j+2k & 4+4i-5j \\ 3-2i-5j-k & 2-5i+3j+k \\ 3-2i-4j+4k & -5-2i+2j-4k \\ -5-3i+4j-4k & 3i-4j-5k \\ 3 & 2+4i+3j-4k \end{pmatrix},$$

ve

$$X_0=\begin{pmatrix} 1-2i-j & -3-4i-2j-3k & -2-4i-3j-2k & -5-i-j+k \\ 1+5i+3j+k & k & -2-3j+3k & 1+3i-2k \\ 3+j-3k & 4+3i+j-2k & 3+5i+5j+3k & 3-3i-2j-k \\ 5+i+3j-k & -1+i-3j-4k & 2-4i-2j-k & 2+2i+2j-2k \end{pmatrix}$$

olmak üzere Algoritma 4.1 kullanılarak Problem 4.2’nin en iyi yaklaşık *kuaterniyon merkezi-hermityen* çözüm matrisi X ,

$$Re\left(X_1\right)=\begin{pmatrix} -0.020081 & -0.033105 & 0.0089247 & 0.010543 \\ 0.0023319 & 0.003897 & 0.015587 & 0.0026811 \\ 0.0026811 & 0.015587 & 0.003897 & 0.0023319 \\ 0.010543 & 0.0089247 & -0.033105 & -0.020081 \end{pmatrix},$$

$$Im\left(X_1\right)=\begin{pmatrix} -0.004434 & -0.004659 & -0.016538 & -0.0022072 \\ -0.0068364 & -0.030919 & -0.001048 & -0.00047578 \\ 0.00047578 & 0.001048 & 0.030919 & 0.0068364 \\ 0.0022072 & 0.016538 & 0.004659 & 0.004434 \end{pmatrix},$$

$$Re\left(X_2\right)=\begin{pmatrix} -0.0047598 & 0.0080693 & -0.036308 & 0.0032121 \\ 0.025124 & -0.013022 & 0.0063179 & 0.0035488 \\ -0.0035488 & -0.0063179 & 0.013022 & -0.025124 \\ -0.0032121 & 0.036308 & -0.0080693 & 0.0047598 \end{pmatrix},$$

$$Im\left(X_2\right)=\begin{pmatrix} -0.0017196 & -0.00090582 & -0.0082238 & -0.003943 \\ -0.01313 & -0.0037011 & 0.0092653 & -0.010334 \\ 0.010334 & -0.0092653 & 0.0037011 & 0.01313 \\ 0.003943 & 0.0082238 & 0.00090582 & 0.0017196 \end{pmatrix},$$

olacak şekildeki

$$X = \mathrm{Re}\left(X_1\right)+\mathrm{Im}\left(X_1\right)i+\mathrm{Re}\left(X_2\right)j+\mathrm{Im}\left(X_2\right)k$$

matrisidir. Buradan $\left\|AXB-C\right\|+\left\|DXE-F\right\|=35.7335$ ve $\left\|X-X_0\right\|=20.5249$ olarak hesaplanır.

Örnek 4.2.

$$A=\begin{pmatrix} 2-3i-2j-4k & i-j+2k & 3-4i+4j \\ 5+2j+k & -2+i+3j-2k & -3-4i-j-3k \end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix} 4-3j-4k & -3+2i-j+3k & 3+2i+4j+4k & 4-3i+3j+3k & 5-4i-j-2k \\ i+j-3k & -4-4i-3j+k & 3+i-2j+k & 2+i+5j+k & -5-i-3j-2k \\ -4i-k & -4+i+4j+k & -3+i+j-5k & 2-i+4j & -1-2i+3j \end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix} -3+4i-2k & -3-3i-j-4k & -3-4i+j+k & 3-3i-j-k & 3-2i+4j+4k \\ -5+3i+5j+3k & -2+5i+j & 1+2i+2j+2k & 3-3i+4j+2k & 2-3i+3j-4k \end{pmatrix},$$

$$D=\begin{pmatrix} -4+5i-j+2k & 5-2i-2j+5k & -4-2i-4j+4k \\ 4-2j+4k & 3+2i-4j-3k & -1+j+k \\ -1-i+5j-2k & 5+5i+j+3k & -5i-2j+2k \\ -1+5i+5k & -3+2i-3j+k & 1+4i-j+2k \end{pmatrix},$$

$$E=\begin{pmatrix} -1-3j-3k & 2i-2j \\ -2-3i-j+3k & 1+4i+5j-2k \\ -5-2i+4j+2k & -2+4i+j-5k \end{pmatrix},$$

$$F=\begin{pmatrix} -3-3i-5j+2k & -3+4i-j-2k \\ -1+3i-5j+2k & 3+i-3k \\ 1+5j & 4-4i+3j-k \\ 5-4i+2j+k & 4i-5j+4k \end{pmatrix},$$

ve

$$X_0=\begin{pmatrix} -3-2i-3j+k & -4+4i-2j+2k & 4-4i+3j-k \\ -1+2i-4j-3k & -4i-j+k & 2-2i+2j-3k \\ -2+4i+k & 3+3j-2k & -1+4i-j+3k \end{pmatrix}$$

olmak üzere Algoritma 4.1 kullanılarak Problem 4.2'nin en iyi yaklaşık *kuaterniyon ters-merkezi-hermityen* çözüm matrisi,

$$Re\left(X_1\right)=\begin{pmatrix} -0.0083773 & 0.007876 & 0.0144 \\ 0.019761 & 0.010424 & -0.019761 \\ -0.0144 & -0.007876 & 0.0083773 \end{pmatrix}$$

$$Im\left(X_1\right)=\begin{pmatrix} 0.024422 & -0.019287 & -0.018729 \\ 0.0028795 & 0.016155 & 0.0028795 \\ -0.018729 & -0.019287 & 0.024422 \end{pmatrix}$$

$$Re\left(X_2\right)=\begin{pmatrix} 0.011873 & 0.026716 & 0.0056265 \\ 0.012897 & -0.083791 & 0.012897 \\ 0.0056265 & 0.026716 & 0.011873 \end{pmatrix}$$

$$Im\left(X_2\right)=\begin{pmatrix} 0.032421 & 0.019194 & -0.0080128 \\ -0.025454 & -0.016904 & -0.025454 \\ -0.0080128 & 0.019194 & 0.032421 \end{pmatrix}$$

olacak şekildeki

$$X = \mathrm{Re}\left(X_1\right) + \mathrm{Im}\left(X_1\right)i + \mathrm{Re}\left(X_2\right)j + \mathrm{Im}\left(X_2\right)k$$

çözüm matrisidir. Buradan, $\left\|AXB-C\right\|+\left\|DXE-F\right\|=29.221$ ve $\left\|X-X_0\right\|=15.607$ olarak bulunur.

BÖLÜM 5. SONUÇLAR VE TARTIŞMALAR

Birinci bölümde çalışmada ele alınan problemler tanıtılmış ve literatür bilgisine değinilmiştir.

İkinci bölümde ise çalışma için gerekli temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölüm, iki kısımdan oluşmakta olup ilk kısımda $\left(A_1XB_1, A_2XB_2, \ldots, A_kXB_k\right) = \left(C_1, C_2, \ldots, C_k\right)$ lineer matris denkleminin verilen bir X_0 matrisine en yakın olacak şekildeki *simetrik* ve *ters-simetrik* X çözüm matrisi Moore-Penrose ters kavramı ve klasik lineer denklemler sistemine indirgeme yöntemi kullanılarak elde edilmiştir. Ele alınan problemde, matris denkleminin tutarlı olması durumunda genel çözümler kümesi üzerinden, tutarsız olması durumunda en küçük kareler çözümler kümesi üzerinden $\left\|X - X_0\right\|$ ifadesini minimum yapacak şekildeki çözüm matrisi bulunmuştur. Bunu yaparken ise, öncelikle matris denklemleri Kronecker çarpım yardımıyla klasik lineer denklemler sistemine dönüştürülmüş ve ilgili temel teoremler yardımıyla bu denklemler sisteminin çözümü bulunmuş ve elde edilen çözüm vektörü son olarak matris biçiminde yazılmıştır. Yapılan bu işlemler algoritmik olarak ifade edilmiş ve teorik olarak elde edilen çözümlerin doğruluğu örnekler ile sayısal olarak doğrulanmış ve karşılaştırmalı tablolar şeklinde gösterilmiştir.

İkinci kısımda ise $AXB = C$ lineer matris denkleminin $\left(P, Q\right)$*-ortogonal simetrik* ve $\left(P, Q\right)$*-ortogonal ters-simetrik* çözümleri yine Moore-Penrose ters ve klasik lineer matris denklemleri kullanılarak araştırılmıştır. Fakat, burada ilk kısımdan farklı olarak spektral ayrışım kavramından yararlanılmıştır. Spektral ayrışım kullanılmasının avantajı, ayrışımda ortaya çıkan ortogonal ve köşegen matrislerin bilgisayar algoritmasında hesaplamaları yaparken süre açısından kısalık sağlamasıdır. İkinci kısım, bir nevi birinci kısmın genelleştirilmişidir. Çünkü P ve Q matrislerinin yerine I birim matrisi alındığında problem *simetrik* ve *ters-simetrik* çözüm bulmaya dönüşür. Bu kısımda, elde edilen teorik sonuçlar yine örnekler vasıtasıyla doğrulanmıştır.

Bölüm 3'teki her iki kısım için de, bölüm sonunda literatürdeki örneklerle karşılaştırmalı birer tablo verilmiştir. Bu tablolardaki örnekler literatürden alınmış olup faklı yöntemler kullanılarak çözümleri bulunan problemler, bu çalışmada verilen yöntem ile çözülmüş ve sonuçlar tablolarda karşılaştırmalı olarak verilmiştir. Tablolardan görüldüğü üzere bu çalışmada ortaya konulan yöntemler ele alınan matris denklemlerinin çözümlerinde daha etkili olmuştur. Bu beklenen durumdur. Çünkü, çalışmada ortaya konulan yöntemlerin iteratif olmayıp temel teoremler ile elde edilebiliyor olması matris denkleminin çözümünü analitik olarak ve tek türlü ortaya koymaktadır. Üçüncü bölümün ilk ve ikinci kısmında göz önüne alınan problemlerin çözümleri ve elde edilen sonuçlar sırasıyla [65] ve [66] çalışmalarında özetlenmiştir.

Dördüncü bölümde ise, üçüncü bölümde ele alınan aynı yapısal problemler ele alınmıştır. Fakat, dördüncü bölümde matrisler kuaterniyon matrislerdir. Kuaterniyonlar yarı cismi çarpma işlemine göre değişmeli olmadığından, bu tür problemleri kuaterniyon matrisler için çalışmak matrislerin reel ve karmaşık olması durumuna göre daha karmaşıktır. Bunun temel nedeni ise, uygun boyutlu A, B ve C karmaşık matrisleri için var olan $vec(ABC) = (C^T \otimes A)vecB$ eşitliğinin kuaterniyonlar yarı cisminde sağlanmamasıdır. Bu bölümde $(AXB, DXE) = (C, F)$ matris denkleminin *kuaterniyon merkezi-hermityen* ve *kuaterniyon ters-merkezi-hermityen* çözümleri Moore-Penrose ters, Kronecker çarpım ve *vec* operatörü kullanılarak ele alınmıştır. Çalışmanın sonunda ise, iki sayısal örnek verilmiştir. Bu bölümde detaylı olarak ele alınan problemler ve elde edilen sonuçlar [67] çalışmasında özetlenmiştir.

Bir $A \in \mathrm{H}_{m\times n}$ kuaterniyon matrisi $A_1, A_2 \in \mathbb{C}_{m\times n}$ karmaşık matrisleri ile $A = A_1 + A_2 j$ olarak tek türlü yazılabilir. Benzer şekilde $\mathrm{A}_0, \mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3 \in \mathbb{R}_{m\times n}$ reel matrisler ve $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$, $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$, $ki = -ik = j$ olmak üzere $A \in \mathrm{H}_{m\times n}$ kuaterniyon matrisi, reel matrisler cinsinden $A = \mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2 i + \mathrm{A}_3 j + \mathrm{A}_4 k$ şeklinde tek türlü olarak yazılabilir. Bu durumlar dikkate alındığında kuaterniyon yarı cismi üzerinde çalışmak oldukça önem arz etmektedir.

Genel olarak literatürde matris denklemlerinin tutarlı olması durumunda çeşitli matris ayrışımlarından yararlanılmaktadır. Fakat, matris denklemlerinin tutarsız olması durumunda, GSVD, CCD gibi matris ayrışımlarında ortaya çıkan tekil olmayan matrisler için Frobenius normunun değişmezliği sağlanmamaktadır. Dolayısıyla, matris ayrışımları bu tür çözüm bulmada direkt uygulanamamaktadır [1], [62], [68]. Bu durumda, dik iz düşüm teoremi kullanılarak tutarsız matris denklemine denk başka bir tutarlı matris denklemi elde edilmekte ve bu tutarlı matris denkleminin çözümü matris ayrışımları ile bulunmaktadır. Dönüştürülerek elde edilen tutarlı matris denklemi için bulunan çözüme, orjinal lineer tutarsız matris denkleminin yaklaşık çözümü denilmektedir. Fakat, bu halde ele alınan problem için çözümden uzaklaşılmaktadır. Buna istinaden, bu dezavantajı fark eden araştırmacılar bu kez de tutarsız matris denkleminin çözümünü bulabilmek için iteratif metotlara başvurmuşlardır [26], [69], [70], [71]. Buradaki zorluk ise en iyi çözümü bulabilmek için algoritmada uygun bir başlangıç matrisi seçilmesidir. Bunun ise, her problem için uygulanabilirliği maalesef zordur. Ayrıca, diyelim ki uygun bir başlangıç matris bulundu, bu kez de problemin çözümünü bulabilmek için algoritma çok kez tekrarlanmalı. Durum böyle olunca bilgisayar üzerinde çok sayıda işlem yapılmakta ve süre uzamaktadır. İşlem sayısı artıkça bilgisayarın hassasiyetinden kaynaklanan küçük yuvarlama hataları son adımda büyük fark yaratabilmekte ve tutarsız bir matris denkleminin en iyi yaklaşık çözümü olması için gerekli ve yeterli koşul olan normal denklemler sağlanmamaktadır.

Bu açılardan değerlendirildiğinde, tezde ele alınan problemlerin çözümünü bulmak için izlenen yöntem hem teorik olması açısından, hem de analitik bir şekilde çözümün ifadesini sunması açısından oldukça kullanışlıdır. Ayrıca bulunan çözüm en iyi yaklaşık çözümdür ve tektir. Çalışmada ele alınan problemler, uygulamalı bilimlerde sıkça karşımıza çıkan ve çözüm bekleyen problemlerdir. Bu bakımdan, çalışmanın gerek ele alınan problemler gerekse çözümler için kullanılan yöntemler açısından önemli ve katkı sağlayıcı nitelikte olduğu düşünülmektedir.

Ayrıca ele alınan problemler başka özel tipli matrisler için de göz önüne alınabilir. Buna ilaveten problemlerdeki lineer matris denklemleri farklı yapıda alınabilir.

KAYNAKLAR

[1] Chu K. E., Singular value and generalized singular value decompositions and the solutions of linear matrix equations, Linear Algebra Appl., 88, 83-98, 1987.

[2] Chu K. E., Symmetric solutions of linear matrix equations by matrix decompositions, Linear Algebra Appl., 119, 35-50, 1989.

[3] Hua D., On the symmetric solutions of linear matrix equations, Linear Algebra Appl., 131, 1-7, 1990.

[4] Khatri C. G., Mitra S. K., Hermitian and nonnegative definite solutions of linear matrix equations, SIAM J. Appl. Math., 31, 578-585, 1976.

[5] Ilic D. S. C., The reflexive solutions Re–nnd solutions of the matrix equation $AXB = C,$ Comput.Math. Appl., 51, 897-902, 2006.

[6] Ilic D. S. C., Re–nnd solutions of the matrix equation $AXB = C,$ J. Aust. Math. Soc., 84, 63-72, 2008.

[7] Wang Q., Yang C., The Re–nonnegative definite solutions to the matrix equation $AXB = C,$ Comment Math. Univ. Carolin., 39, 1, 7-13, 1998.

[8] Zhang X., Hermitian nonnegative–definite and positive–definite solutions of the matrix equation $AXB = C,$ Appl. Math. E-Notes, 4, 40-47, 2004.

[9] Peng Z. Y., An iterative method for the least squares symmetric solution of the matrix equation $AXB = C,$ Appl. Math. Comput, 170, 711-723, 2005.

[10] Huang G. X., Yin F., Guo K., An iterative method for the skew-symmetric solution and the optimal approximate solution of the matrix equation $AXB = C,$ J. Comput. Appl. Math., 212, 231-244, 2008.

[11] Magnus J. R., L-structured matrices and linear matrix equation, Linear Multilinear Algebra, 14, 67-88, 1983.

[12] Peng X. Y., Hu X. Y., Zhang L., The reflexive and anti–reflexive solutions of the matrix equation $A^H XB = C,$ J. Comput. Appl. Math., 200, 749-760, 2007.

[13] Peng Y. X., Hu X. Y., Zhang L., An iteration method for the symmetric solutions and the optimal approximation solution of the matrix equation $AXB=C,$ Appl. Math. Comput., 160, 763-777, 2005.

[14] Qui Y., Zhang Z., Lu J., Matrix iterative solutions to the least squares problem of $BXA=F$ with some linear constraints, Appl. Math. Comput., 185, 284-300, 2007.

[15] Liao A., Lei Y., Optimal approximate solution of the matrix equation $AXB=C$ over symmetric matrices, J. Comput. Math., 25, 543-552, 2007.

[16] Huang G. X., Yin F., Guo K., The general solutions on the minimum residual problem and the matrix nearness problem for symmetric matrices or anti–symmetric matrices, Appl. Math. Comput., 194, 85-91, 2007.

[17] Lei Y., Liao P., A minimal residual algorithm for the inconsistent matrix equation $AXB=C$ over symmetric matrices, Appl. Math. Comput., 188, 499-513, 2007.

[18] Zhao L. L., Chen G. L., Liu Q. B., Least squares $(P,Q)-$orthogonal symmetric solution of the matrix equation and its optimal approximation, Electron. J. Linear Algebra, 20, 537-551, 2010.

[19] Mitra S. K., Common solutions to a pair of linear matrix equations $A_1XB_1=C_1$ and $A_2XB_2=C_2$, Proc. Camb. Phil. Soc., 74, 213-216, 1973.

[20] Navarra A., Odell P. L., Young D. M., A representation of the general common solution to the matrix equations $A_1XB_1=C_1$ and $A_2XB_2=C_2$ with applications, Comput. Math. Appl., 41, 929-935, 2001.

[21] Özgüler A. B., Akar N., A common solution to a pair of linear matrix equations over a principal ideal domain, Linear Algebra Appl., 144, 85-99, 1991.

[22] Van Der Woude J. W., On the existence of a common solution X to the matrix equations $A_iXB_i=C_{ij}$, $(i,j)\in\Gamma,$ Linear Algebra Appl., 375, 135-145, 2003.

[23] Liu Y. H., Ranks of least squares solutions of the matrix equation $AXB=C,$ Comput. Math. Appl., 55, 1270-1278, 2008.

[24] Dehghan M., Hajarian M., The $(R,S)-$symmetric and $(R,S)-$skew symmetric solutions of the pair of matrix equations $A_1XB_1=C_1$ and $A_2XB_2=C_2$, Bull. Iranian Math. Soc., 37, 3, 269-279, 2011.

[25] Ding J., Liu Y., Ding F., Iterative solutions to matrix equations of the form $A_i X B_i = F_i$, Comput. Math. Appl., 59, 3500-3507, 2010.

[26] Peng Y. X., Hu X. Y., Zhang L., An iteration method for the symmetric solutions and the optimal approximation solution of the system of matrix equations $A_1 X B_1 = C_1$, $A_2 X B_2 = C_2$, Appl. Math. Comput., 183, 1127-1137, 2006.

[27] Peng Z. H., Hu X. Y., Zhang L., An efficient algorithm for the least-squares reflexive solution of the matrix equation $A_1 X B_1 = C_1$ and $A_2 X B_2 = C_2$, Appl. Math. Comput., 181, 988-999, 2006.

[28] Cai J., Chen G., Liu Q., An iterative method for the bisymmetric solutions of the consistent matrix equations $A_1 X B_1 = C_1$, $A_2 X B_2 = C_2$, Int. J. Comput. Math., 87, 12, 2706-2715, 2010.

[29] Denghan M., Hajarian M., An iterative algorithm for solving a pair of matrix equations $AYB = E$, $CYD = F$ over generalized centro symmetric matrices, Comput. Math. Appl., 56, 3246-3260, 2008.

[30] Sheng X., Chen G., A finite iterative method for solving a pair of linear matrix equations $(AXB, CXD) = (E, F)$, Appl. Math. Comput., 189, 1350-1358, 2007.

[31] Cai J., Chen G., An iterative algorithm for the least squares bisymmetric solutions of the matrix equations $A_1 X B_1 = C_1$, $A_2 X B_2 = C_2$, Math. Comput. Modelling, 50, 1237-1244, 2009.

[32] Chen Y., Peng Z., Zhou T., LSQR iterative common symmetric solutions to matrix equations $AXB = E$ and $CXD = F$, Appl. Math. Comput., 217, 230-236, 2010.

[33] Bihan N. L., Sangwine S. J., Color image decomposition using quaternion singular value decomposition, Proceedings of IEEE International Conferance on Visual Information Engineering of Quaternion (VIE), 113-116, 2003.

[34] Davies A. J., McKellar B. H., Observability of quaternionic quantum mechanics, Phys. Rev. A, 3671–3675, 1992.

[35] Wang Q. W., A system of matrix equations and a linear matrix equation over arbitrary regular rings with identity, Linear Algebra Appl., 384, 43-54, 2004.

[36] Liu Y. H., On the best approximation problem of quaternion matrices, J. Math. Study, 37, 2, 129–134, 2004.

[37] Wang Q. W., Bisymmetric and centrosymmetric solutions to system of real quaternion matrix equation, Comput. Math. Appl., 49, 641–650, 2005.

[38] Wang Q. W., The general solution to a system of real quaternion matrix equations, Comput. Math. Appl., 49, 665–675, 2005.

[39] Jiang T. S., Liu Y. H., Wei M. S., Quaternion generalized singular value decomposition and its applications, Appl. Math. J. Chin. Univ., 21, 1, 113-118, 2006.

[40] Jiang T. S., Wei M. S., Real representations of quaternion matrix equations, Acta Math. Sci., 26, 4, 578–584, 2006.

[41] Yuan S., Liao A., Lei Y., Least squares Hermitian solution of the matrix equation $(AXB, CXD) = (E, F)$ with the least norm over the skew field of quaternions, Mathematical and Computer Modelling, 48, 91-100, 2008.

[42] Yuan S., Liao A., Least squares solution of the quaternion matrix equation $X - AXB = C$ with the least norm, Linear Multilinear Algebra, 59, 9, 985-998, 2011.

[43] Wang Q. W., Zhang X., Van Der Woude J. W., A new simultaneous decomposition of a matrix quaternity over an arbitrary division ring with applications, Communications in Algebra, 40, 2309–2342, 2012.

[44] Wang Q. W., Van Der Woude J. W., Yu S. W., An equivalence canonical form of a matrix triplet over an arbitrary division ring with applications, Science China Mathematics, 54, 5, 907–924, 2011.

[45] Wang Q. W., Li C. K., Ranks and the least-norm of the general solution to a system of quaternion matrix equations, Linear Algebra Appl., 430, 1626-1640, 2009.

[46] He Z. H., Wang Q. W., The η-bihermitian solution to a system of real quaternion matrix equations, Linear and Multilinear Algebra, 62, 11, 1509–1528, 2014.

[47] He Z. H., Wang Q. W., A real quaternion matrix equation with applications, Linear and Multilinear Algebra, 61, 6, 725–740, 2013.

[48] Rehman A., Wang Q. W., He Z. H., Solution to a system of real quaternion matrix equations encompassing η-Hermicity, Applied Mathematics and Computation, 265, 945–957, 2015.

[49] Yuan S., Liao A., Wang P., Least squares η-bi-Hermitian problems of the quaternion matrix equation $(AXB, CXD) = (E, F)$, Linear and Multilinear Algebra, 63, 1849–1863, 2015.

[50] Yuan S., Wang Q. W., L-structured quaternion matrices and quaternion linear matrix equations, Linear and Multilinear Algebra, 64, 2, 321–339, 2016.

[51] Zhang F., Matrix Theory, Basic Results and Techniques, New York: Springer, 2011.

[52] Lütkepohl H., Handbook of Matrices, Chichester: John Wiley & Sons Ltd., 1996.

[53] Horn R. A., Johnson C. R., Matrix Analysis, New York: Cambridge University Press, 1990.

[54] Meyer C., Matrix Analysis and Applied Linear Algebra, Philadelphia, Pa.: SIAM, 2000.

[55] Harville D. A., Matrix Algebra From a Statistician's Perspective, New York: Springer-Verlag, 1997.

[56] Magnus J. R., Neudecker H., Matrix Differential Calculas with Application in Statistics and Econometrics, England: British Library Cataloguing in Publication Data, 2007.

[57] Rao C. R., Mitra S. K., Generalized Inverse of Matrices and its Applications, New York: John Wiley & Sons. Inc., 1971.

[58] Trampitsch S., Complex-Valued Data Estimation, Klagenfurt, 2013.

[59] Cooperstein B. N., Advanced Linear Algebra, Santa Cruz: Taylor & Francis Group, 2015.

[60] Graybill F. A., Matrices with Applications in Statistics, California: Wadsworth Publishing Company, 1983.

[61] Ben-Israil A., Greville T. N. E., Generalized Inverses; Theory and Applications, New York: Springer, 2002.

[62] Liao A. P., Lei Y., Least–squares solution with the minimum–norm for the matrix equation $(AXB, GXH) = (C, D)$, J. Comput. Math., 50, 539-549, 2005.

[63] Liao A. P., Lei Y., Yuan S. F., The matrix nearness problem for symmetric matrices associated with the matrix equation $\left[A^T XA, B^T XB\right] = [C, D]$, Linear Algebra Appl., cilt 418, pp. 939-954, 2006.

[64] Lee A., Centrohermitian and Skew-Centrohermitian Matrices, Linear Algebra Appl., 29, 205-210, 1980.

[65] Şimşek S., Sarduvan M., Özdemir H., On the matrix nearness problem for (skew-)symmetric matrices associated with the matrix equations $(A_1 XB_1, \ldots, A_k XB_k) = (C_1, \ldots, C_k)$, Miskolc Mathematical Notes, 17, 1, 635-645, 2016.

[66] Sarduvan M., Şimşek S., Özdemir H., On the best approximate $(P,Q)-$ orthogonal symmetric and skew-symmetric solution of the matrix equation $AXB = C$, J. Numer. Math., 22, 3, 255-269, 2014.

[67] Şimşek S., Sarduvan M., Özdemir H., Centrohermitian and Skew-Centrohermitian Solutions to the Minimum Residual and Matrix Nearness Problems of the Quaternion Matrix Equation $(AXB, DXE) = (C, F)$, Adv. Appl. Cli□ord Algebras, DOI: 10.1007/s00006-016-0688-4, 2016.

[68] Yuan Y. X., On the two classes of best approximation problems, Math. Numer. Sin., 23, 429-436, 2001.

[69] Kyrchei I., Analogs of cramer's rule for the minimum norm least squares solutions of some matrix equations, Appl. Math. Comput., 218, 6375-6384, 2012.

[70] Li J. F., Hu X. Y., Duan X. F., Zhang L., Iterative method for mirror–symmetric solution of matrix equation $AXB + CYD = E$, Bull. Iranian Math. Soc., 36, 2, 35-55, 2010.

[71] Li Z. Y., Wang Y., Zhou B., Duan G. R., Least-squares solution with the minimum-norm to general matrix equations via iteration, Appl. Math. Comput., 215, 3547-3562, 2010.

ÖZGEÇMİŞ

Sinem ŞİMŞEK, 1986 yılında Adapazarı'nda doğdu. Lise öğrenimini 2004 yılında Figen Sakallıoğlu Anadolu Lisesi'nde tamamladı. 2008 yılında Sakarya Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden mezun oldu. 2010 yılında Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik EABD'da yüksek lisans öğrenimini tamamladı. 2011 yılında Kırklareli Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde araştırma görevlisi olarak çalışmaya başladı. Halen aynı görevde çalışmaktadır.