

T.C.  
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**GENELLEŞTİRİLMİŞ KOMPLEKS DÜZLEMDE  
STEINER FORMÜLÜ VE HOLDITCH-TİPİ  
TEOREMLER**

**DOKTORA TEZİ**

**Tülay ERİŞİR**

**Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK**

**Enstitü Bilim Dalı : GEOMETRİ**

**Tez Danışmanı : Doç. Dr. Mehmet Ali GÜNGÖR**

**Mayıs 2016**

T.C.  
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ KOMPLEKS DÜZLEMDE  
STEINER FORMÜLÜ VE HOLDITCH-TİPİ  
TEOREMLER

DOKTORA TEZİ

Tülay ERİŞİR


Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK  
Enstitü Bilim Dalı : GEOMETRİ  
Tez Danışmanı : Doç. Dr. Mehmet Ali GÜNGÖR

Bu tez 30 / 05 /2016 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği / oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

  
Prof. Dr. Nuri KURUOĞLU  
Jüri Başkanı

  
Prof. Dr. Mahmut ERGÜT  
Üye

  
Prof. Dr. Murat TOSUN  
Üye

  
Prof. Dr. İbrahim OKUR  
Üye

  
Doç. Dr. Mehmet Ali GÜNGÖR  
Üye

## BEYAN

Tezin içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilere herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumuna bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.



Tülay ERİŞİR

30.05.2016

## TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın hazırlanmasında değerli zamanını ayıran, her aőamasını titizlikle değerlendirip, önerileriyle yol gösteren ve her konuda yardımlarını esirgemeyen, her zaman destek gördüğüm ve yanında çalıőmaktan onur duyduğum danışman hocam Sayın Doç. Dr. Mehmet Ali GÜNGÖR'e minnet ve őükranlarımı sunarım.

Çalıőmalarım esnasında bana vakit ayıran, özenle çalıőmalarımı takip eden ve her konuda yardımlarını esirgemeyen, hocam Sayın Prof. Dr. Murat TOSUN ve Doç. Dr. Soley ERSOY'a teşekkürü bir borç bilirim.

Çalıőmalarım boyunca yardım gördüğüm çok kıymetli aileme ve her zaman yanımda olan, eőim Zeyyat ERİŞİR'e, gösterdiği sabır ve anlayışından ötürü teşekkür ederim.

TÜBİTAK Bilim İnsan Destekleme Daire Başkanlığına, "2211-Yurt İçi Doktora Burs Programı" kapsamında doktora öğrenimim sırasında vermiş oldukları destekler için teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

Ayrıca bu çalışmanın maddi açıdan desteklenmesine olanak sağlayan Sakarya Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri (BAP) Komisyon Başkanlığına (Proje No: 2014-50-02-023) teşekkür ederim.

# İÇİNDEKİLER

|   |      |
|---|------|
| TEŞEKKÜR.....   | i    |
| İÇİNDEKİLER .....   | ii   |
| SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ.....  | v    |
| ŞEKİLLER LİSTESİ .....  | vii  |
| TABLolar LİSTESİ .....  | viii |
| ÖZET.....   | ix   |
| SUMMARY.....  | x    |
| BÖLÜM 1.  |      |
| GİRİŞ .....   | 1    |
| 1.1. Literatür Özeti .....  | 1    |
| 1.2. Tezin Amacı.....   | 9    |
| BÖLÜM 2.  |      |
| TEMEL KAVRAMLAR .....   | 11   |
| 2.1. $\mathbb{E}^n$ Öklid Uzayında Temel Kavramlar.....                               | 11   |
| 2.2. Kompleks Düzlemde Hareket ve Holditch-Tipi Teoremler .....                       | 15   |
| 2.2.1. Kompleks düzlemde hareket .....  | 15   |
| 2.2.2. Kompleks düzlemde Steiner alan formülü ve Holditch teoremi ..                  | 18   |
| 2.2.3. Kompleks düzlemde doğrusal olmayan üç nokta için Holditch<br>teoremi.....      | 22   |
| 2.2.4. Kompleks düzlemde Holditch-tipi teorem .....                                   | 25   |
| 2.2.5. Kompleks düzlemde doğrusal olmayan üç nokta için Holditch-<br>tipi teorem..... | 28   |
| 2.3. Hiperbolik Düzlemde Hareket ve Holditch-Tipi Teoremler.....                      | 29   |
| 2.3.1. Hiperbolik düzlemde hareket .....  | 29   |
| 2.3.2. Hiperbolik düzlemde Steiner alan formülü ve Holditch teoremi                   | 32   |

|   |     |
|---|-----|
| 2.3.3. Hiperbolik düzlemde doğrusal olmayan üç nokta için Holditch teoremi .....                              | 35  |
| 2.3.4. Hiperbolik düzlemde Holditch-tipi teorem .....   | 38  |
| 2.3.5. Hiperbolik düzlemde doğrusal olmayan üç nokta için Holditch-tipi teorem.....                           | 40  |
| 2.4. Galile Düzleminde Hareket ve Holditch-Tipi Teoremler .....   | 42  |
| 2.4.1. Galile düzleminde hareket.....   | 42  |
| 2.4.2. Galile düzleminde Steiner alan formülü ve Holditch teoremi.....  | 44  |
| 2.4.3. Galile düzleminde doğrusal olmayan üç nokta için Holditch teoremi .....                                | 47  |
| 2.4.4. Galile düzleminde Holditch-tipi teorem.....  | 50  |
| 2.4.5. Galile düzleminde doğrusal olmayan üç nokta için Holditch-tipi teorem.....                             | 52  |
| <br>  |     |
| BÖLÜM 3.  |     |
| GENELLEŞTİRİLMİŞ KOMPLEKS SAYI SİSTEMİ VE BİR-PARAMETRELİ DÜZLEMSEL HAREKET .....                             | 55  |
| 3.1. Genelleştirilmiş Kompleks Sayılar.....   | 56  |
| 3.2. Genelleştirilmiş Kompleks Düzlemde Bir-Parametrelili Düzlemsel Hareket.....                              | 70  |
| <br>  |     |
| BÖLÜM 4.  |     |
| GENELLEŞTİRİLMİŞ KOMPLEKS DÜZLEMDE STEINER ALAN FORMÜLÜ VE HOLDITCH TEOREMİ .....                             | 80  |
| 4.1. Genelleştirilmiş Kompleks Düzlemde Doğrusal Üç Nokta İçin Steiner Alan Formülü ve Holditch Teoremi ..... | 80  |
| 4.1.1. Genelleştirilmiş kompleks düzlemde Steiner alan formülü .....  | 80  |
| 4.1.2. Genelleştirilmiş kompleks düzlemde karışık alan formülü ve Holditch teoremi .....                      | 86  |
| 4.2. Genelleştirilmiş Kompleks Düzlemde Doğrusal Olmayan Üç Nokta İçin Holditch Teoremi.....                  | 101 |
| 4.2.1. Genelleştirilmiş kompleks düzlemde Cauchy uzunluk formülü .....  | 101 |

|  |     |
|--|-----|
| 4.2.2. Genelleştirilmiş kompleks düzlemde Holditch teoreminin<br>genellemesi ..... | 104 |
|--|-----|

## BÖLÜM 5.

|  |     |
|--|-----|
| GENELLEŞTİRİLMİŞ KOMPLEKS DÜZLEMDE KUTUPSAL ATALET<br>MOMENTİ İÇİN HOLDITCH-TİPİ TEOREMLER ..... | 115 |
|--|-----|

|  |     |
|--|-----|
| 5.1. Genelleştirilmiş Kompleks Düzlemde Doğrusal Üç Nokta İçin<br>Holditch-Tipi Teorem .....         | 115 |
| 5.1.1. Genelleştirilmiş kompleks düzlemde kutupsal atalet momenti. ....                              | 116 |
| 5.1.2. Genelleştirilmiş kompleks düzlemde Holditch-tipi teorem .....                                 | 120 |
| 5.2. Genelleştirilmiş Kompleks Düzlemde Doğrusal Olmayan Üç Nokta İçin<br>Holditch-Tipi Teorem ..... | 133 |

## BÖLÜM 6.

|                            |     |
|----------------------------|-----|
| SONUÇLAR VE ÖNERİLER ..... | 139 |
|----------------------------|-----|

|                 |     |
|-----------------|-----|
| KAYNAKLAR ..... | 141 |
|-----------------|-----|

|                |     |
|----------------|-----|
| ÖZGEÇMİŞ ..... | 146 |
|----------------|-----|

## SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

|                     |   |
|---------------------|---|
| $A$                 | : Afin uzay   |
| $\mathbb{E}^n$      | : $n$ – boyutlu Öklid uzayı                                 |
| $\mathbb{R}^n$      | : $n$ – boyutlu reel vektör uzayı                           |
| $V$                 | : Vektör uzayı  |
| $\langle , \rangle$ | : Öklid uzayında iç çarpım                                  |
| $d(,)$              | : Öklid uzayında uzaklık                                    |
| $O(n)$              | : Ortogonal grup  |
| $E, E'$             | : Hareketli ve sabit kompleks düzlemler                     |
| $E / E'$            | : Kompleks düzlemde bir-parametrelî hareket                 |
| $\{e_1, e_2\}$      | : Hareketli kompleks düzlemin baz vektörleri                |
| $\{e'_1, e'_2\}$    | : Sabit kompleks düzlemin baz vektörleri                    |
| $\theta$            | : Kompleks düzlemde bir-parametrelî hareketin dönme açısı   |
| $\dot{\theta}$      | : Kompleks düzlemde bir-parametrelî hareketin açısal hızı   |
| $H, H'$             | : Hareketli ve sabit hiperbolik düzlemler                   |
| $H / H'$            | : Hiperbolik düzlemde bir-parametrelî hareket               |
| $\{h_1, h_2\}$      | : Hareketli hiperbolik düzlemin baz vektörleri              |
| $\{h'_1, h'_2\}$    | : Sabit hiperbolik düzlemin baz vektörleri                  |
| $\beta$             | : Hiperbolik düzlemde bir-parametrelî hareketin dönme açısı |
| $\dot{\beta}$       | : Hiperbolik düzlemde bir-parametrelî hareketin açısal hızı |
| $G, G'$             | : Hareketli ve sabit Galile düzlemleri                      |
| $G / G'$            | : Galile düzleminde bir-parametrelî hareket                 |
| $\{g_1, g_2\}$      | : Hareketli Galile düzlemin baz vektörleri                  |
| $\{g'_1, g'_2\}$    | : Sabit Galile düzlemin baz vektörleri                      |



|                                  |   |
|----------------------------------|---|
| $\gamma$                         | : Galile düzleminde bir-parametrelili hareketin dönme açısı   |
| $\dot{\gamma}$                   | : Galile düzleminde bir-parametrelili hareketin açısal hızı   |
| $\mathbb{C}_p$                   | : Genelleştirilmiş kompleks düzlem  |
| $M^p(,)$                         | : $\mathbb{C}_p$ düzleminde çarpım  |
| $  \cdot  _p$                    | : $\mathbb{C}_p$ düzleminde modül   |
| $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ | : $\mathbb{C}_p$ düzleminde iç çarpım   |
| $\mathbb{K}_p, \mathbb{K}'_p$    | : Hareketli ve sabit genelleştirilmiş kompleks düzlem   |
| $\mathbb{K}_p / \mathbb{K}'_p$   | : $\mathbb{C}_p$ düzleminde bir-parametrelili düzlemsel hareket   |
| $\{t_1, t_2\}$                   | : Hareketli genelleştirilmiş kompleks düzlemin baz vektörleri   |
| $\{t'_1, t'_2\}$                 | : Sabit genelleştirilmiş kompleks düzlemin baz vektörleri   |
| $\theta_p$                       | : $\mathbb{C}_p$ düzleminde hareketin dönme açısı   |
| $\dot{\theta}_p$                 | : $\mathbb{C}_p$ düzleminde hareketin açısal hızı   |
| $V'_a$                           | : $\mathbb{C}_p$ düzleminde hareketin mutlak hız vektörü  |
| $V'_r$                           | : $\mathbb{C}_p$ düzleminde hareketin relatif hız vektörü   |
| $V'_f$                           | : $\mathbb{C}_p$ düzleminde hareketin sürüklenme hız vektörü  |
| $Q = (q_1, q_2)$                 | : $\mathbb{C}_p$ düzleminde bir-parametrelili hareketin pol noktası   |
| $S = (s_1, s_2)$                 | : $\mathbb{C}_p$ düzleminde bi-parametrelili hareketin Steiner noktası  |
| $F_X$                            | : $\mathbb{C}_p$ düzleminde yörünge eğrisinin sınırladığı bölgenin alanı  |
| $F_O$                            | : $\mathbb{K}_p$ hareketli düzlemin başlangıç noktasının çizdiği yörünge eğrisinin sınırladığı bölgenin alanı                   |
| $T_X$                            | : $\mathbb{C}_p$ düzleminde hareket boyunca bir noktanın çizdiği yörünge eğrisinin sınırladığı bölgenin kutupsal atalet momenti |
| $T_O$                            | : $\mathbb{K}_p$ düzleminin başlangıç noktasının çizdiği yörünge eğrisinin sınırladığı bölgenin kutupsal atalet momenti         |

## ŞEKİLLER LİSTESİ

|   |    |
|---|----|
| Şekil 1.1. Holditch halkası.....  | 3  |
| Şekil 2.1. Kompleks düzlemde hareket.....                                     | 16 |
| Şekil 2.2. Hiperbolik düzlemde hareket.....                                   | 30 |
| Şekil 2.3. Galile düzlemde hareket.....                                       | 42 |
| Şekil 3.1. Ordinary, dual ve double sayılar.....                              | 57 |
| Şekil 3.2. $p < 0$ için birim çember.....                                     | 63 |
| Şekil 3.3. $p = 0$ için birim çemberler (circle, cycle).....                  | 64 |
| Şekil 3.4. $p > 0$ için birim çember.....                                     | 65 |
| Şekil 3.5. Eliptik, parabolik ve hiperbolik açılar.....                       | 65 |
| Şekil 3.6. Hiperbolik ve parabolik düzlemlerde genişletilmiş açısal ölçü..... | 66 |
| Şekil 3.7. $p$ – trigonometrik fonksiyonların geometrik gösterimleri.....     | 67 |

## TABLÖLAR LİSTESİ

|   |    |
|---|----|
| Tablo 3.1. Dokuz Cayley-Klein Geometrisi..... | 56 |
|---|----|



## ÖZET

Anahtar kelimeler: Genelleştirilmiş kompleks düzlem, bir-parametrelî düzlemsel hareket, Steiner formülü, Holditch-tipi teoremler

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde; öncelikle,  $\mathbb{B}^2$ , Öklid düzleminde klasik Holditch teoremi ifade edilmiştir. Daha sonra Holditch teoremi ve Holditch-tipi teoremler ile ilgili bazı önemli çalışmaların genel bir değerlendirilmesi ile birlikte literatür özeti verilmiştir.

İkinci bölüm dört alt bölümden oluşmaktadır. İlk olarak Öklid uzayları ile ilgili bazı temel kavramlar anlatılmıştır. Daha sonra, sırasıyla, kompleks, hiperbolik ve Galile düzlemlerinde bir-parametrelî düzlemsel hareket ve Holditch teoremi verilmiştir.

Üçüncü bölüm iki alt bölümden oluşmaktadır. İlk alt bölümde genelleştirilmiş kompleks sayı sistemi tanıtılmıştır. Ayrıca, genelleştirilmiş kompleks sayı sisteminin geometrik tanımı ve cebirsel özellikleri teoremler ile ifade edilmiştir. İkinci alt bölümde genelleştirilmiş kompleks düzlemde bir-parametrelî düzlemsel hareket tanıtılmıştır.

Dördüncü ve beşinci bölüm bu çalışmanın orijinal kısmını oluşturmaktadır. Dördüncü bölüm iki alt başlıktan oluşmaktadır. İlk olarak hareketli genelleştirilmiş kompleks düzlemde verilen sabit bir noktanın sabit düzlemde çizdiği yörüngenin alanı hesaplanarak doğrusal üç noktanın çizdiği yörünge alanları arasındaki ilişki Holditch teoremiyle verilmiştir. Daha sonra genelleştirilmiş kompleks düzlemde doğrusal olmayan üç nokta alınarak ilk kısımda verilen Holditch teoreminin bir genellemesi elde edilmiştir. Beşinci bölümde ise; genelleştirilmiş kompleks düzlemde verilen sabit bir noktanın çizdiği yörüngenin kutupsal atalet momenti hesaplanmıştır. Son olarak doğrusal ve doğrusal olmayan üç nokta için Holditch-tipi teoremler ispatlanmıştır.

Altıncı bölümde ise bu tezin bir değerlendirmesi yapılmıştır.

# THE STEINER FORMULA AND THE HOLDITCH-TYPE THEOREMS IN THE GENERALIZED COMPLEX PLANE

## SUMMARY

Keywords: The generalized complex plane, the one-parameter planar motions, Steiner formula, Holditch-type theorems

This thesis consists of six chapters.

In the first chapter, primarily, the classical Holditch theorem in Euclidean plane  $\mathbb{E}^2$  is expressed. Afterwards, summary of literature together with a general evaluation of some significant studies related to the Holditch theorem and the Holditch-type theorems is given.

The second chapter consists of four subsections. Firstly, some basic notions of  $n$ -dimensional Euclidean space are given. Then, the one-parameter planar motions and the Holditch-type theorems in complex, Galilean and hyperbolic planes are introduced, respectively.

The third chapter consists of two subsections. In the first subsection, the generalized complex number system is represented. Moreover, the geometric exposition and algebraic properties of this generalized complex number system are expressed. In the second subsection, the one-parameter planar motions in the generalized complex plane are given.

The fourth and fifth chapters are the original part of this thesis. The fourth chapter consists of two subsections. First of all, by calculating the area of orbit curve in the fixed plane drawn by the fixed point in the moving generalized complex plane, the Holditch theorem that gives the relationship between the orbit curves drawn by linear three points is given. Then, by considering non-linear three points in generalized complex plane, a generalization of the Holditch theorem, which was given in the first subsection is obtained. In the fifth chapter, the polar moment of inertia of the orbit curve drawn by the fixed point in the generalized complex plane is calculated. Finally, the Holditch-type theorems for linear and non-linear three points are proved.

In the sixth chapter, an evaluation of this thesis has been made discussed.

# BÖLÜM 1. GİRİŞ

## 1.1. Literatür Özeti

Fiziğin bir alt dalı olan mekanik, sistemlerin hareketini, harekete neden olan etkileri ve sistemlerin denge durumlarını inceler. Mekanik; statik, kinematik ve dinamik olarak üç bölüme ayrılır. Statik, sistemlerin denge durumlarını; kinematik, kuvveti katmadan sistemlerin hareketini; dinamik ise hareketi değiştiren etkenleri inceleyen bilim dalıdır.

Kinematikte göz önüne alınan temel büyüklükler uzunluk ve zamandır. Dinamikte ise uzunluk, zaman ve kütle olmak üzere önemli olan üç temel büyüklük vardır. Böylece kinematik, geometri ile dinamik arasında bulunan bir bilim olarak adlandırılabilir.

Kinematik, sistemlere etki eden ve yer değiştirmesini sağlayan kuvvetleri göz önüne almadan sadece sistemlerin nasıl hareket ettiğini, hareket boyunca nasıl bir yol izlediğini, herhangi bir andaki yerini, hız ve ivmesinin ne olduğunu, herhangi bir zaman aralığında çizdiği yörüngeyi, yörünge alanını ve momentlerini kısacası sistemlerin geometrik özelliklerinin zamanla değişme şeklini inceleyen bilim dalıdır. Kinematiğin bağımsız bir bilim olarak ele alınışı, bu bilim dalını ilk defa tanımlayan ve ona bu adı veren André Marie Ampère'ye (1775-1836) dayanmaktadır. Ampère'ye göre "Kinematik, sistemleri hareket ettiren kuvvetlerden bağımsız olarak sistemlerin hareketleriyle ilgili söylenebilecek her şeyi kapsar. Hareket boyunca oluşan alan, bu alanı oluşturmak için gerekli zaman ve bu alanla bu zaman arasında bulunabilecek çeşitli bağlantılar gibi birçok hesaplama göz önüne alınarak kuvvetten bağımsız hareketin tüm tasarımlarını inceler" [1].

Kinematikte bir-parametrelî düzlemsel hareket birçok bilim adamı tarafından farklı düzlem ve uzaylarda çalışılmıştır. Bunlardan temel olanları şu şekildedir. Müller, [2]'de hem Öklid hem de kompleks düzlemde bir-parametrelî düzlemsel hareketleri tanıtmıştır. Ayrıca hareketli düzlemde herhangi bir noktanın hareketli ve sabit düzlemlere göre ve düzlemlerin birbirine göre hızını hesap etmiştir. Benzer şekilde ivmeleri hesap etmiştir. Lorentz düzleminde bir-parametrelî düzlemsel hareket Ergin [3] ve Görmez [4] tarafından çalışılmıştır. Ayrıca Ergüt ve ark. Lorentz düzleminde bir-parametrelî düzlemsel hareket ve kanonik sistemin geometrisi üzerine çalışmıştır [5]. Ayrıca Ergüt ve ark. Lorentz ve kompleks düzlemlerde üstel hareketler için çalışmaları mevcuttur [6, 7]. Daha sonra Yüce ve Kuruoğlu, hiperbolik düzlemde bir-parametrelî düzlemsel hareketleri tanıtmışlardır [8]. Galile düzleminde bir-parametrelî hareket ise Akar ve Yüce tarafından çalışılmıştır [9].

Genelleştirilmiş kompleks sayı sistemi ilk kez Yaglom tarafından

$$\mathcal{C}_p = \{(x, y) : x + iy, x, y \in \mathbb{R}, i^2 = p \in \mathbb{R}\}$$

şeklinde tanıtılmıştır [10]. 2004 yılında ise Harkin ve Harkin, bu çalışmayı göz önüne alarak  $p \in \mathbb{R}$  için genelleştirilmiş kompleks sayı sisteminin bir-parametrelî ailesi üzerine çalışmışlardır [11].

Erişir ve ark.,  $\mathcal{C}_p$  genelleştirilmiş kompleks düzlemde bir-parametrelî hareket için çeşitli çalışmalar yapmıştır [12, 13, 14, 15].

Ayrıca Gürses ve ark. genelleştirilmiş kompleks düzlemin özel bir halini

$$\mathcal{C}_j = \{x + Jy : x, y \in \mathbb{R}, J^2 = p, p \in \{-1, 0, 1\}\} \subset \mathcal{C}_p$$

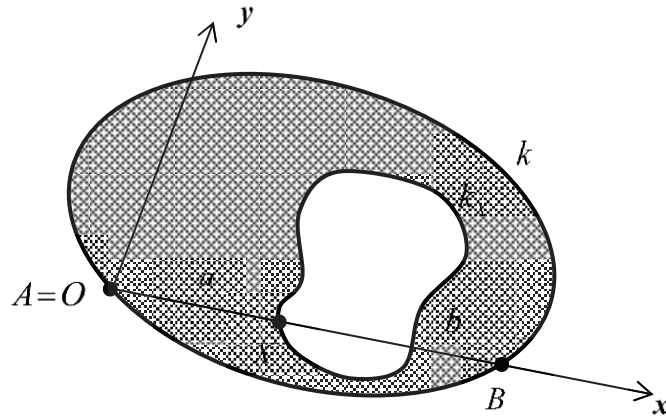
şeklinde göz önüne alarak  $\mathcal{C}_j$  düzleminde bir-parametrelî düzlemsel hareketi çalışmışlardır [16].

Holditch teoremi kinematiğin önemli teoremlerinden biridir. Holditch teoremi ilk kez Hamnet Holditch [17] tarafından aşağıdaki gibi ifade edilmiştir:

“Düzlemde sabit  $a+b$  uzunluklu bir  $\overline{AB}$  doğru parçasının  $A$  ve  $B$  uç noktaları bir  $k$  ovali boyunca bir defa hareket ettiğinde,  $\overline{AB}$  doğru parçası üzerinde  $|\overline{AX}|=a$  ve  $|\overline{XB}|=b$  olacak şekilde tespit edilen bir  $X$  noktası da genellikle konveks olması gerekmeyen kapalı bir  $k_X$  eğrisini çizer. Bu  $k$  ovali ile  $k_X$  eğrisi arasında kalan **Holditch halkasının**  $F$  yüzey alanı

$$F = \pi ab \quad (1.1)$$

dir. Burada  $F$  yüzey alanı, sadece  $X$  noktasının  $\overline{AB}$  doğru parçasının uç noktalarına olan uzaklıklarına bağlı olup  $k$  ile  $k_X$  eğrilerinden ve hareketten bağımsızdır.”



Şekil 1.1. Holditch halkası [17]

Bu klasik Holditch teoreminin en önemli noktası aradaki bölgenin alanının seçilen eğriden bağımsız olmasıdır [17]. Dolayısıyla Holditch teoremi teknik uygulamaya açık olması ve eğriden bağımsızlığı nedeniyle, eğriyi taşıyan düzlemin seçimleriyle oldukça ilgi toplamış ve birçok bilim adamı tarafından farklı bakış açıları ile çalışılarak değişik metotlar ile genelleştirilmiştir.



Steiner [18], bir-parametrelili kapalı düzlemsel hareket altında hareketli düzlemde verilen sabit bir  $X = (x_1, x_2)$  noktasının sabit düzlemdeki çizdiği yörünge eğrisinin sınırladığı bölgenin alanını

$$F_X = F_O + \pi v (x_1^2 + x_2^2 - 2x_1s_1 - 2x_2s_2) \quad (1.2)$$

şeklinde bulmuştur. Bu formüle **Steiner alan formülü** denir. Burada  $F_O$ ;  $O = (0,0)$  hareketli düzlemin orijin noktasının yörünge alanı,  $v$ ; hareketin dönme sayısı ve  $S = (s_1, s_2)$  Steiner noktası; hareket esnasında sabit düzlemdeki hareketli pol eğrisinin ağırlık merkezidir.

Bir-parametrelili kapalı düzlemsel hareket boyunca, Holditch [17] ve Steiner [18] tarafından yapılan çalışmalar büyük ölçüde ilgi görünce kinematik üzerine çalışan birçok bilim adamı çeşitli çalışmalarla Holditch teoremini genellemişlerdir. Bu çalışmalardan en temel olanları aşağıdaki gibidir:

Blaschke ve Müller [19], Holditch teoreminin bir genellemesini şu şekilde vermiştir:

“Bir-parametrelili kapalı düzlemsel hareket boyunca bir  $\overline{AB}$  doğru parçasının  $A = (0,0)$  ve  $B = (a+b,0)$  uç noktaları, sırasıyla,  $k_A$  ve  $k_B$  kapalı eğrilerini çizsin. Dolayısıyla  $A$  ve  $B$  noktaları ile doğrusal olmayan  $|\overline{AX}| = a$  ve  $|\overline{XB}| = b$  olacak şekilde bir  $X = (a,0)$  noktası da kapalı fakat genellikle konveks olması gerekmeyen bir  $k_X$  eğrisini çizer. O halde  $A$ ,  $B$  ve  $X$  noktalarının çizdiği yörünge eğrilerinin sınırladığı bölgelerin alanları, sırasıyla,  $F_A$ ,  $F_B$  ve  $F_X$  olmak üzere bu alanlar arasında

$$F_X = \frac{aF_B + bF_A}{a+b} - \pi vab \quad (1.3)$$

şeklinde bir bağıntı vardır. Burada  $\nu$ ; bir-parametrelili kapalı düzlemsel hareketin dönme sayısıdır.” Eğer burada özel olarak  $A$  ve  $B$  noktaları aynı yörüngeyi çizer ( $k_A = k_B$ ) ve  $\overline{AB}$  doğru parçası oval üzerinde bir defa dolanırsa ( $\nu=1$ ), (1.3) denkleminde klasik Holditch teoremi elde edilir.

Hering [20], Holditch teoreminin bir başka genellemesini şu şekilde vermiştir:

“Bir-parametrelili kapalı düzlemsel hareket boyunca bir  $\overline{AB}$  doğru parçasının  $A=(0,0)$  ve  $B=(a+b,0)$  uç noktaları, sırasıyla,  $k_A$  ve  $k_B$  kapalı eğrilerini çizsin. Bu durumda  $A$  ve  $B$  noktaları ile doğrusal olmayan bir  $X=(a,c)$  noktası da bir  $k_X$  kapalı eğrisini çizerse  $A, B$  ve  $X$  noktalarının çizdiği eğrilerin yörünge alanları, sırasıyla,  $F_A, F_B$  ve  $F_X$  olmak üzere bu alanlar arasında

$$F_X = \frac{aF_B + bF_A}{a+b} + (c^2 - ab)\pi\nu - cL_{AB} \quad (1.4)$$

şeklinde bir bağıntı mevcuttur. Burada  $\nu$ ; hareketin dönme sayısı ve  $L_{AB}$ ;  $\overline{AB}$  doğru parçasının zarf eğrisinin uzunluğudur.”  $c=0$  olması durumunda (1.3) denklemi elde edilir.

Pottmann [21], Holditch teoreminin farklı bir genellemesini şu şekilde vermiştir:

“Bir-parametrelili kapalı düzlemsel hareket altında doğrusal olmayan  $A, B$  ve  $C$  noktaları aynı  $F$  alanına sahip  $k$  eğrisini çizerse herhangi bir  $X$  noktası da  $F_X$  yörünge alanına sahip kapalı  $k_X$  eğrisini çizer. Bu durumda  $k$  ve  $k_X$  eğrilerinin sınırladığı bölgelerin alanları arasındaki fark

$$F - F_X = \pi\nu(r^2 - R^2) \quad (1.5)$$

dir, öyle ki  $R$ ,  $X$  ve  $O$  noktaları arasındaki uzaklık,  $r$  de  $\hat{ABC}$  üçgeninin çevrel çemberinin yarıçapıdır.” Ayrıca, Pottmann [21]’de hareketli düzlemdeki, doğrusal olmayan  $A=(0,0)$ ,  $B=(b,0)$ ,  $C=(c,d)$  ve  $X=(x,y)$  noktalarının çizmiş olduğu yörünge eğrilerinin sınırladığı bölgelerin alanları arasındaki ilişkiyi

$$F_X = \left(1 - \frac{x}{b} + \frac{c-b}{bd}y\right)F_A + \left(\frac{x}{b} + \frac{cy}{bd}\right)F_B + \frac{y}{d}F_C + \left(x^2 + y^2 - bx - \frac{c^2 + d^2}{d}y + \frac{bc}{d}y\right)\pi v \quad (1.6)$$

olarak vermiştir.

Ek olarak, Pottmann [22], Holditch teoreminin farklı bir genellemesini aşağıdaki şekilde vermiştir:

“ $E_i / E'$ , ( $i=1,2$ ) kat etme sayıları aynı  $v_i$  dönme sayılı bir-parametrelili kapalı düzlemsel hareketler olsun. O halde  $\overline{X_i Y_i}$  doğru parçalarının  $X_i=(0,0)$  ve  $Y_i=(\lambda_i(a+b),0)$  uç noktalarının çizdiği yörünge eğrileri, sırasıyla,  $k_X$  ve  $k_Y$  olmak üzere  $Z_i=(\lambda_i a,0)$  noktaları da  $F_i$  yörünge alanına sahip  $k_i$  yörünge eğrilerini çizsin. O halde  $F_i$  alanları arasındaki fark,

$$F_1 - F_2 = (v_2 \lambda_2^2 - v_1 \lambda_1^2) \pi ab \quad (1.7)$$

şeklindedir.”

Bir-parametrelili düzlemsel hareket boyunca verilen noktaların çizdiği yörünge eğrilerinin sınırladığı bölgelerin alanları hesaplanırken yapılan işlemlere benzer işlemler kullanılarak yörüngelerin kutupsal atalet momentleri hesaplanabilir. Böylelikle Holditch [17] tarafından verilen klasik Holditch teoremine benzer olarak kutupsal atalet momenti için Holditch-tipi teoremler verilebilir. Kutupsal atalet

momenti ile ilgili birçok çalışma yapılmıştır. Bunlardan temel olanları aşağıdaki gibidir:

Müller [23], bir-parametrelili kapalı düzlemsel hareket altında hareketli düzlemde verilen sabit bir  $X = (x_1, x_2)$  noktasının sabit düzlemde çizdiği kapalı yörünge eğrisinin sınırladığı bölgenin kutupsal atalet momentini

$$T = 2\pi ab \quad (1.8)$$

şeklinde hesaplamıştır. Ek olarak Müller, eşit kutupsal atalet momentine sahip hareketli düzlemdeki bütün sabit noktaların geometrik yerinin, merkezi Steiner noktası olan bir çember olduğunu belirtmiş ve Holditch teoremine benzer bir sonuç vermiştir. Böylelikle Müller, Holditch [17] ve Blaschke ve Müller [19] tarafından verilen alan formüllerine benzer olarak kutupsal atalet moment formülleri

$$T_X = T_O + 2\pi v (x_1^2 + x_2^2 - 2x_1s_1 - 2x_2s_2) \quad (1.9)$$

ve

$$T_X = \frac{aT_B + bT_A}{a+b} - 2\pi v ab \quad (1.10)$$

olarak hesaplamıştır.

Yukarıda bahsedilen çalışmalar ışığında düzlemsel homotetik hareketler ile ilgili birçok çalışma yapılmıştır. Bu çalışmalardan temel olanları şu şekildedir:

Tutar ve Kuruoğlu, [24] tarafından  $h$  homotetik oranlı ve  $T$  periyotlu kapalı homotetik hareketler için kapalı yörünge eğrisinin Steiner alan formülünü ve Holditch teoremini

$$F_X = F_O + h^2(t_0) \pi v (x_1^2 + x_2^2 - 2x_1s_1 - 2x_2s_2) + x_1\mu_1 + x_2\mu_2 \quad (1.11)$$

ve

$$F = h^2(t_0) \pi ab \quad (1.12)$$

olacak şekilde bir-parametrelili düzlemsel homotetik hareketler için ifade etmiştir. Burada  $\mu_1 = \frac{1}{2} \oint (-2hp_2 dh + hdu_2 + u_2 dh)$  ve  $\mu_2 = \frac{1}{2} \oint (2hp_1 dh - hdu_1 - u_1 dh)$  dir.

Kuruoğlu ve Yüce [25], Blaschke ve Müller [19] tarafından verilen çalışmanın homotetik hareketlerdeki karşılığını araştırmışlar ve

$$F_X = \frac{aF_B + bF_A}{a+b} - h^2(t_0) \pi v ab$$

sonucu elde etmişlerdir. Yukarıdaki denklemde  $h \equiv 1$  alınması durumunda (1.3) denkleminde verilen formül elde edilir.

Yüce ve Kuruoğlu [26], Hering [20] ve Pottmann [21] tarafından verilen çalışmaların homotetik hareketlerdeki karşılığını araştırmışlar ve sırasıyla,

$$F_X = \frac{aF_B + bF_A}{a+b} + (c^2 - ab) h^2(t_0) \pi v - \frac{-2h^2(t_0) \pi v c L_{AB}}{\lambda},$$

$$F - F_X = h^2(t_0) \pi v (R^2 - r^2)$$

ve

$$F_X = \left(1 - \frac{x}{b} + \frac{c-b}{bd} y\right) F_A + \left(\frac{x}{b} + \frac{cy}{bd}\right) F_B + \frac{y}{d} F_C \\ + \left(x^2 + y^2 - bx - \frac{c^2 + d^2}{d} y + \frac{bc}{d} y\right) h^2(t_0) \pi v$$

sonuçlarını elde etmişlerdir. Burada  $\lambda = \oint h d\varphi$  dir.

## 1.2. Tezin Amacı

Bu tez çalışmasının amacı kompleks, Galile ve hiperbolik düzlemlerin bir genellemesi olan genelleştirilmiş kompleks düzlemde bir-parametrelî düzlemsel hareket için Holditch-tipi teoremleri vermektir. Böylelikle bu çalışmada kompleks ( $p = -1$ ), Galile ( $p = 0$ ) ve hiperbolik ( $p = 1$ ) düzlemlerdeki Holditch-tipi teoremler  $p \in \mathbb{R}$  için genelleştirilerek tek bir teorem olarak verilmiştir. Bu tez çalışması aşağıda belirtilen dört adımda incelenmiştir.

1. Kompleks düzlemde bir-parametrelî düzlemsel hareket için hareketli düzlem üzerinde verilen sabit bir noktanın çizdiği yörüngenin kutupsal atalet momenti Steiner noktası cinsinden Müller [23, 27] tarafından verilmiştir. Hiperbolik düzlemde ise Holditch teoremi Yüce ve Kuruoğlu tarafından [28]'de çalışılmıştır. Galile düzleminde henüz literatürde bu teoremle ilgili bir çalışma mevcut değildir. Dolayısıyla ön çalışma olarak Galile düzlemindeki Holditch teoreminin eşitliği bulunmuştur. Daha sonra bu çalışmalar göz önüne alınarak kompleks, Galile ve hiperbolik düzlemlerin bir genellemesi olan genelleştirilmiş kompleks düzlemde, bir-parametrelî düzlemsel hareket altında hareketli düzlemde verilen sabit bir noktanın sabit düzlemde çizdiği yörünge alanı hesaplanmıştır. Ayrıca hareketli düzlemde sabit olan doğrusal üç nokta için bu noktaların sabit düzlemde çizdiği yörüngelerin alanları arasındaki ilişkiyi veren Holditch teoremi ispatlanmıştır. Son olarak genelleştirilmiş kompleks düzlemde verilen Holditch teoremi ile ilgili bazı teorem ve sonuçlar elde edilmiştir.
2. Genelleştirilmiş kompleks düzlemde bir-parametrelî düzlemsel hareket boyunca alınan bir doğrunun zarf eğrisinin uzunluğu hesaplanıp Cauchy uzunluk formülü verilmiştir. Daha sonra doğrusal olmayan sabit üç noktanın çizdiği yörüngelerin alanları arasındaki ilişki Holditch teoremi ile verilmiştir.
3. Genelleştirilmiş kompleks düzlemdeki bir-parametrelî düzlemsel hareket altında hareketli düzlemde verilen sabit bir noktanın çizdiği yörünge eğrisinin sınırladığı bölgenin kutupsal atalet momenti hesaplanmıştır. Daha sonra

hareketli düzlemde sabit olan doğrusal üç noktanın sabit düzlemde çizdiği yörüngelerin sınırladığı bölgelerin kutupsal atalet momentleri arasındaki ilişkiyi veren Holditch-tipi teorem ispatlanmıştır. Böylece Holditch-tipi teorem ile ilgili önemli teorem ve sonuçlar elde edilmiştir.

4. Son olarak genelleştirilmiş kompleks düzlemdeki bir-parametrelî düzlemsel hareket altında hareketli düzlemde sabit doğrusal olmayan üç noktanın sabit düzlemde çizdiği yörüngelerin sınırladıkları bölgelerin kutupsal atalet momentleri arasındaki ilişki, zarf eğrisinin uzunluğu cinsinden Holditch-tipi teorem ile ispatlanmıştır.



## BÖLÜM 2. TEMEL KAVRAMLAR

### 2.1. $\mathbb{E}^n$ Öklid Uzayında Temel Kavramlar

**Tanım 2.1.1.**  $A$ , boş olmayan bir küme ve  $K$  cismi üzerinde bir vektör uzayı  $V$  olsun. Eğer  $\forall P, Q \in A$  için

$$f : A \times A \rightarrow V \\ (P, Q) \rightarrow f(P, Q) = \overrightarrow{PQ}$$

şeklinde tanımlanan bir  $f$  dönüşümü, aşağıdaki iki aksiyomu sağlıyorsa  $A$  kümesine  $V$  ile birleştirilmiş bir afin uzay denir.

1.  $\forall P, Q, R \in A$  için  $f(P, Q) + f(Q, R) = f(P, R)$
2.  $\forall P \in A$  ve  $\forall \alpha \in V$  için  $f(P, Q) = \alpha$  olacak şekilde bir tek  $Q \in A$  noktası vardır [29].

Burada  $A$  nın boyutu  $\text{boy}A = \text{boy}V$  olarak tanımlanır [29].

**Tanım 2.1.2.**  $K$  cismi üzerinde iki vektör uzayı  $V_1$  ve  $V_2$  olsun.  $V_1$  ve  $V_2$  ile birleşen afin uzaylar  $A_1$  ve  $A_2$  olmak üzere  $f : A_1 \rightarrow A_2$  bir dönüşüm olsun.  $P, Q \in A_1$  olmak üzere

$$\psi : V_1 \rightarrow V_2 \\ \overrightarrow{PQ} \rightarrow \psi(\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{f(P)f(Q)}$$



şeklinde tanımlansın. Burada  $\psi$  dönüşümüne  $f$  ile birleşen dönüşüm adı verilir. Eğer  $\psi$  dönüşümü lineer ise  $f$  dönüşümüne bir afin dönüşüm denir [29].

**Tanım 2.1.3.**  $V = \mathbb{R}^n$  olmak üzere  $\forall \overrightarrow{OP} = \alpha \in \mathbb{R}^n$  ve  $\forall \overrightarrow{OQ} = \beta \in \mathbb{R}^n$  vektörleri için  $f$  dönüşümü

$$f : A \times A \rightarrow V$$

$$(P, Q) \rightarrow f(P, Q) = \overrightarrow{PQ} = \beta - \alpha$$

olarak verilsin. O halde  $A = \mathbb{R}^n$  cümlesine  $V = \mathbb{R}^n$   $n$ -boyutlu standart reel vektör uzayı ile birleştirilmiş bir afin uzay denir ve  $n$ -boyutlu standart reel afin uzay olarak adlandırılır [29].

**Tanım 2.1.4.**  $V$ ,  $n$ -boyutlu reel vektör uzayı ve  $A$  da  $V$  ile birleştirilmiş bir afin uzay olsun. Eğer  $V$ ; bir iç çarpım uzayı ise  $A$  afin uzayına  $n$ -boyutlu bir Öklid uzayı denir ve bu uzay,  $\mathbb{E}^n$  ile gösterilir [29].

**Tanım 2.1.5.**  $\mathbb{R}^n$ ,  $n$ -boyutlu standart reel vektör uzayında  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  ve  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  herhangi iki vektör olmak üzere

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rightarrow \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

şeklinde tanımlanan iç çarpıma  $\mathbb{R}^n$ 'de standart iç çarpım veya Öklid iç çarpımı denir.

**Tanım 2.1.6.**  $\mathbb{E}^n$ ,  $n$ -boyutlu Öklid iç çarpım uzayı  $V$  ile birleştirilmiş bir Öklid uzayı olmak üzere  $\forall X, Y \in \mathbb{E}^n$  için

$$d : \mathbb{E}^n \times \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(X, Y) \rightarrow d(X, Y) = |Y - X|$$

şeklinde tanımlanan  $d$  fonksiyonuna  $\mathbb{E}^n$  Öklid uzayında uzaklık fonksiyonu ve  $|Y - X|$  reel sayısına da  $X$  ile  $Y$  noktaları arasındaki uzaklık denir. Bu şekilde tanımlı  $d$  uzaklık fonksiyonu bir metriktir. Bu metrik Öklid metriği olarak adlandırılır [29].

**Tanım 2.1.7.**  $\mathbb{E}_1^n$  ve  $\mathbb{E}_2^n$ , sırasıyla,  $V_1$  ve  $V_2$ ,  $n$ -boyutlu iç çarpım uzayları ile birleşen birer Öklid uzayı olsunlar. Bir

$$f : \mathbb{E}_1^n \rightarrow \mathbb{E}_2^n$$

afin dönüşümü  $\forall \alpha, \beta \in V_1$  için

$$\langle \psi(\alpha), \psi(\beta) \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle$$

olacak şekilde bir

$$\psi : V_1 \rightarrow V_2$$

lineer dönüşümü ile birleşiyorsa  $f$  ye bir izometri denir [29].

**Tanım 2.1.8.**  $n$ -boyutlu  $\mathbb{E}^n$  Öklid uzayının izometrilерinden biri  $f$  olmak üzere  $\mathbb{E}^n$ 'deki bir  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  dik koordinat sistemine göre  $f$  izometrisinin matrisel ifadesi  $A \in O(n)$ , yani  $\det A = \pm 1$  olsun. O halde  $X, X', C \in \mathbb{R}^n$  olmak üzere

$$\begin{bmatrix} X' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix}$$

veya

$$X' = AX + C$$

yazılır. O halde  $f$  izometrisine  $\mathbb{E}^n$ ,  $n$ -boyutlu Öklid uzayında bir hareket denir.  $f$  hareketine,  $\det A = 1$  ise direkt hareket ve  $\det A = -1$  ise karşıt hareket denir [29].

**Tanım 2.1.9.**  $\mathbb{E}^n$ ,  $n$ -boyutlu Öklid uzayının bir  $f$  izometrisi için  $f(O) = O$  olacak şekilde bir  $O \in \mathbb{E}^n$  noktası varsa  $f$  hareketine  $O$  noktası etrafında  $\mathbb{E}^n$ 'nin bir dönmesi adı verilir. Eğer hareket direkt hareket ise  $f$  hareketine direkt dönme, karşıt hareket ise karşıt dönme denir.

$\mathbb{E}^n$ 'de başlangıç noktası  $O$  olan bir dik koordinat sistemi  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  olsun.  $f: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$  izometrisi  $O$  noktası etrafındaki bir dönme ise  $f$  izometrisinin bu dik koordinat sistemine göre ifadesi

$$X' = AX$$

şeklinindedir. Burada  $A \in O(n)$  ve  $X, X' \in \mathbb{R}^n$  dir [29].

**Tanım 2.1.10.**  $\mathbb{E}^n$ ,  $n$ -boyutlu Öklid uzayının bir  $f$  izometrisi ve  $\forall X \in \mathbb{E}^n$  için  $f(X) = X + C$  olacak şekilde bir tek  $C = (c_1, c_2, \dots, c_n) \in \mathbb{E}^n$  noktası varsa  $f$  ye  $\mathbb{E}^n$ 'nin  $C$  ile belirtilen bir ötelemesi denir.

$\mathbb{E}^n$ 'de başlangıç noktası  $O$  olan bir dik koordinat sistemi  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  olsun.  $f: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$  izometrisi  $C = (c_1, c_2, \dots, c_n) \in \mathbb{E}^n$  noktası ile belli olan bir öteleme olmak üzere  $f$ 'nin bu dik koordinat sistemine göre ifadesi

$$\begin{bmatrix} X' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix}$$

veya

$$X' = X + C$$

dir [29].

**Tanım 2.1.11.**  $E$  hareketli düzleminin  $E'$  sabit düzlemine göre hareketi  $B = E / E'$  ile gösterilsin.  $B$  hareketinin  $\varphi$  dönme açısı ve  $\mathbf{u}$  öteleme vektörünün bileşenleri  $u_1$  ve  $u_2$  bir  $t$  reel parametresinin  $\varphi = \varphi(t)$ ,  $u_1 = u_1(t)$ ,  $u_2 = u_2(t)$  şeklinde sürekli diferensiyellenebilen fonksiyonları ise  $B$  hareketine bir-parametrelî düzlemsel hareket denir. Bu bir-parametrelî hareketin  $t$  parametresi, genellikle zaman olarak ele alınmaktadır [29].

**Tanım 2.1.12.**  $u_1, u_2$  ve  $\varphi$ ; bir  $t$  reel parametresinin sürekli diferensiyellenebilen fonksiyonları olmak üzere  $u_1 = u_1(t)$ ,  $u_2 = u_2(t)$  ve  $\varphi = \varphi(t)$  fonksiyonları aynı  $t_0 \leq t \leq t_1$  aralığında tanımlanmış olsun. O halde,

$$\begin{aligned} u_j(t+T) &= u_j(t), & j &= 1, 2 \\ \varphi(t+T) &= \varphi(t) + 2\pi\nu \end{aligned}$$

bağıntıları sağlanacak şekilde en küçük bir  $T > 0$  sayısı varsa  $\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{u}$  denklemi ile tanımlanan harekete  $T$  periyotlu ve  $\nu$  dönme sayılı bir-parametrelî kapalı düzlemsel hareket denir [2, 19].

## 2.2. Kompleks Düzlemde Hareket ve Holditch-Tipi Teoremler

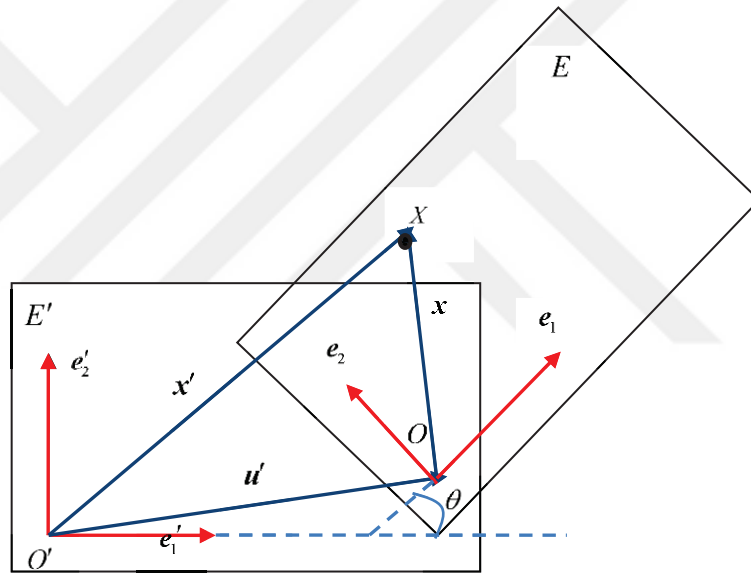
### 2.2.1. Kompleks düzlemde hareket

Bu bölümde Müller [2] tarafından verilen kompleks düzlemde bir-parametrelî düzlemsel hareket verilmiştir.

**Tanım 2.2.1.**  $E$  ve  $E'$  sırasıyla,  $\{O; e_1, e_2\}$  ve  $\{O'; e'_1, e'_2\}$  koordinat sistemlerine sahip hareketli ve sabit iki düzlem olsun. Hareketli düzlemdeki herhangi bir  $X$  noktasının, sırasıyla, hareketli ve sabit sisteme göre ifadeleri  $\mathbf{x} = x_1 + ix_2$  ve  $\mathbf{x}' = x'_1 + ix'_2$  olmak üzere

$$\mathbf{x}' = (\mathbf{x} - \mathbf{u}') e^{i\theta}$$

şeklinde verilen denkleme kompleks düzlemde bir-parametrelî düzlemsel hareket denir [2].



Şekil 2.1. Kompleks düzlemde hareket [2]

Burada  $\overline{O'O} = \mathbf{u}'$  şeklindedir. Ek olarak,  $\theta$  açısı kompleks düzlemde  $E/E'$  hareketinin dönme açısıdır. Ayrıca,  $\theta$  dönme açısı,  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{x}'$  ve  $\mathbf{u}'$  fonksiyonları  $t \in I \subset \mathbb{R}$  zaman parametresine bağlı sürekli diferensiyellenebilir fonksiyonlardır.  $t = 0$  anında koordinat sistemleri çakışmıştır. Ayrıca,  $\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} = 0$  olduğunda hareket ötelemeden ibaret olacağından  $\dot{\theta} \neq 0$  olarak alınmıştır [2].

**Tanım 2.2.2.**  $E$  hareketli kompleks düzlemde verilen bir  $X$  noktası için

$$V'_r = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \dot{\mathbf{x}}e^{i\theta},$$

$$V'_a = \frac{d\mathbf{x}'}{dt} = -\dot{u}e^{i\theta} + i\dot{\theta}(\mathbf{x}-\mathbf{u})e^{i\theta} + \dot{\mathbf{x}}e^{i\theta}$$

ve

$$V'_f = \frac{d_f \mathbf{x}}{dt} = -\dot{u}e^{i\theta} + i\dot{\theta}(\mathbf{x}-\mathbf{u})e^{i\theta}$$

eşitlikleri ile verilen hızlara, sırasıyla, relatif, mutlak ve sürüklenme hızı denir [2].

O halde aşağıdaki teorem verilebilir.

**Teorem 2.2.3.** Kompleks düzlemde bir-parametrelî düzlemsel harekette bir noktanın mutlak, sürüklenme ve relatif hız vektörleri arasındaki ilişki

$$V'_a = V'_f + V'_r$$

şeklindedir [2].

Kompleks düzlemde hareketin pol noktaları sürüklenme hızının sıfır olmasıyla karakterize edilir. Dolayısıyla  $\overline{OQ} = \mathbf{q} = (q_1, q_2)$  pol noktasının bileşenleri

$$q_1 = u_1 + \frac{\dot{u}_2}{\dot{\theta}}, \quad q_2 = u_2 - \frac{\dot{u}_1}{\dot{\theta}} \quad (2.1)$$

olarak elde edilir.

Ayrıca kompleks düzlemde bir-parametrelî düzlemsel hareketin sürüklenme hız vektörü, pol noktasının yer vektörü cinsinden

$$V'_f = i\dot{\theta}(\mathbf{x} - \mathbf{q})e^{i\theta} \quad (2.2)$$

şeklinde yazılabilir [2].

Böylece aşağıdaki teoremler verilebilir:

**Teorem 2.2.4.**  $\overrightarrow{QX}$  pol ışını ile  $V'_f$  sürüklenme hız vektörü kompleks düzlemde birbirine diktir [2].

**Teorem 2.2.5.** Kompleks düzlemde  $V'_f$  sürüklenme hız vektörünün uzunluğu ile  $\overrightarrow{QX}$  pol ışınının uzunluğu arasındaki ilişki

$$|V'_f| = |\dot{\theta}| |\overrightarrow{QX}|$$

şeklindedir [2].

**Teorem 2.2.6.** Kompleks düzlemde bir-parametrelî hareket boyunca sabit ve hareketli düzlemlerdeki pol eğrilerini çizen pol noktalarının hızları ve yay-uzunlukları aynıdır [2].

**Teorem 2.2.7.** Kompleks düzlemde bir-parametrelî hareket boyunca hareketli ve sabit düzlemdeki pol eğrileri birbiri üzerinde kaymaksızın yuvarlanır [2].

### 2.2.2. Kompleks düzlemde Steiner alan formülü ve Holditch teoremi

Bu bölümde Müller [23, 27] tarafından verilen hareketli kompleks düzlemde, sabit bir  $X$  noktasının sabit düzlemde çizdiği yörünge eğrisinin sınırladığı bölgenin alanı

ve bu alan için kompleks düzlemde bir-parametrelî düzlemsel hareket altında Holditch teoremi verilmiştir.

**Teorem 2.2.8.**  $X$  noktası hareketli kompleks düzlemde sabit bir nokta olmak üzere  $X$  noktasının çizdiği yörünge eğrisinin sınırladığı bölgenin alanı

$$F_X = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} (x_1' dx_2' - x_2' dx_1') = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} [\mathbf{x}', d\mathbf{x}'] \quad (2.3)$$

şeklindedir [30].

**Tanım 2.2.9.**  $P$  pol noktalarının hareketli düzlemde çizdiği pol eğrisinin ağırlık merkezine *Steiner noktası* denir ve  $S = (s_1, s_2)$  olmak üzere

$$\begin{aligned} 2\alpha s_1 &= 2 \int_{t_0}^{t_1} q_1 d\theta - \int_{t_0}^{t_1} du_2 \\ 2\alpha s_2 &= 2 \int_{t_0}^{t_1} q_2 d\theta - \int_{t_0}^{t_1} du_1 \end{aligned} \quad (2.4)$$

şeklinde hesaplanır. Steiner noktası ilk kez Jakob Steiner tarafından bulunmuştur [2, 18].

O halde aşağıdaki teorem verilebilir.

**Teorem 2.2.10.**  $E$  hareketli kompleks düzlemde, sabit bir  $X$  noktasının sabit düzlemde çizdiği yörünge eğrisinin sınırladığı bölgenin alanı

$$F_X = F_O + \frac{\alpha}{2} (x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 s_1 - 2x_2 s_2) \quad (2.5)$$

dir [27].



Bu formüle kompleks düzlemde **Steiner alan formülü** denir.

Şimdi özel olarak  $F_X$  alanı sabit kabul edilsin. Bu durumda, (2.5) denklemi göz önüne alınırsa aşağıdaki teorem verilebilir.

**Teorem 2.2.11.** Kompleks düzlemde bir-parametrelî düzlemsel hareket boyunca aynı  $F_X$  alanına sahip yörünge eğrilerini çizen bütün  $X$  noktaları sabit düzlemde bir çember üzerinde bulunur. Bu çemberin merkezi Steiner noktasıdır [23].

$E$  hareketli düzlem üzerinde sabit  $X$  ve  $Y$  noktaları verilsin. O halde  $\overline{XY}$  doğru parçası üzerinde  $Z$  sabit bir nokta olmak üzere  $Z$  noktasının çizdiği yörünge eğrisinin sınırladığı bölgenin alanı,  $X$  ve  $Y$  noktalarının çizdiği yörünge eğrilerinin alanları cinsinden ifade edilsin.

Kompleks düzlemde bir-parametrelî düzlemsel hareket için  $X, Y$  ve  $Z$  noktalarının yer vektörleri arasındaki ilişki,

$$z' = \lambda x' + \mu y' \quad (2.6)$$

şeklinde yazılabilir. O halde (2.6) denkleminin diferensiyeli alınırsa,

$$dz' = \lambda dx' + \mu dy' \quad (2.7)$$

denklemi bulunur. Burada (2.3) denklemi,  $Z$  noktasının çizdiği yörünge alanı için kullanılır ve (2.6) ve (2.7) denklemleri yardımıyla Bölüm 2.2.1.'deki işlemlere benzer işlemler yapılırsa aşağıdaki teorem verilebilir.

**Teorem 2.2.12.** Kompleks düzlemde bir-parametrelî düzlemsel hareket boyunca  $E$  hareketli düzlem üzerinde sabit  $X$  ve  $Y$  noktaları verilsin.  $\overline{XY}$  doğru parçası üzerinde  $Z$  sabit bir nokta olmak üzere  $Z$  noktasının  $E'$  sabit kompleks düzlemde çizdiği yörünge eğrisinin  $F_Z$  alanı,

$$F_Z = \lambda^2 F_X + 2\lambda\mu F_{XY} + \mu^2 F_Y \quad (2.8)$$

dir [23].

Burada verilen  $F_{XY}$  ifadesi için aşağıdaki tanım verilebilir.

**Tanım 2.2.13.** Kompleks düzlemde bir-parametrelî düzlemsel  $E/E'$  hareketi boyunca verilen  $X$  ve  $Y$  noktaları için (2.8) denkleminde verilen  $F_{XY}$  ifadesine **karışık alan formülü** denir ve

$$F_{XY} = F_O + \frac{\alpha}{2} (x_1 y_1 + x_2 y_2 - (x_1 + y_1) s_1 - (x_2 + y_2) s_2) \quad (2.9)$$

formülü ile hesaplanır [27].

$Z$  noktasının  $E'$  sabit kompleks düzlemde çizdiği yörünge eğrisinin  $F_Z$  alanı için (2.8) ve (2.9) denklemleri kullanılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa  $F_Z$  yörünge alanı,

$$F_Z = \lambda F_X + \mu F_Y - \frac{\alpha}{2} \lambda \mu d^2 \quad (2.10)$$

denklemleri ile verilir.

Şimdi  $X$  ve  $Y$  noktalarının aynı yörünge eğrisi üzerinde olduğu kabul edilsin. Bu durumda

$$F_X = F_Y \quad (2.11)$$

eşitliği yazılabilir. O halde (2.10) ve (2.11) denklemleri kullanılırsa,  $\lambda + \mu = 1$  olmak üzere

$$F_x - F_z = \frac{\alpha}{2} \lambda \mu d^2 \quad (2.12)$$

denklemini bulunur. Böylece (2.12) denkleminde aşağıdaki teorem verilebilir.

**Teorem 2.2.14.** Kompleks düzlemde,  $E/E'$  bir-parametrelili düzlemsel hareketi boyunca  $E$  düzleminde sabit uzunluklu bir  $\overline{XY}$  doğru parçası üzerinde sabit bir nokta  $Z$  olsun. Belirli bir zaman aralığında  $\overline{XY}$  kirişi bir  $k_x$  eğrisini çizerken  $Z$  noktası da başka bir  $k_z$  eğrisi çizer. Bu iki eğri arasında kalan alan, hareketin dönme açısına ve  $X, Y, Z$  noktaları arasındaki uzaklığa bağlıdır [23].

### 2.2.3. Kompleks düzlemde doğrusal olmayan üç nokta için Holditch teoremi

Bu bölümde Blaschke ve Müller [19] tarafından Öklid düzleminde verilen bir doğrunun zarf eğrisinin uzunluğu kullanılarak Hering [20] tarafından verilen doğrusal olmayan üç nokta için Holditch teoremi yardımıyla kompleks düzlemde verilen bir doğrunun zarf eğrisinin uzunluğu ve doğrusal olmayan üç nokta için Holditch teoremi verilmiştir.

$E$  ve  $E'$ , sırasıyla, hareketli ve sabit kompleks düzlemler olmak üzere  $E/E'$  bir-parametrelili düzlemsel hareketi boyunca hareketli  $E$  düzleminde verilen sabit  $X$  ve  $Y$  noktaları  $k_x$  ve  $k_y$  yörüngelerini çizsin.  $E$  hareketli düzleminin  $\mathbf{a}_3$  normal vektörü yardımıyla  $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$  dik çatısı verilsin. O halde  $\mathbf{e}_1$  ile  $\mathbf{a}_2$  vektörleri arasındaki açı  $\psi$ ,  $\mathbf{e}'_1$  ile  $\mathbf{a}'_2$  vektörleri arasındaki açı  $\psi'$  olmak üzere

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= -\sin \psi \mathbf{e}_1 + \cos \psi \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{a}_2 &= \cos \psi \mathbf{e}_1 + \sin \psi \mathbf{e}_2 \end{aligned} \quad (2.13)$$

ve

$$\begin{aligned} \mathbf{a}'_1 &= -\sin \psi' \mathbf{e}'_1 + \cos \psi' \mathbf{e}'_2 \\ \mathbf{a}'_2 &= \cos \psi' \mathbf{e}'_1 + \sin \psi' \mathbf{e}'_2 \end{aligned} \quad (2.14)$$

eşitlikleri yazılabilir. (2.14) denkleminin diferensiyeli alınırsa,

$$\begin{aligned} d\mathbf{a}'_1 &= -(\cos \psi' \mathbf{e}'_1 + \sin \psi' \mathbf{e}'_2) d\psi' \\ d\mathbf{a}'_2 &= (-\sin \psi' \mathbf{e}'_1 + \cos \psi' \mathbf{e}'_2) d\psi' \end{aligned} \quad (2.15)$$

elde edilir [19].

$\overline{XY}$  doğru parçası üzerinde olmayan  $E$  hareketli kompleks düzlemde sabit bir nokta  $Z$  olsun. Bu durumda  $Z$  noktasının  $\overline{XY}$  doğru parçasına uzaklığı  $c$  olmak üzere  $Z$  ve  $X, Y$  noktalarının yer vektörleri arasındaki ilişki, vektörel işlemler yardımıyla

$$z = \alpha x + \beta y + ca_2 \quad (2.16)$$

şeklinde yazılır. Aynı zamanda (2.13), (2.14), (2.15) ve (2.16) denklemleri göz önüne alınırsa bu yer vektörlerinin sabit düzleme göre ifadeleri

$$z' = \alpha x' + \beta y' + ca'_2 \quad (2.17)$$

şeklinde elde edilir. (2.17) denkleminin diferensiyel alınırsa,

$$dz' = \alpha dx' + \beta dy' + cda'_2 \quad (2.18)$$

bulunur [19]. Kompleks düzlemde verilen bir  $g$  doğrusunun Hesse formundaki denklemi

$$g \equiv x_1 \cos \psi + x_2 \sin \psi - r \quad (2.19)$$

olmak üzere  $g$  doğru demetlerinin zarfının yay-uzunluğu

$$L = \int_{t_0}^{t_1} r d\varphi \quad (2.20)$$

eşitliği ile verilir. Burada  $r$ ,  $g$  doğrusunun orijine olan uzaklığıdır. [19]. Ayrıca  $(Q)$  hareketli pol eğrisinin  $\overline{Q_1Q_2}$  doğru parçasının  $g$  doğrusu üzerine dik izdüşümünün uzunluğu  $L_Q$  olmak üzere

$$L_Q = \int_{t_0}^{t_1} (r_1 \sin \psi - r_2 \cos \psi) d\varphi \quad (2.21)$$

eşitliği geçerlidir [19].

O halde (2.17), (2.18), (2.20) ve (2.21) denklemleri kullanılırsa kompleks düzlemde doğrusal olmayan üç nokta için Holditch teoremi aşağıdaki gibi verilebilir.

**Teorem 2.2.15.** Kompleks düzlemde,  $E/E'$  bir-parametrelili düzlemsel hareketi esnasında  $E$  kompleks düzlemde sabit  $X(0,0)$  ve  $Y(a+b,0)$  noktaları, sırasıyla,  $F_X$  ve  $F_Y$  alanlı  $k_X$  ve  $k_Y$  yörünge eğrilerini çizsin. O halde  $\overline{XY}$  doğru parçası üzerinde olmayan bir  $Z(a,c)$  noktasının çizdiği  $k_Z$  yörünge eğrisinin sınırladığı bölgenin alanı

$$F_Z = \frac{bF_X + aF_Y}{a+b} - \frac{\delta}{2}(ab - c^2) + cL_{XY} \quad (2.22)$$

dir. Burada  $L_{XY}$ ,  $X$  ve  $Y$  noktalarının oluşturduğu doğrunun zarf eğrisinin uzunluğudur [20].

Eğer burada özel olarak  $c=0$  alınırsa (2.22) denklemi

$$F_Z = \frac{bF_X + aF_Y}{a+b} - \frac{\alpha}{2}abd^2 \quad (2.23)$$

denkleminde indirgenir. Bu formül ise (2.10) denkleminde verilen doğrusal üç nokta için alan formülü ile aynıdır. Dolayısıyla (2.22) denklemi (2.23) denkleminin daha genel halidir.

#### 2.2.4. Kompleks düzlemde Holditch-tipi teorem

Bu bölümde Müller tarafından [23]'de verilen hareketli kompleks düzlemdeki sabit bir  $X$  noktasının sabit düzlemde çizdiği yörünge eğrisinin sınırladığı bölgenin kutupsal atalet momentini ve bu moment için Holditch-tipi teoremi ifade edelim.

**Teorem 2.2.16.** Kompleks düzlemde bir-parametrel düzlemsel bir hareket boyunca bir  $X$  noktasının çizdiği yörünge eğrisinin sınırladığı bölgenin kutupsal atalet momentini

$$T_X = \int_{t_0}^{t_1} |\mathbf{x}'|^2 d\theta \quad (2.24)$$

şeklindedir [23].

O halde (2.1), (2.4) ve (2.24) denklemleri göz önüne alınırsa aşağıdaki teorem verilebilir.

**Teorem 2.2.17.** Bir-parametrel düzlemsel hareket boyunca,  $E$  hareketli kompleks düzlemde verilen sabit bir  $X$  noktasının sabit düzlemde çizdiği yörünge eğrisinin sınırladığı bölgenin kutupsal atalet momentini

$$T_X = T_O + \delta(x_1^2 + x_2^2 - 2x_1s_1 - 2x_2s_2) \quad (2.25)$$

dir [23].

Şimdi özel olarak (2.25) denkleminde verilen  $T_X$  kutupsal atalet momentini sabit kabul edilsin. Bu durumda (2.25) denkleminde aşağıdaki teorem verilebilir.

**Teorem 2.2.18.** Kompleks düzlemde bir-parametrelî düzlemsel hareket boyunca aynı  $T_X$  kutupsal atalet momentine sahip yörünge eğrilerini çizen bütün  $X$  noktaları sabit düzlemde, merkezi Steiner noktası olan bir çember üzerinde bulunur [23].

$E$  hareketli kompleks düzlem üzerinde sabit uzunluklu  $\overline{XY}$  doğru parçası üzerinde  $Z$  sabit bir nokta olmak üzere  $X, Y$  ve  $Z$  noktalarının yer vektörleri arasındaki ilişki,

$$z' = \lambda x' + \mu y' \quad (2.26)$$

şeklinde yazılabilir. Burada (2.24) denklemi,  $Z$  noktasının çizdiği yörünge için kutupsal atalet momenti için kullanılır ve Bölüm 2.2.2'deki alan hesaplamalarına benzer işlemler yapılırsa (2.26) denklemi yardımıyla aşağıdaki teorem verilebilir.

**Teorem 2.2.19.** Kompleks düzlemde bir-parametrelî düzlemsel hareket esnasında sabit uzunluklu  $\overline{XY}$  doğru parçasının  $X$  ve  $Y$  uç noktaları sabit düzlemde, sırasıyla,  $k_X$  ve  $k_Y$  yörünge eğrilerini çizerken  $X$  ve  $Y$  noktaları ile doğrusal  $Z$  noktası da bir  $k_Z$  yörünge eğrisi çizer. Bu yörünge eğrilerinin sınırladığı bölgelerin kutupsal atalet momentleri, sırasıyla,  $T_X$ ,  $T_Y$  ve  $T_Z$  olmak üzere bu momentler arasındaki ilişki,

$$T_Z = \lambda^2 T_X + 2\lambda\mu T_{XY} + \mu^2 T_Y \quad (2.27)$$

şeklindedir [23].

(2.27) denkleminde verilen  $T_{XY}$  ifadesine kompleks düzlemde  $E/E'$  hareketi için **karışık kutupsal atalet moment** denir ve

$$T_{XY} = T_O + \delta(x_1 y_1 + x_2 y_2 - (x_1 + y_1)s_1 - (x_2 + y_2)s_2) \quad (2.28)$$

şeklinde bulunur [23].

O halde (2.27) ve (2.28) denklemleri kullanılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa kompleks düzlemde bir-parametrelili düzlemsel hareket için  $Z$  noktasının çizdiği yörünge eğrisinin sınırladığı bölgenin kutupsal atalet momenti  $T_Z$ ,  $T_X$  ve  $T_Y$  momentleri cinsinden

$$T_Z = \lambda T_X + \mu T_Y - \lambda \mu \delta d^2 \quad (2.29)$$

şeklinde elde edilir.

Şimdi  $X$  ve  $Y$  noktalarının aynı yörünge eğrisi üzerinde olduğu kabul edilsin. Bu durumda

$$T_X = T_Y \quad (2.30)$$

eşitliği yazılabilir. O halde (2.29) ve (2.30) denklemleri kullanılırsa aşağıdaki teorem verilebilir.

**Teorem 2.2.20. Holditch-Tipi Teorem:** Kompleks düzlemde  $E/E'$  bir-parametrelili düzlemsel hareketi esnasında  $E$  düzleminde sabit noktalar  $X$  ve  $Y$  olmak üzere bu noktalardan oluşan  $\overline{XY}$  doğru parçası üzerinde sabit bir nokta  $Z$  olsun. Belirli bir zaman aralığında  $\overline{XY}$  kirişi bir  $k_X$  eğrisini çizerken  $Z$  noktası da başka bir  $k_Z$  eğrisi çizer. Bu iki eğrinin çizdiği yörüngelerin  $T_X$  ve  $T_Z$  kutupsal atalet momentleri arasındaki ilişki

$$T_X - T_Z = \lambda \mu \delta d^2 \quad (2.31)$$

dir [23].



### 2.2.5. Kompleks düzlemde doğrusal olmayan üç nokta için Holditch-tipi teorem

Bu bölümde, Yüce ve ark. [31] tarafından Öklid düzleminde verilen  $E/E'$  bir-parametrelili düzlemsel hareketi boyunca doğrusal olmayan üç nokta için verilen Holditch-tipi teorem yardımıyla kompleks düzlemde Holditch-tipi teorem verilmiştir.

Hareketli  $E$  kompleks düzlemde verilen sabit  $X$  ve  $Y$  noktaları bir-parametrelili düzlemsel hareket boyunca  $k_X$  ve  $k_Y$  yörünge eğrilerini çizsin. O halde  $E$  hareketli kompleks düzlemin  $\mathbf{a}_3$  normal vektörü yardımıyla tanımlanan dik çatı  $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$  olmak üzere (2.14) ve (2.15) denklemlerinden

$$\begin{aligned} \mathbf{a}'_1 &= -\sin \psi' \mathbf{e}'_1 + \cos \psi' \mathbf{e}'_2 \\ \mathbf{a}'_2 &= \cos \psi' \mathbf{e}'_1 + \sin \psi' \mathbf{e}'_2 \end{aligned} \quad (2.32)$$

ve

$$\begin{aligned} d\mathbf{a}'_1 &= -(\cos \psi' \mathbf{e}'_1 + \sin \psi' \mathbf{e}'_2) d\psi' \\ d\mathbf{a}'_2 &= (-\sin \psi' \mathbf{e}'_1 + \cos \psi' \mathbf{e}'_2) d\psi' \end{aligned} \quad (2.33)$$

yazılabilir [31]. Ayrıca (2.19), (2.20) ve (2.21) denklemleri göz önüne alınırsa aşağıdaki teorem verilebilir.

**Teorem 2.2.21.** Kompleks düzlemde  $E/E'$  bir-parametrelili düzlemsel hareketi esnasında, hareketli  $E$  düzleminde sabit uzunluklu  $\overline{XY}$  doğru parçasının uç noktaları, sırasıyla,  $k_X$  ve  $k_Y$  eğrilerini çizerken,  $X$  ve  $Y$  noktaları ile doğrusal olmayan sabit bir  $Z$  noktası,  $k_Z$  eğrisini çizer. Bu durumda  $k_X$ ,  $k_Y$  ve  $k_Z$  yörünge eğrilerinin, sırasıyla,  $T_X$ ,  $T_Y$  ve  $T_Z$  kutupsal atalet momentleri arasında,

$$T_Z = \alpha T_X + \beta T_Y + \frac{\delta}{2}(c^2 - \alpha\beta d^2) + cL_{XY} \quad (2.34)$$

bağıntısı mevcuttur. Burada  $L_{XY}$ ,  $X$  ve  $Y$  noktalarının oluşturduğu doğrunun zarf eğrisinin uzunluğudur [31].

Eğer burada özel olarak  $c = 0$  alınırsa (2.34) denklemi

$$T_Z = \lambda T_X + \mu T_Y - \delta \lambda \mu d^2 \quad (2.35)$$

olarak indirgenir. Bu formül ise (2.29) denklemindeki doğrusal üç nokta için kutupsal atalet momenti formülü ile aynıdır. Dolayısıyla (2.34) denklemi (2.35) denkleminin daha genel halidir.

### 2.3. Hiperbolik Düzlemde Hareket ve Holditch-Tipi Teoremler

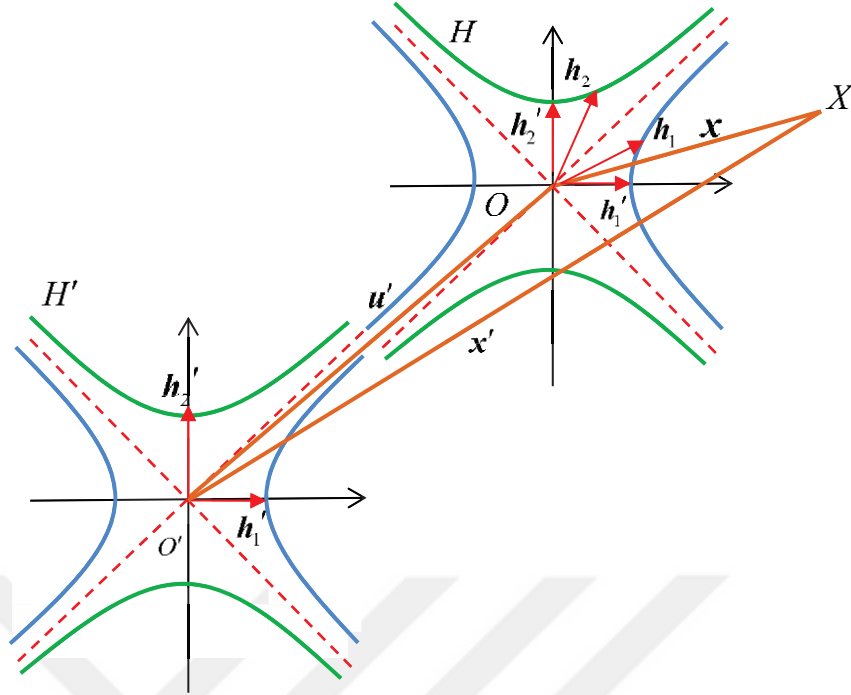
#### 2.3.1. Hiperbolik düzlemde hareket

Bu bölümde Yüce ve Kuruoğlu tarafından [8]' de verilen hiperbolik düzlemdeki bir-parametrelî düzlemsel hareket verilmiştir.

**Tanım 2.3.1.**  $H$  ve  $H'$ , sırasıyla,  $\{O; \mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2\}$  ve  $\{O'; \mathbf{h}'_1, \mathbf{h}'_2\}$  koordinat sistemlerine sahip hareketli ve sabit iki düzlem olmak üzere hareketli düzlemin I. bölgesinde verilen herhangi bir  $X$  noktasının, sırasıyla, hareketli ve sabit düzlemlere göre yer vektörleri  $\mathbf{x} = x_1 + jx_2$  ve  $\mathbf{x}' = x'_1 + jx'_2$  ( $j^2 = -1$ ,  $j \neq \pm 1$ ) olmak üzere hiperbolik düzlemde bir-parametrelî hareket

$$\mathbf{x}' = (\mathbf{x} - \mathbf{u}') e^{j\beta}$$

şeklinde verilir [8].



Şekil 2.2. Hiperbolik düzlemde hareket [32]

Burada  $\overrightarrow{O'O} = \mathbf{u}'$  olmak üzere  $\beta$  açısı hiperbolik düzlemde  $H/H'$  hareketinin dönme açısıdır. Ek olarak  $\beta$  dönme açısı,  $\mathbf{x}, \mathbf{x}'$  ve  $\mathbf{u}'$  fonksiyonları  $t \in I \subset \mathbb{R}$  zaman parametresine bağlı sürekli diferensiyellenebilir fonksiyonlardır ve  $t=0$  anında koordinat sistemleri çakışmıştır. Eğer  $\frac{d\beta}{dt} = \dot{\beta} = 0$  ise hareket sadece ötelemeden ibaret olacağı için hareket boyunca  $\dot{\beta} \neq 0$  olduğu göz önüne alınır [8]. Ayrıca aksi belirtilmedikçe bundan sonraki işlemler hiperbolik düzlemin I. bölgesi göz önüne alınarak yapılmıştır.

**Tanım 2.3.2.**  $H/H'$  hareketi boyunca hareketli hiperbolik düzlemde verilen bir  $X$  noktası için

$$V'_r = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \dot{\mathbf{x}}e^{j\beta},$$

$$V'_a = \frac{d\mathbf{x}'}{dt} = -\dot{\mathbf{u}}e^{j\beta} + j\dot{\beta}(\mathbf{x}-\mathbf{u})e^{j\beta} + \dot{\mathbf{x}}e^{j\beta}$$

ve

$$\mathbf{V}'_f = \frac{d_f \mathbf{x}}{dt} = -\dot{\mathbf{u}}e^{j\beta} + j\dot{\beta}(\mathbf{x} - \mathbf{u})e^{j\beta}$$

eşitlikleri ile verilen hızlara, sırasıyla, relatif, mutlak ve sürüklenme hızı denir [8].

O halde aşağıdaki teorem verilebilir.

**Teorem 2.3.3.** Hiperbolik düzlemde bir-parametrelili düzlemsel hareket boyunca düzlemin I. bölgesinde verilen bir noktanın mutlak, sürüklenme ve relatif hız vektörleri arasındaki ilişki,

$$\mathbf{V}'_a = \mathbf{V}'_f + \mathbf{V}'_r$$

şeklindedir [8].

$H / H'$  hareketi boyunca hiperbolik düzlemde bazı noktaların sürüklenme hızları sıfırdır. Bu noktalara bir-parametrelili düzlemsel hareketin pol noktaları denir. Dolayısıyla hiperbolik düzlemde pol noktasının bileşenleri  $\overline{OQ} = \mathbf{q} = (q_1, q_2)$  olmak üzere

$$q_1 = u_1 + \frac{\dot{u}_2}{\beta}, \quad q_2 = u_2 + \frac{\dot{u}_1}{\beta} \quad (2.36)$$

şeklinde elde edilir.

Ayrıca hiperbolik düzlemdeki hareket boyunca sürüklenme hız vektörü pol noktası cinsinden

$$\mathbf{V}'_f = j\dot{\beta}(\mathbf{x} - \mathbf{q})e^{j\beta} \quad (2.37)$$

şeklinde yazılabilir.

O halde aşağıdaki teoremler verilebilir.

**Teorem 2.3.4.**  $H / H'$  hareketi boyunca hiperbolik düzlemde  $\overline{QX}$  pol ışını ile  $V'_f$  sürüklenme hız vektörü Lorentz anlamda birbirine diktir [8].

**Teorem 2.3.5.**  $H / H'$  hareketi boyunca hiperbolik düzlemde  $V'_f$  sürüklenme hız vektörünün uzunluğu ile  $\overline{QX}$  pol ışınının uzunluğu arasındaki ilişki

$$|V'_f| = |\beta| |\overline{QX}|$$

şeklindedir [8].

**Teorem 2.3.6.**  $H / H'$  hareketi boyunca hiperbolik düzlemde sabit ve hareketli düzlemlerde, pol eğrilerini çizen pol noktalarının hızları ve yay-uzunlukları aynıdır [8].

**Teorem 2.3.7.** Hiperbolik düzlemde bir-parametrelî hareket boyunca hareketli düzlemdeki pol eğrisi sabit düzlemdeki pol eğrisi üzerinde kaymaksızın yuvarlanır [8].

### 2.3.2. Hiperbolik düzlemde Steiner alan formülü ve Holditch teoremi

Şimdi Yüce ve Kuruoğlu tarafından [28]'de verilen hiperbolik düzlemde sabit bir  $X$  noktasının çizdiği yörünge eğrisinin sınırladığı bölgenin alanı ve bu alan için ifade edilen Holditch teoremi verilmiştir.

**Tanım 2.3.8.**  $H / H'$  hareketi boyunca  $Q = (q_1, q_2)$  pol noktalarının hareketli düzlemde çizdiği pol eğrisinin ağırlık merkezine *Steiner noktası* denir ve

$$\begin{aligned}
2\alpha s_1 &= 2 \int_{t_0}^{t_1} q_1 d\beta - \int_{t_0}^{t_1} du_2 \\
2\alpha s_2 &= 2 \int_{t_0}^{t_1} q_2 d\beta - \int_{t_0}^{t_1} du_1
\end{aligned}
\tag{2.38}$$

şekilde hesaplanır.

O halde aşağıdaki teorem verilebilir.

**Teorem 2.3.9.** Hiperbolik düzlemde bir-parametrelili düzlemsel  $H/H'$  hareketi boyunca  $H$  hareketli düzlemde verilen sabit bir  $X$  noktasının sabit düzlemde çizdiği yörünge eğrisinin sınırladığı bölgenin alanı

$$F_X = F_O + \frac{\alpha}{2} (x_1^2 - x_2^2 - 2x_1s_1 + 2x_2s_2) \tag{2.39}$$

dir [28].

Bu formüle hiperbolik düzlemde **Steiner alan formülü** denir.

Şimdi (2.39) denkleminle verilen  $F_X$  alanı sabit kabul edilsin. Bu durumda aşağıdaki teorem verilebilir.

**Teorem 2.3.10.** Bir-parametrelili düzlemsel  $H/H'$  hareketi boyunca hiperbolik düzlemin I. Bölgesinde, aynı  $F_X$  alanlı yörünge eğrilerini çizen bütün  $X$  noktaları sabit düzlemde bir Lorentz çemberi üzerinde bulunurlar. Bu çemberin merkezi Steiner noktasıdır [28].

$H$  hareketli hiperbolik düzlemde sabit uzunluklu  $\overline{XY}$  doğru parçası üzerinde sabit bir nokta  $Z$  olsun. O halde,  $Z$  noktasının çizdiği yörünge eğrisinin sınırladığı bölgenin alanını hesaplamak için hiperbolik düzlemde bir-parametrelili  $H/H'$  hareketi için  $X, Y$  ve  $Z$  noktalarının yer vektörleri arasındaki ilişki,

$$z' = \lambda x' + \mu y' \quad (2.40)$$

şeklinde verilebilir. Burada (2.40) denkleminin diferensiyeli alınır,

$$dz' = \lambda dx' + \mu dy' \quad (2.41)$$

denklemini bulunur.

O halde (2.3), (2.40) ve (2.41) denklemleri kullanılırsa aşağıdaki teorem verilebilir.

**Teorem 2.3.11.**  $H / H'$  bir-parametrelili düzlemsel hareketi boyunca,  $H$  hareketli düzleminde verilen sabit uzunluklu  $\overline{XY}$  doğru parçasının üzerinde sabit bir  $Z$  noktasının  $H'$  sabit düzleminde çizdiği yörünge eğrisinin  $F_Z$  alanı

$$F_Z = \lambda^2 F_X + 2\lambda\mu F_{XY} + \mu^2 F_Y \quad (2.42)$$

şeklindedir [28].

Burada  $F_{XY}$  formülü için aşağıdaki tanım verilebilir.

**Tanım 2.3.12.**  $H / H'$  hareketi boyunca  $H$  hareketli düzleminde (2.42) denkleminde verilen  $F_{XY}$  ifadesine hiperbolik düzlemde  $H / H'$  hareketi için **karışık alan formülü** denir ve

$$F_{XY} = F_O + \frac{\alpha}{2} (x_1 y_1 - x_2 y_2 - (x_1 + y_1) s_1 + (x_2 + y_2) s_2) \quad (2.43)$$

formülü ile hesaplanır [28].

O halde hiperbolik düzlemde  $H / H'$  hareketi için aşağıdaki teorem verilebilir.

**Teorem 2.3.13. Holditch Teoremi:** Hiperbolik düzlemde  $H/H'$  bir-parametrelili düzlemsel hareketi boyunca  $H$  düzleminin I. bölgesinde sabit  $X$  ve  $Y$  noktaları ve  $\overline{XY}$  doğru parçası üzerinde sabit bir  $Z$  noktası verilsin. Belirli bir zaman aralığında  $\overline{XY}$  kirişi bir  $k_x$  eğrisini çizerken  $Z$  noktası da başka bir  $k_z$  eğrisi çizer. Bu iki eğri arasında kalan alan, hareketin Lorentz anlamda dönme açısına ve  $X, Y, Z$  noktaları arasındaki uzaklığa bağlıdır [28].

### 2.3.3. Hiperbolik düzlemde doğrusal olmayan üç nokta için Holditch teoremi

Bu bölümde Yüce [33] tarafından Lorentz düzleminde verilen bir doğrunun zarf eğrisinin uzunluğu kullanılarak Yüce ve Kuruoğlu [34] tarafından verilen doğrusal olmayan üç nokta için Holditch teoremi hiperbolik düzlem için ifade edilmiştir.

$H/H'$  bir-parametrelili düzlemsel hareketi boyunca  $H$  ve  $H'$ , sırasıyla, hareketli ve sabit hiperbolik düzlemler olmak üzere  $H$  düzleminin I. bölgesinde verilen sabit  $X$  ve  $Y$  noktaları bir  $g$  doğru parçasını oluştursun. Hiperbolik düzlemin I. bölgesinde verilen bu doğrusunun Hesse formundaki denklemi

$$g \equiv x_1 \cosh \psi + x_2 \sinh \psi - r = 0 \quad (2.44)$$

şeklindedir. Burada  $(r, \psi)$  ikilisi Lorentz anlamda Hesse koordinatları olmak üzere  $r = r(\psi)$  orijinden doğru parçasına olan uzaklıktır. (2.44) denkleminden  $\psi$  ye göre diferensiyel alınır ve çözüm yapılırsa,

$$\begin{aligned} x_1 &= \dot{r} \cosh \psi - r \sinh \psi \\ x_2 &= \dot{r} \sinh \psi - r \cosh \psi \end{aligned} \quad (2.45)$$

yazılabilir [33]. Ayrıca Lorentz hareketi için Cauchy Formülü

$$L = \int_{t_0}^{t_1} (\ddot{r} - r) d\psi \quad (2.46)$$



şeklinde verilir [33]. O halde (2.45) ve (2.46) denklemleri yardımıyla hiperbolik düzlemin I. bölgesinde verilen  $g$  doğrusunun zarf eğrisinin uzunluğu

$$L = -\int_{t_0}^{t_1} \bar{q} d\psi + L_Q \quad (2.47)$$

olarak elde edilir. Burada  $\bar{q}$ ,  $Q$  pol noktasının doğruya olan uzaklığı ve  $L_Q$  ise

$$L_Q = (-q_2 \sinh \psi + q_1 \cosh \psi) \Big|_r^s \quad (2.48)$$

şeklinde olup ( $Q$ ) hareketli pol eğrisinin  $\overline{Q_1 Q_2}$  doğru parçasının  $g$  doğrusu üzerine dik izdüşümünün uzunluğudur [33].

Diğer taraftan  $H$  hareketli düzleminin  $\mathbf{a}_3$  normal vektörü ile birlikte  $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$  dik çatısı verilsin. O halde,  $\mathbf{h}_1$  ile  $\mathbf{a}_2$  vektörleri arasındaki açı  $\psi$  ve  $\mathbf{h}'_1$  ile  $\mathbf{a}'_1$  vektörleri arasındaki açı  $\psi'$  olmak üzere

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= \sinh \psi \mathbf{h}_1 + \cosh \psi \mathbf{h}_2 \\ \mathbf{a}_2 &= \cosh \psi \mathbf{h}_1 + \sinh \psi \mathbf{h}_2 \end{aligned} \quad (2.49)$$

ve

$$\begin{aligned} \mathbf{a}'_1 &= \sinh \psi' \mathbf{h}'_1 + \cosh \psi' \mathbf{h}'_2 \\ \mathbf{a}'_2 &= \cosh \psi' \mathbf{h}'_1 + \sinh \psi' \mathbf{h}'_2 \end{aligned} \quad (2.50)$$

denklemleri yazılabilir. (2.50) denkleminin diferensiyeli alınırsa,

$$\begin{aligned} da'_1 &= (\cosh \psi' h'_1 + \sinh \psi' h'_2) d\psi' \\ da'_2 &= (\sinh \psi' h'_1 + \cosh \psi' h'_2) d\psi' \end{aligned} \quad (2.51)$$

elde edilir.

O halde aşağıdaki teorem verilebilir.

**Teorem 2.3.14.**  $H/H'$  bir-parametrelî düzlemsel hareketi boyunca  $H$  hiperbolik düzleminde sabit  $X(0,0)$  ve  $Y(a+b,0)$  noktaları, sırasıyla,  $F_X$  ve  $F_Y$  alanlı  $k_X$  ve  $k_Y$  yörüngelerini çizsin. O halde  $\overline{XY}$  doğru parçası üzerinde olmayan bir  $Z(a,c)$  noktasının çizdiği  $k_Z$  yörünge eğrisinin sınırladığı bölgenin alanı

$$F_Z = \frac{1}{a+b} (bF_X + aF_Y) - (c^2 + ab) - cL_{XY} \quad (2.52)$$

şeklindedir. Burada  $L_{XY}$ ,  $X$  ve  $Y$  noktalarının oluşturduğu doğrunun zarf eğrisinin uzunluğudur [34].

Eğer burada özel olarak  $c=0$  alınırsa (2.52) denklemi

$$F_Z = \lambda F_X + \mu F_Y - \frac{\alpha}{2} \lambda \mu d^2 \quad (2.53)$$

olarak indirgenir. Bu formül ise (2.42) denkleminde verilen doğrusal üç nokta için alan formülü ile aynıdır. Dolayısıyla (2.52) denklemi (2.53) denkleminin daha genel halidir.

### 2.3.4. Hiperbolik düzlemde Holditch-tipi teorem

Şimdi Yüce ve Kuruoğlu tarafından [35]'de verilen Lorentz düzleminde sabit bir  $X$  noktasının sabit düzlemde çizdiği yörünge eğrisinin sınırladığı bölgenin kutupsal atalet momenti hiperbolik düzlem için elde edilmiştir. Ayrıca hiperbolik düzlem için bir-parametrelili düzlemsel hareket boyunca Holditch-tipi teorem verilmiştir.

**Teorem 2.3.15.**  $H/H'$ , bir-parametrelili düzlemsel hareketi boyunca hareketli hiperbolik düzlemin I. bölgesinde sabit bir nokta  $X$  olsun. O halde  $X$  noktasının çizdiği yörünge eğrisinin sınırladığı bölgenin kutupsal atalet momenti

$$T_X = \int_{t_0}^{t_1} |\mathbf{x}'|^2 d\theta \quad (2.54)$$

dir [35].

O halde Bölüm 2.3.2.'deki alan formülü hesaplanırken yapılan işlemlere benzer işlemler yapılır ve (2.36) ve (2.38) denklemleri göz önüne alınırsa aşağıdaki teorem verilebilir.

**Teorem 2.3.16.**  $H/H'$  bir-parametrelili düzlemsel hareketi boyunca  $H$  hareketli düzlemin I. bölgesinde verilen sabit bir  $X$  noktasının sabit düzlemde çizdiği yörünge eğrisinin sınırladığı bölgenin kutupsal atalet momenti

$$T_X = T_O + \delta(x_1^2 - x_2^2 - 2x_1s_1 + 2x_2s_2) \quad (2.55)$$

şeklindedir [35].

Şimdi özel olarak (2.55) denklemindeki  $T_X$  kutupsal atalet momenti sabit kabul edilsin. Bu durumda aşağıdaki teorem verilebilir.

**Teorem 2.3.17.**  $H/H'$  bir-parametrelili düzlemsel hareketi boyunca  $H$  hiperbolik düzleminde aynı  $T_X$  kutupsal atalet momentine sahip yörünge eğrilerini çizen bütün  $X$  noktaları sabit düzlemde bir Lorentz çemberi üzerinde bulunur. Bu çemberin merkezi Steiner noktasıdır [35].

$H$  hareketli düzlem üzerinde sabit  $X$  ve  $Y$  noktaları verilsin.  $\overline{XY}$  doğru parçası üzerinde sabit bir nokta  $Z$  olmak üzere hiperbolik düzlemde bir-parametrelili düzlemsel hareket için  $X, Y$  ve  $Z$  noktalarının yer vektörleri arasındaki ilişki, (2.40) denkleminde

$$z' = \lambda x' + \mu y' \quad (2.56)$$

şeklinde yazılabilir. Burada (2.54) denklemi,  $Z$  noktasının çizdiği yörüngenin kutupsal atalet momentini için kullanılırsa (2.56) denklemi yardımıyla Bölüm 2.3.2'deki işlemlere benzer işlemler göz önüne alınırsa aşağıdaki teorem verilebilir.

**Teorem 2.3.18.**  $H/H'$  bir-parametrelili düzlemsel hareketi boyunca  $H$  hareketli düzlemin I. bölgesinde sabit  $X$  ve  $Y$  noktaları verilsin.  $\overline{XY}$  doğru parçası üzerinde  $Z$  sabit bir nokta olmak üzere  $Z$  noktasının  $H'$  sabit düzleminde çizdiği yörünge eğrisinin sınırladığı bölgenin  $T_Z$  kutupsal atalet momentini,

$$T_Z = \lambda^2 T_X + 2\lambda\mu T_{XY} + \mu^2 T_Y \quad (2.57)$$

dir [35].

Burada (2.57) denkleminde verilen  $T_{XY}$  ifadesine hiperbolik düzlemde  $H/H'$  hareketi için **karışık kutupsal atalet momentini** denir ve

$$T_{XY} = T_O + \delta(x_1 y_1 - x_2 y_2 - (x_1 + y_1)s_1 + (x_2 + y_2)s_2) \quad (2.58)$$

şeklinde hesaplanır [35].

Şimdi  $X$  ve  $Y$  noktalarının aynı yörünge eğrisi üzerinde olduğu kabul edilsin. O halde

$$T_X = T_Y \quad (2.59)$$

eşitliği yazılabilir. Böylece (2.57), (2.58) ve (2.59) denklemleri göz önüne alınırsa aşağıdaki teorem verilebilir.

**Teorem 2.3.19. Holditch-Tipi Teorem:** Hiperbolik düzlemde  $H/H'$  bir-parametrel düzlemsel hareketi esnasında,  $H$  düzleminin I. bölgesinde sabit iki nokta  $X$  ve  $Y$  olmak üzere  $\overline{XY}$  doğru parçası üzerinde sabit bir nokta  $Z$  olsun. Belirli bir zaman aralığında  $\overline{XY}$  kirişi bir  $k$  eğrisini çizerken  $Z$  noktası da başka bir  $k_z$  eğrisi çizer. Bu iki eğrinin çizdiği yörüngelerin kutupsal atalet momentleri arasındaki fark, hareketin dönme açısına ve  $X, Y, Z$  noktaları arasındaki uzaklığa bağlıdır [35].

### 2.3.5. Hiperbolik düzlemde doğrusal olmayan üç nokta için Holditch-tipi teorem

Bölüm 2.3.3.'deki işlemlere benzer işlemler yapılarak hiperbolik düzlemde doğrusal olmayan üç nokta için Holditch-tipi teorem verilebilir.  $H$  ve  $H'$ , sırasıyla, hareketli ve sabit hiperbolik düzlemler olmak üzere  $H/H'$  hareketi boyunca hareketli  $H$  düzleminin I. bölgesinde verilen sabit  $X$  ve  $Y$  noktaları  $k_X$  ve  $k_Y$  yörüngelerini çizsin.  $H$  hareketli düzleminin  $\mathbf{a}_3$  normal vektörü yardımıyla kurulan dik çatası  $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$  olmak üzere (2.50) ve (2.51) denklemlerinden

$$\begin{aligned} \mathbf{a}'_1 &= \sinh \psi' \mathbf{h}'_1 + \cosh \psi' \mathbf{h}'_2 \\ \mathbf{a}'_2 &= \cosh \psi' \mathbf{h}'_1 + \sinh \psi' \mathbf{h}'_2 \end{aligned} \quad (2.60)$$

ve

$$\begin{aligned} da'_1 &= (\cosh \psi' h'_1 + \sin \psi' h'_2) d\psi' \\ da'_2 &= (\sinh \psi' h'_1 + \cosh \psi' h'_2) d\psi' \end{aligned} \quad (2.61)$$

yazılabilir.

O halde Bölüm 2.3.3.'deki alanlar için yapılan işlemlere benzer işlemler yardımıyla aşağıdaki teorem verilebilir.

**Teorem 2.3.20.** Hiperbolik düzlemde  $H/H'$  bir-parametrelili düzlemsel hareketi esnasında  $H$  düzleminin I. bölgesinde sabit  $X$  ve  $Y$  noktaları ve  $\overline{XY}$  doğru parçasının dışında bir  $Z$  noktası verilsin. Belirli bir zaman aralığında  $H$  düzleminde verilen sabit  $X$  ve  $Y$  noktaları  $k_X$  ve  $k_Y$  yörüngeleri çizerken  $Z$  noktası da başka bir  $k_Z$  eğrisi çizer. Bu eğrilerin çizdiği yörüngelerin kutupsal atalet momentleri arasındaki ilişki

$$T_Z = \alpha T_X + \beta T_Y + \frac{\delta}{2} (c^2 - \alpha\beta d^2) + cL_{XY} \quad (2.62)$$

şeklindedir. Burada  $L_{XY}$ ,  $X$  ve  $Y$  noktalarının oluşturduğu doğrunun zarf eğrisinin uzunluğudur.

Eğer burada özel olarak  $c = 0$  alınırsa (2.62) denklemi

$$T_Z = \lambda T_X + \mu T_Y - \delta \lambda \mu d^2 \quad (2.63)$$

olarak indirgenir. Bu formül ise (2.57) denklemine verilen doğrusal üç nokta için kutupsal atalet momenti formülü ile aynıdır. Dolayısıyla (2.62) denklemi (2.63) denkleminin daha genel halidir.

## 2.4. Galile Düzleminde Hareket ve Holditch-Tipi Teoremler

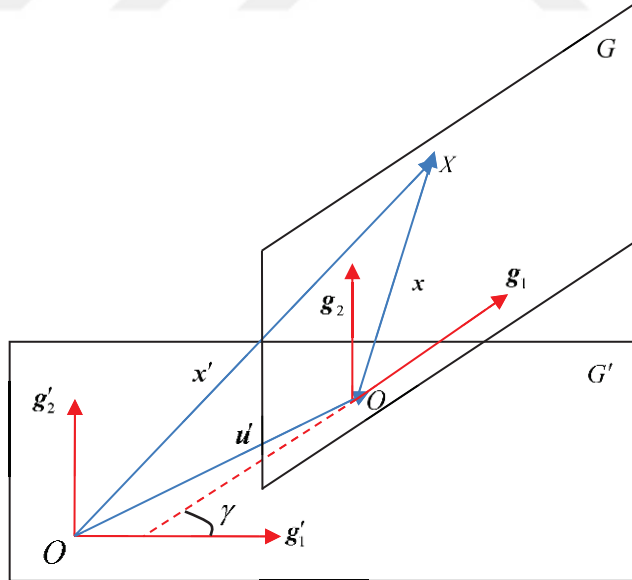
### 2.4.1. Galile düzleminde hareket

Bu bölümde Akar ve Yüce [9] tarafından verilen Galile düzleminde bir-parametrelî düzlemsel hareket tanıtılmıştır.

**Tanım 2.4.1.**  $G$  ve  $G'$ , sırasıyla,  $\{O; \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2\}$  ve  $\{O'; \mathbf{g}'_1, \mathbf{g}'_2\}$  koordinat sistemlerine sahip hareketli ve sabit iki Galile düzlemi olsun. Hareketli düzlemde verilen herhangi bir  $X$  noktasının, sırasıyla, hareketli ve sabit sisteme göre ifadesi  $\mathbf{x} = x_1 + \varepsilon x_2$  ve  $\mathbf{x}' = x'_1 + \varepsilon x'_2$  ( $\varepsilon^2 = 0$ ,  $\varepsilon \neq 0$ ) ve  $\overline{O'O} = \mathbf{u}'$  olmak üzere

$$\mathbf{x}' = (\mathbf{x} - \mathbf{u}')e^{\varepsilon\gamma}$$

şeklinde verilen denkleme Galile düzleminde bir-parametrelî düzlemsel hareket denir [9].



Şekil 2.3. Galile düzleminde hareket [9]

Ayrıca,  $\gamma$  açısı Galile düzleminde  $G/G'$  hareketinin dönme açısıdır ve  $\gamma$  dönme açısı,  $\mathbf{x}, \mathbf{x}'$  ve  $\mathbf{u}'$  fonksiyonları  $t \in I \subset \mathbb{R}$  zaman parametresine bağlı sürekli diferensiyellenebilir fonksiyonlardır. Ek olarak,  $t=0$  anında koordinat sistemleri

çakışık kabul edilmiştir.  $\frac{d\gamma}{dt} = \dot{\gamma} = 0$  olduğunda hareket ötelemeden ibaret olacağından  $\dot{\gamma} \neq 0$  olarak alınmıştır [9].

$G$  hareketli Galile düzleminde verilen bir  $X$  noktası için aşağıdaki tanım yapılabilir.

**Tanım 2.4.2.**  $G/G'$  hareketi boyunca  $G$  Galile düzleminde verilen bir  $X$  noktası için relatif, mutlak ve sürüklenme hızları, sırasıyla,

$$V'_r = \frac{dx}{dt} = \dot{x}e^{\varepsilon\gamma},$$

$$V'_a = \frac{dx'}{dt} = -\dot{u}e^{\varepsilon\gamma} + \varepsilon\dot{\gamma}(x-u)e^{\varepsilon\gamma} + \dot{x}e^{\varepsilon\gamma}$$

ve

$$V'_f = \frac{d_f x}{dt} = -\dot{u}e^{\varepsilon\gamma} + \varepsilon\dot{\gamma}(x-u)e^{\varepsilon\gamma}$$

şeklindedir [9].

O halde aşağıdaki teorem verilebilir.

**Teorem 2.4.3.**  $G/G'$  bir-parametrelî düzlemsel hareketi boyunca hareketli Galile düzleminde verilen bir noktanın mutlak, sürüklenme ve relatif hız vektörleri arasındaki ilişki

$$V'_a = V'_f + V'_r$$

şeklindedir [9].



Genel olarak bir-parametrelili düzlemsel hareketler için pol noktaları sürüklenme hızının sıfır olmasıyla karakterize edilir. Ayrıca hareketin belirli bir zaman aralığında bu pol noktaları her iki düzlemde pol eğrilerini çizer. Fakat Galile düzlemindeki hareketin özelliği nedeniyle pol noktaları yerine Galile düzleminde her  $t$  anında sanal eksene paralel pol doğruları oluşur. Bu pol doğruları ise hareketin belirli bir zaman aralığında pol doğru demetlerini oluşturur. O halde Galile düzleminde pol doğrusunu oluşturan  $Q = (q_1, q_2)$  noktasının bileşenleri

$$q_1 = u_1 + \frac{\dot{u}_2}{\dot{\theta}_p}, \quad q_2 = q_2(\gamma(t)), \quad \gamma \in \mathbb{R} \quad (2.64)$$

şeklinde elde edilir [9].

O halde aşağıdaki teorem verilebilir.

**Teorem 2.4.4.**  $G/G'$  bir-parametrelili düzlemsel hareketi boyunca  $\overrightarrow{QX}$  pol ışını ile  $V'_f$  sürüklenme hız vektörü Galile düzleminde birbirine diktir [9].

**Teorem 2.4.5.**  $G/G'$  bir-parametrelili düzlemsel hareketi boyunca Galile düzleminde  $V'_f$  sürüklenme hız vektörünün uzunluğu ile  $\overrightarrow{QX}$  pol ışınının uzunluğu arasındaki ilişki

$$|V'_f| = |\dot{\theta}| |\overrightarrow{QX}|$$

şeklindedir [9].

#### 2.4.2. Galile düzleminde Steiner alan formülü ve Holditch teoremi

Bu bölümde literatürde bulunmayan Galile düzleminde bir-parametrelili düzlemsel hareket için Holditch teoremi ispatlanmıştır.

**Tanım 2.4.6.**  $G/G'$  bir-parametrelili düzlemsel hareketi boyunca hareketli  $Q$  pol doğrularının hareketli düzlemde çizdiği pol doğru demetlerinin ağırlık merkezi Galile düzleminde *Steiner doğrusu* üzerinde bulunur. Galile düzlemindeki hareket için Steiner doğrusunun bileşenleri

$$2\alpha s_1 = 2 \int_{t_0}^{t_1} p_1 d\theta - \int_{t_0}^{t_1} du_2, \quad s_2 = s_2(\eta(t)), \quad \eta \in \mathbb{R} \quad (2.65)$$

olarak tanımlanır.

O halde Bölüm 2.2.2. ve Bölüm 2.3.2.'de verilen kompleks ve hiperbolik düzlemlerdeki alan formüllerine benzer işlemler yapılarak (2.64) ve (2.65) denklemleri yardımıyla aşağıdaki teorem verilebilir.

**Teorem 2.4.7.**  $G$  hareketli Galile düzleminde verilen sabit bir  $X$  noktasının sabit düzlemde çizdiği yörünge eğrisinin sınırladığı bölgenin alanı

$$F_X = F_0 + \frac{\alpha}{2}(x_1^2 - 2x_1s_1) \quad (2.66)$$

şeklindedir.

Bu formüle Galile düzleminde **Steiner alan formülü** denir.

Şimdi özel olarak  $F_X$  alanı sabit kabul edilsin. Bu durumda (2.66) denklemi göz önüne alınarak aşağıdaki teorem verilebilir.

**Teorem 2.4.8.** Galile düzleminde bir hareket boyunca aynı  $F_X$  alanına sahip bütün  $X$  noktaları sabit düzlemde bir Galile çemberi (cycle) üzerinde bulunur. Bu Galile çemberi Öklid düzleminde bir parabolle karşılık gelir. Bu Galile çemberinin (cycle) tepe noktası Steiner doğrusu üzerinde bulunur.

$G$  hareketli düzlem üzerinde sabit  $X$  ve  $Y$  noktaları verilsin.  $\overline{XY}$  doğru parçası üzerinde  $Z$  sabit bir nokta olmak üzere Galile düzleminde bir-parametrelili hareket için  $X, Y$  ve  $Z$  noktalarının yer vektörleri arasındaki ilişki

$$z' = \lambda x' + \mu y' \quad (2.67)$$

şeklinde verilebilir. Burada (2.67) denkleminin diferensiyeli alınırsa,

$$dz' = \lambda dx' + \mu dy' \quad (2.68)$$

denklemini bulunur.

O halde Bölüm 2.2.2. ve Bölüm 2.3.2.'deki alan işlemlerine benzer işlemler yapılsa aşağıdaki teorem verilebilir.

**Teorem 2.4.9.**  $G$  hareketli Galile düzleminde verilen  $\overline{XY}$  doğru parçası üzerinde sabit bir  $Z$  noktasının  $G'$  sabit Galile düzleminde çizdiği yörünge eğrisinin sınırladığı bölgenin  $F_Z$  alanı,  $X$  ve  $Y$  noktalarının çizdiği yörünge eğrilerinin sınırladığı bölgelerin alanları cinsinden

$$F_Z = \lambda^2 F_X + 2\lambda\mu F_{XY} + \mu^2 F_Y \quad (2.69)$$

şeklinde verilir.

**Tanım 2.4.10.** Galile düzleminde  $G/G'$ , bir-parametrelili düzlemsel bir hareket olmak üzere (2.69) denkleminde verilen  $F_{XY}$  ifadesine Galile düzleminde **karışık alan formülü** denir ve

$$F_{XY} = F_O + \frac{\alpha}{2} (x_1 y_1 - (x_1 + y_1) s_1) \quad (2.70)$$

şeklinde hesaplanır.

O halde aşağıdaki teorem verilebilir.

**Teorem 2.4.11. Holditch Teoremi:** Galile düzleminde  $G/G'$  düzlemsel hareketi boyunca  $G$  düzleminde sabit  $X$  ve  $Y$  noktaları ve  $\overline{XY}$  doğru parçası üzerinde sabit bir  $Z$  noktası verilsin. Belirli bir zaman aralığında  $\overline{XY}$  kirişi bir  $k_X$  eğrisi çizerken  $Z$  noktası da başka bir  $k_Z$  eğrisi çizer. Bu iki eğri arasında kalan alan, hareketin dönme açısına ve  $X, Y, Z$  noktaları arasındaki uzaklığa bağlıdır.

### 2.4.3. Galile düzleminde doğrusal olmayan üç nokta için Holditch teoremi

Bu bölümde literatürde bulunmayan ve ilerideki bölümlerde kullanmak üzere hesaplanan Galile düzleminde bir-parametrelî hareket boyunca doğrusal olmayan üç nokta için Holditch teoremi verilmiştir.

$G$  ve  $G'$ , sırasıyla, hareketli ve sabit kompleks düzlemler olmak üzere  $G/G'$  hareketi boyunca hareketli  $G$  düzleminde verilen sabit  $X$  ve  $Y$  noktaları  $k_X$  ve  $k_Y$  yörüngelerini çizsin.  $G$  hareketli düzleminin  $\mathbf{a}_3$  normal vektörü ile birlikte  $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$  dik çatısı kurulsun. O halde,  $G$  hareketli düzleminin  $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2$  koordinat vektörleri ile  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$  vektörleri arasındaki ilişkiyi yazmak için  $\mathbf{g}_1$  ile  $\mathbf{a}_2$  arasındaki açı  $\psi$  olmak üzere

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= \mathbf{g}_2 \\ \mathbf{a}_2 &= \mathbf{g}_1 + \psi \mathbf{g}_2 \end{aligned} \tag{2.71}$$

bağıntısı yazılabilir. (2.71) denkleminde benzer olarak sabit  $G'$  Galile düzleminde  $\mathbf{g}'_1, \mathbf{g}'_2$  koordinat vektörleri ile  $\mathbf{a}'_1, \mathbf{a}'_2$  vektörleri arasındaki ilişki

$$\begin{aligned} \mathbf{a}'_1 &= \mathbf{g}'_2 \\ \mathbf{a}'_2 &= \mathbf{g}'_1 + \psi' \mathbf{g}'_2 \end{aligned} \quad (2.72)$$

yazılabilir. Burada  $\mathbf{g}'_1$  ile  $\mathbf{a}'_2$  arasındaki  $\psi'$  açısı Galile düzlemindeki hareketin açısidir. (2.72) denkleminin diferensiyeli alınır,

$$\begin{aligned} d\mathbf{a}'_1 &= (\mathbf{g}'_1 + \psi' \mathbf{g}'_2) d\psi' \\ d\mathbf{a}'_2 &= (\psi' \mathbf{g}'_1 + \mathbf{g}'_2) d\psi' \end{aligned} \quad (2.73)$$

elde edilir.

Şimdi  $\overline{XY}$  doğru parçası üzerinde olmayan  $G$  hareketli düzlemde sabit bir  $Z$  noktası verilsin. Bu durumda  $Z$  noktasının  $\overline{XY}$  doğru parçası üzerine izdüşüm noktası  $R$  olmak üzere

$$\overline{OR} = \overline{OX} + \overline{XR} \quad (2.74)$$

$$\overline{OY} = \overline{OX} + \overline{XY} \quad (2.75)$$

$$\overline{XR} = \beta \overline{XY}, \quad \beta \in \mathbb{R} \quad (2.76)$$

ve

$$\overline{OR} = \alpha \overline{OX} + \beta \overline{OY}$$

ilişkileri göz önüne alınırsa,

$$\mathbf{z} = \alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y} + c\mathbf{a}_2 \quad (2.77)$$

yazılabilir. (2.77) denkleminin benzer olarak  $x, y, z$  ve  $a_2$  yer vektörlerinin sabit Galile düzlemine göre ifadeleri, sırasıyla,  $x', y', z'$  ve  $a'_2$  olmak üzere

$$z' = \alpha x' + \beta y' + ca'_2 \quad (2.78)$$

eşitliği yazılabilir. Buradan (2.78) denkleminin diferansiyeli alınır,

$$dz' = \alpha dx' + \beta dy' + cda'_2 \quad (2.79)$$

elde edilir.

O halde Bölüm 2.2.3. ve Bölüm 2.3.3.'deki işlemlere benzer işlemler yapılırsa Galile düzleminde bir-parametrelili düzlemsel hareket boyunca doğrusal olmayan üç nokta için Holditch teoremi aşağıdaki gibi verilebilir.

**Teorem 2.4.12.** Galile düzleminde  $G/G'$  bir-parametrelili düzlemsel hareketi esnasında  $G$  düzleminde sabit  $X$  ve  $Y$  noktaları ve  $\overline{XY}$  doğru parçası üzerinde olmayan sabit bir  $Z$  noktası verilsin. Belirli bir zaman aralığında  $G$  düzleminde verilen sabit  $X$  ve  $Y$  noktaları  $k_X$  ve  $k_Y$  yörüngelerini çizerken  $Z$  noktası da başka bir  $k_Z$  eğrisini çizer. Bu eğriler arasında kalan alan

$$F_Z = \alpha F_X + \beta F_Y + \frac{\delta}{2}(c^2 - \alpha\beta d^2) + cL_{XY} \quad (2.80)$$

şeklindedir. Burada  $L_{XY}$ ,  $X$  ve  $Y$  noktalarının oluşturduğu doğrunun zarf eğrisinin uzunluğudur.

Bu teorem Galile düzleminde doğrusal olmayan üç nokta için **Holditch teoremi** olarak adlandırılır.

Eğer burada özel olarak  $c = 0$  alınırsa (2.80) denklemi

$$F_Z = \lambda F_X + \mu F_Y - \frac{\alpha}{2} \lambda \mu d^2 \quad (2.81)$$

olarak indirgenir. Bu formül ise Galile düzleminde doğrusal üç nokta için alan formülü ile aynıdır. Dolayısıyla (2.80) denklemi (2.81) denkleminin daha genel halidir.

#### 2.4.4. Galile düzleminde Holditch-tipi teorem

Bu bölümde literatürde bulunmayan Galile düzlemindeki sabit bir  $X$  noktasının sabit düzlemde çizdiği yörünge eğrisinin sınırladığı bölgenin kutupsal atalet momenti hesaplanmıştır. Daha sonra ise Galile düzleminde bir-parametrelili hareket için Holditch-tipi teorem verilmiştir.

**Teorem 2.4.13.**  $X$  noktası hareketli Galile düzleminde sabit bir nokta olmak üzere  $X$  noktasının çizdiği yörüngenin kutupsal atalet momenti

$$T_X = \int_{t_0}^{t_1} |\mathbf{x}'|^2 d\theta \quad (2.82)$$

şeklindedir.

(2.82) denklemi kullanılarak Bölüm 2.4.2'deki alanlar için yapılan benzer işlemler kutupsal atalet momenti için yapılırsa aşağıdaki teoremler verilebilir.

**Teorem 2.4.14.**  $G$  hareketli düzlemde verilen sabit bir  $X$  noktasının sabit düzlemde çizdiği yörünge eğrisinin sınırladığı bölgenin kutupsal atalet momenti

$$T_X = T_O + \delta(x_1^2 - 2x_1s_1) \quad (2.83)$$

şeklindedir.

**Teorem 2.4.15.** Galile düzleminde bir hareket boyunca aynı  $T_X$  kutupsal atalet momentine sahip yörünge eğrilerini çizen bütün  $X$  noktaları sabit düzlemde bir cycle (Öklid düzleminde parabol) üzerinde bulunur. Bu Galile çemberinin (cycle) tepe noktası Steiner doğrusu üzerinde bulunur.

$G$  hareketli düzlem üzerinde  $X$  ve  $Y$  noktaları sabit olmak üzere  $\overline{XY}$  doğru parçası üzerinde sabit bir nokta  $Z$  olsun. Galile düzleminde bir-parametrelili hareket için  $X, Y$  ve  $Z$  noktalarının yer vektörleri arasındaki ilişki

$$z' = \lambda x' + \mu y' \quad (2.84)$$

olarak verilebilir.

Burada (2.82) denklemi,  $Z$  noktasının çizdiği yörüngenin kutupsal atalet momenti için kullanılırsa (2.84) denkleminde aşağıdaki teorem verilebilir.

**Teorem 2.4.16.** Galile düzleminde bir-parametrelili düzlemsel hareket boyunca  $G$  hareketli düzlem üzerinde sabit  $X$  ve  $Y$  noktaları verilsin.  $\overline{XY}$  doğru parçası üzerinde  $Z$  sabit bir nokta olmak üzere  $Z$  noktasının  $G'$  sabit düzleminde çizdiği yörünge eğrisinin  $T_Z$  kutupsal atalet momenti

$$T_Z = \lambda^2 T_X + 2\lambda\mu T_{XY} + \mu^2 T_Y \quad (2.85)$$

şeklindedir.

**Tanım 2.4.17.** (2.85) denkleminde verilen  $T_{XY}$  ifadesine Galile düzleminde  $G/G'$  hareketi için **karışık kutupsal atalet momenti** denir ve



$$T_{XY} = T_O + \delta(x_1 y_1 - (x_1 + y_1) s_1) \quad (2.86)$$

şeklinde bulunur.

Şimdi  $X$  ve  $Y$  noktalarının aynı yörünge eğrisi üzerinde olduğu kabul edilsin. Bu durumda

$$T_X = T_Y \quad (2.87)$$

eşitliği yazılabilir. O halde (2.85), (2.86) ve (2.87) denklemlerinden aşağıdaki teorem verilebilir.

**Teorem 2.4.18. Holditch-Tipi Teorem:**  $G/G'$  bir-parametrel düzlemsel hareketi esnasında  $G$  düzleminde sabit  $X$  ve  $Y$  noktaları ve  $\overline{XY}$  doğru parçası üzerinde sabit bir  $Z$  noktası verilsin. Belirli bir zaman aralığında  $\overline{XY}$  kirişi bir  $k_X$  eğrisini çizerken  $Z$  noktası da başka bir  $k_Z$  eğrisi çizer. Bu iki eğrinin çizdiği yörünge eğrilerinin sınırladığı bölgenin kutupsal atalet momentleri arasındaki fark, hareketin dönme açısına ve  $X, Y, Z$  noktaları arasındaki uzaklığa bağlıdır.

#### 2.4.5. Galile düzleminde doğrusal olmayan üç nokta için Holditch-tipi teorem

Bu bölümde literatürde bulunmayan ve ön çalışma olarak hesaplanan Galile düzleminde bir-parametrel hareket boyunca doğrusal olmayan üç nokta için Holditch-tipi teoremi verilmiştir.

$G$  ve  $G'$ , sırasıyla, hareketli ve sabit Galile düzlemler olmak üzere  $G/G'$  hareketi boyunca hareketli  $G$  düzleminde verilen sabit  $X$  ve  $Y$  noktaları  $k_X$  ve  $k_Y$  yörüngelerini çizsin.  $G$  hareketli düzleminin  $\mathbf{a}_3$  normal vektörü yardımıyla  $\frac{\mathbf{y}-\mathbf{x}}{d} = \mathbf{a}_1$  vektörü ile birlikte  $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$  dik çatısı kurulsun. O halde  $G$  hareketli düzleminin  $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2$  koordinat vektörleri ile  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$  vektörleri arasındaki ilişkiyi

yazmak için  $\mathbf{g}_1$  ile  $\mathbf{a}_2$  arasındaki açı  $\psi$  ve  $\mathbf{g}'_1$  ile  $\mathbf{a}'_2$  arasındaki açı  $\psi'$  olmak üzere (2.72) ve (2.73) denklemlerinden

$$\begin{aligned} \mathbf{a}'_1 &= \mathbf{g}'_2 \\ \mathbf{a}'_2 &= \mathbf{g}'_1 + \psi' \mathbf{g}'_2 \end{aligned} \quad (2.88)$$

ve

$$\begin{aligned} d\mathbf{a}'_1 &= (\mathbf{g}'_1 + \psi' \mathbf{g}'_2) d\psi' \\ d\mathbf{a}'_2 &= (\psi' \mathbf{g}'_1 + \mathbf{g}'_2) d\psi' \end{aligned} \quad (2.89)$$

elde edilir.

Ayrıca  $\overline{XY}$  doğru parçası üzerinde olmayan  $G$  hareketli düzlemde sabit bir nokta  $Z$  olmak üzere (2.78) denkleminde

$$z' = \alpha x' + \beta y' + ca'_2 \quad (2.90)$$

eşitliği yazılabilir.

O halde aşağıdaki teorem verilebilir.

**Teorem 2.4.19.**  $G/G'$  bir-parametrelili düzlemsel hareketi boyunca  $G$  düzleminde sabit  $X$  ve  $Y$  noktaları ve  $\overline{XY}$  doğru parçası üzerinde olmayan sabit bir  $Z$  noktası verilsin. Belirli bir zaman aralığında  $G$  düzleminde verilen sabit  $X$  ve  $Y$  noktaları  $k_X$  ve  $k_Y$  yörüngelerini çizerken  $Z$  noktası da başka bir  $k_Z$  eğrisini çizer. Bu eğrilerin çizdiği yörüngelerin kutupsal atalet momentleri arasındaki ilişki

$$T_Z = \alpha T_X + \beta T_Y + \frac{\delta}{2}(c^2 - \alpha\beta d^2) + cL_{XY} \quad (2.91)$$

şeklindedir. Burada  $L_{XY}$ ,  $X$  ve  $Y$  noktalarının oluşturduğu zarf eğrisinin uzunluğudur. Görüldüğü üzere bu kutupsal atalet momenti Galile düzleminde hareketin dönme açısına ve  $X, Y, Z$  noktaları arasındaki uzaklığa bağlıdır.

Bu teorem Galile düzleminde doğrusal olmayan üç nokta için **Holditch-tipi teorem** olarak adlandırılır.

Eğer burada özel olarak  $c = 0$  alınırsa (2.91) denklemi

$$T_Z = \lambda T_X + \mu T_Y - \delta \lambda \mu d^2 \quad (2.92)$$

olarak indirgenir. Bu formül ise doğrusal üç nokta için verilen kutupsal atalet momenti formülü ile aynıdır. Dolayısıyla (2.91) denklemi (2.92) denkleminin genel halidir.

### BÖLÜM 3. GENELLEŞTİRİLMİŞ KOMPLEKS SAYI SİSTEMİ VE BİR-PARAMETRELİ DÜZLEMSEL HAREKET

Bir kompleks sayı  $x+iy$  şeklinde ifade edilir ve  $i$  imajiner birim olmak üzere  $i^2 = -1$  dir. Kompleks sayıları çalışan ilk bilim adamlarının İtalyan matematikçiler Cardan (1501-1576) ve Bombelli (1526-1572) olduğu düşünülmektedir. 1545 yılında Cardan “The Great Art” adlı bir çalışma yayınlamış ve bu çalışmada kübik ve kuartik denklemleri çözmek için cebirsel bir formül tanımlamıştır. Fakat kompleks sayıları detaylı olarak ele almamıştır. Bombelli ise Cardan’ın çalışmasından 30 yıl sonra Cardan’ın formülüyle günümüzde kompleks sayılar olarak adlandırılan sayıları tanıtmıştır. Daha sonra kompleks sayılar yardımıyla alternatif sayı sistemlerinin oluşturulabileceği görülmüştür. İngiliz geometrici Clifford (1845-1879)  $i^2 = 1$  kullanarak double kompleks sayıları (perplex sayılar, split-kompleks sayılar yada hiperbolik sayılar) tanıtmıştır [36, 37, 38]. Clifford’un yaptığı double sayıların mekaniğe uygulamaları, Öklid olmayan geometrilere uygulamalar tarafından desteklenmektedir. Daha sonra Alman geometrici E. Study, kompleks sayılara  $i^2 = 0$  olan başka bir birim ekleyerek “dual sayılar” olarak adlandırılan sayıları tanıtmıştır [10].

Öklid, Galile ve Minkowski geometrilerini içinde barındıran Cayley-Klein geometrisi ilk kez Klein ve Cayley tarafından tanıtılmıştır [39, 40]. Daha sonra Yaglom, Klein ve Cayley’in çalışmalarını göz önüne alarak bu geometrileri, bir doğru üzerinde verilen iki nokta arasındaki uzunluk ölçüsüne göre üçe ve iki doğru arasındaki açı ölçüsünü göre üçe (parabolik, eliptik, hiperbolik) ayırmıştır [41]. Bu ayırım, açı ve uzunluk ölçülerine göre dokuz yol gösterir. Bu dokuz düzlem geometrisi Tablo 3.1.’de verilmiştir.

|                                    |                   | İki nokta arasındaki uzunluğun ölçüsü |                      |                            |
|------------------------------------|-------------------|---------------------------------------|----------------------|----------------------------|
|                                    |                   | Eliptik                               | Parabolik            | Hiperbolik                 |
| İki doğru arasındaki açının ölçüsü | Eliptik           | Eliptik Geometri                      | Öklid Geometrisi     | Hiperbolik Geometri        |
|                                    | Parabolik (Öklid) | Ko-Öklid Geometrisi                   | Galile Geometrisi    | Ko-minkowskian Geometri    |
|                                    | Hiperbolik        | Ko-hiperbolik Geometri                | Minkowskian Geometri | Double-hiperbolik Geometri |

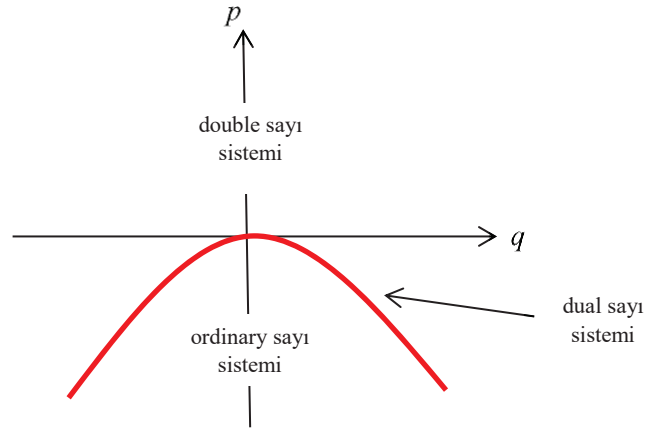
Tablo 3.1. Dokuz Cayley-Klein geometrisi [41]

Genelleştirilmiş kompleks sayı sistemi ise Yaglom tarafından tanıtılmıştır [10]. Öklid geometrisinde kompleks sayılar nasıl bir rol oynuyorsa genelleştirilmiş kompleks sayılar da Cayley-Klein geometride o rolü oynar [10, 41]. Daha sonra ise Harkin ve Harkin, bu çalışmayı göz önüne alarak genelleştirilmiş kompleks sayı sisteminin bir-parametrelili ailesi üzerine çalışmıştır [11].

Bu bölümde yukarıdaki çalışmalar göz önüne alınarak ilk olarak genelleştirilmiş kompleks sayı sistemi tanıtılmıştır. Daha sonra bu sayı sistemi kullanılarak oluşturulan düzlemde bir-parametrelili düzlemsel hareket verilmiştir.

### 3.1. Genelleştirilmiş Kompleks Sayılar

Genelleştirilmiş kompleks sayı sistemi  $x, y, q, p \in \mathbb{R}$  olmak üzere  $Z = (x, y)$  sıralı ikililerinden oluşur. Burada  $i^2$  yine bir sıralı ikili olacak şekilde  $i^2 = (p, q)$  şeklinde tanımlıdır ve bu sayı sistemi özel olarak ordinary, dual ve double sayıları içerir. Ayrıca,  $p + q^2/4$  ifadesinin negatif, sıfır ve pozitif olduğu durumlarda genelleştirilmiş kompleks sayılar, sırasıyla, ordinary, dual ve double sayılara izomorftur (Şekil 3.1.) [10].



Şekil 3.1. Ordinary, Dual ve Double Sayılar [10]

Bu tezde genelleştirilmiş kompleks sayı sistemi özel olarak  $q=0$ ,  $-\infty < p < \infty$  ve  $i^2 = p \in \mathbb{R}$  olarak seçilmiştir ve aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

**Tanım 3.1.1.**  $\mathbb{R}$  reel sayılar cümlesi (+) ve (.) çarpma işlemlerine göre bir cisimdir. O halde  $x, y \in \mathbb{R}$  olmak üzere  $Z = (x, y)$  ikilisine sıralı ikili denir.

Bu şekilde tanımlanan  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  cümlesi  $\mathcal{C}_p$  ile gösterilsin. O halde

$$\mathcal{C}_p = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}, i^2 = p\}$$

üzerinde iki iç işlem ve bir eşitlik şu şekilde tanımlanır.

**Tanım 3.1.2.**  $Z_1 = (x_1, y_1)$ ,  $Z_2 = (x_2, y_2) \in \mathcal{C}_p$  olmak üzere

$$\oplus : \mathcal{C}_p \times \mathcal{C}_p \rightarrow \mathcal{C}_p$$

iç işlemi

$$Z_1 \oplus Z_2 = (x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

şeklinde tanımlanır ve  $\mathcal{C}_p$ 'deki toplama işlemi olarak adlandırılır.

**Tanım 3.1.3.**  $Z = (x, y) \in \mathcal{C}_p$  olmak üzere

$$Z \oplus X = Z$$

denkleminin çözümü olarak tanımlanan  $X$  genelleştirilmiş kompleks sayısına  $\mathcal{C}_p$ 'de  $\oplus$  işleminin birim elemanı (etkisiz elemanı) denir ve  $0 = (0, 0)$  ile gösterilir.

**Tanım 3.1.4.**  $Z = (x, y) \in \mathcal{C}_p$  olmak üzere

$$Z \oplus W = 0$$

denkleminde  $W$  ile gösterilen genelleştirilmiş kompleks sayıya  $\mathcal{C}_p$ 'de  $\oplus$  işleminin ters elemanı denir ve  $W = (-x, -y)$  ile gösterilir.

**Önerme 3.1.5.**  $\mathcal{C}_p$  genelleştirilmiş kompleks sayı sisteminde toplama işlemi için aşağıdaki özellikler geçerlidir.

**Değişme Özelliği:**  $Z_1 \oplus Z_2 = Z_2 \oplus Z_1$ ,

**Birleşme Özelliği:**  $Z_1 \oplus (Z_2 \oplus Z_3) = (Z_1 \oplus Z_2) \oplus Z_3$ .

O halde aşağıdaki teorem verilebilir.

**Teorem 3.1.6.**  $(\mathcal{C}_p, \oplus)$  ikilisi bir abel grubudur.

**Tanım 3.1.7.**  $Z_1 = (x_1, y_1), Z_2 = (x_2, y_2) \in \mathcal{C}_p$  olmak üzere

$$M^p(\cdot): \mathcal{C}_p \times \mathcal{C}_p \rightarrow \mathcal{C}_p$$

iç işlemi

$$M^p(Z_1, Z_2) = (x_1x_2 + py_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1) \quad (3.1)$$

şeklinde tanımlanır ve  $\mathbb{C}_p$  'de çarpma olarak adlandırılır.

Bu çarpım alışılmış (ordinary), dual ve double sayılar için özel olarak

$$p = -1 \text{ için Ordinary Çarpım: } (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1),$$

$$p = 0 \text{ için Study Çarpım: } (x_1x_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1),$$

$$p = 1 \text{ için Clifford Çarpım: } (x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

şeklinde yazılabilir [11].

**Tanım 3.1.8.**  $Z = (x, y) \in \mathbb{C}_p$  olmak üzere

$$M^p(Z, Y) = Z$$

denkleminin çözümü olarak tanımlanan  $Y$  genelleştirilmiş kompleks sayısına  $\mathbb{C}_p$  'de

$M^p(,)$  işleminin birim elemanı (etkisiz elemanı) denir ve  $1 = (1, 0)$  ile gösterilir.

**Tanım 3.1.9.**  $Z = (x, y) \in \mathbb{C}_p$  olmak üzere

$$M^p(Z, Z^{-1}) = 1$$

denkleminde  $Z^{-1}$  ile gösterilen genelleştirilmiş kompleks sayıya  $\mathbb{C}_p$  'de  $M^p(,)$  işleminin ters elemanı denir.



**Önerme 3.1.10.**  $\mathbb{C}_p$  genelleştirilmiş kompleks sayı sisteminde çarpma işlemi için aşağıdaki özellikler geçerlidir.

**Değişme Özelliği:**  $M^p(Z_1, Z_2) = M^p(Z_2, Z_1)$ ,

**Birleşme Özelliği:**  $M^p(Z_1, M^p(Z_2, Z_3)) = M^p(M^p(Z_1, Z_2), Z_3)$ ,

**Dağılma Özelliği:**  $M^p(Z_1, (Z_2 \oplus Z_3)) = M^p(Z_1, Z_2) \oplus M^p(Z_1, Z_3)$ .

**Tanım 3.1.11.**  $Z_1 = (x_1, y_1)$ ,  $Z_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{C}_p$  genelleştirilmiş iki kompleks sayı olmak üzere  $x_1 = x_2$  ve  $y_1 = y_2$  ise  $Z_1$  ile  $Z_2$  eşittir denir.

**Teorem 3.1.12.**  $Z_1$  ve  $Z_2$  iki genelleştirilmiş kompleks sayı olmak üzere aşağıdaki özellikler sağlanır.

a.  $\overline{Z_1 \oplus Z_2} = \overline{Z_1} \oplus \overline{Z_2}$ ,

b.  $\overline{\overline{Z_1}} = Z_1$ ,

c.  $\overline{M^p(Z_1, Z_2)} = M^p(\overline{Z_1}, \overline{Z_2})$ ,

d.  $Z_2 \neq 0$  olmak üzere  $\overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)} = \frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}}$ .

**Tanım 3.1.13.**  $\mathbb{R}$  reel sayılar cümlesi olmak üzere

$$\mathbb{C}_p = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

cümlesi üzerinde toplama, çarpma ve eşitlik işlemleri yukarıdaki gibi tanımlanan  $\mathbb{C}_p$  cümlesine genelleştirilmiş kompleks sayı sistemi ve her  $(x, y) \in \mathbb{C}_p$  elemanına da bir genelleştirilmiş kompleks sayı denir.

**Tanım 3.1.14.**  $Z = (x, y)$  genelleştirilmiş kompleks sayıların tamamına genelleştirilmiş kompleks düzlem denir ve  $\mathcal{C}_p$  ile gösterilir. Her bir  $(x, y)$  ikilisine de genelleştirilmiş kompleks düzlemin bir noktası denir.

Bu işlemler sonucunda  $(\mathcal{C}_p, \oplus, M^p(\cdot))$  cümlesi kısaca  $\mathcal{C}_p$  ile gösterilmek üzere aşağıdaki teoremler verilebilir.

**Teorem 3.1.15.**  $\mathcal{C}_p$  birimli ve değişmeli bir halkadır.

**Teorem 3.1.16.**  $\mathcal{C}_p$  sadece  $p < 0$  için bir cisimdir.

**Teorem 3.1.17.**  $\mathcal{C}_p$  genelleştirilmiş kompleks sayılar halkası  $\mathbb{R}$  reel sayılar cismine izomorf bir alt cümleyi alt cisim olarak kapsar.

O halde Teorem 3.1.17.'nin bir sonucu olarak aşağıdaki tanım verilebilir.

**Tanım 3.1.18.**  $\mathcal{C}_p$  genelleştirilmiş kompleks sayı sisteminde  $(x, 0)$  genelleştirilmiş kompleks sayısı,  $x$  reel sayısı ile gösterilir ve  $(x, 0) = x$  olarak yazılır.

**Tanım 3.1.19.**  $Z = (x, y) \in \mathcal{C}_p$  bir genelleştirilmiş kompleks sayı olsun.  $x$  reel sayısına  $Z$  sayısının reel kısmı,  $y$  reel sayısına da  $Z$  sayısının genelleştirilmiş kompleks kısmı denir.

**Tanım 3.1.20.**  $\mathcal{C}_p$  genelleştirilmiş kompleks sayı sisteminde  $(0, 1)$  genelleştirilmiş kompleks sayısı  $i$  ile gösterilir ve genelleştirilmiş kompleks birim olarak adlandırılır.

**Tanım 3.1.21.**  $x$  ve  $y$  reel sayılar olmak üzere bir genelleştirilmiş kompleks sayı  $Z = x + iy \in \mathcal{C}_p$  ile gösterilebilir. Bu taktirde  $x - iy \in \mathcal{C}_p$  genelleştirilmiş kompleks sayısına  $Z$  genelleştirilmiş kompleks sayısının eşleniği denir ve  $\bar{Z}$  ile gösterilir.

**Tanım 3.1.22.**  $Z = x + iy \in \mathbb{C}_p$  genelleştirilmiş kompleks sayı olmak üzere

$$|Z|_p = \sqrt{|M^p(Z, \bar{Z})|} = \sqrt{x^2 - py^2} \quad (3.2)$$

reel sayısına  $Z \in \mathbb{C}_p$  genelleştirilmiş kompleks sayısının modülü denir [11].

**Teorem 3.1.23.**  $Z_1 = x_1 + iy_1 \in \mathbb{C}_p$  ve  $Z_2 = x_2 + iy_2 \in \mathbb{C}_p$  iki genelleştirilmiş kompleks sayı olmak üzere aşağıdaki özellikler sağlanır.

- $|Z_1|_p^2 = |M^p(Z_1, \bar{Z}_1)|$ ,  $|Z_1|_p = \sqrt{|M^p(Z_1, \bar{Z}_1)|}$
- $|M^p(Z_1, Z_2)|_p = |Z_1|_p |Z_2|_p$
- $Z_2 \neq 0$  olmak üzere  $\frac{|Z_1|_p}{|Z_2|_p} = \frac{|Z_1|_p}{|Z_2|_p}$ .

**Tanım 3.1.24.**  $z_1 = x_1 + iy_1$  ve  $z_2 = x_2 + iy_2$ ,  $\mathbb{C}_p$  cümlesinin iki elemanı olmak üzere genelleştirilmiş kompleks düzlemde iç çarpım

$$\langle z_1, z_2 \rangle_p = \operatorname{Re}\left(M^p(z_1, \bar{z}_2)\right) = \operatorname{Re}\left(M^p(\bar{z}_1, z_2)\right) = x_1y_1 - px_2y_2 \quad (3.3)$$

şeklinde tanımlanır. Burada “ $\bar{\phantom{x}}$ ” genelleştirilmiş kompleks eşleniktir [11].

**Tanım 3.1.25.**  $Z_1 = x_1 + iy_1 \in \mathbb{C}_p$  ve  $Z_2 = x_2 + iy_2 \in \mathbb{C}_p$  iki genelleştirilmiş kompleks nokta olmak üzere bu iki nokta arasındaki uzaklık  $|Z_1 - Z_2|_p$  ile gösterilir ve

$$|Z_1 - Z_2|_p = \sqrt{\left|(x_1 - x_2)^2 - p(y_1 - y_2)^2\right|} \quad (3.4)$$

şeklinde hesaplanır.

Eğer (3.4) denklemindeki uzaklık formülünde  $p=0$  ve  $x=0$  olarak alınırsa Tanım 3.1.25.,  $\mathbb{C}_0$  düzlemindeki özel uzaklık tanımına karşılık gelir.

Tanım 3.1.25.'den yola çıkarak genelleştirilmiş kompleks düzlemde çember tanımı aşağıdaki gibi verilebilir.

**Tanım 3.1.26.**  $\mathbb{C}_p$  genelleştirilmiş kompleks düzleminde  $M(a,b)$  merkezli  $r$  yarıçaplı çember

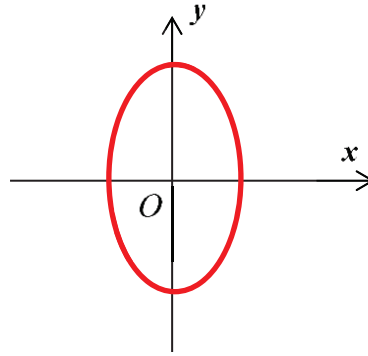
$$\left| (x-a)^2 - p(y-b)^2 \right|_p = r^2 \quad (3.5)$$

şeklinde tanımlanır [11].

**Tanım 3.1.27.**  $\mathbb{C}_p$  genelleştirilmiş kompleks düzleminde  $|Z|_p = 1$  şartını sağlayan noktalar cümlesine  $\mathbb{C}_p$  düzleminde birim çember denir [11].

O halde son tanımdan yola çıkarak  $p$ 'nin özel durumları için genelleştirilmiş kompleks düzlemde birim çemberler aşağıdaki gibi verilebilir.

Şekil 3.2.'den görüldüğü gibi eğer  $p < 0$  olarak alınırsa  $x^2 + |p|y^2 = 1$  formunda birim elipsler elde edilir. Böylelikle  $\mathbb{C}_p (p < 0)$  kompleks sayı sistemi eliptik kompleks sayı sistemine karşılık gelir. Özel olarak  $p = -1$  olarak seçilirse birim çember  $x^2 + y^2 = 1$  şeklindeki Öklid çembere ve genelleştirilmiş kompleks düzlem kompleks düzleme karşılık gelir [11].



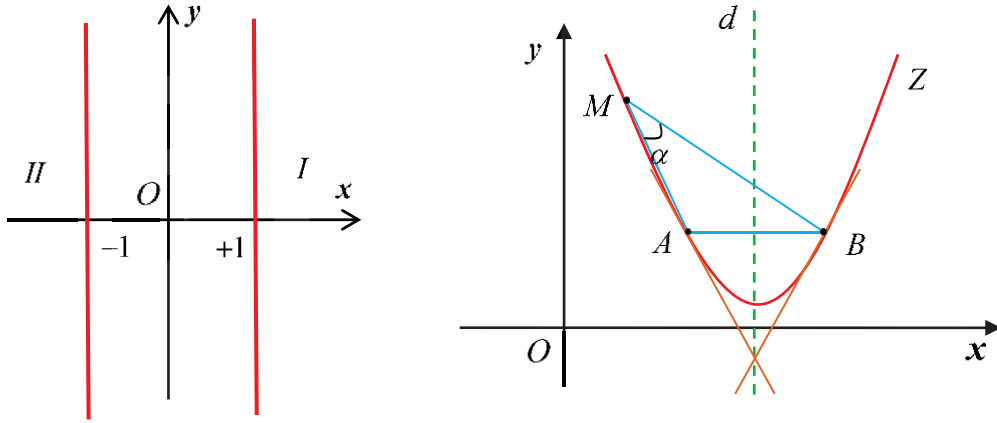
Şekil 3.2.  $p < 0$  için birim çember [11]

Eğer  $p = 0$  olarak alınır (3.5) denkleminde birim çember  $x^2 = 1$  olarak bulunur. Bu durumda  $\mathbb{C}_0$  için birim çemberler  $x = \pm 1$  şeklindedir. Dolayısıyla  $\mathbb{C}_0$  sayı sistemi parabolik kompleks sayı sistemine ve genelleştirilmiş kompleks düzlem Galile düzlemine karşılık gelir. Şekil 3.3'den görüleceği gibi parabolik kompleks düzlem iki bölgeye ayrılır.

Bilindiği üzere Öklid düzlemde bir çember iki farklı yolla tanımlanabilir. İlk tanım şöyledir: “Sabit bir  $M$  noktasından sabit  $r$  uzaklığındaki noktaların geometrik yeri bir çemberdir”. İkinci tanım ise: “Sabit yönlü bir  $\alpha$  açısını gören  $AB$  doğru parçasının uç noktalarının geometrik yeri bir çember belirtir” şeklindedir. Öklid düzlemindeki bu iki çember tanımı  $p = 0$  için Galile düzleminde farklı cümleleri tanımlar. İlk çember tanımından Şekil 3.3'deki gibi  $x = \pm 1$  doğruları oluşur. Bu noktalar cümlesine Galile düzleminde çember (**circle**) adı verilir ve bu çemberler için eğrilikten bahsedilemez. İkinci tanıma göre ise bu noktalar cümlesi Galile çemberi (**cycle**) olarak adlandırılır ve bu çember (cycle), Öklid düzleminde bir parabole karşılık gelir. Bu parabolün (cycle) denklemi

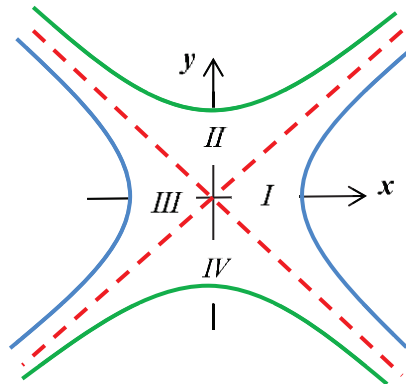
$$y = ax^2 + 2bx + c$$

olacak şekilde yazılır ve şekli ise aşağıdaki gibidir [11, 41].



Şekil 3.3.  $p=0$  için birim çemberler (circle, cycle) [11]

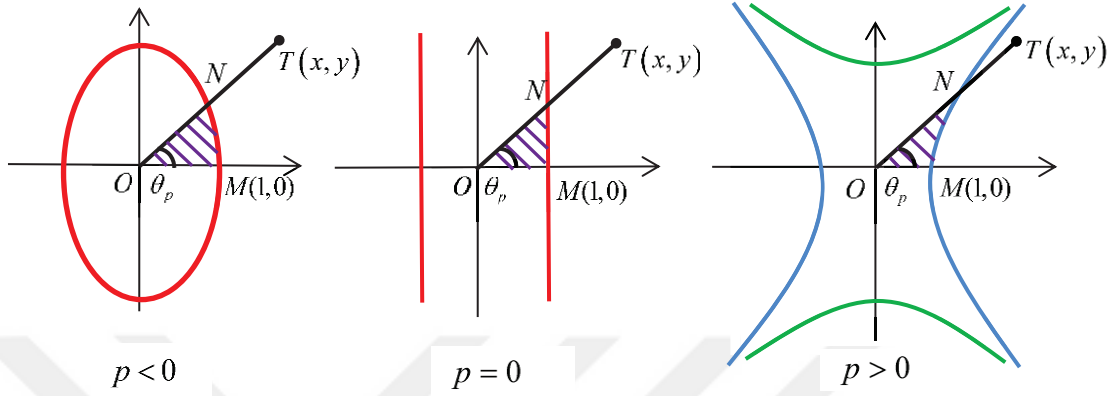
Son olarak  $\mathcal{C}_p$  ( $p > 0$ ) için birim çemberler, asimptotları  $y = \pm x/\sqrt{p}$  olan  $|x^2 - py^2| = 1$  şeklindeki hiperbollerden oluşur. Böylelikle  $\mathcal{C}_p$  ( $p > 0$ ) uzayı hiperbolik kompleks sayı sistemine karşılık gelir. Özel olarak  $p=1$  olarak alınırsa genelleştirilmiş kompleks düzlem iyi bilinen hiperbolik düzleme karşılık gelir. Hiperbolik kompleks düzlem ise Şekil 3.4'ten görüleceği gibi dört bölgeye ayrılır [11].



Şekil 3.4.  $p > 0$  için birim çember [11]

Şimdi genelleştirilmiş kompleks sayı sisteminde açı kavramı verilsin.  $Z = x + iy$  genelleştirilmiş kompleks sayısı  $\overline{OT}$  ışını simgelesin. Ayrıca  $N$  noktası  $\overline{OT}$  ışını

ile çemberin kesim noktası olsun. Şekil 3.5'teki gibi  $Z$  noktasının  $p$ -argumenti  $(\theta_p)$ ,  $OM$  ve  $ON$  yarıçapları,  $MN$  yayı ve  $OMN$  taralı bölgesi verilsin.



Şekil 3.5. Eliptik, parabolik ve hiperbolik açılar [11]

Böylece  $\mathbb{C}_p$  genelleştirilmiş kompleks düzlemde açı tanımını aşağıdaki gibi verilebilir.

**Tanım 3.1.28.**  $\mathbb{C}_p$  genelleştirilmiş kompleks düzlemde açı

$$\theta_p = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{|p|}} \tan^{-1}(\sigma\sqrt{|p|}), & p < 0 \\ \sigma, & p = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{p}} \tanh^{-1}(\sigma\sqrt{p}), & p < 0 \text{ (I. ve III. bölge)} \end{cases} \quad (3.6)$$

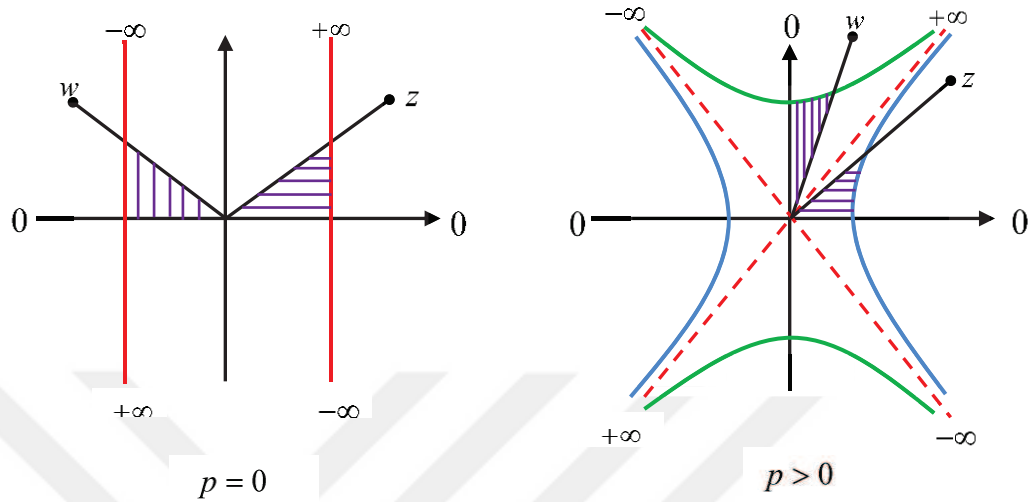
şeklinde tanımlanır. Burada  $\sigma \equiv y/x$  şeklindedir [11].

Üstelik açısal ölçü, bir kuvvet serisi olarak

$$\theta_p = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^n}{2n+1} \sigma^{2n+1}, \quad |\sigma|\sqrt{|p|} < 1.$$

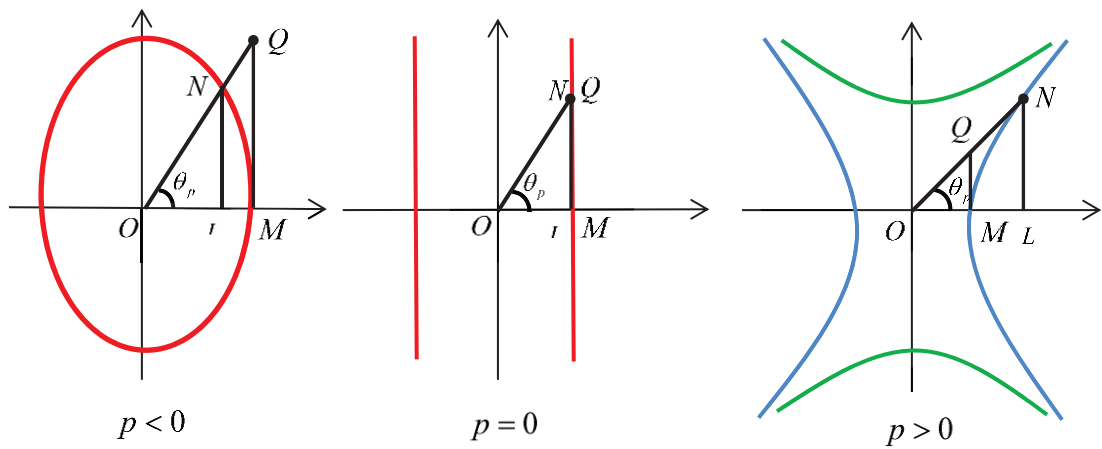
şeklinde yazılabilir [11].

Bütün parabolik ve hiperbolik kompleks düzlemler boyunca, açısız ölçünün genişlemesi Şekil 3.6'da gösterilmiştir.



Şekil 3.6. Hiperbolik ve parabolik kompleks düzlemlerde genişletilmiş açısız ölçü [11]

Şekil 3.7.'de görüldüğü üzere  $N$  noktasının  $OM$  yarıçapı üzerinde dik izdüşüm noktası  $L$  ve  $\mathbb{C}_p$  genelleştirilmiş kompleks düzlemde birim çemberin  $M$  noktasının tanjantı  $QM$  doğrusu olsun. Burada  $Q$  noktası  $ON$  doğrusu ile tanjant doğrusunun arakesit noktasıdır.



Şekil 3.7.  $p$ -trigonometrik fonksiyonların geometrik gösterimleri [11]



Böylece  $\mathbb{C}_p$  genelleştirilmiş kompleks düzlemde  $\overline{OL}$ ,  $\overline{NL}$  ve  $\overline{QM}$  doğru parçalarının uzunluğu yardımıyla  $p$ -kosinüs ( $\cos p$ ) ve  $p$ -sinüs ( $\sin p$ ),  $p$ -trigonometrik fonksiyonları

$$\cos p\theta_p = \begin{cases} \cos(\theta_p \sqrt{|p|}), & p < 0 \\ 1, & p = 0 \text{ (I. bölge)} \\ \cosh(\theta_p \sqrt{p}), & p > 0 \text{ (I. bölge)} \end{cases}$$

$$\sin p\theta_p = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{|p|}} \sin(\theta_p \sqrt{|p|}), & p < 0 \\ \theta_p, & p = 0 \text{ (I. bölge)} \\ \frac{1}{\sqrt{p}} \sinh(\theta_p \sqrt{p}), & p > 0 \text{ (I. bölge)} \end{cases} \quad (3.7)$$

şeklinde ve  $\frac{\overline{QM}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{NL}}{\overline{OL}}$  oranı yardımıyla  $p$ -tanjant ( $\tan p$ ) fonksiyonu

$$\tan p\theta_p = \frac{\sin p\theta_p}{\cos p\theta_p}. \quad (3.8)$$

şeklinde tanımlanır. Yukarıda tanımlanan  $p$ -trigonometrik fonksiyonlar yardımıyla  $\cos p$  ve  $\sin p$  fonksiyonlarının türevleri

$$\frac{d}{d\alpha}(\cos p\alpha) = p \sin p\alpha, \quad \frac{d}{d\alpha}(\sin p\alpha) = \cos p\alpha \quad (3.9)$$

şeklinde elde edilir [11].

**Tanım 3.1.29.**  $\mathbb{C}_p$  genelleştirilmiş kompleks düzlemde I. bölge için Maclaurin serisi

$$\cos p\theta_p = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^n}{(2n)!} \theta_p^{2n} \quad \text{ve} \quad \sin p\theta_p = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^n}{(2n+1)!} \theta_p^{2n+1}.$$

şeklindedir [11].

**Tanım 3.1.30.**  $\mathbb{C}_p$  genelleştirilmiş kompleks düzlemde Maclaurin serisi yardımıyla genelleştirilmiş Euler formülü

$$e^{i\theta_p} = \cos p\theta_p + i \sin p\theta_p \quad (3.10)$$

şeklindedir [11].

**Tanım 3.1.31.**  $Z \in \mathbb{C}_p$  genelleştirilmiş kompleks sayısının kutupsal ve üstel formu

$$Z = r_p (\cos p\theta_p + i \sin p\theta_p) = r_p e^{i\theta_p} \quad (3.11)$$

şeklinde tanımlanır. Burada  $r_p = |Z|_p$  ve  $\theta_p$  ifadelerine, sırasıyla,  $Z$  genelleştirilmiş kompleks sayısının  $p$ -büyüklüğü ve  $p$ -argümenti denir [11].

Genelleştirilmiş kompleks düzlemde  $\theta_p$  açısının bütün reel değerleri için  $e^{i\theta_p}$  genelleştirilmiş kompleks sayısı birim  $p$ -büyüklüğüne sahiptir ve genelleştirilmiş kompleks düzlemin I. bölgesinde birim çemberinin üzerine uzanır. Dolayısıyla aşağıdaki tanım verilebilir.

**Tanım 3.1.32.**  $\mathbb{C}_p$  genelleştirilmiş kompleks düzlemde  $e^{i\theta_p}$  tarafından tanımlanan  $p$ -dönme matrisi

$$A(\theta_p) = \begin{bmatrix} \cos p\theta_p & p \sin p\theta_p \\ \sin p\theta_p & \cos p\theta_p \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

şeklindedir.

Ayrıca genelleştirilmiş kompleks düzlemde (3.3) denklemi yardımıyla iç çarpım tanımından  $z_1 = x_1 + iy_1$  ve  $z_2 = x_2 + iy_2$ ,  $\mathbb{C}_p$  cümlesinin iki elemanı olmak üzere

$$\left\langle z_1 e^{i\theta_p}, z_2 e^{i\theta_p} \right\rangle_p = \left\langle z_1, z_2 \right\rangle_p \quad (3.13)$$

olduğu kolayca görülebilir. Üstelik genelleştirilmiş kompleks düzlemde bir vektörü  $i$  ile çarpmak o vektöre ortogonal bir vektör oluşturur.

$\mathbb{C}_p$  genelleştirilmiş kompleks düzlemin I. bölgesinde gösterilen parabolik ve hiperbolik trigonometrik fonksiyonlar yardımıyla diğer bölgelerdeki  $p$ -trigonometrik fonksiyonlar aşağıdaki gibi verilebilir.

Parabolik kompleks düzlem ( $p = 0$ ) için  $p$ -trigonometrik fonksiyonlar

$$\cos p_{II}\theta_p = -\cos p_I\theta_p \quad \text{ve} \quad \sin p_{II}\theta_p = -\sin p_I\theta_p$$

ve hiperbolik kompleks düzlem ( $p > 0$ ) için  $p$ -trigonometrik fonksiyonlar

$$\begin{aligned} \cos p_{II}\theta_p &= \frac{i}{\sqrt{p}} \cos p_I\theta_p, & \cos p_{III}\theta_p &= -\cos p_I\theta_p, & \cos p_{IV}\theta_p &= -\frac{i}{\sqrt{p}} \cos p_I\theta_p, \\ \sin p_{II}\theta_p &= \frac{\sqrt{p}}{i} \sin p_I\theta_p, & \sin p_{III}\theta_p &= -\sin p_I\theta_p, & \sin p_{IV}\theta_p &= -\frac{\sqrt{p}}{i} \sin p_I\theta_p \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Burada alt indisler bölgelerin numarasıdır.

Ek olarak ( $p = 0$  veya  $p > 0$  için I. bölge)

$$\begin{aligned} \cos p(\theta_p \pm \varphi_p) &= \cos p\theta_p \cos p\varphi_p \pm p \sin p\theta_p \sin p\varphi_p \\ \sin p(\theta_p \pm \varphi_p) &= \sin p\theta_p \cos p\varphi_p \pm \cos p\theta_p \sin p\varphi_p \end{aligned} \quad (3.14)$$

eşitlikleri geçerlidir [11].

**Önerme 3.1.33.**  $\mathbb{C}_p$  genelleştirilmiş kompleks düzlemde  $\mathbf{a} = a_1 + ia_2$  ve  $\mathbf{b} = b_1 + ib_2$  iki keyfi vektör olsun. Bu durumda aşağıdaki denklemler sağlanır,

$$\begin{aligned} 1. [\mathbf{a}e^{i\theta_p}, \mathbf{b}e^{i\theta_p}] &= [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \\ 2. [\mathbf{a}, i\mathbf{b}] &= \frac{1}{2}(\mathbf{a}\bar{\mathbf{b}} + \bar{\mathbf{a}}\mathbf{b}) = a_1b_1 - pa_2b_2. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Burada  $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$  sembolü  $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$  determinantının yerine kullanılmıştır [13].

### 3.2. Genelleştirilmiş Kompleks Düzlemde Bir-Parametrelî Düzlemsel Hareket

Bu bölümde  $\mathbb{C}_p$  genelleştirilmiş kompleks düzlemde bir-parametrelî düzlemsel hareket tanıtılmıştır.

$\mathbb{K}_p$  ve  $\mathbb{K}'_p$ , sırasıyla,  $\{O; \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2\}$  ve  $\{O'; \mathbf{t}'_1, \mathbf{t}'_2\}$  koordinat sistemlerine sahip hareketli ve sabit iki düzlem olmak üzere hareketli düzlemde verilen herhangi bir  $X$  noktasının, sırasıyla, hareketli ve sabit sisteme göre yer vektörleri

$$\mathbf{x} = x_1 + ix_2, \quad \mathbf{x}' = x'_1 + ix'_2 \quad (3.16)$$

şeklinde olsun. O halde  $\overrightarrow{O'O} = \mathbf{u}'$  olmak üzere aşağıdaki tanım verilebilir.

**Tanım 3.2.1.**  $\mathbb{C}_p$  genelleştirilmiş kompleks düzlemde

$$\mathbf{x}' = (\mathbf{x} - \mathbf{u}')e^{i\theta_p} \quad (3.17)$$

şeklinde verilen denkleme bir-parametrelî düzlemsel hareket denir.

Burada  $\theta_p$  açısı genelleştirilmiş kompleks düzlemde  $\mathbb{K}_p / \mathbb{K}'_p$  hareketinin dönme açısıdır. Ayrıca  $\theta_p$  dönme açısı,  $\mathbf{x}, \mathbf{x}'$  ve  $\mathbf{u}'$  fonksiyonları  $t \in I \subset \mathbb{R}$  zaman parametresine bağlı sürekli diferensiyellenebilir fonksiyonlardır.  $t=0$  anında koordinat sistemleri çakışıktır. Ayrıca  $\frac{d\theta_p}{dt} = \dot{\theta}_p = 0$  olduğunda hareket ötelemeden ibaret olacağından çalışma boyunca  $\dot{\theta}_p \neq 0$  alınmıştır [12].

Gürses ve ark.,  $p \in \{-1, 0, 1\}$  olarak bir-parametrelili düzlemsel hareketi  $\mathcal{C}_j = \{x + Jy : x, y \in \mathbb{R}, J^2 = p, p \in \{-1, 0, 1\}\} \subset \mathcal{C}_p$  düzleminde çalışmışlardır [16].

Şimdi  $\mathbb{K}_p$  hareketli düzleminde bir  $X$  noktası verilsin.  $X$  noktasının  $\mathbb{K}_p$  hareketli düzleme göre relatif hız vektörü,

$$\mathbf{V}_r = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \dot{\mathbf{x}} \quad (3.18)$$

şeklindedir. Burada (3.17) denklemini göz önüne alınırsa  $X$  noktasının  $\mathbb{K}'_p$  sabit düzlemine göre mutlak hız vektörü,

$$\mathbf{V}_a = \frac{d\mathbf{x}'}{dt} = -\dot{\mathbf{u}} + i\dot{\theta}_p (\mathbf{x} - \mathbf{u}) + \dot{\mathbf{x}} \quad (3.19)$$

şeklinde yazılır. Buradan (3.18) ve (3.19) denklemlerindeki relatif ve mutlak hız göz önüne alınırsa  $X$  noktasının sürüklenme hız vektörü,

$$\mathbf{V}_f = -\dot{\mathbf{u}} + i\dot{\theta}_p (\mathbf{x} - \mathbf{u}) \quad (3.20)$$

şeklinde elde edilir.

Şimdi genelleştirilmiş kompleks düzlemde hız vektörlerini  $\mathbb{K}'_p$  sabit düzlemine göre yazılsın. Bu durumda (3.18) denklemi yardımıyla sabit düzleme göre relatif hız vektörü,

$$\mathbf{V}'_r = \mathbf{V}_r e^{i\theta_p} = \dot{\mathbf{x}} e^{i\theta_p}, \quad (3.21)$$

şeklinde (3.19) denklemi yardımıyla mutlak hız vektörü,

$$\mathbf{V}'_a = \mathbf{V}_a e^{i\theta_p} = -\dot{\mathbf{u}} e^{i\theta_p} + i\dot{\theta}_p (\mathbf{x} - \mathbf{u}) e^{i\theta_p} + \dot{\mathbf{x}} e^{i\theta_p}, \quad (3.22)$$

şeklinde ve son olarak (3.21) ve (3.22) denklemleri yardımıyla sürüklenme hız vektörü

$$\mathbf{V}'_f = \mathbf{V}_f e^{i\theta_p} = -\dot{\mathbf{u}} e^{i\theta_p} + i\dot{\theta}_p (\mathbf{x} - \mathbf{u}) e^{i\theta_p} \quad (3.23)$$

şeklinde yazılabilir [12].

O halde aşağıdaki teorem verilebilir.

**Teorem 3.2.2.**  $\mathcal{C}_p$  genelleştirilmiş kompleks düzlemde bir-parametrelî düzlemsel harekette bir noktanın mutlak, sürüklenme ve relatif hız vektörleri arasındaki ilişki

$$\mathbf{V}'_a = \mathbf{V}'_f + \mathbf{V}'_r \quad (3.24)$$

şeklindedir [12].

$p \neq 0$  için  $\mathcal{C}_p$  genelleştirilmiş kompleks düzlemde bir-parametrelî düzlemsel  $\mathbb{K}_p / \mathbb{K}'_p$  hareketi boyunca öyle noktalar vardır ki bu noktaların sürüklenme hız vektörleri sıfırdır. Yani bu noktaların her iki düzleme göre de hızları eşittir. Bu noktalar  $Q = (q_1, q_2) \in \mathcal{C}_p$  şeklinde gösterilmek üzere genelleştirilmiş kompleks

düzlemde pol noktaları olarak adlandırılır. Dolayısıyla  $Q = (q_1, q_2) \in \mathbb{C}_p$  dönme polü  $V'_f = \mathbf{0}$  ile karakterize edilir. O halde (3.23) denkleminde

$$\begin{aligned} V'_f &= -\dot{\mathbf{u}}e^{i\theta_p} + i\dot{\theta}_p(\mathbf{x} - \mathbf{u})e^{i\theta_p} = \mathbf{0} \\ -\dot{\mathbf{u}} + i\dot{\theta}_p(\mathbf{x} - \mathbf{u}) &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

alınır ve gerekli işlemler yapılırsa, genelleştirilmiş kompleks düzlemde bir-parametrelili düzlemsel hareketin pol noktaları

$$i\mathbf{x} = i\mathbf{u} + \frac{\dot{\mathbf{u}}}{\dot{\theta}_p}$$

olarak bulunur. O halde  $\overline{OQ} = \mathbf{q} = (q_1, q_2)$  yer vektörüne sahip olan  $Q = (q_1, q_2) \in \mathbb{C}_p$  pol noktası, bileşenleri cinsinden

$$q_1 = u_1 + \frac{\dot{u}_2}{\dot{\theta}_p}, \quad pq_2 = pu_2 + \frac{\dot{u}_1}{\dot{\theta}_p} \quad (3.25)$$

olarak elde edilir [12].

Özel olarak  $p=0$  olarak seçilirse  $q_1 = u_1 + \frac{\dot{u}_2}{\dot{\theta}_p}$ ,  $q_2 = q_2(\gamma(t))$ ,  $\gamma \in \mathbb{R}$  olacak şekilde pol doğruları oluşur [9].

O halde aşağıdaki tanım verilebilir.

**Tanım 3.2.3.**  $\overline{OQ} = \mathbf{q}$  yer vektörüne karşılık gelen  $Q = (q_1, q_2)$  noktasına  $\mathbb{K}_p / \mathbb{K}'_p$  hareketinin  $t$  anındaki **pol (kutup) noktası, dönme polü** veya **ani dönme merkezi** denir [12].

Bu tanımdan yola çıkarak aşağıdaki teorem verilebilir.

**Teorem 3.2.4.**  $\mathbb{C}_p$  genelleştirilmiş kompleks düzlemde açısal hızı sıfır olmayan bir harekette, her  $t$  anında, sürüklenme hızı sıfır olan yani her iki düzlemde de sabit kalan bir tek nokta (pol noktası) vardır [12].

Şimdi  $V'_f$  sürüklenme hız vektörü, pol noktaları cinsinden yeniden ifade edilsin. (3.23) denkleminde (3.25) denklemi göz önüne alınırsa sürüklenme hız vektörü pol noktaları cinsinden

$$V'_f = i\dot{\theta}_p(\mathbf{x}-\mathbf{q})e^{i\theta_p} \quad (3.26)$$

şeklinde yazılabilir.

O halde aşağıdaki teoremler verilebilir.

**Teorem 3.2.5.**  $\mathbb{C}_p$  genelleştirilmiş kompleks düzlemde bir-parametrelili düzlemsel hareket boyunca  $\overline{QX}$  pol ışını ile  $V'_f$  sürüklenme hız vektörü birbirine diktir.

**İspat:**  $Q = (q_1, q_2)$  polünden  $X = (x_1, x_2)$  noktasına giden  $\overline{QX}$  pol ışını

$$\overline{QX} = (\mathbf{x}-\mathbf{q})e^{i\theta_p}$$

şeklinde yazılabilir. Genelleştirilmiş kompleks düzlemde hareketin sürüklenme hız vektörü için (3.26) denklemi göz önüne alınırsa,

$$\langle \overline{QX}, V'_f \rangle_p = \langle (\mathbf{x}-\mathbf{q})e^{i\theta_p}, i\dot{\theta}_p(\mathbf{x}-\mathbf{q})e^{i\theta_p} \rangle_p \quad (3.27)$$

yazılabilir. (3.27) denkleminde (3.13) denklemi kullanılırsa,

$$\langle \overline{QX}, V'_f \rangle_p = \langle (\mathbf{x}-\mathbf{q}), i\dot{\theta}_p(\mathbf{x}-\mathbf{q}) \rangle_p$$



denklemini elde edilir. Burada gerekli işlemler yapılırsa,

$$\begin{aligned}\langle \overline{QX}, V_f' \rangle_p &= \langle (x_1 - q_1, x_2 - q_2), (p(x_2 - q_2), x_1 - q_1) \rangle_p \dot{\theta}_p \\ &= p(x_1 - q_1)(x_2 - q_2) - p(x_2 - q_2)(x_1 - q_1) \dot{\theta}_p \\ &= 0\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla  $\mathcal{C}_p$  genelleştirilmiş kompleks düzlemde  $\overline{QX}$  pol ışını ile  $V_f'$  sürüklenme hız vektörü birbirine diktir.

**Teorem 3.2.6.**  $\mathcal{C}_p$  genelleştirilmiş kompleks düzlemde  $p \neq 0$  olmak üzere  $V_f'$  sürüklenme hız vektörünün uzunluğu ile  $\overline{QX}$  pol ışınının uzunluğu arasındaki ilişki

$$\left| V_f' \right|_p = \sqrt{|p|} \left| \dot{\theta}_p \right| \left| \overline{QX} \right|_p$$

şeklindedir.

**İspat:**  $V_f'$  sürüklenme hız vektörünün boyu

$$\left| V_f' \right|_p = \sqrt{\langle i\dot{\theta}_p(\mathbf{x}-\mathbf{q})e^{i\theta_p}, i\dot{\theta}_p(\mathbf{x}-\mathbf{q})e^{i\theta_p} \rangle_p}$$

şeklindedir. Burada (3.13) denklemi kullanılır ve gerekli işlemler yapılırsa,

$$\begin{aligned}\left| V_f' \right|_p &= \sqrt{\langle i\dot{\theta}_p(\mathbf{x}-\mathbf{q}), i\dot{\theta}_p(\mathbf{x}-\mathbf{q}) \rangle_p} \\ &= \left| \dot{\theta}_p \right| \sqrt{\langle (p(x_2 - q_2), x_1 - q_1), (p(x_2 - q_2), x_1 - q_1) \rangle_p} \\ &= \left| \dot{\theta}_p \right| \sqrt{p^2(x_2 - q_2)^2 - p(x_1 - q_1)^2}\end{aligned}$$

bulunur. O halde son denklemden

$$\left|V_f'\right|_p = \sqrt{|p|} \left|\dot{\theta}_p\right| \left|\overline{QX}\right|_p \quad (3.28)$$

kolayca elde edilebilir [12].

**Sonuç 3.2.7.**  $p = \pm 1$  özel durumu için (3.28) denkleminde

$$\left|V_f'\right|_p = \left|\dot{\theta}_p\right| \left|\overline{QX}\right|_p$$

olduğu görülür [2, 8].

**Sonuç 3.2.8.**  $p = 0$  özel durumu için işlem yapılırsa Galile düzlemindeki özel uzaklık tanımından

$$\left|V_f'\right|_p = \left|\dot{\theta}_p\right| \left|\overline{QX}\right|_p$$

denklemini sağlanır [9].

O halde aşağıdaki teoremler verilebilir.

**Teorem 3.2.9.**  $\mathcal{C}_p$  genelleştirilmiş kompleks düzlemde  $p \neq 0$  için sabit ve hareketli düzlemde pol eğrilerini çizen pol noktalarının ve  $p = 0$  için paralel doğru demetlerini çizen pol doğrularının hızları aynıdır.

**İspat:** Pol noktaları (doğrusu)  $V_f' = \mathbf{0}$  olmasıyla karakterize edilir. Dolayısıyla  $V_f' = \mathbf{0}$  olduğundan (3.24) denklemini göz önüne alınırsa  $Q$  pol noktaları (doğrusu) için

$$V_a' = V_r' \quad (3.29)$$

eşitliği yazılabilir. Dolayısıyla  $Q$  pol noktalarının (doğrularının) her  $t$  anındaki hızları birbirleriyle aynıdır [12].

**Teorem 3.2.10.**  $\mathbb{C}_p$  genelleştirilmiş kompleks düzlemde bir-parametrelili hareket boyunca hareketli düzlemdeki  $p \neq 0$  için pol eğrisi ( $p=0$  için pol doğrusu) sabit düzlemdeki pol eğrisi (pol doğrusu) üzerinde kaymaksızın hareket eder.

**İspat:** Teorem 3.2.9.'dan dolayı her  $t$  anında pol eğrilerinin (pol doğrularının) hızları aynıdır. Ayrıca ( $Q$ ) pol eğrisinin (doğrusunun)  $[t_0, t_1]$  aralığına karşılık gelen noktaları arasındaki yay-uzunluğu

$$ds = \left| V_r' \right|_p dt$$

ve ( $Q'$ ) pol eğrisinin (doğrusunun)  $[t_0, t_1]$  aralığına karşılık gelen noktaları arasındaki yay-uzunluğu

$$ds' = \left| V_a' \right|_p dt$$

dir. Burada (3.29) denklemi göz önüne alınırsa,

$$ds' = ds$$

bulunur. Dolayısıyla bu pol eğrilerinin (pol doğru demetlerinin) her  $t$  anında teğetleri ve aldıkları  $ds$  ve  $ds'$  yolları aynıdır. Dolayısıyla bu pol eğrileri (doğruları) birbiri üzerinde kaymaksızın hareket eder [12].

**Tanım 3.2.11.**  $\mathbb{C}_p$  genelleştirilmiş kompleks düzlemde bir-parametrelili düzlemsel hareket için  $p \neq 0$  için ( $Q$ ) hareketli pol eğrisinin  $d\theta_p$  kütle elementi ile örtüldüğü kabul edilsin. ( $Q$ ) hareketli pol eğrisinin ağırlık merkezine Steiner noktası denir ve

$$s = \frac{\int_{t_0}^{t_1} q d\theta_p}{\int_{t_0}^{t_1} d\theta_p} - \frac{\int_{t_0}^{t_1} du}{2i \int_{t_0}^{t_1} d\theta_p} \quad (3.30)$$

olmak üzere

$$2\delta_p s_1 = 2 \int_{t_0}^{t_1} q_1 d\theta_p - \int_{t_0}^{t_1} du_2, \quad 2p\delta_p s_2 = 2p \int_{t_0}^{t_1} q_2 d\theta_p - \int_{t_0}^{t_1} du_1 \quad (3.31)$$

şeklinde hesaplanır. Burada (3.29) denkleminde pay; koordinat eksenlerine göre statik momenti, payda ise; örtülmüş hareketli pol eğrisinin bütün kütlelerini gösterir [13].

Özel olarak  $p=0$  olacak şekilde seçilirse (3.30) denkleminden ikinci bileşen için  $s_2 = s_2(\eta(t))$ ,  $\eta \in \mathbb{R}$  olduğu görülür. Dolayısıyla  $p=0$  için Galile düzleminde  $t$  anında Steiner noktası değil Steiner doğrusu oluşur [13].

Öklid düzleminde kapalı düzlemsel hareket için Holditch teoremi çalışılmıştır [2]. Burada bahsedilen Öklid düzleminde kapalı hareket tanımı aşağıdaki gibidir.

**Tanım 3.2.12.** Öklid düzlemde hareket boyunca  $\forall t \in I \subset \mathbb{R}$  için

$$\begin{aligned} u_j(t+T) &= u_j(t), \quad (j=1,2) \\ \varphi(t+T) &= \varphi(t) + 2\pi\nu, \end{aligned}$$

şartlarını sağlayan en küçük  $T > 0$  reel sayısı mevcutsa bu harekete  $T$  periyotlu  $\nu$  dönme sayılı bir-parametrelili kapalı düzlemsel hareket denir. Hareket kapalı değilse açık hareket olarak adlandırılır [2].

Lorentz düzleminde kapalı hareket tanımlanamaz [42]. Benzer şekilde Galile düzleminde de kapalı hareketten bahsedilemez. Bu yüzden genelleştirilmiş kompleks düzlem Lorentz ve Galile düzlemlerini de kapsadığından bu tez boyunca  $\mathcal{C}_p$  genelleştirilmiş kompleks düzleminde açık hareket göz önüne alınmıştır. Ek olarak açık hareket,  $[t_0, t_1]$  zaman aralığında sınırlandırılmış ve  $\mathcal{C}_p$  genelleştirilmiş kompleks düzlemin I. bölgesi ele alınmıştır.



## BÖLÜM 4. GENELLEŞTİRİLMİŞ KOMPLEKS DÜZLEMDE STEINER ALAN FORMÜLÜ VE HOLDITCH TEOREMİ

Bu bölüm tezimizin orijinal kısmını oluşturmaktadır ve iki alt bölüme ayrılmıştır. İlk bölümde  $\mathbb{K}_p \subset \mathbb{C}_p$  hareketli kompleks düzlemde verilen sabit bir nokta tarafından sabit düzlemde çizilen yörünge eğrisinin sınırladığı bölgenin alanı hesaplanmıştır. Daha sonra  $\mathbb{C}_p$  genelleştirilmiş kompleks düzlemdeki  $\mathbb{K}_p / \mathbb{K}'_p$  hareketi için hareketli  $\mathbb{K}_p$  düzleminde sabit olan doğrusal üç nokta alınarak, bu noktalar tarafından sabit düzlemde çizilen yörünge eğrilerinin sınırladığı bölgelerin alanları arasındaki ilişkiyi ifade eden Holditch teoremi ispatlanmıştır. İkinci bölümde ise doğrusal olmayan üç nokta için zarf eğrisinin uzunluğu cinsinden Holditch teoreminin bir genellemesi verilmiştir.

### 4.1. Genelleştirilmiş Kompleks Düzlemde Doğrusal Üç Nokta İçin Steiner Alan Formülü ve Holditch Teoremi

Bu bölümde  $\mathbb{K}_p$  hareketli düzlemde sabit olarak verilen doğrusal üç noktanın  $\mathbb{K}'_p$  sabit düzlemde çizdiği yörünge eğrilerinin sınırladığı bölgelerin alanları arasındaki ilişki verilerek Holditch teoremi ispatlanmıştır. Ayrıca Holditch teoremiyle ilgili bazı özel durumlar verilmiştir.

#### 4.1.1. Genelleştirilmiş kompleks düzlemde Steiner alan formülü

$\mathbb{K}_p$  ve  $\mathbb{K}'_p$ , sırasıyla, hareketli ve sabit genelleştirilmiş kompleks düzlemler olmak üzere  $\mathbb{K}_p / \mathbb{K}'_p$  hareketi boyunca  $\mathbb{K}_p$  hareketli düzleminin I. bölgesinde herhangi bir sabit  $X$  noktası verilsin.  $\overline{O'X} = \mathbf{x}'$  ve  $\overline{OX} = \mathbf{x}$  olmak üzere (3.17) denkleminde

$$\mathbf{x}' = (\mathbf{x} - \mathbf{u})e^{i\theta_p} \quad (4.1)$$

yazılabilir. Dolayısıyla  $X$  noktasının  $\mathbb{K}'_p$  sabit düzlemine göre  $d\mathbf{x}'$  değişimi,  $X$  noktasının sürüklenme hızına karşılık geldiğinden (3.26) denklemi yardımıyla

$$d\mathbf{x}' = i(\mathbf{x} - \mathbf{q})e^{i\theta_p} d\theta_p \quad (4.2)$$

şeklinde yazılır. Burada  $\mathbf{q}$ ,  $\mathbb{C}_p$  genelleştirilmiş kompleks düzlemdeki bir-parametrelili hareketin hareketli düzlemdeki  $Q$  pol noktasının yer vektörüdür. Eğer hareket  $I = [t_0, t_1]$  zaman aralığında kısıtlanırsa  $\mathbb{K}_p$  hareketli düzlemde sabit  $X$  noktasının  $\mathbb{K}'_p$  sabit düzlemde çizdiği  $k_X$  yörünge eğrisinin  $F_X$  yörünge alanı

$$F_X = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} [\mathbf{x}', d\mathbf{x}'] \quad (4.3)$$

formülü kullanılarak hesaplanır [30]. Buradaki integral  $X$  noktasının yörünge eğrisi üzerinde alınmıştır. O halde (4.1), (4.2) ve (4.3) denklemleri yardımıyla

$$F_X = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} [(\mathbf{x} - \mathbf{u})e^{i\theta_p}, i(\mathbf{x} - \mathbf{q})e^{i\theta_p}] d\theta_p$$

yazılabilir. Burada (3.15) denklemi kullanılırsa  $X$  noktasının çizdiği yörünge eğrisinin sınırladığı bölgenin alanı  $F_X$ ,

$$F_X = \frac{1}{4} \int_{t_0}^{t_1} ((\mathbf{x} - \mathbf{u})(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{q}}) + (\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{u}})(\mathbf{x} - \mathbf{q})) d\theta_p$$

şeklinde yazılabilir. O halde  $\mathbf{x} = x_1 + ix_2$ ,  $\mathbf{u} = u_1 + iu_2$ ,  $\mathbf{q} = q_1 + iq_2$  ve  $i^2 = p$  olmak üzere gerekli işlemler yapılırsa bu alan,

$$F_X = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} ((x_1 - u_1)(x_1 - q_1) - p(x_2 - u_2)(x_2 - q_2)) d\theta_p$$

şeklinde elde edilir. Son denklemde  $X$  noktasının hareketli  $\mathbb{K}_p$  düzleminde sabit olduğu göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} F_X &= \frac{1}{2} (x_1^2 - px_2^2) \int_{t_0}^{t_1} d\theta_p - \frac{1}{2} x_1 \int_{t_0}^{t_1} (q_1 + u_1) d\theta_p \\ &\quad + \frac{1}{2} px_2 \int_{t_0}^{t_1} (q_2 + u_2) d\theta_p + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} (u_1 q_1 - pu_2 q_2) d\theta_p \end{aligned} \quad (4.4)$$

eşitliği elde edilir. Şimdi  $X \in \mathbb{K}_p$  noktası  $\mathbb{K}_p$  hareketli düzlemin başlangıç noktası olarak verilsin. O halde (4.4) denkleminde

$$F_O = \frac{1}{4} \int_{t_0}^{t_1} (\mathbf{u}\bar{q} + \bar{\mathbf{u}}q) d\theta_p$$

veya

$$F_O = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} (u_1 q_1 - pu_2 q_2) d\theta_p \quad (4.5)$$

olduğu görülür. Dolayısıyla (4.5) denklemi  $\mathbb{K}_p$  hareketli düzlemin başlangıç noktasının genelleştirilmiş kompleks düzlemde bir-parametrelili düzlemsel hareket boyunca sabit düzlemde çizdiği yörünge eğrisinin sınırladığı bölgenin alanını verir. Ayrıca  $\mathbb{K}_p / \mathbb{K}'_p$  genelleştirilmiş kompleks düzlemdeki hareketin toplam açısı

$$\delta_p = \int_{t_0}^{t_1} d\theta_p \quad (4.6)$$

olarak verilsin. Bu durumda (4.4) denklemi (4.5) ve (4.6) denklemleri yardımıyla



$$F_X = F_O + \frac{1}{2}(x_1^2 - px_2^2)\delta_p - \frac{1}{2}x_1 \int_{t_0}^{t_1} (q_1 + u_1) d\theta_p + \frac{1}{2}px_2 \int_{t_0}^{t_1} (q_2 + u_2) d\theta_p \quad (4.7)$$

şeklinde elde edilir.

Diğer taraftan  $\mathcal{C}_p$  genelleştirilmiş kompleks düzlemde (3.25) denklemi yardımıyla hareketin pol noktasının ( $p = 0$  için doğrusunun) bileşenleri

$$q_1 = u_1 + \frac{du_2}{d\theta_p}, \quad pq_2 = pu_2 + \frac{du_1}{d\theta_p}, \quad (p = 0 \text{ için } q_2 = q_2(\gamma(t)), \quad \gamma \in \mathbb{R})$$

olmak üzere

$$u_1 = q_1 - \frac{du_2}{d\theta_p}, \quad pu_2 = pq_2 - \frac{du_1}{d\theta_p} \quad (4.8)$$

eşitlikleri yazılabilir. O halde (4.8) denklemi (4.7) denkleminde yerine yazılırsa,

$$F_X = F_O + \frac{1}{2}(x_1^2 - px_2^2)\delta_p - \frac{1}{2}x_1 \int_{t_0}^{t_1} \left(2q_1 - \frac{du_2}{d\theta_p}\right) d\theta_p + \frac{1}{2}x_2 \int_{t_0}^{t_1} \left(2pq_2 - \frac{du_1}{d\theta_p}\right) d\theta_p \quad (4.9)$$

denklemi elde edilir. Buradan gerekli düzenlemeler yapılırsa (4.9) denklemi

$$F_X = F_O + \frac{1}{2} \left( \delta_p (x_1^2 - px_2^2) - x_1 \left( 2 \int_{t_0}^{t_1} q_1 d\theta_p - \int_{t_0}^{t_1} du_2 \right) + x_2 \left( 2p \int_{t_0}^{t_1} q_2 d\theta_p - \int_{t_0}^{t_1} du_1 \right) \right) \quad (4.10)$$

şeklinde bulunur.

Steiner noktası,  $d\theta_p$  kütle elementli kütle örtülmesinde hareketli pol eğrisinin ağırlık merkezidir. Dolayısıyla  $\mathcal{C}_p$  genelleştirilmiş kompleks düzlem Steiner noktası ( $p = 0$  için doğrusu) için (3.31) denkleminde

$$\begin{aligned}
2\delta_p s_1 &= 2 \int_{t_0}^{t_1} q_1 d\theta_p - \int_{t_0}^{t_1} du_2, \\
2p\delta_p s_2 &= 2p \int_{t_0}^{t_1} q_2 d\theta_p - \int_{t_0}^{t_1} du_1, \quad (p=0 \text{ için } s_2 = s_2(\eta(t)), \eta \in \mathbb{R})
\end{aligned}
\tag{4.11}$$

eşitlikleri yazılabilir. Dolayısıyla (4.11) denklemi (4.10) denkleminde yerine yazılırsa aşağıdaki teorem verilebilir.

**Teorem 4.1.1.**  $\mathcal{C}_p$  genelleştirilmiş kompleks düzlemde  $\mathbb{K}_p / \mathbb{K}'_p$ , bir-parametrelî düzlemsel hareket olarak verilsin. Bu durumda  $\mathbb{K}_p$  hareketli düzlemde verilen sabit bir  $X$  noktasının  $\mathbb{K}'_p$  sabit düzleminde çizdiği yörünge eğrisinin sınırladığı bölgenin alanı

$$F_X = F_O + \frac{1}{2} \delta_p (x_1^2 - px_2^2 - 2x_1s_1 + 2px_2s_2) \tag{4.12}$$

şeklinindedir.

Bu formüle  $\mathcal{C}_p$  genelleştirilmiş kompleks düzlemde **Steiner alan formülü** denir.

$p$ 'nin özel değerleri için Steiner alan formülünün ifadeleri aşağıdaki gibidir.

**Özel Durum 1:**  $p = -1$  için (4.12) denklemi göz önüne alınırsa Steiner alan formülü

$$F_X = F_O + \frac{1}{2} \delta (x_1^2 + x_2^2 - 2x_1s_1 - 2x_2s_2)$$

olarak elde edilir. Bu formül ise bilinen kompleks düzlemde Steiner alan formülüne karşılık gelir [27].

**Özel Durum 2:**  $p=0$  ise (4.12) denkleminde Galile düzlemi için Steiner alan formülü

$$F_X = F_O + \frac{1}{2} \delta (x_1^2 - 2x_1s_1)$$

olarak elde edilir. Burada Galile düzleminde verilen  $X$  noktası düzlemin I. bölgesinde alınmıştır. Bu formül ise Galile düzlemindeki Steiner alan formülüne karşılık gelir.

**Özel Durum 3:**  $p=1$  için (4.12) denklemi göz önüne alındığında Steiner alan formülünün

$$F_X = F_O + \frac{1}{2} \delta (x_1^2 - x_2^2 - 2x_1s_1 + 2x_2s_2)$$

olduğu görülür. Burada  $X$  noktası hareketli hiperbolik düzlemin I. bölgesinde alınmıştır. Bu formül ise hiperbolik düzlemdeki Steiner alan formülüne karşılık gelir [28].

Şimdi (4.12) denkleminde verilen  $\mathcal{C}_p$  genelleştirilmiş kompleks düzlemdeki Steiner alan formülündeki  $F_X$  değeri sabit kabul edilsin. Bu durumda

$$x_1^2 - px_2^2 - 2x_1s_1 + 2px_2s_2 = \frac{2(F_X - F_O)}{\delta_p}$$

veya

$$(x_1 - s_1)^2 - p(x_2 - s_2)^2 = s_1^2 - ps_2^2 + \frac{2(F_X - F_O)}{\delta_p} \quad (4.13)$$

eşitlikleri yazılabilir. O halde (3.5) denklemindeki genelleştirilmiş kompleks düzlemde çember tanımı yardımıyla aşağıdaki teorem verilebilir.

**Teorem 4.1.2.**  $\mathbb{C}_p$  genelleştirilmiş kompleks düzlemde bir-parametrelili  $\mathbb{K}_p / \mathbb{K}'_p$  düzlemsel hareketi boyunca  $\mathbb{K}'_p$  sabit düzleminde aynı  $F_X$  alanına sahip yörüngeleri çizen hareketli  $\mathbb{K}_p$  düzlemindeki bütün  $X$  noktaları  $\mathbb{K}_p$  düzleminde merkezi Steiner noktası olan bir çember üzerinde bulunurlar.

Teorem 4.1.2.'yi kullanarak  $p$ 'nin özel durumları aşağıdaki gibi incelenebilir. (4.13) denkleminde verilen bu çember  $p < 0$  için merkezi Steiner noktası olan bir elipse karşılık gelir. Özel olarak  $p = -1$  alınırsa bu çember merkezi Steiner noktası olan bilinen Öklid çemberine karşılık gelir [23].  $p = 0$  için (4.13) denklemindeki çember Galile düzleminde çembere (**cycle**) karşılık gelir. Galile düzlemindeki bu çember (cycle), Öklid düzlemindeki parabole eşittir. Bu parabolün tepe noktası ise Galile düzlemindeki Steiner doğrusunun üzerinde bulunur.  $p > 0$  için ise bu çember bir hiperbole karşılık gelir. Eğer özel olarak  $p = 1$  seçilirse Lorentz çemberi elde edilir [28].

#### 4.1.2. Genelleştirilmiş kompleks düzlemde karışık alan formülü ve Holditch teoremi

Genelleştirilmiş kompleks düzlemde  $\mathbb{K}_p / \mathbb{K}'_p$  hareketi boyunca  $\mathbb{K}_p$  hareketli düzlemde sabit  $X$  ve  $Y$  noktaları verilsin. Ayrıca bu noktalardan oluşan  $\overline{XY}$  doğru parçası üzerinde  $X$  ve  $Y$  noktalarından farklı sabit bir nokta  $Z$  olmak üzere bu noktalar arasında

$$\overline{OZ} = \overline{OX} + \overline{XZ} \quad (4.14)$$

$$\overline{OY} = \overline{OX} + \overline{XY} \quad (4.15)$$

$$\overrightarrow{XZ} = \mu \overrightarrow{XY}, \quad \mu \in \mathbb{R} \quad (4.16)$$

olacak şekilde ilişkiler mevcuttur. O halde (4.14), (4.15) ve (4.16) denklemleri göz önüne alınırsa,

$$\overrightarrow{OZ} = \lambda \overrightarrow{OX} + \mu \overrightarrow{OY} \quad (4.17)$$

veya

$$\mathbf{z} = \lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y}, \quad \lambda + \mu = 1 \quad (4.18)$$

eşitlikleri elde edilir. Burada  $\lambda$  ve  $\mu$  değerlerine  $\mathbf{z}$ 'nin **barisantrik koordinatları** denir.

(3.17) denkleminde verilen  $\mathbb{C}_p$  genelleştirilmiş kompleks düzlemdeki bir parametrelili düzlemsel hareket tanımından yararlanılarak doğrusal  $X$ ,  $Y$  ve  $Z$  noktalarının hareketi için

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= (\mathbf{x} - \mathbf{u}) e^{i\theta_p}, \\ \mathbf{y}' &= (\mathbf{y} - \mathbf{u}) e^{i\theta_p}, \\ \mathbf{z}' &= (\mathbf{z} - \mathbf{u}) e^{i\theta_p} \end{aligned} \quad (4.19)$$

denklemleri yazılabilir. Benzer şekilde doğrusal  $X$ ,  $Y$  ve  $Z$  noktalarının  $\mathbb{K}'_p$  sabit düzleminin  $O'$  orijin noktasına göre konum vektörleri, sırasıyla,  $\mathbf{x}'$ ,  $\mathbf{y}'$  ve  $\mathbf{z}'$  olmak üzere (4.19) denklemleri göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} \lambda \mathbf{x}' + \mu \mathbf{y}' &= \lambda (\mathbf{x} - \mathbf{u}) e^{i\theta_p} + \mu (\mathbf{y} - \mathbf{u}) e^{i\theta_p} \\ &= (\lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y}) e^{i\theta_p} - (\lambda + \mu) e^{i\theta_p} \\ &= (\mathbf{z} - \mathbf{u}) e^{i\theta_p} \end{aligned}$$

olmak üzere

$$z' = \lambda x' + \mu y' \quad (4.20)$$

eşitliği ile elde edilir. O halde (4.20) denkleminin diferensiyeli alınırsa,

$$dz' = \lambda dx' + \mu dy' \quad (4.21)$$

denklemini bulunur. Buradan (4.3), (4.20) ve (4.21) denklemleri göz önüne alınırsa  $\mathbb{K}_p$  hareketli düzleminde  $\overline{XY}$  doğru parçasının üzerinde verilen sabit  $Z$  noktasının  $\mathbb{K}'_p$  sabit düzleminde çizdiği yörünge eğrisinin  $F_Z$  alanı için

olmak üzere

$$F_Z = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} [z', dz']$$

$$F_Z = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} [\lambda x' + \mu y', \lambda dx' + \mu dy'] \quad (4.22)$$

eşitliği yazılabilir. Burada basit integral işlemleri yapılırsa (4.22) denklemini

$$F_Z = \frac{1}{2} \lambda^2 \int_{t_0}^{t_1} [x', dx'] + \frac{1}{2} \lambda \mu \int_{t_0}^{t_1} ([x', dy'] + [y', dx']) + \frac{1}{2} \mu^2 \int_{t_0}^{t_1} [y', dy'] \quad (4.23)$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca

$$F_X = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} [x', dx'],$$

$$F_Y = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} [y', dy'],$$

$$F_{XY} = \frac{1}{4} \int_{t_0}^{t_1} ([x', dy'] + [y', dx']) \quad (4.24)$$

olmak üzere (4.23) denklemi

$$F_Z = \lambda^2 F_X + 2\lambda\mu F_{XY} + \mu^2 F_Y \quad (4.25)$$

olarak elde edilir. Burada  $F_{XY}$  ifadesine genelleştirilmiş kompleks düzlemde  $\mathbb{K}_p / \mathbb{K}'_p$  bir-parametrelili düzlemsel hareketi için **karışık alan formülü** denir. Şimdi bu karışık alan formülünü hesaplamak için (4.1) ve (4.2) denklemlerinden

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= (\mathbf{x} - \mathbf{u}) e^{i\theta_p}, & d\mathbf{x}' &= i(\mathbf{x} - \mathbf{q}) e^{i\theta_p} d\theta_p \\ \mathbf{y}' &= (\mathbf{y} - \mathbf{u}) e^{i\theta_p}, & d\mathbf{y}' &= i(\mathbf{y} - \mathbf{q}) e^{i\theta_p} d\theta_p \end{aligned}$$

eşitlikleri göz önüne alınsın. O halde karışık alan formülü (4.24) denkleminde

$$F_{XY} = \frac{1}{4} \int_{t_0}^{t_1} \left( [(\mathbf{x} - \mathbf{u}) e^{i\theta_p}, i(\mathbf{y} - \mathbf{q}) e^{i\theta_p} d\theta_p] + [(\mathbf{y} - \mathbf{u}) e^{i\theta_p}, i(\mathbf{x} - \mathbf{q}) e^{i\theta_p} d\theta_p] \right) \quad (4.26)$$

olarak yazılabilir. Son denklemde (3.15) denklemini kullanılırsa,

$$F_{XY} = \frac{1}{4} \int_{t_0}^{t_1} \left( [(\mathbf{x} - \mathbf{u}), i(\mathbf{y} - \mathbf{q}) d\theta_p] + [(\mathbf{y} - \mathbf{u}), i(\mathbf{x} - \mathbf{q}) d\theta_p] \right)$$

olmak üzere

$$F_{XY} = \frac{1}{8} \int_{t_0}^{t_1} \left( (\mathbf{x} - \mathbf{u})(\bar{\mathbf{y}} - \bar{\mathbf{q}}) + (\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{u}})(\mathbf{y} - \mathbf{q}) + (\mathbf{y} - \mathbf{u})(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{q}}) + (\bar{\mathbf{y}} - \bar{\mathbf{u}})(\mathbf{x} - \mathbf{q}) \right) d\theta_p$$

eşitliği elde edilir. Buradan gerekli işlemler yapılırsa  $\mathbb{C}_p$  genelleştirilmiş kompleks düzlemde karışık alan formülü

$$F_{XY} = \frac{1}{4} \int_{t_0}^{t_1} \left( 2x_1 y_1 - 2p x_2 y_2 - (x_1 + y_1)(u_1 + q_1) + p(x_2 + y_2)(u_2 + q_2) + 2(u_1 q_1 - p u_2 q_2) \right) d\theta_p \quad (4.27)$$

şeklinde elde edilir. Ayrıca (4.5), (4.6) ve (4.8) denklemlerinden yararlanılarak (4.27) denklemi

$$F_{XY} = F_0 + \frac{1}{2} \delta_p (x_1 y_1 - p x_2 y_2) - \frac{1}{4} (x_1 + y_1) \left( 2 \int_{t_0}^{t_1} q_1 d\theta_p - \int_{t_0}^{t_1} du_2 \right) + \frac{1}{4} (x_2 + y_2) \left( 2p \int_{t_0}^{t_1} q_2 d\theta_p - \int_{t_0}^{t_1} du_1 \right) \quad (4.28)$$

olarak bulunur. Son olarak  $\mathcal{C}_p$  genelleştirilmiş kompleks düzlemde hareketli pol eğrisinin ağırlık merkezi olan ve (4.11) denklemi ile verilen Steiner noktasının bileşenleri kullanılırsa (4.28) denklemindeki karışık alan formülü

$$F_{XY} = F_0 + \frac{1}{2} \delta_p (x_1 y_1 - p x_2 y_2 - (x_1 + y_1) s_1 + p (x_2 + y_2) s_2) \quad (4.29)$$

şeklinde elde edilir.

Şimdi  $X$  ve  $Y$  noktaları aynı nokta olarak kabul edilsin. O halde (4.29) formülü

$$F_{XX} = F_0 + \frac{1}{2} \delta_p (x_1^2 - p x_2^2 - 2x_1 s_1 + 2p x_2 s_2)$$

şeklinde bulunur. Bu formül ise (4.12) formülündeki Steiner alan formülüne eşittir. Dolayısıyla (4.29) formülü (4.12) formülünün daha genel halidir. Ayrıca (4.29) formülünden

$$F_{XY} = F_{YX} \quad (4.30)$$

olduğu aşikardır.

Şimdi  $F_{XY}$  karışık alan formülü  $F_X$  ve  $F_Y$  yörünge alanları cinsinden ifade edilsin. Bunun için (4.12) ve (4.29) denklemleri göz önüne alınırsa,



$$\begin{aligned}
F_X - 2F_{XY} + F_Y &= F_O + \frac{1}{2} \delta_p (x_1^2 - px_2^2 - 2x_1s_1 + 2px_2s_2) - 2F_O \\
&\quad - \delta_p (x_1y_1 - px_2y_2 - (x_1 + y_1)s_1 + p(x_2 + y_2)s_2) + F_O \\
&\quad + \frac{1}{2} \delta_p (y_1^2 - py_2^2 - 2y_1s_1 + 2py_2s_2)
\end{aligned}$$

eşitliği yazılabilir. Son denklemde gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$F_X - 2F_{XY} + F_Y = \frac{1}{2} \delta_p (x_1^2 - 2x_1y_1 + y_1^2 - p(x_2^2 - 2x_2y_2 + y_2^2))$$

denkleminde son olarak

$$F_X - 2F_{XY} + F_Y = \frac{1}{2} \delta_p ((x_1 - y_1)^2 - p(x_2 - y_2)^2) \quad (4.31)$$

eşitliği elde edilir.

$\mathbb{K}_p$  hareketli düzleminin I. bölgesinde verilen sabit  $X$  ve  $Y$  noktaları arasındaki uzaklık  $d$  olarak verilsin. O halde (3.4) denklemi ile verilen genelleştirilmiş kompleks düzlemdeki I. bölge için uzaklık tanımından

$$d^2 = (x_1 - y_1)^2 - p(x_2 - y_2)^2 \quad (4.32)$$

eşitliği yazılabilir. Dolayısıyla (4.31) denkleminde (4.32) denklemi yerine yazılırsa,

$$F_X - 2F_{XY} + F_Y = \frac{1}{2} \delta_p d^2 \quad (4.33)$$

denklemini bulunur. Bu son denklemden  $F_{XY}$  karışık alan formülü yalnız bırakılırsa,

$$F_{XY} = \frac{1}{2} (F_X + F_Y) - \frac{1}{4} \delta_p d^2 \quad (4.34)$$

kolayca elde edilir. Son olarak (4.34) denklemini (4.25) denkleminde yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa  $\lambda + \mu = 1$  olmak üzere (4.25) denklemini

$$F_Z = \lambda F_X + \mu F_Y - \frac{1}{2} \lambda \mu \delta_p d^2 \quad (4.35)$$

şeklinde bulunur.

Şimdi  $\mathbb{K}_p$  hareketli genelleştirilmiş kompleks düzleminin I. bölgesinde verilen sabit  $X$  ve  $Y$  noktalarının aynı yörünge üzerinde olduğu kabul edilsin. Böylece bu noktaların çizdiği yörünge eğrilerinin sınırladığı bölgelerin alanları ( $F_X = F_Y$ ) eşittir. Böyle bir kabul altında (4.35) denklemini  $\lambda + \mu = 1$  olmak üzere

$$F_X - F_Z = \frac{1}{2} \lambda \mu \delta_p d^2 \quad (4.36)$$

olarak bulunur. O halde aşağıdaki teorem verilebilir.

**Teorem 4.1.3. (Holditch Teoremi)**  $\mathbb{K}_p \subset \mathbb{C}_p$  genelleştirilmiş hareketli kompleks düzlem üzerinde verilen sabit  $X$  ve  $Y$  noktaları ile oluşan doğru parçası  $\overline{XY}$  olmak üzere  $\mathbb{K}_p / \mathbb{K}'_p$  hareketi boyunca  $[t_0, t_1]$  zaman aralığında sabit uzunluklu  $\overline{XY}$  doğru parçasının uç noktaları aynı  $k_X$  eğrisini çizsin. O halde  $\overline{XY}$  doğru parçasının üzerinde bu noktalardan farklı olarak verilen bir  $Z$  sabit noktası da  $(\lambda d = |\overline{YZ}|, \mu d = |\overline{XZ}|, \lambda + \mu = 1)$  hareket boyunca başka bir  $k_Z$  eğrisi çizer.  $\mathbb{C}_p$  genelleştirilmiş kompleks düzlemde  $\mathbb{K}_p / \mathbb{K}'_p$  hareketi boyunca  $k_X$  ve  $k_Z$  eğrileri arasında kalan alan hareketin  $p$ -dönme açısına ve bu noktalar arasındaki uzaklığa bağlıdır.

$\mathbb{C}_p$  genelleştirilmiş kompleks düzlemde bir-parametrelî düzlemsel hareket için Holditch teoremi kullanılarak aşağıdaki sonuç verilebilir.

**Sonuç 4.1.4.**  $\mathbb{K}_p$  hareketli genelleştirilmiş kompleks düzleminde  $X$  ve  $Y$  sabit noktalar olmak üzere  $\overline{XY}$  doğru parçası üzerinde sabit iki nokta  $Z_1$  ve  $Z_2$  olsun.  $\mathbb{K}_p / \mathbb{K}'_p$  hareketi boyunca  $Z_1$  ve  $Z_2$  noktaları birbirinden farklı  $k_{Z_1}$  ve  $k_{Z_2}$  eğrilerini çizerken  $X$  ve  $Y$  noktaları aynı  $k_X$  eğrisini çizsin. Eğer  $k_X$  ve  $k_{Z_1}$  eğrilerinin yörünge alanları arasındaki fark  $F$ ,  $k_X$  ve  $k_{Z_2}$  eğrilerinin yörünge alanları arasındaki fark  $F'$  ise  $F$  ve  $F'$  arasındaki ilişki,

$$\frac{F}{F'} = \left[ \frac{|XZ_1|_p}{|XZ_2|_p} \right]^2 \gamma, \quad \gamma = \frac{|XZ_2|_p |YZ_1|_p}{|XZ_1|_p |YZ_2|_p}$$

şeklindedir.

**İspat:** (4.36) denklemini göz önüne alınırsa  $F_{Z_1}$  için

$$F_{Z_1} = F_X - \frac{\delta_p}{2} |XZ_1|_p |YZ_1|_p,$$

ve  $F_{Z_2}$  için

$$F_{Z_2} = F_X - \frac{\delta_p}{2} |XZ_2|_p |YZ_2|_p$$

denklemleri yazılabilir. O halde son denklemlerden yola çıkarak  $F$  ve  $F'$  alanları, sırasıyla,

$$F = F_X - F_{Z_1} = \frac{\delta_p}{2} |XZ_1|_p |YZ_1|_p, \quad (4.37)$$

ve

$$F' = F_X - F_{Z_2} = \frac{\delta_p}{2} \left| \overline{XZ_2} \right|_p \left| \overline{YZ_2} \right|_p, \quad (4.38)$$

şeklinde yazılabilir. Burada (4.37) ve (4.38) denklemleri göz önüne alınırsa,  $F$  ile  $F'$  arasındaki ilişki,

$$\frac{F}{F'} = \frac{\left| \overline{XZ_1} \right|_p \left| \overline{YZ_1} \right|_p}{\left| \overline{XZ_2} \right|_p \left| \overline{YZ_2} \right|_p}$$

şeklinde bulunur. Böylece  $\gamma = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{\left| \overline{XZ_2} \right|_p \left| \overline{YZ_1} \right|_p}{\left| \overline{XZ_1} \right|_p \left| \overline{YZ_2} \right|_p}$  olarak dikkate alınırsa son denklemden

$$\frac{F}{F'} = \left[ \frac{\left| \overline{XZ_1} \right|_p}{\left| \overline{XZ_2} \right|_p} \right]^2 \gamma$$

yazılabilir. Dolayısıyla  $\frac{F}{F'}$  oranı sadece  $X, Y, Z_1$  ve  $Z_2$  noktaları arasındaki uzaklığa bağlıdır.

$\mathbb{C}_p$  genelleştirilmiş kompleks düzlemde Holditch teoreminin bir genellemesi olan aşağıdaki teorem verilebilir.

**Teorem 4.1.5.**  $\mathbb{K}_{p_1}$  ve  $\mathbb{K}_{p_2}$  hareketli iki genelleştirilmiş kompleks düzlem olsun.  $\mathbb{K}'_p$  sabit genelleştirilmiş kompleks düzlem olmak üzere  $\mathbb{K}_{p_1} / \mathbb{K}'_p$  ve  $\mathbb{K}_{p_2} / \mathbb{K}'_p$  hareketleri boyunca hareketli  $\mathbb{K}_{p_1}$  ve  $\mathbb{K}_{p_2}$  düzlemlerinde, sırasıyla, sabit  $X_1$  ve  $X_2$  noktaları sabit düzlemde  $F_X$  alanlı aynı  $k_X$  eğrisini çizerken;  $Y_1$  ve  $Y_2$  noktaları da

sabit düzlemde  $F_Y$  alanlı aynı  $k_Y$  eğrisini çizsin.  $X_1$  ve  $Y_1$  noktaları ile doğrusal  $Z_1$  noktasının çizdiği yörünge eğrisinin sınırladığı bölgenin alanı  $F_1$  ve  $X_2$  ve  $Y_2$  noktaları ile doğrusal  $Z_2$  noktasının çizdiği yörünge eğrisinin sınırladığı bölgenin alanı  $F_2$  olsun. O halde  $a, b, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  olmak üzere bu alanlar arasındaki fark,

$$F_1 - F_2 = \frac{\delta_p}{2} ab (\lambda_2^2 - \lambda_1^2)$$

şeklindedir.

**İspat:**  $|\overline{X_1 Z_1}|_p = \lambda_1 a$ ,  $|\overline{Y_1 Z_1}|_p = \lambda_1 b$ ,  $d_1 = \lambda_1 (a + b)$  olmak üzere (4.35) denkleminde

$$F_1 = \frac{1}{\lambda_1 (a + b)} (\lambda_1 b F_{X_1} + \lambda_1 a F_{Y_1}) - \frac{\delta_p}{2} \lambda_1^2 ab$$

denklemini bulunur. Burada  $F_{X_1} = F_{X_2} = F_X$  ve  $F_{Y_1} = F_{Y_2} = F_Y$  olduğu göz önüne alınır ve gerekli sadeleştirme yapılırsa,

$$F_1 = \frac{1}{a + b} (b F_X + a F_Y) - \frac{\delta_p}{2} \lambda_1^2 ab \quad (4.39)$$

elde edilir. Benzer şekilde  $|\overline{X_2 Z_2}|_p = \lambda_2 a$ ,  $|\overline{Y_2 Z_2}|_p = \lambda_2 b$ ,  $d_2 = \lambda_2 (a + b)$  olmak üzere (4.35) denkleminde

$$F_2 = \frac{1}{\lambda_2 (a + b)} (\lambda_2 b F_{X_2} + \lambda_2 a F_{Y_2}) - \frac{\delta_p}{2} \lambda_2^2 ab$$

eşitliği bulunur. Son denkleminde gerekli sadeleştirme yapılır ve  $F_{X_1} = F_{X_2} = F_X$  ve  $F_{Y_1} = F_{Y_2} = F_Y$  olduğu dikkate alınır,

$$F_2 = \frac{1}{a+b}(bF_x + aF_y) - \frac{\delta_p}{2} \lambda_2^2 ab \quad (4.40)$$

denklemleri bulunur. O halde (4.39) ve (4.40) denklemleri göz önüne alınır,

$$F_1 - F_2 = \frac{\delta_p}{2} ab(\lambda_2^2 - \lambda_1^2) \quad (4.41)$$

denklemleri elde edilir.

Özel olarak  $\lambda_1 = 0$  alınır (4.41) denklemleri

$$F_1 - F_2 = \frac{\delta_p}{2} \lambda_2^2 ab$$

şeklinde dönüşür. Bu formül ise (4.36) denkleminin aynısıdır. Dolayısıyla Teorem 4.1.5.'te verilen ifade Holditch teoreminin daha genel halidir.

$\mathbb{C}_p$  genelleştirilmiş kompleks düzlemde  $\mathbb{K}_p / \mathbb{K}'_p$  bir-parametrel düzlemsel hareketi için verilen Holditch teoremi ile ilgili bazı özel durumlar aşağıdaki gibi verilebilir.

### Özel Durumlar:

**Özel Durum 1:**  $X, Y, Z \in \mathbb{K}_p \subset \mathbb{C}_p$  noktalarının  $\mathbb{C}_p$  genelleştirilmiş kompleks düzlemin I. koordinat ekseninde olduğu kabul edilsin. Bu durumda

$$\begin{aligned} d &= y - x \\ b &= y - z = \lambda d \\ a &= z - x = \mu d \\ a + b &= d, \quad \lambda + \mu = 1 \end{aligned}$$

olduğundan (4.35) denklemleri

$$F_Z = \frac{1}{d}(bF_X + aF_Y) - \frac{\delta_p}{2} ab \quad (4.42)$$

olarak bulunur. Ek olarak  $F_X = F_Y$  alınırsa (4.42) denklemi

$$F_Z - F_X = \frac{\delta_p}{2} ab \quad (4.43)$$

olarak elde edilir.

**Özel Durum 2.**  $p \neq 0$  için  $S = (s_1, s_2)$  Steiner noktası hareketli  $\mathbb{K}_p$  düzleminin başlangıç noktası ( $S(s_1, s_2) = O(0, 0)$ ) olsun.  $p = 0$  iken Galile düzleminde her  $t$  anında Steiner doğrusu olduğundan  $p = 0$  durumunda Steiner doğrusu sanal eksenle çakışık olarak ( $S = (0, s_2)$ ) alınsın.

Bu durumda  $S(0, 0)$  ( ya da  $S = (0, s_2)$ ) için (4.12) denklemi göz önüne alınırsa,

$$F_X = F_S + \frac{1}{2} \delta_p (x_1^2 - px_2^2) \quad (4.44)$$

eşitliği elde edilir. Benzer şekilde (4.29) denklemi için de aynı işlem uygulanırsa,

$$F_{XY} = F_S + \frac{1}{2} \delta_p (x_1 y_1 - p x_2 y_2) \quad (4.45)$$

eşitliği bulunur.

Buna göre (4.44) ve (4.45) denklemleri göz önüne alınırsa  $\delta_p > 0$ ,  $X \neq S$  ve  $X \neq Y$  olmak üzere aşağıdaki geometrik yorumlar yapılabilir.

1. (4.44) denkleminde  $\delta_p > 0$  ve  $F_S > 0$  dir. Ayrıca, I. bölgede  $x_1^2 - px_2^2 > 0$  olduğundan

$$F_X > F_S$$

ifadesi yazılabilir. Yani genelleştirilmiş kompleks düzlemde bir-parametrelili düzlemsel hareket için hareketli düzlemin I. bölgesinde alınan herhangi bir sabit noktanın çizdiği yörünge eğrisinin sınırladığı bölgenin alanı Steiner noktasının çizdiği yörünge eğrisinin sınırladığı bölgenin alanından her zaman için büyüktür. Bu ifadeye genelleştirilmiş kompleks düzlemde  $S$  Steiner noktasının  $F_S$  yörünge alanının **minimallik özelliği** denir.

2. Şimdi yukarıda bahsedilen şartlar altında  $F_{XY}$  karışık alan formülü  $F_X$  ve  $F_Y$  yörünge alanları cinsinden hesaplınsın. O halde (4.44) ve (4.45) denklemleri kullanılarak

$$F_X - 2F_{XY} + F_Y = F_S + \frac{\delta_p}{2}(x_1^2 - px_2^2) - 2F_S - \delta_p(x_1y_1 - px_2y_2) + F_S + \frac{\delta_p}{2}(y_1^2 - py_2^2)$$

denkleminde gerekli işlemler yapılırsa,

$$F_X - 2F_{XY} + F_Y = \frac{\delta_p}{2}(x_1^2 - 2x_1y_1 + y_1^2 - p(x_2^2 - 2x_2y_2 + y_2^2))$$

olmak üzere

$$F_X - 2F_{XY} + F_Y = \frac{\delta_p}{2}((x_1 - y_1)^2 - p(x_2 - y_2)^2)$$

denklemini elde edilir. Burada genelleştirilmiş kompleks düzlemin I. bölgesinde verilen  $X$  ve  $Y$  noktaları arasındaki uzaklığın  $d$  olduğu hatırlanırsa (4.32) denkleminde faydalanılarak



$$F_X - 2F_{XY} + F_Y = \frac{\delta_p}{2} d^2$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca  $\delta_p > 0$ ,  $d^2 > 0$  olduğundan

$$F_X - 2F_{XY} + F_Y > 0$$

olarak bulunur.

3. Şimdi  $F_X F_Y - F_{XY}^2$  ifadesi (4.44) ve (4.45) denklemleri kullanılarak hesaplınsın.

O halde

$$F_X F_Y - F_{XY}^2 = \left( F_S + \frac{\delta_p}{2} (x_1^2 - px_2^2) \right) \left( F_S + \frac{\delta_p}{2} (y_1^2 - py_2^2) \right) - \left( F_S + \frac{\delta_p}{2} (x_1 y_1 - px_2 y_2) \right)^2$$

denkleminde gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{aligned} F_X F_Y - F_{XY}^2 &= \frac{\delta_p}{2} F_S (x_1^2 - 2x_1 y_1 + y_1^2 - px_2^2 + px_2 y_2 - py_2^2) \\ &\quad + \frac{\delta_p^2}{4} (x_1^2 y_1^2 - px_1^2 y_2^2 - px_2^2 y_1^2 + p^2 x_2^2 y_2^2 - x_1^2 y_1^2 + 2px_1 y_1 x_2 y_2 - p^2 x_2^2 y_2^2) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada (4.32) denkleminde verilen uzaklık göz önüne alınır ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa,

$$F_X F_Y - F_{XY}^2 = \frac{\delta_p}{2} F_S d^2 - p \frac{\delta_p^2}{4} (x_1 y_2 - px_2 y_1)$$

eşitliği bulunur. O halde aşağıdaki yorumlar yapılabilir:

- $p < 0$  veya  $p = 0$  için  $F_X F_Y - F_{XY}^2 > 0$ ,
- $p > 0$  için  $F_X F_Y - F_{XY}^2 \in \mathbb{R}$ .

4. Son olarak  $(F_X - F_S)(F_Y - F_S) - (F_{XY} - F_S)^2$  denklemi (4.44) ve (4.45) denklemleri kullanılarak hesaplanırsa,

$$\begin{aligned} (F_X - F_S)(F_Y - F_S) - (F_{XY} - F_S)^2 &= \frac{\delta_p}{2}(x_1^2 - px_2^2) \frac{\delta_p}{2}(y_1^2 - py_2^2) - \frac{\delta_p^2}{4}(x_1y_1 - px_2y_2)^2 \\ &= -p \frac{\delta_p^2}{4}(x_1y_2 - x_2y_1)^2 \end{aligned}$$

bulunur. O halde aşağıdaki yorumlar yapılabilir:

- $p < 0$  için  $(F_X - F_S)(F_Y - F_S) - (F_{XY} - F_S)^2 \geq 0$ ,
- $p = 0$  için  $(F_X - F_S)(F_Y - F_S) - (F_{XY} - F_S)^2 = 0$ ,
- $p > 0$  için  $(F_X - F_S)(F_Y - F_S) - (F_{XY} - F_S)^2 \leq 0$ .

Yani  $p = 0$  için bu ifade daima sıfırdır.  $p < 0$  ve  $p > 0$  için ise eşitlik durumu  $X, Y$  ve  $S$  noktalarının doğrusal olmasıyla mümkündür.

## 4.2. Genelleştirilmiş Kompleks Düzlemde Doğrusal Olmayan Üç Nokta İçin Holditch Teoremi

Bu bölümde, öncelikle genelleştirilmiş kompleks düzlemde Cauchy uzunluk formülü verilmiştir. Daha sonra Bölüm 4.1.'de verilen doğrusal üç noktanın çizdiği yörünge eğrilerinin sınırladığı bölgelerin alanları arasındaki ilişkiyi veren Holditch teoreminin bir genellemesi elde edilmiştir.

### 4.2.1. Genelleştirilmiş kompleks düzlemde Cauchy uzunluk formülü

$\mathbb{C}_p$  genelleştirilmiş kompleks düzlemde I. bölgede alınan bir  $g$  doğrusu Hesse formunda

$$h = x_1 \cos p\psi_p - px_2 \sin p\psi_p \quad (4.46)$$

şeklinde yazılabilir. Burada  $(h, \psi_p)$ ; Hesse koordinatlarıdır. Ayrıca  $h$ ;  $O$  orijin noktasından  $g$  doğrusuna inilen dikmenin uzunluğu,  $\psi_p$ ; bu dikmenin  $x$ -ekseni ile pozitif yönde yaptığı açı ve  $X(x_1, x_2)$  noktası ise;  $g$  doğrusu ile  $(g)$  zarf eğrisinin değme noktasıdır.

$h, \psi_p$ 'nin bir fonksiyonu ise her bir  $\psi_p$  değerine genelleştirilmiş kompleks düzlemde bir doğru karşılık gelir. Böylece  $\psi_p$ 'ye göre genelleştirilmiş kompleks düzlemde doğru demeti elde edilir. Öyleyse

$$h(\psi_p) = x_1 \cos p\psi_p - px_2 \sin p\psi_p$$

yazılabilir. Buradan  $\psi_p$ 'ye göre diferensiyel alınır

$$\frac{dh(\psi_p)}{d\psi_p} = px_1 \sin p\psi_p - px_2 \cos p\psi_p$$

denklemleri elde edilir. Bu iki denklem sistemi  $x_1$  ve  $x_2$ 'ye göre çözümlerse,

$$\begin{aligned} x_1 &= h \cos p\psi_p - \dot{h} \sin p\psi_p \\ px_2 &= ph \sin p\psi_p - \dot{h} \cos p\psi_p \end{aligned} \quad (4.47)$$

eşitlikleri elde edilir. Ek olarak (4.47) denklem sisteminin, sırasıyla, diferensiyeli alınır,

$$\dot{x}_1 = (ph - \ddot{h}) \sin p\psi_p \quad (4.48)$$

ve

$$p\dot{x}_2 = (ph - \ddot{h}) \cos p\psi_p \quad (4.49)$$

eşitlikleri elde edilir. Böylelikle (4.48) ve (4.49) denklemleri kullanılarak  $(g)$  zarf eğrisinin  $X$  noktasının  $dx$  değişimi yardımıyla zarf eğrisinin  $ds$  yay elementi

$$ds = \frac{1}{\sqrt{|p|}} |ph - \dot{h}| d\psi_p$$

şeklinde yazılabilir. Böylece  $(g)$  zarf eğrisinin uzunluğu (çevresi)

$$L = \frac{1}{\sqrt{|p|}} \int_{t_0}^{t_1} |ph - \dot{h}| d\psi_p \quad (4.50)$$

şeklindedir. Bu formüle **Cauchy uzunluk formülü** denir.

Benzer şekilde  $g$  doğrusunun zarf eğrisinin uzunluğu sabit düzleme göre ifade edilebilir. (4.46) denklemine benzer şekilde  $g$  doğrusunun sabit düzleme göre Hesse formundaki denklemi aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$$h' = x'_1 \cos p\psi'_p - px'_2 \sin p\psi'_p \quad (4.51)$$

olmak üzere burada  $h'$ ;  $O'$  orijin noktasından  $g$  doğrusuna inilen dikmenin uzunluğu,  $\psi'_p$ ; bu dikmenin  $x$ -ekseni ile pozitif yönde yaptığı açıdır. Ayrıca  $\theta_p$ ; genelleştirilmiş kompleks düzlemde bir-parametrelili düzlemsel hareketin dönme açısı olmak üzere  $\psi'_p$ ,  $\theta_p$  ve  $\psi_p$  açıları arasında

$$\psi'_p = \theta_p + \psi_p \quad (4.52)$$

ilişkisi mevcuttur. O halde (4.51) denkleminde (3.14), (3.17) ve (4.52) denklemleri göz önüne alınırsa

$$h' = h - u_1 \cos p\psi_p + pu_2 \sin p\psi_p \quad (4.53)$$

eşitliği yazılır. Burada  $g$  doğrusu  $\mathbb{K}_p$  hareketli genelleştirilmiş kompleks düzlemde sabit olduğundan  $\psi_p$  sabittir. Dolayısıyla  $d\psi'_p = d\theta_p$  yazılabilir. Buradan (4.53) denklemi yardımıyla (4.50) denklemindeki Cauchy formülüne benzer olarak

$$L' = \frac{1}{\sqrt{|p|}} \int_{t_0}^{t_1} |ph' - \dot{h}'| d\theta_p \quad (4.54)$$

yazılabilir. O halde (4.54) denklemindeki integrali hesap etmek için (4.53) denklemi göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} h' &= h - u_1 \cos p\psi_p + pu_2 \sin p\psi_p \\ \dot{h}' &= \dot{h} - \dot{u}_1 \cos p\psi_p + p\dot{u}_2 \sin p\psi_p \\ \ddot{h}' &= \ddot{h} - \ddot{u}_1 \cos p\psi_p + p\ddot{u}_2 \sin p\psi_p \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitlikler (4.54) denkleminde yerine yazılırsa

$$L' = \frac{1}{\sqrt{|p|}} (ph\delta_p - A \cos p\psi_p + pB \sin p\psi_p) \quad (4.55)$$

yazılabilir. Burada  $A = \int_{t_0}^{t_1} (pu_1 - \dot{u}_1) d\theta_p$  ve  $B = \int_{t_0}^{t_1} (pu_2 - \dot{u}_2) d\theta_p$  dir. O halde (3.25) denklemi göz önüne alındığında  $A$  ve  $B$ , sırasıyla

$$A = \int_{t_0}^{t_1} (pq_1 - p\dot{q}_2) d\theta_p, \quad B = \int_{t_0}^{t_1} (pq_2 - \dot{q}_1) d\theta_p$$

elde edilir. Son denklem (4.55) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} L' &= \frac{1}{\sqrt{|p|}} ph\delta_p - \frac{1}{\sqrt{|p|}} \int_{t_0}^{t_1} (p \cos p\psi_p q_1 - p^2 \sin p\psi_p q_2) d\theta_p \\ &+ \frac{1}{\sqrt{|p|}} \int_{t_0}^{t_1} (p \cos p\psi_p \dot{q}_2 - p \sin p\psi_p \dot{q}_1) d\theta_p \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Burada  $L_Q^g = \cos p\psi_p q_2 - \sin p\psi_p q_1 \Big|_{t_0}^{t_1}$ ,  $g$  doğrusu üzerinde ( $Q$ ) hareketli pol eğrisinin  $\overline{Q_1 Q_2}$  doğru parçasının uzunluğudur. Ayrıca  $Q$  pol noktasının  $g$  doğrusuna olan uzaklığı  $\bar{q} = h - q_1 \cos p\psi_p + p q_2 \sin p\psi_p$  olmak üzere

$$L' = \sqrt{|p|} \left( \int_{t_0}^{t_1} \bar{q} d\theta_p + L_Q^g \right) \quad (4.56)$$

şeklinde elde edilir.

#### 4.2.2. Genelleştirilmiş kompleks düzlemde Holditch teoreminin genellemesi

$\mathbb{K}_p$  ve  $\mathbb{K}'_p$ , sırasıyla, hareketli ve sabit genelleştirilmiş kompleks düzlemler olmak üzere  $\mathbb{K}_p / \mathbb{K}'_p$ , bir-parametrelili düzlemsel hareketi boyunca hareketli  $\mathbb{K}_p$  düzleminde verilen sabit  $X$  ve  $Y$  noktaları  $k_X$  ve  $k_Y$  yörünge eğrilerini çizsin.  $\mathbb{K}_p$  hareketli düzleminin  $\mathbf{a}_3$  normal vektörü yardımıyla  $\frac{\mathbf{y} - \mathbf{x}}{d} = \mathbf{a}_1$  olmak üzere  $\mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_3 \wedge_p \mathbf{a}_1$  olacak şekilde  $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$  dik çatısı kurulsun.

O halde  $\mathbb{K}_p$  hareketli düzleminin  $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2$  koordinat vektörleri ile  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$  vektörleri arasındaki ilişki  $\mathbf{t}_1$  ile  $\mathbf{a}_2$  arasındaki açı  $\psi_p$  olmak üzere

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos p\psi_p & p \sin p\psi_p \\ \sin p\psi_p & \cos p\psi_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t}_2 \\ \mathbf{t}_1 \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

veya

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= p \sin p\psi_p \mathbf{t}_1 + \cos p\psi_p \mathbf{t}_2 \\ \mathbf{a}_2 &= \cos p\psi_p \mathbf{t}_1 + \sin p\psi_p \mathbf{t}_2 \end{aligned} \quad (4.58)$$

bağıntısı ile verilebilir. Diğer taraftan (4.58) denkleminin benzer olarak sabit  $\mathbb{K}'_p$  genelleştirilmiş kompleks düzlemin  $\mathbf{t}'_1, \mathbf{t}'_2$  koordinat vektörleri ile  $\mathbf{a}'_1, \mathbf{a}'_2$  vektörleri arasındaki ilişki ise  $\mathbf{t}'_1$  ile  $\mathbf{a}'_2$  arasındaki açı  $\psi'_p$  olmak üzere

$$\begin{aligned}\mathbf{a}'_1 &= p \sin p \psi'_p \mathbf{t}'_1 + \cos p \psi'_p \mathbf{t}'_2 \\ \mathbf{a}'_2 &= \cos p \psi'_p \mathbf{t}'_1 + \sin p \psi'_p \mathbf{t}'_2\end{aligned}\quad (4.59)$$

şeklinde yazılabilir. Burada  $\mathbf{a}'_1$  ve  $\mathbf{a}'_2$  sabit sisteme göre yer vektörleridir. (4.59) denkleminin diferensiyeli alınırsa,

$$\begin{aligned}d\mathbf{a}'_1 &= (p \cos p \psi'_p \mathbf{t}'_1 + p \sin p \psi'_p \mathbf{t}'_2) d\psi'_p \\ d\mathbf{a}'_2 &= (p \sin p \psi'_p \mathbf{t}'_1 + \cos p \psi'_p \mathbf{t}'_2) d\psi'_p\end{aligned}\quad (4.60)$$

eşitlikleri elde edilir.

Şimdi  $\mathbb{K}'_p$  hareketli genelleştirilmiş kompleks düzlemde  $\overline{XY}$  doğru parçası üzerinde olmayan sabit bir  $Z$  noktası göz önüne alınsın. Bu durumda  $Z$  noktasının  $\overline{XY}$  doğru parçası üzerine dik izdüşüm noktası  $R$  olmak üzere  $\mathbb{K}'_p$  hareketli düzlemde  $X, Y$  ve  $R$  noktaları arasındaki ilişkiler

$$\overline{OR} = \overline{OX} + \overline{XR} \quad (4.61)$$

$$\overline{OY} = \overline{OX} + \overline{XY} \quad (4.62)$$

$$\overline{XR} = \beta \overline{XY}, \quad \beta \in \mathbb{R} \quad (4.63)$$

olacak şekilde yazılabilir. Buradan (4.61), (4.62) ve (4.63) denklemleri yardımıyla  $1 - \beta = \alpha$  olmak üzere

$$\overrightarrow{OR} = \alpha \overrightarrow{OX} + \beta \overrightarrow{OY}$$

eşitliği veya  $X, Y$  ve  $R$  noktalarının hareketli  $\mathbb{K}_p$  genelleştirilmiş kompleks düzlemine göre yer vektörleri, sırasıyla,  $x, y$  ve  $r$  olmak üzere bu yer vektörleri arasındaki ilişki,

$$r = \alpha x + \beta y \quad (4.64)$$

şeklinde yazılabilir. Burada  $\alpha + \beta = 1$  dir. Ayrıca  $\overrightarrow{OZ} = \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{RZ}$  olduğu göz önüne alınırsa  $Z$  noktasının  $\overline{XY}$  doğru parçasına olan uzaklığı  $c$  olmak üzere ( $|\overline{RZ}| = c$ ) (4.64) denklemi yardımıyla

$$z = \alpha x + \beta y + ca_2 \quad (4.65)$$

eşitliği yazılabilir. Diğer taraftan (3.17) denklemi yardımıyla  $x', y'$  ve  $z'$  yer vektörleri için

$$\begin{aligned} x' &= (x - u)e^{i\theta_p}, \\ y' &= (y - u)e^{i\theta_p}, \\ z' &= (z - u)e^{i\theta_p} \end{aligned}$$

eşitlikleri yazılabilir. Ayrıca, (4.58) ve (4.59) denklemleri yardımıyla

$$a'_2 = a_2 e^{i\theta_p} \quad (4.66)$$

olduğu göz önüne alınırsa  $\alpha + \beta = 1$  olmak üzere

$$\begin{aligned} \alpha x' + \beta y' + ca'_2 &= \alpha (x - u)e^{i\theta_p} + \beta (y - u)e^{i\theta_p} + ca_2 e^{i\theta_p} \\ &= (\alpha x + \beta y + ca_2)e^{i\theta_p} - (\alpha + \beta)ue^{i\theta_p} \\ &= (z - u)e^{i\theta_p} \end{aligned}$$



olacak şekilde

$$z' = \alpha x' + \beta y' + c a'_2 \quad (4.67)$$

denklemini yazılabilir. Yani (4.65) denkleminde verilen  $x, y, z$  ve  $a_2$  vektörleri arasındaki aynı ilişki, bu vektörlerin sabit  $\mathbb{K}'_p$  düzlemine göre ifadeleri olan  $x', y', z'$  ve  $a'_2$  vektörleri arasında da mevcuttur.

(4.67) denkleminin diferensiyel alınır,

$$dz' = \alpha dx' + \beta dy' + c da'_2 \quad (4.68)$$

eşitliği elde edilir.

Şimdi  $\mathbb{K}'_p$  hareketli genelleştirilmiş kompleks düzlemde verilen sabit  $Z$  noktasının  $\mathbb{K}'_p$  sabit düzlemde çizdiği yörünge eğrisinin sınırladığı bölgenin alanı hesap edilsin. (4.3) denkleminde  $Z$  noktasının çizdiği yörünge eğrisinin sınırladığı bölgenin alanı,

$$F_x = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} [z', dz']$$

olmak üzere (4.67) ve (4.68) denklemleri göz önüne alınır,

$$F_z = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} [\alpha x' + \beta y' + c a'_2, \alpha dx' + \beta dy' + c da'_2]$$

şeklinde yazılabilir. Eğer burada gerekli işlemler yapılırsa,

$$\begin{aligned}
F_Z &= \frac{1}{2} \alpha^2 \int_{t_0}^{t_1} [\mathbf{x}', d\mathbf{x}'] + \frac{1}{2} \alpha\beta \int_{t_0}^{t_1} [\mathbf{x}', d\mathbf{y}'] + \frac{1}{2} \alpha c \int_{t_0}^{t_1} [\mathbf{x}', d\mathbf{a}'_2] + \frac{1}{2} \alpha\beta \int_{t_0}^{t_1} [\mathbf{y}', d\mathbf{x}'] \\
&+ \frac{1}{2} \beta^2 \int_{t_0}^{t_1} [\mathbf{y}', d\mathbf{y}'] + \frac{1}{2} \beta c \int_{t_0}^{t_1} [\mathbf{y}', d\mathbf{a}'_2] + \frac{1}{2} \alpha c \int_{t_0}^{t_1} [\mathbf{a}'_2, d\mathbf{x}'] + \frac{1}{2} \beta c \int_{t_0}^{t_1} [\mathbf{a}'_2, d\mathbf{y}'] \quad (4.69) \\
&+ \frac{1}{2} c^2 \int_{t_0}^{t_1} [\mathbf{a}'_2, d\mathbf{a}'_2]
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

(4.24) denkleminde  $\mathbb{K}_p$  hareketli düzleminde verilen sabit  $X$  ve  $Y$  noktalarının  $\mathbb{K}_p'$  sabit düzleminde çizdiği yörünge eğrilerinin sınırladığı bölgelerin alanları

$$\begin{aligned}
F_X &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} [\mathbf{x}', d\mathbf{x}'] \\
F_Y &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} [\mathbf{y}', d\mathbf{y}'] \\
F_{XY} &= \frac{1}{4} \int_{t_0}^{t_1} ([\mathbf{x}', d\mathbf{y}'] + [\mathbf{y}', d\mathbf{x}'])
\end{aligned}$$

şeklinde dir. Burada  $F_{XY}$ , (4.29) denkleminde verilen  $\mathbb{K}_p$  hareketli düzlemi üzerinde sabit  $X$  ve  $Y$  noktalarının  $\mathbb{K}_p'$  sabit düzleminde çizdiği  $k_X$  ve  $k_Y$  yörünge eğrilerinin sınırladığı bölgelerin karışık alan formülüdür. O halde (4.69) denkleminde son denklemler yerine yazılırsa,

$$F_Z = \alpha^2 F_X + \beta^2 F_Y + 2\alpha\beta F_{XY} + \frac{c^2}{2} \int_{t_0}^{t_1} [\mathbf{a}'_2, d\mathbf{a}'_2] + \frac{c}{2} \int_{t_0}^{t_1} [\alpha\mathbf{x}' + \beta\mathbf{y}', d\mathbf{a}'_2] + \frac{c}{2} \int_{t_0}^{t_1} [\mathbf{a}'_2, \alpha d\mathbf{x}' + \beta d\mathbf{y}']$$

denklemini elde edilir. Ayrıca son denkleminde (4.34) denklemini dikkate alınırsa,

$$\begin{aligned}
F_Z &= \alpha F_X + \beta F_Y - \frac{\delta_p}{2} \alpha \beta d^2 + \frac{c^2}{2} \int_{t_0}^{t_1} [a'_2, da'_2] \\
&+ \frac{c}{2} \int_{t_0}^{t_1} [\alpha x' + \beta y', da'_2] + \frac{c}{2} \int_{t_0}^{t_1} [a'_2, \alpha dx' + \beta dy']
\end{aligned} \tag{4.70}$$

bulunur.

Şimdi (4.70) denklemindeki integraller teker teker hesap edilsin. (4.59) ve (4.60) denklemlerinden

$$\begin{aligned}
a'_2 &= \cos p \psi'_p t'_1 + \sin p \psi'_p t'_2 \\
da'_2 &= (p \sin p \psi'_p t'_1 + \cos p \psi'_p t'_2) d\psi'_p
\end{aligned}$$

eşitlikleri geçerlidir. O halde

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t_1} [a'_2, da'_2] &= \int_{t_0}^{t_1} \begin{vmatrix} \cos p \psi'_p & \sin p \psi'_p \\ p \sin p \psi'_p & \cos p \psi'_p \end{vmatrix} d\psi'_p \\
&= \int_{t_0}^{t_1} (\cos p^2 \psi'_p - p \sin p^2 \psi'_p) d\psi'_p
\end{aligned} \tag{4.71}$$

eşitliği elde edilir. Genelleştirilmiş kompleks düzlemin I. bölgesinde

$$\cos p^2 \psi'_p - p \sin p^2 \psi'_p = 1$$

eşitliği geçerli olduğundan (4.71) denklemi

$$\int_{t_0}^{t_1} [a'_2, da'_2] = \delta_p \tag{4.72}$$

şeklinde elde edilir.

Diğer taraftan  $\int_{t_0}^{t_1} [\alpha x' + \beta y', da'_2]$  integralini hesap etmek için

$$\begin{aligned} x' &= (x - u) e^{i\theta_p}, \\ y' &= (y - u) e^{i\theta_p} \\ da'_2 &= a'_1 d\psi'_p \\ a'_1 &= a_1 e^{i\theta_p} \end{aligned}$$

eşitlikleri dikkate alınırsa,

$$\int_{t_0}^{t_1} [\alpha x' + \beta y', da'_2] = \int_{t_0}^{t_1} [\alpha (x - u) e^{i\theta_p} + \beta (y - u) e^{i\theta_p}, a_1 e^{i\theta_p}] d\psi'_p$$

olduğu görülür ve (3.15) denkleminde  $\alpha + \beta = 1$  olmak üzere

$$\int_{t_0}^{t_1} [\alpha x' + \beta y', da'_2] = \int_{t_0}^{t_1} [\alpha x + \beta y - u, a_1] d\psi'_p$$

denklemini elde edilir öyle ki  $\alpha + \beta = 1$  dir. Ek olarak, (4.64) denkleminde

$$\int_{t_0}^{t_1} [\alpha x' + \beta y', da'_2] = \int_{t_0}^{t_1} [r - u, a_1] d\psi'_p \quad (4.73)$$

olduğu kolayca görülür. Burada (4.58) denkleminde  $a_1 = p \sin p\psi_p \mathbf{t}_1 + \cos p\psi_p \mathbf{t}_2$  olduğu dikkate alınırsa (4.73) denklemini,

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} [\alpha x' + \beta y', da'_2] &= \int_{t_0}^{t_1} \begin{vmatrix} r_1 - u_1 & r_2 - u_2 \\ p \sin p\psi_p & \cos p\psi_p \end{vmatrix} d\psi'_p \\ &= \int_{t_0}^{t_1} (r_1 \cos p\psi_p - pr_2 \sin p\psi_p - u_1 \cos p\psi_p + pu_2 \sin p\psi_p) d\psi'_p \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Burada  $R(r_1, r_2)$  noktası  $Z$  noktasının  $\overline{XY}$  doğru parçasına dik izdüşüm noktası olmak üzere (4.46) denklemi kullanılırsa son denklem

$$\int_{t_0}^{t_1} [\alpha x' + \beta y', da_2'] = \int_{t_0}^{t_1} (h - u_1 \cos p\psi_p + pu_2 \sin p\psi_p) d\psi_p' \quad (4.74)$$

eşitliği ile yazılabilir.

Diğer taraftan (4.53) denkleminden

$$h' = h - u_1 \cos p\psi_p + pu_2 \sin p\psi_p \quad (4.75)$$

olduğu biliniyor. Burada  $h'$ ; orijin noktasından  $\overline{XY}$  doğru parçasına inilen dikmenin uzunluğu,  $\psi_p'$ ; bu dikmenin  $x$ -ekseni ile pozitif yönde yaptığı açıdır. O halde (4.75) denklemi (4.74) denklemine yerine yazılırsa,

$$\int_{t_0}^{t_1} [\alpha x' + \beta y', da_2'] = \int_{t_0}^{t_1} h' d\psi_p' \quad (4.76)$$

eşitliği kolayca bulunur. O halde (4.74) ve (4.76) denklemleri yardımıyla

$$\int_{t_0}^{t_1} [\alpha x' + \beta y', da_2'] = \int_{t_0}^{t_1} (h - u_1 \cos p\psi_p + pu_2 \sin p\psi_p) d\psi_p' = \int_{t_0}^{t_1} h' d\psi_p' \quad (4.77)$$

eşitliği yazılabilir.

Son olarak (4.70) eşitliğini bulmak için  $\int_{t_0}^{t_1} [a_2', \alpha dx' + \beta dy']$  integrali hesap edilsin.

Öncelikle  $r' = \alpha x' + \beta y'$  denkleminin her iki tarafının diferensiyeli alınır,

$$dr' = \alpha dx' + \beta dy' \quad (4.78)$$

denklemini elde edilir. (4.78) denkleminde (4.2) denklemini yardımıyla

$$\begin{aligned} dx' &= i(x - q)e^{i\theta_p} d\theta_p, \\ dy' &= i(y - q)e^{i\theta_p} d\theta_p \end{aligned}$$

eşitlikleri kullanılırsa (4.78) denklemini

$$dr' = i(\alpha x + \beta y - q)e^{i\theta_p} d\theta_p$$

şeklinde bulunur. Son denkleminde (4.64) denklemini yerine yazılırsa,

$$dr' = i(r - q)e^{i\theta_p} d\theta_p \quad (4.79)$$

elde edilir. O halde (4.79) denklemini  $\int_{t_0}^{t_1} [a'_2, \alpha dx' + \beta dy']$  integralinde yerine yazılırsa,

$$\int_{t_0}^{t_1} [a'_2, \alpha dx' + \beta dy'] = \int_{t_0}^{t_1} [a'_2, dr'] = \int_{t_0}^{t_1} [a'_2, i(r - q)e^{i\theta_p} d\theta_p]$$

kolayca elde edilir. Burada  $a'_2 = a_2 e^{i\theta_p}$  ve (3.15) denklemini kullanılırsa,

$$\int_{t_0}^{t_1} [a'_2, \alpha dx' + \beta dy'] = \int_{t_0}^{t_1} [a_2, i(r - q)] d\theta_p$$

denklemini elde edilir. Ek olarak (3.15) ve (4.58) denklemleri göz önünde bulundurulursa son eşitlik

$$\int_{t_0}^{t_1} [a'_2, \alpha dx' + \beta dy'] = \int_{t_0}^{t_1} (r_1 \cos p\psi_p - pr_2 \sin p\psi_p - q_1 \cos p\psi_p + pq_2 \sin p\psi_p) d\theta_p$$

eşitliğinden

$$\int_{t_0}^{t_1} [\mathbf{a}'_2, \alpha d\mathbf{x}' + \beta d\mathbf{y}'] = \int_{t_0}^{t_1} (h - q_1 \cos p\psi_p + pq_2 \sin p\psi_p) d\theta_p$$

olarak bulunur.

Dolayısıyla (4.70) denklemi (4.56) denklemi yardımıyla

$$F_Z = \alpha F_X + \beta F_Y + \frac{\delta_p}{2} (c^2 - \alpha\beta d^2) - cL_{XY} \quad (4.80)$$

olarak bulunur. Burada  $L_{XY}$ ,  $X$  ve  $Y$  noktalarının oluşturduğu zarf eğrisinin uzunluğudur.

Şimdi  $X$  ve  $Y$  noktalarının aynı yörünge eğrisinin üzerinde olduğu kabul edilsin. Bu durumda  $F_X = F_Y$  olduğundan  $\alpha + \beta = 1$  olmak üzere (4.80) denklemi

$$F_Z - F_X = \frac{\delta_p}{2} (c^2 - \alpha\beta d^2) + cL_{XY}$$

şeklinde elde edilir. O halde aşağıdaki teorem verilebilir.

**Teorem 4.2.1.** Genelleştirilmiş kompleks düzlemde  $\mathbb{K}_p / \mathbb{K}'_p$  bir-parametrelî düzlemsel hareketi esnasında  $\mathbb{K}_p$  düzleminde sabit  $X$  ve  $Y$  noktaları ve  $\overline{XY}$  doğru parçası üzerinde olmayan bir  $Z$  noktası verilsin. Belirli bir zaman aralığında  $\mathbb{K}_p$  düzleminde verilen sabit  $X$  ve  $Y$  noktaları aynı  $k_X$  yörünge eğrisini çizerken  $Z$  noktası da başka bir  $k_Z$  eğrisini çizer. Bu eğriler arasında kalan alan, genelleştirilmiş kompleks düzlemdeki hareketin dönme açısına,  $X, Y, Z$  noktaları arasındaki uzaklığa ve  $X$  ve  $Y$  noktalarından oluşan zarf eğrisinin uzunluğuna bağlıdır.

Bu teorem genelleştirilmiş kompleks düzlemde doğrusal olmayan üç nokta için *Holditch teoremi* olarak adlandırılır.

Eğer burada özel olarak  $c = 0$  alınırsa (4.80) denklemi

$$F_Z = \lambda F_X + \mu F_Y - \frac{\alpha_p}{2} \lambda \mu d^2 \quad (4.81)$$

olarak indirgenir. Bu formül ise doğrusal üç nokta için alan formülü ile aynıdır. Dolayısıyla (4.80) denklemi (4.81) denkleminin daha genel halidir.





## BÖLÜM 5. GENELLEŞTİRİLMİŞ KOMPLEKS DÜZLEMDE KUTUPSAL ATALET MOMENTİ İÇİN STEINER FORMÜLÜ VE HOLDITCH-TİPİ TEOREMLER

Bu bölüm dördüncü bölüm ile birlikte tezimizin orijinal kısmını oluşturmaktadır. Bu bölümde, ilk olarak  $\mathbb{K}_p$  hareketli genelleştirilmiş kompleks düzlemde verilen sabit bir noktanın  $\mathbb{K}'_p$  sabit genelleştirilmiş kompleks düzlemde çizdiği yörünge eğrisinin sınırladığı bölgenin kutupsal atalet momenti hesaplanmıştır. Daha sonra  $\mathbb{K}_p$  hareketli düzlemde doğrusal üç nokta alınarak bu noktalardan birinin  $\mathbb{K}'_p$  sabit düzlemde çizdiği yörünge eğrisinin sınırladığı bölgenin kutupsal atalet momenti diğer iki noktanın çizdiği yörüngelerin momentleri cinsinden hesap edilmiştir. Böylelikle bu noktaların çizdiği yörünge eğrilerinin sınırladığı bölgelerin kutupsal atalet momentleri arasındaki ilişki Holditch-tipi teorem ile verilmiştir. Son olarak ise  $\mathbb{K}_p$  hareketli düzlemde doğrusal olmayan üç nokta alınarak genelleştirilmiş kompleks düzlemde verilen Holditch-tipi teorem zarf eğrisinin uzunluğu kullanılarak bu noktalar için ispatlanarak genellenmiştir.

### 5.1. Genelleştirilmiş Kompleks Düzlemde Doğrusal Üç Nokta İçin Holditch-Tipi Teorem

Bu bölümde  $\mathbb{K}_p$  hareketli düzlemde sabit olarak verilen doğrusal üç noktanın  $\mathbb{K}'_p$  sabit düzlemde çizdiği yörünge eğrilerinin sınırladığı bölgelerin kutupsal atalet momentleri arasındaki ilişki verilerek Holditch-tipi teorem ispatlanmıştır. Ayrıca Holditch-tipi teorem ile ilgili bazı özel durumlar verilmiştir.

### 5.1.1. Genelleştirilmiş kompleks düzlemde kutupsal atalet momenti

Hareketli ve sabit genelleştirilmiş kompleks düzlemler, sırasıyla,  $\mathbb{K}_p, \mathbb{K}'_p \in \mathcal{C}_p$  şeklinde verilsin.  $\mathcal{C}_p$  genelleştirilmiş kompleks düzlemdeki  $\mathbb{K}_p / \mathbb{K}'_p$  bir-parametrelî düzlemsel hareketi esnasında  $\mathbb{K}'_p$  sabit genelleştirilmiş kompleks düzleminin  $O'$  orijin noktasına göre  $\mathbb{K}_p$  hareketli düzleminin I. bölgesinde verilen sabit bir  $X$  noktasının Steiner anlamında  $d\theta_p$  kütle elementi ile örtülen yörünge eğrisinin, hareketin  $I = [t_0, t_1]$  zaman aralığında kısıtlanmasıyla  $T_X$  kutupsal atalet momenti,

$$T_X = \int_{t_0}^{t_1} |\mathbf{x}'|_p^2 d\theta_p \quad (5.1)$$

ifadesi ile hesaplanır. Genelleştirilmiş kompleks düzlemin I. bölgesinde metrik pozitif tanımlı olduğundan (3.2) denklemi yardımıyla  $\mathbb{K}_p$  hareketli düzlemde verilen sabit bir  $X$  noktasının  $\mathbb{K}'_p$  sabit düzlemde çizdiği yörünge eğrisinin  $T_X$  kutupsal atalet momenti

$$T_X = \int_{t_0}^{t_1} \langle \mathbf{x}', \mathbf{x}' \rangle_p d\theta_p \quad (5.2)$$

şeklinde yazılabilir. Burada (3.17) denkleminde  $\mathbf{x}' = (\mathbf{x} - \mathbf{u})e^{i\theta_p}$  olduğu göz önüne alınırsa (5.2) denklemi

$$T_X = \int_{t_0}^{t_1} \langle (\mathbf{x} - \mathbf{u})e^{i\theta_p}, (\mathbf{x} - \mathbf{u})e^{i\theta_p} \rangle_p d\theta_p \quad (5.3)$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca (3.13) denklemi yardımıyla (5.3) denklemi

$$T_X = \int_{t_0}^{t_1} \langle (\mathbf{x} - \mathbf{u}), (\mathbf{x} - \mathbf{u}) \rangle_p d\theta_p$$

şeklinde elde edilir ve buradan kolaylıkla

$$T_X = \int_{t_0}^{t_1} \left( (x_1 - u_1)^2 - p(x_2 - u_2)^2 \right) d\theta_p$$

olduğu görülür. Son denklemde gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$T_X = \int_{t_0}^{t_1} \left( x_1^2 - px_2^2 - 2x_1u_1 + 2px_2u_2 + u_1^2 - pu_2^2 \right) d\theta_p \quad (5.4)$$

denklemini elde edilir.

Diğer taraftan  $\mathbb{K}_p$  hareketli düzlemde verilen sabit  $X$  noktası hareketli düzlemin başlangıç noktası olarak seçilsin. Bu durumda (5.4) denklemi göz önüne alınırsa hareketli düzlemin başlangıç noktasının hareket boyunca sabit düzlemde çizdiği yörünge eğrisinin sınırladığı bölgenin kutupsal atalet momenti

$$T_O = \int_{t_0}^{t_1} \left( u_1^2 - pu_2^2 \right) d\theta_p \quad (5.5)$$

şeklinde bulunur. O halde (5.5) denklemi (5.4) denkleminde yerine yazılırsa,

$$T_X = T_O + \left( x_1^2 - px_2^2 \right) \delta_p - 2x_1 \int_{t_0}^{t_1} u_1 d\theta_p + 2px_2 \int_{t_0}^{t_1} u_2 d\theta_p \quad (5.6)$$

denklemini elde edilir. (3.25) denkleminde geliştirilmiş kompleks düzlemdeki bir-parametrel düzlemsel hareketin pol noktalarının (doğrularının) koordinatları için

$$q_1 = u_1 + \frac{\dot{u}_2}{\dot{\theta}_p}, \quad pq_2 = pu_2 + \frac{\dot{u}_1}{\dot{\theta}_p}, \quad (p=0 \text{ için } q_2 = q_2(\gamma(t)), \gamma \in \mathbb{R})$$

eşitlikleri yazılabilir. O halde bu pol noktaları (doğruları) (5.6) denkleminde kullanılırsa,

$$T_X = T_O + (x_1^2 - px_2^2) \delta_p - 2x_1 \int_{t_0}^{t_1} \left( q_1 - \frac{du_2}{d\theta_p} \right) d\theta_p + 2x_2 \int_{t_0}^{t_1} \left( pq_2 - \frac{du_1}{d\theta_p} \right) d\theta_p$$

eşitliği elde edilir. Buradan gerekli düzenlemeler yapılırsa son denklem

$$T_X = T_O + (x_1^2 - px_2^2) \delta_p - 2x_1 \left( \int_{t_0}^{t_1} q_1 d\theta_p - \int_{t_0}^{t_1} du_2 \right) + 2x_2 \left( p \int_{t_0}^{t_1} q_2 d\theta_p + \int_{t_0}^{t_1} du_1 \right) \quad (5.7)$$

şeklinde düzenlenir.

(3.31) denkleminde geliştirilmiş kompleks düzlemde  $\mathbb{K}_p / \mathbb{K}'_p$  bir-parametrelî düzlemsel hareketinin Steiner noktasının koordinatları (5.7) denkleminde yerine yazılırsa aşağıdaki teorem verilebilir.

**Teorem 5.1.1.**  $\mathbb{C}_p$  geliştirilmiş kompleks düzlemde  $\mathbb{K}_p / \mathbb{K}'_p$  bir-parametrelî düzlemsel hareket göz önüne alınsın.  $\mathbb{K}_p$  hareketli düzlemde verilen sabit bir  $X$  noktası tarafından  $\mathbb{K}'_p$  sabit düzlemde çizilen yörünge eğrisinin sınırladığı bölgenin Steiner noktası tarafından verilen kutupsal atalet momenti

$$T_X = T_O + \delta_p (x_1^2 - px_2^2 - 2x_1s_1 + 2px_2s_2) \quad (5.8)$$

şeklindedir.

Bu formül geliştirilmiş kompleks düzlemde bir-parametrelî düzlemsel hareket boyunca kutupsal atalet momenti için **Steiner formülü** olarak adlandırılır.  $p$ 'nin özel değerleri için bu formül aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

**Özel Durum 1:**  $p = -1$  için Steiner formülü (5.8) denklemini göz önüne alınırsa,

$$T_X = T_O + \delta_p (x_1^2 + x_2^2 - 2x_1s_1 - 2x_2s_2)$$

şeklinde elde edilir. Bu formül ise bilinen kompleks düzlemde kutupsal atalet moment için Steiner formülüne karşılık gelir [23].

**Özel Durum 2:**  $p = 0$  ise (5.8) denkleminde kutupsal atalet momenti için Steiner formülü

$$T_X = T_O + \delta_p (x_1^2 - 2x_1s_1)$$

olarak elde edilir. Burada Galile düzleminde verilen sabit  $X$  noktası, düzlemin I. bölgesinde alınmıştır. Bu formül ise Galile düzlemindeki kutupsal atalet momenti için Steiner formülüne karşılık gelir.

**Özel Durum 3:**  $p = +1$  olarak alınırsa (5.8) denklemini göz önüne alındığında

$$T_X = T_O + \delta_p (x_1^2 - x_2^2 - 2x_1s_1 + 2x_2s_2)$$

olduğu görülür. Bu ise hiperbolik düzlemin I. bölgesinde alınan bir noktanın çizdiği yörüngünün sınırladığı bölgenin kutupsal atalet momenti için Steiner formülüne karşılık gelir [35].

Şimdi (5.8) denkleminde verilen Steiner noktası cinsinden elde edilen kutupsal atalet momentinde  $T_X$  sabit kabul edilsin. O halde (5.8) denklemini

$$\frac{T_X - T_O}{\delta_p} = x_1^2 - px_2^2 - 2x_1s_1 + 2px_2s_2$$

şeklinde yazılabilir. Son denklemde gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$(x_1 - s_1)^2 - p(x_2 - s_2)^2 = s_1^2 - ps_2^2 + \frac{T_X - T_O}{\delta_p} \quad (5.9)$$

denklemini kolayca elde edilebilir. Eğer (3.5) denklemini göz önüne alınırsa (5.9) denkleminin genelleştirilmiş kompleks düzlemde bir çember belirttiği görülür. O halde aşağıdaki teorem verilebilir.

**Teorem 5.1.2.**  $\mathcal{C}_p$  genelleştirilmiş kompleks düzlemde bir-parametrelili düzlemsel hareket  $\mathbb{K}_p / \mathbb{K}'_p$  olarak verilsin. Hareket boyunca aynı  $T_X$  kutupsal atalet momentine sahip yörüngeleri çizen  $\mathbb{K}_p$  hareketli düzlemdeki sabit bütün  $X$  noktaları sabit düzlemde merkezi Steiner noktası olan bir çember üzerinde bulunurlar.

Genelleştirilmiş kompleks düzlemde (5.9) denklemini ile verilen bu çember  $p < 0$  için merkezi Steiner noktası olan bir elipse karşılık gelir. Özel olarak  $p = -1$  alınırsa bu çember merkezi Steiner noktası olan bilinen Öklid çemberine karşılık gelir [23].  $p = 0$  için (5.9) denklemindeki çember Galile düzlemindeki çembere (**cycle**) karşılık gelir. Galile düzlemindeki bu çember (cycle), Öklid düzleminde bir parabole eşittir. Bu parabolün tepe noktası ise Galile düzlemindeki Steiner doğrusunun üzerinde bulunur.  $p > 0$  için ise (5.9) denkleminde verilen çember denklemini bir hiperbole karşılık gelir. Eğer özel olarak  $p = 1$  seçilirse bu çember Lorentz çemberine karşılık gelir [35].

### 5.1.2. Genelleştirilmiş kompleks düzlemde Holditch-tipi teorem

$\mathcal{C}_p$  genelleştirilmiş kompleks düzlemde  $\mathbb{K}_p / \mathbb{K}'_p$  bir-parametrelili düzlemsel hareketi boyunca  $\mathbb{K}_p$  hareketli düzlemde sabit  $X$  ve  $Y$  noktaları verilsin. Ayrıca bu noktalardan oluşan  $\overline{XY}$  doğru parçası üzerinde sabit bir nokta  $Z$  olsun. Bu durumda (4.18) ve (4.20) denklemlerinden

$$z = \lambda x + \mu y \quad (5.10)$$

ve

$$\mathbf{z}' = \lambda \mathbf{x}' + \mu \mathbf{y}' \quad (5.11)$$

ilişkileri mevcuttur. Burada  $\lambda + \mu = 1$  dir. (5.1) denklemi göz önüne alınırsa  $\mathbb{K}_p$  hareketli düzlemde  $\overline{XY}$  doğru parçası üzerinde verilen sabit  $Z$  noktasının çizdiği yörüngenin sınırladığı bölgenin kutupsal atalet momenti, (5.11) denklemi yardımıyla

$$T_Z = \int_{t_0}^{t_1} \langle \lambda \mathbf{x}' + \mu \mathbf{y}', \lambda \mathbf{x}' + \mu \mathbf{y}' \rangle_p d\theta_p$$

şeklinde yazılabilir. Son denklemde genelleştirilmiş kompleks düzlemde iç çarpımın dağılıma özelliği kullanılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$T_Z = \lambda^2 \int_{t_0}^{t_1} \langle \mathbf{x}', \mathbf{x}' \rangle_p d\theta_p + 2\lambda\mu \int_{t_0}^{t_1} \langle \mathbf{x}', \mathbf{y}' \rangle_p d\theta_p + \mu^2 \int_{t_0}^{t_1} \langle \mathbf{y}', \mathbf{y}' \rangle_p d\theta_p \quad (5.12)$$

denklemini elde edilir.

(5.2) denkleminde  $\mathbb{K}_p$  hareketli düzlemde verilen sabit  $X$  ve  $Y$  noktalarının  $\mathbb{K}_p'$  sabit düzleminde çizdiği yörüngelerin kutupsal atalet momentleri

$$\begin{aligned} T_X &= \int_{t_0}^{t_1} \langle \mathbf{x}', \mathbf{x}' \rangle_p d\theta_p \\ T_Y &= \int_{t_0}^{t_1} \langle \mathbf{y}', \mathbf{y}' \rangle_p d\theta_p \end{aligned} \quad (5.13)$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca  $\mathbb{K}_p / \mathbb{K}_p'$  hareketinin sınırlandırıldığı  $[t_0, t_1]$  zaman aralığında  $X$  ve  $Y$  noktalarının çizdiği yörüngelerin arasında kalan yörünge eğrisinin sınırladığı bölgenin kutupsal atalet momenti

$$T_{XY} = \int_{t_0}^{t_1} \langle \mathbf{x}', \mathbf{y}' \rangle_p d\theta_p \quad (5.14)$$

şeklinde yazılabilir. O halde (5.12) denkleminde (5.13) ve (5.14) denklemleri yerine yazılırsa,

$$T_Z = \lambda^2 T_X + 2\lambda\mu T_{XY} + \mu^2 T_Y \quad (5.15)$$

denklemini elde edilir. Burada  $T_{XY}$  ifadesine genelleştirilmiş kompleks düzlemde bir-parametrelili  $\mathbb{K}_p / \mathbb{K}'_p$  düzlemsel hareketi için **karışık kutupsal atalet momenti** denir.

Karışık kutupsal atalet momentini hesaplamak için (3.17) denkleminde  $X$  ve  $Y$  noktalarının sabit  $\mathbb{K}'_p$  düzlemine göre yer vektörleri için

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= (\mathbf{x} - \mathbf{u}) e^{i\theta_p}, \\ \mathbf{y}' &= (\mathbf{y} - \mathbf{u}) e^{i\theta_p} \end{aligned}$$

olduğu göz önüne alınırsa (5.14) denkleminde

$$T_{XY} = \int_{t_0}^{t_1} \langle (\mathbf{x} - \mathbf{u}) e^{i\theta_p}, (\mathbf{y} - \mathbf{u}) e^{i\theta_p} \rangle_p d\theta_p$$

olduğu görülür. (3.13) denklemini son denklem için kullanılırsa karışık kutupsal atalet momenti,

$$T_{XY} = \int_{t_0}^{t_1} \langle (\mathbf{x} - \mathbf{u}), (\mathbf{y} - \mathbf{u}) \rangle_p d\theta_p$$



denklemleri ile elde edilir. Genelleştirilmiş kompleks düzlemdeki iç çarpım tanımını göz önüne alınırsa ve son denklemlerde gerekli düzenlemeler yapılırsa  $T_{XY}$  karışık kutupsal atalet momenti

$$T_{XY} = \int_{t_0}^{t_1} ((x_1 - u_1)(y_1 - u_1) - p(x_2 - u_2)(y_2 - u_2)) d\theta_p$$

olmak üzere

$$T_{XY} = (x_1 y_1 - p x_2 y_2) \int_{t_0}^{t_1} d\theta_p - (x_1 + y_1) \int_{t_0}^{t_1} u_1 d\theta_p + p(x_2 + y_2) \int_{t_0}^{t_1} u_2 d\theta_p + \int_{t_0}^{t_1} (u_1^2 - p u_2^2) d\theta_p \quad (5.16)$$

şeklinde elde edilir. Son olarak (3.25) denklemindeki genelleştirilmiş kompleks düzlemdeki pol noktaları ve (3.31) denklemindeki Steiner noktası kullanılırsa (5.16) denklemindeki karışık kutupsal atalet momenti,

$$T_{XY} = T_O + \delta_p (x_1 y_1 - p x_2 y_2 - (x_1 + y_1) s_1 + p(x_2 + y_2) s_2) \quad (5.17)$$

olarak elde edilir.

Şimdi burada  $X = Y$  özel hali göz önüne alınsın. O halde (5.17) formülü

$$T_{XX} = T_O + \delta_p (x_1^2 - p x_2^2 - 2x_1 s_1 + 2p x_2 s_2)$$

şeklinde elde edilir. Bu denklem ise (5.8) denklemindeki Steiner noktası cinsinden verilen kutupsal atalet momenti denkleminde aynıdır. Dolayısıyla (5.17) denkleminin (5.8) denkleminin daha genel bir halidir.

Ayrıca (5.17) denkleminden çıkan bir diğer sonuç

$$T_{XY} = T_{YX} \quad (5.18)$$

olmasıdır.

Şimdi  $T_X$  ve  $T_Y$  kutupsal atalet momentleri kullanılarak  $T_{XY}$  karışık kutupsal atalet momentini hesaplınsın. O halde (5.8) ve (5.17) denklemleri dikkate alınırsa,

$$\begin{aligned} T_X - 2T_{XY} + T_Y &= T_O + \delta_p (x_1^2 - px_2^2 - 2x_1s_1 + 2px_2s_2) - 2T_O \\ &\quad - 2\delta_p (x_1y_1 - px_2y_2 - (x_1 + y_1)s_1 + p(x_2 + y_2)s_2) \\ &\quad + T_O + \delta_p (y_1^2 - py_2^2 - 2y_1s_1 + 2py_2s_2) \end{aligned}$$

eşitliği yazılabilir. Son denklemden gerekli işlemler yapırsa,

$$T_X - 2T_{XY} + T_Y = \delta_p (x_1^2 - px_2^2 - 2x_1y_1 + 2px_2y_2 + y_1^2 - py_2^2)$$

denklemini ve son olarak

$$T_X - 2T_{XY} + T_Y = \delta_p \left( (x_1 - y_1)^2 - p(x_2 - y_2)^2 \right) \quad (5.19)$$

denklemini elde edilir.

Genelleştirilmiş kompleks düzlemde I. bölgede verilen sabit  $X$  ve  $Y$  noktaları arasındaki uzaklık  $d$  olarak göz önüne alınırsa (3.4) genelleştirilmiş kompleks düzlemdeki uzaklık tanımından

$$d^2 = (x_1 - y_1)^2 - p(x_2 - y_2)^2$$

eşitliği yazılabilir. Dolayısıyla (5.19) denklemini

$$T_X - 2T_{XY} + T_Y = \delta_p d^2 \quad (5.20)$$

olarak bulunur. O halde (5.20) denklemindeki karışık kutupsal atalet momenti,  $X$  ve  $Y$  noktalarının çizdiği yörünge eğrilerinin sınırladığı bölgelerin kutupsal atalet momentleri cinsinden

$$T_{XY} = \frac{1}{2}(T_X + T_Y) - \frac{\delta_p}{2}d^2 \quad (5.21)$$

şeklinde elde edilir. Son denklem (5.15) denkleminde yerine yazılırsa,

$$T_Z = \lambda T_X + \mu T_Y - \lambda\mu\delta_p d^2 \quad (5.22)$$

eşitliği bulunur. Burada  $\lambda + \mu = 1$  şeklindedir.

Şimdi  $\mathbb{K}_p$  hareketli genelleştirilmiş kompleks düzlemin I. bölgesinde verilen  $X$  ve  $Y$  noktalarının aynı yörünge üzerinde olduğu kabul edilsin. O halde  $T_X = T_Y$  eşitliği yazılabilir. Bu durum göz önüne alındığında (5.22) denklemini  $\lambda + \mu = 1$  olmak üzere

$$T_X - T_Z = \lambda\mu\delta_p d^2 \quad (5.23)$$

şeklinde bulunur. O halde aşağıdaki teorem verilebilir.

**Teorem 5.1.3. (Holditch-Tipi Teorem):**  $\mathcal{C}_p$  genelleştirilmiş kompleks düzlemde  $\mathbb{K}_p / \mathbb{K}'_p$  bir-parametrelî düzlemsel hareketi boyunca  $\mathbb{K}_p$  hareketli düzlemde verilen sabit  $X$  ve  $Y$  noktaları  $\overline{XY}$  doğru parçasını oluştursun. Hareket boyunca  $[t_0, t_1]$  zaman aralığında  $\overline{XY}$  doğru parçasının uç noktaları  $T_X$  kutupsal atalet momentine sahip aynı  $k_X$  eğrisini çizerken  $\overline{XY}$  doğru parçasının üzerinde bu noktalardan farklı olarak verilen bir  $Z$  noktası da  $T_Z$  kutupsal atalet momentine sahip başka bir  $k_Z$  eğrisi çizer. O halde  $\mathcal{C}_p$  genelleştirilmiş kompleks düzlemde  $\mathbb{K}_p / \mathbb{K}'_p$  hareketi boyunca  $T_X$  ve  $T_Z$  kutupsal atalet momentleri arasındaki fark genelleştirilmiş

kompleks düzlem hareketinin  $p$  – dönme açısına ve bu noktaların arasındaki uzaklığa bağlıdır.

$\mathcal{C}_p$  genelleştirilmiş kompleks düzlemde bir-parametrelî düzlemsel hareket için Teorem 5.1.3.’te verilen Holditch-tipi teoremin bir sonucu aşağıdaki gibi verilebilir.

**Sonuç 5.1.4.**  $\mathbb{K}_p$  hareketli genelleştirilmiş kompleks düzlemde sabit  $X$  ve  $Y$  noktalarının oluşturduğu  $\overline{XY}$  doğru parçası üzerinde sabit iki nokta  $Z_1$  ve  $Z_2$  olsun.  $\mathbb{K}_p / \mathbb{K}'_p$  hareketi boyunca sabit düzlemde  $Z_1$  ve  $Z_2$  noktaları birbirinden farklı  $k_{Z_1}$  ve  $k_{Z_2}$  eğrilerini çizerken  $X$  ve  $Y$  noktaları aynı  $k_X$  eğrisini çizsin. Eğer  $k_X$  ve  $k_{Z_1}$  yörünge eğrilerinin sınırladığı bölgelerin kutupsal atalet momentleri arasındaki fark  $T$ ,  $k_X$  ve  $k_{Z_2}$  yörünge eğrilerinin sınırladığı bölgelerin kutupsal atalet momentleri arasındaki fark  $T'$  ise  $T$  ve  $T'$  arasındaki ilişki

$$\frac{T}{T'} = \left[ \frac{|XZ_1|_p}{|XZ_2|_p} \right]^2 \gamma, \quad \gamma = \frac{|XZ_2|_p}{|XZ_1|_p} \frac{|YZ_1|_p}{|YZ_2|_p}$$

şeklindedir.

**İspat:**  $\mathbb{K}_p$  hareketli genelleştirilmiş kompleks düzlemde sabit  $X$  ve  $Y$  noktalarının oluşturduğu  $\overline{XY}$  doğru parçası üzerinde  $Z_1$  ve  $Z_2$  iki sabit nokta olsun. O halde (5.23) denklemi göz önüne alınırsa  $Z_1$  noktasının çizdiği yörünge eğrisinin sınırladığı bölgenin kutupsal atalet momenti  $T_{Z_1}$  için

$$T_{Z_1} = T_X - \delta_p |XZ_1|_p |YZ_1|_p$$

eşitliği yazılabilir. Benzer şekilde  $Z_2$  noktasının çizdiği yörünge kutupsal atalet momenti  $T_{Z_2}$  için

$$T_{Z_2} = T_X - \delta_p \left| \overline{XZ_2} \right|_p \left| \overline{YZ_2} \right|_p$$

denklemleri elde edilir. O halde son iki eşitlikten

$$T = T_X - T_{Z_1} = \delta_p \left| \overline{XZ_1} \right|_p \left| \overline{YZ_1} \right|_p, \quad (5.24)$$

ve

$$T' = T_X - T_{Z_2} = \delta_p \left| \overline{XZ_2} \right|_p \left| \overline{YZ_2} \right|_p \quad (5.25)$$

denklemleri yazılabilir. Dolayısıyla (5.24) ve (5.25) denklemleri kullanılırsa,

$$\frac{T}{T'} = \frac{\left| \overline{XZ_1} \right|_p \left| \overline{YZ_1} \right|_p}{\left| \overline{XZ_2} \right|_p \left| \overline{YZ_2} \right|_p}$$

olarak bulunur. Burada  $\gamma = \frac{\lambda_1 \mu_2}{\lambda_2 \mu_1} = \frac{\left| \overline{XZ_2} \right|_p \left| \overline{YZ_1} \right|_p}{\left| \overline{XZ_1} \right|_p \left| \overline{YZ_2} \right|_p}$  olarak seçilirse son denklemden

$$\frac{T}{T'} = \left[ \frac{\left| \overline{XZ_1} \right|_p}{\left| \overline{XZ_2} \right|_p} \right]^2 \gamma$$

olduğu görülür. Dolayısıyla  $\frac{T}{T'}$  oranı sadece  $X, Y, Z_1$  ve  $Z_2$  noktaları arasındaki uzaklığa bağlıdır.

$\mathbb{C}_p$  genelleştirilmiş kompleks düzlemde Holditch-tipi teoremin bir genellemesi olan teorem aşağıdaki gibi verilebilir.

**Teorem 5.1.5.**  $\mathbb{K}_{p_1}$  ve  $\mathbb{K}_{p_2}$  hareketli genelleştirilmiş iki kompleks düzlem olsun.  $\mathbb{K}'_p$  sabit genelleştirilmiş kompleks düzlem olmak üzere  $\mathbb{K}_{p_1} / \mathbb{K}'_p$  ve  $\mathbb{K}_{p_2} / \mathbb{K}'_p$  hareketleri boyunca eğer  $X_i Y_i$  doğru parçalarının  $X_i$  ve  $Y_i$  ( $i=1,2$ ) noktaları, sırasıyla,  $k_X$  ve  $k_Y$  yörünge eğrilerini çizirse  $X_i$  ve  $Y_i$  noktaları ile doğrusal  $Z_i$  noktaları da  $T_i$  kutupsal atalet momentine sahip  $k_i$  yörünge eğrilerini belirler.  $k_i$  eğrilerinin  $T_i$  kutupsal atalet momentleri arasındaki fark

$$T_1 - T_2 = \delta_p ab (\lambda_2^2 - \lambda_1^2)$$

şeklindedir.

**İspat:**  $\left| \overline{XZ_1} \right|_p = \lambda_1 a$ ,  $\left| \overline{Y_1 Z_1} \right|_p = \lambda_1 b$ ,  $d_1 = \lambda_1 (a+b)$  olmak üzere (5.22)

denkleminde

$$T_1 = \frac{1}{\lambda_1 (a+b)} (\lambda_1 b T_{X_1} + \lambda_1 a T_{Y_1}) - \delta_p \lambda_1^2 ab$$

denklemini bulunur. Burada  $T_{X_1} = T_{X_2} = T_X$  ve  $T_{Y_1} = T_{Y_2} = T_Y$  olduğu göz önüne alınır ve gerekli sadeleştirme yapılırsa,

$$T_1 = \frac{1}{a+b} (b T_X + a T_Y) - \delta_p \lambda_1^2 ab \quad (5.26)$$

eşitliği elde edilir. Benzer şekilde  $\left| \overline{X_2 Z_2} \right|_p = \lambda_2 a$ ,  $\left| \overline{Y_2 Z_2} \right|_p = \lambda_2 b$ ,  $d_2 = \lambda_2 (a+b)$  olmak üzere (5.22) denkleminde

$$T_2 = \frac{1}{\lambda_2 (a+b)} (\lambda_2 b T_{X_2} + \lambda_2 a T_{Y_2}) - \delta_p \lambda_2^2 ab$$

denklemini bulunur. Son denklemde gerekli sadeleştirme yapılır ve  $T_{X_1} = T_{X_2} = T_X$  ve  $T_{Y_1} = T_{Y_2} = T_Y$  olduğu dikkate alınır,

$$T_2 = \frac{1}{a+b}(bT_X + aT_Y) - \delta_p \lambda_2^2 ab \quad (5.27)$$

denklemini bulunur. Buradan (5.26) ve (5.27) denklemleri göz önüne alınır,

$$T_1 - T_2 = \delta_p ab(\lambda_2^2 - \lambda_1^2) \quad (5.28)$$

denklemini elde edilir.

Özel olarak  $\lambda_1 = 0$  alınır (5.28) denklemini

$$T_1 - T_2 = \delta_p \lambda_2^2 ab$$

olarak bulunur. Bu formül (5.23) denkleminin aynısıdır. Dolayısıyla Teorem 5.1.5., genelleştirilmiş kompleks düzlemde Teorem 5.1.3.'te verilen Holditch-tipi teoremin daha genel halidir.

Genelleştirilmiş kompleks düzlemde verilen Holditch-tipi teorem ile ilgili bazı özel durumlar aşağıdaki gibi verilebilir.

### Özel Durumlar:

**Özel Durum 1:**  $X, Y, Z \in \mathbb{K}_p \subset \mathbb{C}_p$  noktalarının  $\mathbb{C}_p$  genelleştirilmiş kompleks düzlemin I. koordinat ekseninde olduğu kabul edilsin. Bu durumda

$$\begin{aligned}
d &= y - x \\
b &= y - z = \lambda d \\
a &= z - x = \mu d \\
a + b &= d, \quad \lambda + \mu = 1
\end{aligned}$$

olduğundan (5.22) denkleminde

$$T_Z = \frac{1}{d}(bT_X + aT_Y) - \delta_p ab \quad (5.29)$$

olarak bulunur. Ek olarak  $T_X = T_Y$  olarak alınırsa (5.29) denklemi

$$T_Z - T_X = \delta_p ab \quad (5.30)$$

olarak elde edilir.

**Özel Durum 2.**  $S = (s_1, s_2)$  Steiner noktası hareketli  $\mathbb{K}_p$  düzleminin başlangıç noktası ( $S(s_1, s_2) = (0, 0)$ ) olarak seçilsin.  $p = 0$  için Galile düzleminde her  $t$  anında Steiner doğrusu olduğundan bu durumda Steiner doğrusu sanal eksenle çakışık olarak ( $S = (0, s_2)$ ) seçilsin.

Bu durumda  $S(0, 0)$  ( $S = (0, s_2)$ ) için (5.8) denklemi göz önüne alınırsa,

$$T_X = T_S + \delta_p (x_1^2 - px_2^2) \quad (5.31)$$

olarak bulunur. Benzer şekilde (5.17) denklemi için de aynı işlem uygulanırsa,

$$T_{XY} = T_S + \delta_p (x_1 y_1 - px_2 y_2) \quad (5.32)$$

olarak elde edilir.



Buna göre (5.31) ve (5.32) denklemleri göz önüne alınırsa  $\delta_p > 0$ ,  $X \neq S$  ve  $X \neq Y$  olmak üzere aşağıdaki yorumlar yapılabilir.

1. (5.31) denklemi göz önüne alınsın. Burada  $\delta_p > 0$  olmak üzere  $T_S > 0$  dır. Ayrıca genelleştirilmiş kompleks düzlemin I. bölgesinde çalışıldığından  $x_1^2 - px_2^2 > 0$  ifadesi geçerlidir. O halde

$$T_X > T_S$$

yazılabilir. Bu ifadeye  $S$  Steiner noktasının  $T_S$  yörünge eğrisinin sınırladığı bölgenin kutupsal atalet momentinin **minimallik özelliği** denir.

2. Şimdi (5.31) ve (5.32) denklemleri kullanılarak  $T_X$ ,  $T_Y$  ve  $T_{XY}$  kutupsal atalet momentleri arasındaki ilişki yukarıda bahsedilen özel şartlar altında göz önüne alınsın.

$$T_X - T_{XY} + T_Y = T_S + \delta_p (x_1^2 - px_2^2) - 2T_S - 2\delta_p (x_1y_1 - px_2y_2) + T_S + \delta_p (y_1^2 - py_2^2)$$

denkleminde gerekli işlemler yapılırsa,

$$T_X - 2T_{XY} + T_Y = \delta_p (x_1^2 - 2x_1y_1 + y_1^2 - p(x_2^2 - 2x_2y_2 + y_2^2))$$

olmak üzere

$$T_X - 2T_{XY} + T_Y = \delta_p ((x_1 - y_1)^2 - p(x_2 - y_2)^2)$$

denklemi elde edilir. (3.4) denkleminde verilen genelleştirilmiş kompleks düzlemde I. bölgedeki uzaklık tanımından son denklem

$$T_X - 2T_{XY} + T_Y = \delta_p d^2$$

olarak elde edilir. Burada  $X$  ve  $Y$  noktaları arasındaki uzaklık  $d$  olarak alınmıştır. O halde  $\delta_p > 0$ ,  $d^2 > 0$  olduğundan

$$T_X - 2T_{XY} + T_Y > 0$$

olarak bulunur.

3. Şimdi  $T_X T_Y - T_{XY}^2$  ifadesi (5.31) ve (5.32) denklemleri kullanılarak hesap edilsin. O halde

$$T_X T_Y - T_{XY}^2 = (T_S + \delta_p (x_1^2 - px_2^2))(T_S + \delta_p (y_1^2 - py_2^2)) - (T_S + \delta_p (x_1 y_1 - px_2 y_2))^2$$

denkleminde gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$T_X T_Y - T_{XY}^2 = T_S \delta_p (x_1^2 - 2x_1 y_1 + y_1^2 - px_2^2 + px_2 y_2 - py_2^2) + \delta_p^2 (x_1^2 y_1^2 - px_1^2 y_2^2 - px_2^2 y_1^2 + p^2 x_2^2 y_2^2 - x_1^2 y_1^2 + 2px_1 y_1 x_2 y_2 - p^2 x_2^2 y_2^2)$$

elde edilir. Burada (3.4) denkleminde verilen genelleştirilmiş kompleks düzlemde I. bölgedeki uzaklık tanımından son denkleminde gerekli sadeleştirmeler yapılırsa,

$$T_X T_Y - T_{XY}^2 = T_S \delta_p d^2 - p \delta_p^2 (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2$$

bulunur. O halde aşağıdaki yorumlar yapılabilir:

a.  $p < 0$  veya  $p = 0$  için  $T_X T_Y - T_{XY}^2 > 0$ ,

b.  $p > 0$  için  $T_X T_Y - T_{XY}^2 \in \mathbb{R}$ .

4. Son olarak  $(T_X - T_S)(T_Y - T_S) - (T_{XY} - T_S)^2$  denklemi (5.31) ve (5.32) denklemleri kullanılarak hesaplanırsa,

$$\begin{aligned} (T_X - T_S)(T_Y - T_S) - (T_{XY} - T_S)^2 &= \delta_p (x_1^2 - px_2^2) \delta_p (y_1^2 - py_2^2) - \delta_p^4 (x_1 y_1 - px_2 y_2)^2 \\ &= -p \delta_p^2 (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 \end{aligned}$$

bulunur. O halde aşağıdaki yorumlar yapılabilir.

- $p < 0$  için  $(T_X - T_S)(T_Y - T_S) - (T_{XY} - T_S)^2 \geq 0$ ,
- $p = 0$  için  $(T_X - T_S)(T_Y - T_S) - (T_{XY} - T_S)^2 = 0$ ,
- $p > 0$  için  $(T_X - T_S)(T_Y - T_S) - (T_{XY} - T_S)^2 \leq 0$ .

Buradan görülür ki;  $p = 0$  için bu ifade daima sıfırdır.  $p < 0$  ve  $p > 0$  için ise eşitlik durumu  $X, Y$  ve  $S$  noktalarının doğrusal olmasıyla mümkündür.

## 5.2. Genelleştirilmiş Kompleks Düzlemde Doğrusal Olmayan Üç Nokta İçin Holditch-Tipi Teorem

$\mathbb{C}_p$  genelleştirilmiş kompleks düzlemde  $\mathbb{K}_p$  ve  $\mathbb{K}_p'$ , sırasıyla, hareketli ve sabit genelleştirilmiş kompleks düzlemler olmak üzere  $\mathbb{K}_p / \mathbb{K}_p'$  bir-parametrelî düzlemsel hareketi boyunca sabit  $d$  uzunluklu bir doğru parçasının  $X$  ve  $Y$  uç noktaları hareketli  $k_X$  ve  $k_Y$  açık yörüngelerini çizsin. (4.59) denkleminde biliniyor ki;  $\mathbb{K}_p$  hareketli düzlemin  $\mathbf{a}_3$  normal vektörü yardımıyla  $\frac{\mathbf{y} - \mathbf{x}}{d} = \mathbf{a}_1$  vektörü ile birlikte  $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$  ortonormal çatısı için  $\mathbf{t}'_1, \mathbf{t}'_2$  koordinat vektörleri ile  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$  vektörleri arasındaki ilişki

$$\begin{aligned} \mathbf{a}'_1 &= p \sin p \psi'_p \mathbf{t}'_1 + \cos p \psi'_p \mathbf{t}'_2 \\ \mathbf{a}'_2 &= \cos p \psi'_p \mathbf{t}'_1 + \sin p \psi'_p \mathbf{t}'_2 \end{aligned} \quad (5.33)$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca  $\alpha + \beta = 1$  olmak üzere (4.64) ve (4.67) denklemlerinden

$$\mathbf{r}' = \alpha \mathbf{x}' + \beta \mathbf{y}' \quad (5.34)$$

ve

$$\mathbf{z}' = \alpha \mathbf{x}' + \beta \mathbf{y}' + c \mathbf{a}'_2 \quad (5.35)$$

ilişkileri mevcuttur. O halde (5.2) denklemi yardımıyla  $Z$  noktasının çizdiği yörüngenin sınırladığı bölgenin kutupsal atalet momenti

$$T_Z = \int_{t_0}^{t_1} \langle \mathbf{z}', \mathbf{z}' \rangle_p d\theta_p \quad (5.36)$$

şeklinde hesap edilir. Buradan (5.35) ve (5.36) denklemleri yardımıyla

$$T_Z = \int_{t_0}^{t_1} \langle \alpha \mathbf{x}' + \beta \mathbf{y}' + c \mathbf{a}'_2, \alpha \mathbf{x}' + \beta \mathbf{y}' + c \mathbf{a}'_2 \rangle_p d\theta_p$$

ifadesi elde edilir.  $\mathcal{C}_p$  genelleştirilmiş kompleks düzlemde iç çarpımın dağılma özelliği kullanılırsa son denklem

$$\begin{aligned} T_Z &= \alpha^2 \int_{t_0}^{t_1} \langle \mathbf{x}', \mathbf{x}' \rangle_p d\theta_p + 2\alpha\beta \int_{t_0}^{t_1} \langle \mathbf{x}', \mathbf{y}' \rangle_p d\theta_p + \beta^2 \int_{t_0}^{t_1} \langle \mathbf{y}', \mathbf{y}' \rangle_p d\theta_p + c^2 \int_{t_0}^{t_1} \langle \mathbf{a}'_2, \mathbf{a}'_2 \rangle_p d\theta_p \\ &+ 2c \int_{t_0}^{t_1} \langle \alpha \mathbf{x}' + \beta \mathbf{y}', \mathbf{a}'_2 \rangle_p d\theta_p \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Eğer burada (5.13) ve (5.14) denklemleri dikkate alınırsa son denklem

$$T_Z = \alpha^2 T_X + \beta^2 T_Y + 2\alpha\beta T_{XY} + c^2 \int_{t_0}^{t_1} \langle \mathbf{a}'_2, \mathbf{a}'_2 \rangle_p d\theta_p + 2c \int_{t_0}^{t_1} \langle \alpha \mathbf{x}' + \beta \mathbf{y}', \mathbf{a}'_2 \rangle_p d\theta_p$$

olarak bulunur. Son olarak (5.21) denklemini göz önüne alınırsa hareketli düzlemde verilen sabit  $Z$  noktasının sabit düzlemde çizdiği yörünge eğrisinin sınırladığı bölgenin kutupsal atalet momenti  $T_Z$

$$T_Z = \alpha T_X + \beta T_Y - \alpha\beta\delta_p d^2 + c^2 \int_{t_0}^{t_1} \langle \mathbf{a}'_2, \mathbf{a}'_2 \rangle_p d\theta_p + 2c \int_{t_0}^{t_1} \langle \alpha \mathbf{x}' + \beta \mathbf{y}', \mathbf{a}'_2 \rangle_p d\theta_p \quad (5.37)$$

olarak hesap edilir. Şimdi (5.37) denklemindeki integraller hesap edilsin. O halde (5.33) denklemindeki

$$\mathbf{a}'_2 = \cos p \psi'_p \mathbf{t}'_1 + \sin p \psi'_p \mathbf{t}'_2$$

eşitliğinden  $\int_{t_0}^{t_1} \langle \mathbf{a}'_2, \mathbf{a}'_2 \rangle_p d\theta_p$  integrali için

$$\int_{t_0}^{t_1} \langle \mathbf{a}'_2, \mathbf{a}'_2 \rangle_p d\theta_p = \int_{t_0}^{t_1} (\cos^2 p \psi'_p - p \sin^2 p \psi'_p) d\theta_p \quad (5.38)$$

denklemini elde edilir. Genelleştirilmiş kompleks düzlemin I. bölgesinde

$$\cos^2 p \psi'_p - p \sin^2 p \psi'_p = 1$$

olduğu göz önüne alınırsa (5.38) denklemini

$$\int_{t_0}^{t_1} \langle \mathbf{a}'_2, \mathbf{a}'_2 \rangle_p d\theta_p = \int_{t_0}^{t_1} d\theta_p = \delta_p \quad (5.39)$$

şeklinde bulunur. Şimdi (5.37) denklemindeki  $\int_{t_0}^{t_1} \langle \alpha \mathbf{x}' + \beta \mathbf{y}', \mathbf{a}'_2 \rangle_p d\theta_p$  integrali hesap

edilsin. Bunun için (3.17), (4.58) ve (4.59) denklemlerinden

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= (\mathbf{x} - \mathbf{u})e^{i\theta_p}, \\ \mathbf{y}' &= (\mathbf{y} - \mathbf{u})e^{i\theta_p}, \\ \mathbf{a}'_2 &= \mathbf{a}_2 e^{i\theta_p} \end{aligned}$$

eşitlikleri dikkate alınırsa  $\int_{t_0}^{t_1} \langle \alpha \mathbf{x}' + \beta \mathbf{y}', \mathbf{a}'_2 \rangle_p d\theta_p$  integrali için

$$\int_{t_0}^{t_1} \langle \alpha \mathbf{x}' + \beta \mathbf{y}', \mathbf{a}'_2 \rangle_p d\theta_p = \int_{t_0}^{t_1} \langle \alpha (\mathbf{x} - \mathbf{u})e^{i\theta_p} + \beta (\mathbf{y} - \mathbf{u})e^{i\theta_p}, \mathbf{a}_2 e^{i\theta_p} \rangle_p d\theta_p$$

denklemini elde edilir. Burada (3.13) denklemini kullanılırsa son denklem

$$\int_{t_0}^{t_1} \langle \alpha \mathbf{x}' + \beta \mathbf{y}', \mathbf{a}'_2 \rangle_p d\theta_p = \int_{t_0}^{t_1} \langle \alpha (\mathbf{x} - \mathbf{u}) + \beta (\mathbf{y} - \mathbf{u}), \mathbf{a}_2 \rangle_p d\theta_p$$

olarak yazılabilir.  $\alpha + \beta = 1$  olmak üzere gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\int_{t_0}^{t_1} \langle \alpha \mathbf{x}' + \beta \mathbf{y}', \mathbf{a}'_2 \rangle_p d\theta_p = \int_{t_0}^{t_1} \langle \alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y} - \mathbf{u}, \mathbf{a}_2 \rangle_p d\theta_p$$

eşitliği yazılabilir. Burada (4.64) denkleminde  $\mathbf{r} = \alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}$  olduğu dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \langle \alpha \mathbf{x}' + \beta \mathbf{y}', \mathbf{a}'_2 \rangle_p d\theta_p &= \int_{t_0}^{t_1} \langle \mathbf{r} - \mathbf{u}, \mathbf{a}_2 \rangle_p d\theta_p \\ &= \int_{t_0}^{t_1} ((r_1 - u_1) \cos p\psi_p - p(r_2 - u_2) \sin p\psi_p) d\theta_p \\ &= \int_{t_0}^{t_1} (r_1 \cos p\psi_p - pr_2 \sin p\psi_p - u_1 \cos p\psi_p + pu_2 \sin p\psi_p) d\theta_p \end{aligned}$$

eşitliği yazılabilir. Burada  $R(r_1, r_2)$  noktası  $Z$  noktasının  $\overline{XY}$  doğru parçasına dik izdüşüm noktasıdır. O halde (4.46) denklemini yardımıyla son denklem

$$\int_{t_0}^{t_1} \langle \alpha \mathbf{x}' + \beta \mathbf{y}', \mathbf{a}'_2 \rangle_p d\theta_p = \int_{t_0}^{t_1} (h - u_1 \cos p\psi_p + pu_2 \sin p\psi_p) d\theta_p \quad (5.40)$$

şeklinde yazılabilir. Diğer taraftan (4.53) denkleminde

$$h' = h - u_1 \cos p\psi_p + pu_2 \sin p\psi_p$$

olduğu göz önüne alınırsa (5.40) denklemi

$$\int_{t_0}^{t_1} \langle \alpha \mathbf{x}' + \beta \mathbf{y}', d\mathbf{a}'_2 \rangle_p = \int_{t_0}^{t_1} h' d\psi'_p \quad (5.41)$$

olarak bulunur. Böylece (5.37) denkleminde verilen hareketli düzlemdeki sabit  $Z$  noktasının sabit düzlemde çizdiği yörünge eğrisinin sınırladığı bölgenin kutupsal atalet momenti  $T_Z$ ,

$$T_Z = \alpha T_X + \beta T_Y - \alpha\beta\delta_p d^2 + c(c\delta_p + 2L_{XY}) \quad (5.42)$$

eşitliği ile elde edilir. Burada  $L_{XY}$ ,  $X$  ve  $Y$  noktalarının oluşturduğu zarf eğrisinin uzunluğudur.

Şimdi  $X$  ve  $Y$  noktalarının aynı yörünge eğrisinin üzerinde olduğu kabul edilsin. Bu durumda  $T_X = T_Y$  olduğundan  $\alpha + \beta = 1$  olmak üzere (5.42) denklemi

$$T_X - T_Z = \alpha\beta d^2 \delta_p - c(c\delta_p + 2L_{XY})$$

şeklinde elde edilebilir. O halde aşağıdaki teorem verilebilir.

**Teorem 5.1.6.**  $\mathbb{C}_p$  genelleştirilmiş kompleks düzlemde  $\mathbb{K}_p / \mathbb{K}'_p$  bir-parametrelili düzlemsel hareketi esnasında  $\mathbb{K}_p$  düzleminde sabit  $X$  ve  $Y$  noktaları ve  $\overline{XY}$  doğru

parçası üzerinde olmayan bir  $Z$  noktası verilsin. Belirli bir zaman aralığında  $\mathbb{K}_p$  düzleminde verilen sabit  $X$  ve  $Y$  noktaları aynı  $k_x$  yörünge eğrisini çizerken  $Z$  noktası da başka bir  $k_z$  eğrisini çizer. Bu eğriler arasında kalan bölgenin kutupsal atalet momenti, genelleştirilmiş kompleks düzlemdeki hareketin dönme açısına,  $X, Y, Z$  noktaları arasındaki uzaklığa ve  $X$  ve  $Y$  noktalarının oluşturduğu zarf eğrisinin uzunluğuna bağlıdır.

Bu teorem genelleştirilmiş kompleks düzlemde doğrusal olmayan üç nokta için ***Holditch-tipi teorem*** olarak adlandırılır.

Eğer burada özel olarak  $c = 0$  alınırsa (5.42) denklemi

$$T_z = \alpha T_x + \beta T_y - \alpha\beta\delta_p d^2 \quad (5.43)$$

olarak indirgenir. Bu formül ise doğrusal üç nokta için kutupsal atalet momenti formülü ile aynıdır. Dolayısıyla (5.42) denklemi (5.43) denkleminin daha genel halidir.



## BÖLÜM 6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Mekaniğin bir alt dalı olan kinematik, bir noktanın veya nokta sisteminin zamana bağlı olarak meydana getirdiği yer değiştirmelerini inceleyen bir bilim dalıdır. Dolayısıyla, kuvvet ve kütle kavramları, kinematik hesaplamalarında hiçbir rol oynamaz. Kinematik ile ilgili günümüze kadar pek çok çalışma yapılmıştır [1-9, 12-28, 30, 32-36, 43-60] ve halen yapılmaya devam edilmektedir. Kinematik ile ilgili yapılmış bu çalışmaların temeli, 19. yüzyılda 1-parametrelilik kapalı düzlemsel hareket için Holditch tarafından ifade edilen "Klasik Holditch Teoremi" [17] ve Steiner tarafından verilen "Steiner Alan Formülü"nü [18] bulduğu bu iki çalışmaya dayanmaktadır. Ek olarak, bu örneklerle dair pek çok çalışma, geometrinin çeşitli dallarında da bilime önemli katkılar sağlayacak düzeydeki birçok kaynağı içeren "Geometrie und ihre Anwendungen" (Geometri ve Uygulamaları) [43] adlı kitapta bulunmaktadır.

Kompleks düzlemde bir-parametrelilik düzlemsel hareket için hareketli düzlem üzerinde verilen bir noktanın çizdiği yörünge eğrisinin sınırladığı bölgenin alanı Steiner noktası cinsinden Müller [27] tarafından ve yine bu hareket için Holditch teoremi Müller tarafından [23]'de verilmiştir. Hiperbolik düzlemde ise Holditch teoremi Yüce ve Kuruoğlu tarafından [28]'de çalışılmıştır. Galile düzleminde henüz literatürde bu teoremle ilgili bir çalışma mevcut değildir. Dolayısıyla ön çalışma olarak öncelikle Galile düzlemindeki bir-parametrelilik düzlemsel hareket için Holditch teoremi ispatlanmıştır. Bu tezin orijinal kısmı olan dördüncü bölümde; yukarıda bahsedilen çalışmalar göz önüne alınarak kompleks, Galile ve hiperbolik düzlemlerin bir genellemesi olan genelleştirilmiş kompleks düzlemde bir-parametrelilik düzlemsel hareket altında hareketli düzlemde verilen sabit bir noktanın sabit düzlemde çizdiği yörünge eğrisinin sınırladığı bölgenin alanı hesaplanmıştır. Ayrıca hareketli düzlemde doğrusal üç nokta alınarak bu noktaların sabit düzlemde çizdiği yörüngelerin alanları arasındaki ilişkiyi veren Holditch teoremi verilmiştir. Ek olarak

genelleştirilmiş kompleks düzlemde verilen Holditch teoremi ile ilgili bazı teorem ve sonuçlar elde edilmiştir. Daha sonra yukarıda bahsedilen Holditch teoremini genelleyerek doğrusal olmayan üç nokta için bu teorem ispat edilmiştir.

Atalet momenti katı cisimlerin, kendi rotasyon hareketlerindeki değişime karşı eylemsizliğini gösterir. Duran bir cismin eylemsizliği cismin kütlesi olduğu gibi, dönen bir cismin eylemsizliği de atalet momentidir. Bir cismin atalet momenti onun dönmeye karşı direncinin bir ölçümüdür. Örneğin; dönen büyük bir tekerleği durdurmak veya dönmeye başlatmak küçük tekerlekten daha zordur. Matematiksel olarak bu olayın büyük tekerleğin daha büyük atalet momentine sahip olması nedeniyle olduğu gösterilebilir.

Bu tezin bir diğer orijinal kısmı olan beşinci bölümde; genelleştirilmiş kompleks düzlemdeki bir-parametrelili düzlemsel hareket altında hareketli düzlemde verilen sabit bir noktanın çizdiği yörünge eğrisinin sınırladığı bölgenin kutupsal atalet momenti hesaplanmıştır. Daha sonra doğrusal üç noktanın sabit düzlemde çizdiği yörüngelerin kutupsal atalet momentleri arasındaki ilişkiyi veren Holditch-tipi teorem verilmiştir. Ek olarak, Holditch-tipi teoremle ilgili önemli teorem ve sonuçlar elde edilmiştir. Son olarak ise, genelleştirilmiş kompleks düzlemde Holditch-tipi teoremi genellenerek bu teorem doğrusal olmayan üç nokta için ispatlanmıştır.

Bu tezden yola çıkılarak genelleştirilmiş kompleks düzlemde bir parametrelili düzlemsel hareketler için bir noktanın çizdiği yörünge eğrisinin sınırladığı bölgenin alanı homotetik hareketler için çalışılabilir. Ayrıca yine bu düzlemde homotetik hareketler için Holditch teoremi ispatlanabilir. Ve son olarak yine bu tez yardımıyla çizilen yörünge eğrisinin sınırladığı bölgenin kutupsal atalet momenti homotetik hareketler için hesaplanarak Holditch-tipi teoremler elde edilebilir. Dolayısıyla bu tezin özellikle kinematik ve hareket geometrisi çalışan matematik ve fizik alanlarında bütün bilim adamları için faydalı olacağı düşünülmektedir.

## KAYNAKLAR

- [1] Ampère, A. M., Essai sur la Philosophie des Sciences, ou, Exposition Analytique d'une Classification Naturelle de Toutes les Connaissances Humaines, Paris, Bachelier, 1834.
- [2] Müller, H. R., Kinematik Dersleri, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, Ankara, 1963.
- [3] Ergin, A. A., Lorentz Düzleminde Kinematik Geometri, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, Ankara, 1989.
- [4] Görmez, İ., Lorentz Düzleminde Hareket Geometrisi, Gazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Ankara, 1990.
- [5] Ergüt, M., Aydın, A. P., Bildik, N., The Geometry of the Canonical System and One-Parameter Motions in 2-dimensional Lorentzian Space, The Journal of Fırat University, 3(1): 113-122, 1988.
- [6] Aydın, A. P., Ergüt, M., Bildik, N., The Steiner Formula for the Complex Closed Exponential Motion in  $E^2$ , The Journal of Fırat University, 3(2): 33-40, 1988.
- [7] Bildik, N., Ergüt, M., Aydın, A. P., The Steiner Field Formula for the Explicit Exponential Motion in Lorentzian Space  $L^2$ , F. Ü. Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi, 6(2): 82-91, 1994.
- [8] Yüce, S., Kuruoğlu, N., One Parameter Plane Hyperbolic Motions, Adv. Appl. Clifford Algebr., 18(2): 279-285, 2008.
- [9] Akar, M., Yüce, S., One-Parameter Planar Motion in the Galilean Plane, Int. Electron. J. Geom., 6(1): 79-88, 2013.
- [10] Yaglom, I. M., Complex Numbers in Geometry, New York, Academic Press, 1968.
- [11] Harkin, A. A., Harkin, J. B., Geometry of Generalized Complex Numbers, Math. Mag., 77(2): 118-129, 2014.
- [12] Erişir, T., Güngör, M. A., Tosun, M., A Generalised Method for Centres of Trajectories in Kinematics, Journal of Advanced Research in Applied Mathematics (JARAM), 2016.

- [13] Erişir, T., Güngör, M. A., Tosun, M., A New Generalization of the Steiner Formula and the Holditch Theorem, *Adv. Appl. Clifford Algebr.*, 26(1): 97-113, 2016.
- [14] Erişir, T., Güngör, M. A., Tosun, M., The Holditch-Type Theorem for the Polar Moment of Inertia of the Orbit Curve in the Generalized Complex Plane, *Adv. Appl. Clifford Algebr.*, DOI 10.1007/s00006-016-0642-5, 2016.
- [15] Erişir, T., Güngör, M. A., Ersoy, S., On the Construction of Generalised Bobillier Formula, 4th International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications, Athens-Greece, 2015.
- [16] Gürses, N. B., Yüce, S., One-Parameter Planar Motions in Generalized Complex Number Plane  $C_j$ , *Adv. Appl. Clifford Algebr.*, 25(4): 889-903, 2015.
- [17] Holditch, H., Geometrical Theorem, *Q. J. Pure Appl. Math.*, 2, 38, 1858.
- [18] Steiner, J., *Gesammelte Werke II*, Berlin, 1881.
- [19] Blaschke, W., Müller, H. R., *Ebene Kinematik*, Verlag Oldenbourg, München, 1956.
- [20] Hering, L., Sätze vom Holditch-Typ für Ebene Kurven, *Elem. Math.*, 38, 39-49, 1983.
- [21] Pottman, H., Holditch-Sicheln, *Arc. Math.*, 44, 373-378, 1985.
- [22] Pottman, H., Zum Satz von Holditch in der Euklidischen Ebene, *Elem. Math.*, 41, 1-6, 1986.
- [23] Müller, H. R., Über Trägheitsmomente bei Steinerscher Massenbelegung, *Abh. Braunsch. Wiss. Ges.*, 29, 115-119, 1978.
- [24] Tutar, A., Kuruoğlu, N., The Steiner Formula and The Holditch Theorem for the Homothetic Motions on the Planar Kinematics, *Mech. Mach. Theory*, 34(1): 1-6, 1999.
- [25] Kuruoğlu, N., Yüce, S., The Generalized Holditch Theorem for the Homothetic Motions on the Planar Kinematics, *Czech Math. J.*, 54(2): 337-340, 2004.
- [26] Yüce, S., Kuruoğlu, N., Holditch-type Theorems Under the Closed Planar Homothetic Motions, *Ital. J. Pure Appl. Math.*, 21, 105-108, 2007.
- [27] Müller, H. R., Verallgemeinerung einer Formel von Steiner, *Abh.d. Brschw. Wiss. Ges. Bd.*, 107-113, 1978.
- [28] Yüce, S., Kuruoğlu, N., Holditch Theorem and Steiner Formula for the Planar Hyperbolic Motions, *Adv. Appl. Clifford Algebr.*, 19(1): 155-160, 2009.

- [29] Hacısalihoğlu, H. H., Yüksek Boyutlu Uzaylarda Dönüşümler ve Geometrilere, İ.Ü. Temel Bilimler Fakültesi Yayınları, Malatya, 1980.
- [30] Spivak, M., Calculus on Manifolds,, New York, W. A. Benjamin, 1965.
- [31] Yüce, S., Düldül, M.,Kuruoğlu, N., On the Generalizations of the Polar Inertia Momentum of the Closed Curves Obtained Kinematically, Studia Sci. Math. Hungar., 42(1): 73-78, 2005.
- [32] Ersoy, S., Tosun, M. The Euler-Savary Formula for One-Parameter Planar Hyperbolic Motion, arXiv,1001.0138[math.DG], 2009.
- [33] S. Yüce, On the Area of Enveloping Curves in the Lorentzian Plane, Soochow Journal of Mathematics, 32(4): 533-540, 2006.
- [34] Yüce, S., Kuruoğlu, N., Cauchy Formulas for Enveloping Curves in the Lorentzian Plane and Lorentzian Kinematics, Results Math., 54(1): 199-206, 2009.
- [35] Yüce, S., Kuruoğlu, N., On Polar Moments of Inertia of Lorentzian circles, Journal of Applied Sciences, 6(2): 383-386, 2006.
- [36] Fjelstad, P., Extending Special Relativity via the Perplex Numbers, Amer. J. Phys, 54(5): 416-422, 1986.
- [37] Alfsmann, D., On families of  $2N$  dimensional Hypercomplex Algebras Suitable for Digital Signal Processing, Proc. EURASIP 14th European Signal Processing Conference (EUSIPCO 2006), Italy, 2006.
- [38] Catoni, F., Cannata, R., V. Catoni ve P. Zampetti, Hyperbolic Trigonometry in Two Dimensional Space-time Geometry, N. Cim. B 118(5): 475-491, 2003.
- [39] Klein, F., Vorlesungen über nicht-Euklidische Geometrie, Springer, Berlin, 1928.
- [40] Klein, F., Über die sogenannte nicht-Euklidische Geometrie, Gesammelte Math. Ann., 4(4), 573-625, 1871.
- [41] Yaglom, I. M., A Simple non-Euclidean Geometry and its Physical Basis, New York, Springer-Verlag, 1979.
- [42] Hacısalihoğlu, H. H., On the Geometry of Motion of Lorentzian Plane, Proc. of Assiut First International Conference of Mathematics and Statistics., Assiut, Egypt, 1990.
- [43] Düldül, M., Kompleks Düzlemde 1-Parametrelili Hareketler ve Holditch Teoremi, Yüksek Lisans Tezi, Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Samsun, 2000.
- [44] Giering, O., Hoschek, J. Geometrie und ihre Anwendungen, Carl Hanser Verlag, Munich, 1994.

- [45] Sivridağ, A. İ., Keleş, S., On The Closed Planar Homothetic Motions and the Polar Inertia Momentums of Orbits, *Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Serie A.*, 41, 99-104, 1992.
- [46] Düldül, M., Kuruoğlu, N., Computation of Polar Moments of Inertia with Holditch Type Theorems, *Applied Mathematics E-Notes*, 8, 271-278, 2008.
- [47] Düldül, M., Yüce, S., Kuruoğlu, N., The Polar Moment of Inertia of the Enveloping Curve, *Novi Sad Journal of Mathematics*, 38(2), 1-4, 2008.
- [48] Hacısalihoğlu, H. H., On the Geometry of Motion in the Euclidean n-space, *Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Serie A.*, 10, 95-108, 1974.
- [49] Akar, M., Düzlemsel Homotetik Hareketler Altında Kapalı Yörünge Eğrisinin Kutupsal Atalet Momenti için Holditch-Tipi Teoremler, *Doktora Tezi, Yıldız Teknik Üniversitesi, İstanbul*, 2012.
- [50] Yüce, S., Homotetik Hareketler Altında Holditch Teoreminin iki Kapalı Eğriye ve bir Açık Eğriye (Holditch Hilalleri) Genelleştirilmesi, *Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Doktora Tezi, Samsun*, 2004.
- [51] Tutar, A., Şener, Ö., The Steiner Formula and the Polar Moment of Inertia for the Closed Planar Homothetic Motions in Complex Plane, *Adv. Math. Phys.*, <http://dx.doi.org/10.1155/2015/978294>, 2015.
- [52] Kılıç, E., Keleş, S., On Holditch's Theorem and Polar Inertia Momentum, *Communications Fac. Sci. Univ., Ank, Serie A.*, 43, 41-47, 1994.
- [53] Özdemir, M., Hacısalihoğlu, H. H., Düzlemsel Kinematikte Homotetik Hareketler için Steiner Formülü, *Gazi Üniv. Fen-Ed. Fak. Dergisi*, 1(1): 83-97, 1984.
- [54] Yüce, S., Kuruoğlu, N., The Holditch Sickles for the Open Homothetic Motions, *Applied Mathematics E-Notes*, 7, 175-178, 2007.
- [55] Sivridağ, A. İ., Keleş, S., On The Closed Planar Homothetic Motions and the Areas of Orbits, *Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Serie A.*, 41, 93-98 1992.
- [56] Kuruoğlu, N., Düldül, M., Tutar, A., Generalization of Steiner formula for the homothetic motions on the planar kinematics, *Appl. Math. and Mech-(English Ed.)*, 24(8): 945-949, 2003.
- [57] Yüce, S., Kuruoğlu, N., The Steiner Formulas for the Open Planar Homothetic Motions, *Applied Mathematics E-Notes*, 6, 26-32, 2006.
- [58] Yüce, S., Kuruoğlu, N., Generalization of the Holditch Theorem for the Planar Homothetic Motions, *Applications of Mathematics*, 50(2): 87-91, 2005.

- [59] Yüce, S., Kuruoğlu, N., Steiner Formula and Holditch type Theorems for Homothetic Lorentzian Motions, Iranian Journal of Science and Technology Transaction A, Science, 31, 207-212, 2007.
- [60] Yüce, S., Kuruoğlu, N., Holditch-type theorems for the planar Lorentzian motions, Int. J. Pure. Appl. Math., 19(4): 467-471, 2004.



## ÖZGEÇMİŞ

Tülay ERİŞİR, 25.05.1986 tarihinde İstanbul'un Eyüp ilçesinde doğdu. İlköğretimi Eyüp Serdar Aksun İlköğretim Okulunda, lise öğretimini Eyüp Refhan Tümer Yabancı Dil Ağırlıklı Lisesinde tamamladı. 2005 yılında Atatürk Üniversitesi Erzincan Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde başladığı lisans eğitimini 2009 yılında tamamladı. Aynı yıl Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Geometri Anabilim Dalında yüksek lisans eğitimine başladı. 2010 yılında Erzincan Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümüne (ÖYP) Araştırma Görevlisi olarak atandı. 2011 yılında yüksek lisans eğitimini bitirdi. Aynı yıl Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Geometri Anabilim dalında doktora eğitimine başladı ve ÖYP kapsamında Sakarya Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümüne Araştırma Görevlisi olarak atandı. Evli ve bir kızı olan Tülay ERİŞİR halen Sakarya Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde Araştırma Görevlisi olarak görevini sürdürmektedir.