T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İKİ GENELLEŞTİRİLMİŞ KUADRATİK MATRİSTEN TÜRETİLEN BAZI MATRİSLERİN SPEKTRUMLARI

DOKTORA TEZİ

Tuğba PETİK

Enstitü Anabilim Dalı	:	**MATEMATİK**
Enstitü Bilim Dalı	:	**MATEMATİĞİN TEMELLERİ VE MATEMATİK LOJİK**
Tez Danışmanı	:	**Prof. Dr. Halim ÖZDEMİR**

Temmuz 2016

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İKİ GENELLEŞTİRİLMİŞ KUADRATİK MATRİSTEN TÜRETİLEN BAZI MATRİSLERİN SPEKTRUMLARI

DOKTORA TEZİ

Tuğba PETİK

Enstitü Anabilim Dalı	:	**MATEMATİK**
Enstitü Bilim Dalı	:	**MATEMATİĞİN TEMELLERİ VE MATEMATİK LOJİK**

Bu tez 15/07/2016 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr.
Ahmet Yaşar ÖZBAN
Jüri Başkanı

Prof. Dr.
Halim ÖZDEMİR
Üye

Prof. Dr.
Halis AYGÜN
Üye

Yrd. Doç. Dr.
Bahar DEMİRTÜRK BİTİM
Üye

Yrd. Doç. Dr.
Murat SARDUVAN
Üye

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

Tuğba PETİK

15/07/2016

ÖNSÖZ

Lisansüstü öğrenimim süresince bilgi ve tecrübelerinden faydalandığım Sayın Prof. Dr. Halim ÖZDEMİR’e en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Doktora öğrenimim süresince 2211-Yurt İçi Doktora Burs Programı kapsamında sağladığı destekten ötürü TÜBİTAK Bilim İnsanı Destekleme Daire Başkanlığı birimine teşekkür ederim.

Özellikle, eğitimim ve öğrenimim süresince maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen aileme sonsuz sevgi ve minnettarlığımı belirtmek isterim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{C}$	: Karmaşık sayılar kümesi
$\mathbb{C}^*$	: Sıfırdan farklı karmaşık sayılar kümesi
$\mathbb{C}_{m\times n}$	: mxn boyutlu karmaşık matrisler kümesi
$\mathbb{C}_n$	: $n\times n$ boyutlu karmaşık matrisler kümesi
$\mathbb{C}^n$	: n boyutlu karmaşık vektörler kümesi
$\mathbb{R}^n$	: n boyutlu reel vektörler kümesi
I_n	: $n\times n$ boyutlu birim matris
0	: Uygun boyutlu sıfır matrisi
i	: $\sqrt{-1}$
M^T	: M matrisinin devriği
$\det(M)$	: M matrisinin determinantı
$p(M)$	: M matrisinin p polinomu altındaki resmi
$\in$	: Elemanıdır
$\notin$	: Elemanı değildir
$\subset$	: Alt kümesidir
$U \setminus V$	: U fark V kümesi
$U \cup V$	: U bileşim V kümesi
$(a,\ b)$	: a , b sıralı ikilisi
$\Rightarrow$	: Gerektirir
$\sum$	: Toplam
bkz.	: Bakınız
vs.	: Vesaire
■	: İspat sonu

ÖZET

Anahtar Kelimeler: idempotent matris, kuadratik matris, genelleştirilmiş kuadratik matris, spektrum, köşegenleştirme.

İlk bölümde, çalışmanın konusu ve kapsamı hakkında kısaca bazı bilgiler verilmekte ve spektrum kavramının önemine vurgu yapılmaktadır. Ayrıca çalışmada ele alınan matris sınıfları ile ilgili literatürde mevcut olan bazı çalışmalardan bahsedilmektedir. Çalışma boyunca kullanılacak olan bazı temel kavramlar ve özellikler ikinci bölümde verilmektedir.

Çalışmanın üçüncü bölümünde, A ve B matrisleri sırasıyla $\{\alpha, \beta\}$ ve $\{\gamma, \delta\}$-kuadratik matrisler olmak üzere, $\alpha \neq \beta$, $\gamma \neq \delta$, $AB \neq BA$ ve $A+B$ matrisinin köşegenleştirilebilir olması varsayımı altında, $A+B$ matrisinin spektrumu ile A ve B matrislerinden türetilen bazı matrislerin spektrumları arasında bazı ilişkiler ortaya konulmaktadır. Sonraki bölümde, önceki bölümde kuadratik matrisler için ele alınan problemler, bazı özel koşullar altında bir genelleştirilmiş kuadratik matris çiftine genişletilmektedir.

Üçüncü ve dördüncü bölümlerde spektrumlarla ilgili olarak ortaya konulan sonuçların, özel tipli matrislerin lineer bileşimlerinin karakterizasyonlarına dair bazı uygulamaları ve elde edilen sonuçları açıklayıcı nitelikteki bazı örnekler beşinci bölümde verilmektedir. Son bölüm, çalışma ile ilgili bazı tartışma ve önerilerden oluşmaktadır.

ON THE SPECTRA OF SOME MATRICES DERIVED FROM TWO GENERALIZED QUADRATIC MATRICES

SUMMARY

Keywords: idempotent matrix, quadratic matrix, generalized quadratic matrix, spectrum, diagonalization.

In the first chapter, it is given some brief information about the subject and scope of the study and it is emphasized the importance of the concept of the spectrum. Also, it is mentioned from some studies existing in the literature related to matrix classes discussed in the study. Some fundamental concepts and properties which will be used throughout the study are given in the second chapter.

In the third chapter of the study, some relations between the spectrum of the matrix $A+B$ and the spectra of some matrices derived from the matrices A and B are established under the assumptions that $\alpha \neq \beta$, $\gamma \neq \delta$, $AB \neq BA$, and $A+B$ is diagonalizable, where A and B are an $\{\alpha, \beta\}$ and $\{\gamma, \delta\}$-quadratic matrix, respectively. In the next chapter, it is extended the problems discussed for quadratic matrices in the preceding chapter to a pair of generalized quadratic matrices under some particular conditions.

Some applications on the characterizations of the linear combinations of special types of matrices of the results established which are related to the spectra in third and fourth chapters and some examples illustrating the results obtained are given in the fifth chapter. The last chapter consists of some discussions and suggestions related to the study.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

1.1. Çalışmanın İçeriği ve Önemi

Matematiksel ve fiziksel bilimlerin hemen hepsinde ortaya çıkan birçok problem bazı özel tipli matris sınıfları ile temsil edilebilmektedir. Örneğin, idempotent, involutif ve tripotent matrisli kuadratik formlar İstatistik Teorisinde (bkz.: [1]), involutif matris tipinde olan Dirac spin ve Pauli spin matrisleri Kuantum Mekaniğinde (bkz.: [2] ve [3]), idempotent matrisler Atom ve Molekül Fiziğinde (bkz.: [4]) ve Hilbert uzaylarındaki operatörlerin temsilinde (bkz.: [5]) kullanılmaktadır. Öte yandan, matematiksel ve fiziksel alanlarda ortaya çıkan birçok problemin çözülmesinde, karşılık gelen matrislerin özdeğerleri kullanılmaktadır. Örneğin, İstatistik Teorisinde güven elipsoidlerinin yarı eksen uzunlukları (bkz.: [6]), lineer diferansiyel denklem sistemlerinde sistemlerin çözüm kümeleri (bkz.: [7]), Kuantum Mekaniğinde ortaya çıkan enerji seviyeleri (bkz.: [8]) vs., karşılık gelen matrislerin özdeğerleri ile belirlenir. Yine, M, $n\times n$ boyutlu bir matris ve $\mathbf{x}$, $n\times 1$ boyutlu bir vektör olmak üzere, $M\mathbf{x}$, $\mathbf{x}$'in bir katı olacak şekildeki sıfırdan farklı $\mathbf{x}$ vektörleri, bir matrisin veya bir lineer dönüşümün yapısını analiz etmede büyük rol oynarlar. Çünkü böyle vektörler, reel simetrik matrisli bir kuadratik formu, bir ya da daha fazla geometrik kısıta göre maksimumlaştırma veya minimumlaştırma probleminde karşımıza çıkarlar. Örneğin, M, reel simetrik bir matris ve $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$ olmak üzere $\mathbf{x}^T\mathbf{x}=1$ kısıtı altında $\mathbf{x}^T M\mathbf{x}$ kuadratik formunu maksimumlaştırma problemi bu tip bir problemdir. Böyle bir kısıtlı optimizasyon probleminde, öncelikle $L=\mathbf{x}^T M\mathbf{x}-\lambda\mathbf{x}^T\mathbf{x}$ yardımcı fonksiyonu oluşturulur. Bu fonksiyonun bir ekstramumunun mevcut olması için, türevinin sıfıra eşit olması, yani

$$\mathbf{0}=2(M\mathbf{x}-\lambda\mathbf{x})$$

olması gerekir. Böylece, $\mathbf{x}^T\mathbf{x}=1$ olmak üzere bir $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$ vektörünün, $\mathbf{x}^T M\mathbf{x}$ kuadratik formunun bir ekstramumu olması için, $\mathbf{x}$ vektörünün $M\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}$ eşitliğini sağlaması gerektiği görülür (bkz.: [9]). Bu ise bir özdeğer-özvektör probleminden başka bir şey değildir.

Çalışmada ele alınan matrisler genel olarak kuadratik ve genelleştirilmiş kuadratik matrisler olup, kuadratik matrisler sınıfı idempotent ve involutif matrisler sınıflarını, genelleştirilmiş kuadratik matrisler sınıfı da tripotent ve kuadratik matrisler sınıflarını kapsar.

Bu tip matrisler, uygulamalı bilimlerde ve özellikle İstatistik Teorisinde oynadıkları rol açısından önemlidirler. Örneğin, M matrisi, $\alpha\neq\beta$ olmak üzere bir P idempotent matrisine göre bir genelleştirilmiş $\{\alpha,\ \beta\}$-kuadratik matris olsun. Bu durumda [10]'daki Teorem 1.1'e göre

$$M=\alpha X+\beta Y,\quad X+Y=P\qquad \text{ve}\qquad XY=YX=\mathbf{0} \tag{1.1}$$

olacak şekilde X ve Y idempotent matrisleri vardır. Eğer X ve Y ayrıca reel ve simetrik ise, bu durumda M matrisi iki *ayrık* (yani, karşılıklı olarak çarpımları sıfıra eşit olan) reel ve simetrik idempotent matrisin bir lineer bileşimi olarak yazılabilir. Bununla birlikte iyi bilinir ki, C matrisi bir $n\times n$ boyutlu reel simetrik matris ve $\mathbf{x}$, $N_n(\mathbf{0},\ I_n)$ çok değişkenli normal dağılımına sahip $n\times 1$ boyutlu bir reel rasgele vektör ise, bu durumda $\mathbf{x}^T C\mathbf{x}$ kuadratik formunun bir *ki-kare* rasgele değişkeni olarak dağılması için gerek ve yeter koşul C matrisinin bir idempotent olmasıdır (bkz.: [11]). Dolayısıyla (1.1) eşitlikleri göz önüne alınarak $\mathbf{x}^T M\mathbf{x}$ kuadratik formunun (rasgele değişkeninin) iki tane bağımsız *ki-kare* rasgele değişkeninin bir lineer bileşimi olarak dağıldığı görülür.

1.2. Literatür Çalışması

Son yıllarda kuadratik ve genelleştirilmiş kuadratik matrislerle ilgili olarak pek çok çalışmaya rastlamak mümkündür. Örneğin Wang, sonlu tane kuadratik matrisin bir çarpımı olarak ifade edilebilen karmaşık matrisleri karakterize etme problemi üzerinde çalışmıştır [12]. Yine, Wang, her karmaşık matrisin dört tane kuadratik matrisin bir çarpımı olduğunu ve eğer matris tersinir ise istenilen kuadratik matris sayısının üçe indirgenebileceğini göstermiştir [13]. Aleksiejczyk ve Smoktunowicz, kuadratik matrislerin Moore-Penrose tersi ve singüler değerleri gibi pek çok özelliğini karakterize etmişlerdir [14]. Daha sonra Farebrother ve Trenkler, kuadratik matris kavramını genelleştirilmiş kuadratik matrislere genişleterek, bu tip matrislerin Moore-Penrose ve grup tersini çalışmışlardır [15]. Bu çalışmadan esinlenen Deng, genelleştirilmiş kuadratik matrisleri operatörlerle temsil edip iki genelleştirilmiş kuadratik operatörün toplamının tersinirliği ile ilgili açık ifadeler vermiştir [16].

Kuadratik veya genelleştirilmiş kuadratik matrislerin lineer bileşimlerinin karakterizasyonu ile ilgili olarak da son zamanlarda yaygın bir şekilde çalışılmaktadır. Örneğin, 2015 yılında Uç ve diğerleri, iki kuadratik matrisin lineer bileşimlerinin ne zaman yine bir kuadratik matris olacağı ile ilgili tüm durumları karakterize etmişlerdir [17]. Daha sonra, Petik ve diğerleri, iki genelleştirilmiş kuadratik matrisin lineer bileşimlerinin yine bir genelleştirilmiş kuadratik matris olması için gerek ve yeter koşulları, matrisler üzerinde cebirsel işlemler kullanarak araştırmışlardır [10]. Söz konusu çalışma, [17]'deki çalışmayı kapsayan bir çalışma olmuştur. Öte yandan Uç ve diğerleri tarafından yapılan [17]'deki çalışmada ispatlandığı üzere, o çalışmadaki sonuçlar Baksalary ve Baksalary tarafından yapılan [18]'deki, Özdemir ve Sarduvan tarafından yapılan [19]'daki, Sarduvan ve Özdemir tarafından yapılan [20]'deki çalışmaların pek çok sonucunu kapsar. Dolayısıyla, Petik ve diğerleri tarafından yapılan [10]'daki çalışma, özel tipli matrislerin lineer bileşimleri ile ilgili olarak yukarıda bahsedilen çalışmaların tamamını kapsayan bir çalışma olmuştur. Fakat, [17]'de Uç ve diğerleri ve [10]'da Petik ve diğerleri tarafından yapılan çalışmaların ikisi de idempotent ve/veya involutif matrislerin bir lineer bileşiminin tripotentliğini karakterize etmeye izin vermez. Bu problemin çözümünü de içermesi adına Uç ve diğerleri tarafından yapılan yeni bir çalışmada, iki kuadratik matrisin lineer bileşimlerinin bir genelleştirilmiş kuadratik matris olması için gerek ve yeter koşulların kümesi araştırılmıştır ve söz konusu çalışma, özel tipli matrislerin lineer bileşimlerinin karakterizasyonu ile ilgili olarak bugüne kadar yapılmış olan pek çok çalışmayı kapsayan bir çalışma olmuştur [21].

Yine, literatürde özel tipli matrislerin spektrumları ile ilgili çalışmalara da rastlamak mümkündür. Örneğin, 2008 yılında Benítez ve Rakočević, iki altuzay arasındaki esas açı ile yakından ilişkili olan CS (Cosine-Sine) ayrışımı vasıtasıyla iki ortogonal projeksiyonun bir lineer bileşiminin spektrumunu araştırmışlardır [22]. Aynı yazarlar, $\mathbb{C}^{*}-$cebirinde iki projeksiyonun bir lineer bileşiminin spektrumunu da çalışmışlardır [23]. Daha sonra Liu ve Benítez, ortogonal projektörler için [22]'deki çalışmada elde edilen bazı sonuçları, matrisler üzerindeki simetriklik şartını kaldırarak, iki idempotent matris çifti için genişletmişler ve iki idempotent matrise bağlı olan bazı matrislerin spektrumlarını daha detaylı olarak incelemişlerdir [24].

Bu çalışmada ise, $\alpha \neq \beta$ olmak üzere bir $\{\alpha, \beta\}$-kuadratik $M \in \mathbb{C}_n$ matrisi için $M = (\alpha - \beta)X + \beta I_n$ olacak şekilde bir X idempotent matrisinin mevcut olduğu gösterilip, [24]'te Liu ve Benítez tarafından yapılan çalışma, iki kuadratik matris çiftine genişletilmiştir. Daha sonra da, farklı bir yöntem kullanılarak, ele alınan kuadratik matris çifti, matrisler üzerindeki bazı koşullar altında genelleştirilmiş kuadratik matris çiftine taşınıp, [24] ve [25]'deki sonuçları kapsayan bazı sonuçlar elde edilmiştir.

BÖLÜM 2. BAZI TEMEL KAVRAMLAR VE ÖZELLİKLER

Bu bölümde, sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı tanımlar ve teoremler (ispatsız olarak) verilmektedir.

2.1. Bazı Temel Matris Tipleri

Tanım 2.1. Bir $M_1 \in \mathbb{C}_n$ matrisi için, $M_1 M_2 = M_2 M_1 = I_n$ olacak şekilde bir $M_2 \in \mathbb{C}_n$ matrisi varsa, M_1 matrisine bir *tersinir matris*, M_2 matrisine de, M_1 *matrisinin tersi* denir ve $M_2 = M_1^{-1}$ ile gösterilir [26].

Tez boyunca, $i.$ satır ve $j.$ sütundaki elemanı m_{ij} sayısı olan bir $M \in \mathbb{C}_{m\times n}$ matrisi $M = [m_{ij}]$ ile gösterilecektir.

Tanım 2.2. Bir kare matrisin köşegeninin solunda ve aşağısında yer alan tüm elemanları sıfır ise, bu matrise bir *üst üçgensel matris* denir. Bir $M \in \mathbb{C}_n$ üst üçgensel matrisinin genel biçimi

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & \cdots & m_{1n} \\ 0 & m_{22} & m_{23} & \cdots & m_{2n} \\ 0 & 0 & m_{33} & \cdots & m_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & m_{nn} \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Benzer şekilde, bir kare matrisin köşegeninin sağında ve üstünde yer alan tüm elemanları sıfır ise, bu matrise bir *alt üçgensel matris* denir. Bir $M \in \mathbb{C}_n$ alt üçgensel matrisinin genel biçimi

$$\begin{bmatrix} m_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{21} & m_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ m_{n1} & m_{n2} & m_{n3} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Daha genel olarak, bir $M \in \mathbb{C}_n$ matrisine, eğer $j < i = 1,\ldots,n$ için $m_{ij} = 0$ ise bir üst üçgensel matris, $j > i = 1,\ldots,n$ için $m_{ij} = 0$ ise bir alt üçgensel matris denir [27].

Tanım 2.3. Bir $D = [d_{ij}] \in \mathbb{C}_n$ matrisi, $i \neq j$ için $d_{ij} = 0$ koşulunu sağlıyorsa, D matrisine bir *köşegen matris* denir. D köşegen matrisi, $d_i = d_{ii}$ olmak üzere, genellikle $\operatorname{diag}(d_1,\ldots,d_n)$ ile gösterilir [9].

Tanım 2.4. Bir $D \in \mathbb{C}_n$ köşegen matrisinin bütün köşegen elemanları birbirine eşit ise, yani $\alpha \in \mathbb{C}$ olmak üzere $D = \alpha I_n$ ise, D matrisine bir *skaler matris* denir [9].

Tanım 2.5. Bir $M \in \mathbb{C}_{m\times n}$ matrisinin bazı satır ve/veya sütunlarının silinmesi ile elde edilen matrise M matrisinin bir *alt matrisi* denir [27].

Tanım 2.6. Bir matris, satırları veya sütunları arasına yatay veya dikey çizgiler çizilerek alt matrislere parçalanabilir. Bu durumda matrise bir *parçalanmış matris* ve alt matrislere de *bloklar* denir. Bir $M \in \mathbb{C}_{m\times n}$ parçalanmış matrisinin genel biçimi

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & \cdots & M_{1c} \\ M_{21} & M_{22} & \cdots & M_{2c} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ M_{k1} & M_{k2} & \cdots & M_{kc} \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Burada, M_{ij} $(i=1,\ldots,k;\ j=1,\ldots,c)$; $m_1,\ldots,m_k$ ve $n_1,\ldots,n_c$ sayıları $m_1+\cdots+m_k=m$ ve $n_1+\cdots+n_c=n$ olacak şekildeki pozitif tamsayılar olmak üzere $m_i\times n_j$ boyutlu bir matristir. Eğer

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & \cdots & M_{1c} \\ M_{21} & M_{22} & \cdots & M_{2c} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ M_{k1} & M_{k2} & \cdots & M_{kc} \end{bmatrix}$$

matrisi bir parçalanmış matris ise, i. satırdaki $M_{i1},\ldots,M_{ic}$ alt matrislerinin her biri aynı sayıda satır içerir ve benzer şekilde j. sütundaki $M_{1j},\ldots,M_{kj}$ alt matrislerinin her biri aynı sayıda sütun içerir. Bir parçalanmış matriste blokların her birini, görünen blokların satırlarını ve sütunlarını işaret ederek tanımlamak gelenek haline gelmiştir. Böylece M_{ij} alt matrisi,

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & \cdots & M_{1c} \\ M_{21} & M_{22} & \cdots & M_{2c} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ M_{k1} & M_{k2} & \cdots & M_{kc} \end{bmatrix}$$

parçalanmış matrisinin $i, j-$*bloğu* olarak tanımlanır. $k=c$ olmak üzere $i=j$ ise, M_{ij} alt matrisine M matrisinin bir *köşegen bloğu* denir [27].

Tez boyunca $[M_{ij}]$ ile, $i, j-$bloğu uygun boyutlu M_{ij} matrisi olan $m\times n$ boyutlu bir parçalanmış matris temsil edilecektir. Ayrıca, parçalanmış matris ifadesi yerine zaman zaman *blok matris* ifadesi kullanılacaktır.

Tanım 2.7. $M_{ii}\in\mathbb{C}_{n_i}$ $(i=1,\ldots,k)$ ve $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$ olmak üzere

$$M=\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & \cdots & M_{1k} \\ \mathbf{0} & M_{22} & M_{23} & \cdots & M_{2k} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & M_{33} & \cdots & M_{3k} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & & M_{kk} \end{bmatrix}$$

şeklindeki köşegen bloklarının aşağısındaki tüm blokları sıfır matrisi olan bir $M\in\mathbb{C}_n$ matrisine bir *blok üst üçgensel matris* denir. Bir matrise, devriği bir blok üst üçgensel matris ise, bir *blok alt üçgensel matris* denir. Blok üst üçgensel veya blok alt üçgensel matrisler kısaca *blok üçgensel matrisler* olarak adlandırılırlar [9].

Tanım 2.8. $M_{ii}\in\mathbb{C}_{n_i}$ ($i=1,\ldots,k$) ve $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$ olmak üzere

$$M=\begin{bmatrix} M_{11} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & M_{kk} \end{bmatrix}$$

şeklindeki bir $M\in\mathbb{C}_n$ matrisine bir *blok köşegen matris* denir. Böyle bir matrisi $M=M_{11}\oplus\cdots\oplus M_{kk}=\bigoplus_{i=1}^{k} M_{ii}$ olarak yazmak gelenek haline gelmiştir. Buna, $M_{11},\ldots,M_{kk}$ *matrislerinin direkt toplamı* denir [9].

2.2. Bir Matrisin Rankı, Sıfırlığı ve İndeksi

Tanım 2.9. Aşağıdaki özellikleri sağlayan bir matrise, *satır indirgenmiş eşolon biçimdedir* denir.

i) Tüm elemanları sıfır olmayan herhangi bir satırda, sıfırdan farklı ilk eleman 1'dir (bu eleman bir 1 *baş elemanı* olarak adlandırılır).
ii) 1 baş elemanını içeren herhangi bir sütundaki diğer tüm elemanlar sıfırdır.

iii) Sıfırdan farklı eleman içeren herhangi iki satırda, daha büyük numaralı satırın 1 baş elemanı daha sağda bulunur.

iv) Sadece sıfır elemanlarından ibaret olan herhangi bir satır, sıfırdan farklı eleman içeren diğer satırlardan daha aşağıdadır [26].

Tanım 2.10. Bir $M \in \mathbb{C}_{m\times n}$ matrisinin *rankı*, M matrisinin satır indirgenmiş eşolon biçiminde bütün elemanları sıfır olmayan satırların sayısıdır ve $\text{rank}(M)$ ile gösterilir [26].

Tanım 2.11. Bir $M \in \mathbb{C}_{m\times n}$ matrisi için $\mathcal{R}(M) = \left\{Mx : x \in \mathbb{C}^n\right\} \subset \mathbb{C}^m$ ve $\mathcal{R}(M^T) = \left\{M^T y : y \in \mathbb{C}^m\right\} \subset \mathbb{C}^n$ kümelerine sırasıyla M matrisinin *sütun uzayı* ve *satır uzayı* denir [28].

Tanım 2.12. Bir $M \in \mathbb{C}_{m\times n}$ matrisi için $\mathcal{N}(M) = \left\{x \in \mathbb{C}^n : Mx = \mathbf{0}\right\} \subset \mathbb{C}^n$ kümesine M matrisinin *sıfır uzayı* denir [28].

Teorem 2.13. Bir $M \in \mathbb{C}_{m\times n}$ matrisinin sütun uzayının boyutu, satır uzayının boyutu ve rankı birbirine eşittir [26].

Tanım 2.14. Bir $M \in \mathbb{C}_{m\times n}$ matrisinin sıfır uzayının boyutuna M *matrisinin sıfırlığı* denir ve $\text{sıfırlık}(M)$ ile gösterilir [29].

Tanım 2.15. Bir $M \in \mathbb{C}_n$ matrisinin *indeksi* $\text{rank}(M^k) = \text{rank}(M^{k+1})$ olacak şekildeki en küçük negatif olmayan k tamsayısıdır [28].

2.3. Matrislerle İlgili Bazı Spektral Karakterizasyonlar

Tanım 2.16. $M \in \mathbb{C}_n$ verilmiş olsun. Eğer bir λ skaleri ve sıfırdan farklı bir $\mathbf{x}$ vektörü

$$M\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$$

denklemini sağlıyorsa, λ skalerine M matrisinin bir *özdeğeri* ve $\mathbf{x}$ vektörüne de M matrisinin λ özdeğeri ile ilişkili bir *özvektörü* denir [9].

Tanım 2.17. Bir $M \in \mathbb{C}_n$ matrisinin tüm özdeğerlerinin kümesine, M matrisinin *spektrumu* denir ve $\sigma(M)$ ile gösterilir [9].

Tanım 2.18. Bir $M \in \mathbb{C}_n$ matrisinin *karakteristik polinomu*, $p_M(t) = \det(tI_n - M)$ olarak tanımlanır. $p_M(t) = 0$ denklemine de $M \in \mathbb{C}_n$ matrisinin *karakteristik denklemi* denir [9].

Bir matrisin karakteristik denkleminin köklerinin, o matrisin özdeğerlerine eşit olduğuna dikkat etmek gerekir.

Tanım 2.19. $M \in \mathbb{C}_n$ ve $\sigma(M) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ olmak üzere, M matrisinin karakteristik polinomu $p_M(t) = (\lambda_1 - t)^{n_1} \cdots (\lambda_k - t)^{n_k}$, $(\sum_{i=1}^{k} n_i = n)$ olsun.

i) Bu polinomdaki n_i tamsayısına λ_i *özdeğerinin cebirsel katlılığı* denir ve $\lambda \in \sigma(M)$ için λ 'nın cebirsel katlılığı $\text{cebkat}_A(\lambda)$ ile gösterilir.

ii) $\lambda \in \sigma(M)$ olmak üzere $\mathcal{N}(\lambda I_n - M)$ sıfır uzayının boyutuna, yani sıfırlık$(\lambda I_n - M)$ sayısına da λ *özdeğerinin geometrik katlılığı* denir ve $\lambda \in \sigma(M)$ için λ 'nın geometrik katlılığı $\text{geokat}_A(\lambda)$ ile gösterilir [28].

Tanım 2.20. λ, bir $M \in \mathbb{C}_n$ matrisinin bir özdeğeri olsun. λ özdeğerine, cebirsel katlılığı 1 ise, *basittir* denir [9].

Tanım 2.21. Bir $M \in \mathbb{C}_n$ matrisinin bir λ *özdeğerinin indeksi*, $\lambda I_n - M$ matrisinin indeksi olarak tanımlanır ve $\text{indeks}(\lambda)$ ile gösterilir [28].

Teorem 2.22. (Spektral Dönüşüm Teoremi) Her $M \in \mathbb{C}_n$ matrisi ve her p polinomu için $\sigma\left(p(M)\right) = \left\{p(\lambda) \in \mathbb{C} : \ \lambda \in \sigma(M)\right\}$'dir [30].

Teorem 2.23. $M \in \mathbb{C}_n$ ve $\lambda, \ \mu \in \mathbb{C}$ verilmiş olsun. Bu durumda, $\lambda \in \sigma(M)$ olması için gerek ve yeter koşul $\lambda + \mu \in \sigma(M + \mu I_n)$ olmasıdır [9].

Teorem 2.24. $M_1, M_2 \in \mathbb{C}_n$ verilmiş olsun. $M_1 M_2 = M_2 M_1$ olması durumunda $\sigma(M_1 + M_2) \subset \sigma(M_1) + \sigma(M_2)$ ve $\sigma(M_1 M_2) \subset \sigma(M_1)\sigma(M_2)$'dir. Burada $Z_1, \ Z_2 \subset \mathbb{C}$ olmak üzere, iki kümenin toplamı $Z_1 + Z_2 = \left\{z_1 + z_2 : \ z_1 \in Z_1, \ z_2 \in Z_2\right\}$, iki kümenin çarpımı da $Z_1 Z_2 = \left\{z_1 z_2 : \ z_1 \in Z_1, \ z_2 \in Z_2\right\}$ anlamındadır [9].

Genel olarak, $\Gamma \subset \mathbb{C}$ olmak üzere, $\Gamma + \Gamma \neq 2\Gamma$ ve $\Gamma\Gamma \neq \Gamma^2$ olduğuna dikkat etmek gerekir. Burada, Γ^2'nin elemanları Γ'nın her bir elemanının karesinden ibarettir.

Teorem 2.25. Bir $M \in \mathbb{C}_n$ matrisi, $M_{ij} \in \mathbb{C}_{n_i \times n_j}$ ($i, j = 1, \ldots, k$) olmak üzere,

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & \cdots & M_{1k} \\ M_{21} & M_{22} & \cdots & M_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{k1} & M_{k2} & \cdots & M_{kk} \end{bmatrix}$$

şeklinde parçalanmış olsun. M matrisinin bir blok üst üçgensel veya blok alt üçgensel matris olduğunu kabul edelim. Bu durumda, λ skalerinin M matrisinin bir özdeğeri olması için gerek ve yeter koşul λ skalerinin $M_{11}, \ldots, M_{kk}$ köşegen bloklarının en az birinin bir özdeğeri olmasıdır veya denk olarak M matrisinin spektrumunun $M_{11},\ldots,M_{kk}$ matrislerinin spektrumlarının bileşimine eşit olmasıdır [27].

Blok köşegen matrisler aynı zamanda birer blok üçgensel matris olduklarından, yukarıdaki teorem blok köşegen matrisler için de geçerlidir [27].

Sonuç 2.26. $M=[m_{ij}]\in\mathbb{C}_n$ matrisi bir üst veya alt üçgensel matris olsun. Bu durumda λ skalerinin M matrisinin bir özdeğeri olması için gerek ve yeter koşul λ skalerinin $m_{11},\ldots,m_{nn}$ köşegen elemanlarının bir ya da daha fazlasına eşit olması veya denk olarak M matrisinin spektrumunun M matrisinin köşegeni üzerindeki farklı skalerlerden oluşmasıdır [27].

Bir köşegen matris aynı zamanda bir üçgensel matris olduğundan, yukarıdaki sonuç köşegen matrisler (dolayısıyla skaler matrisler) için de geçerlidir [27].

2.4. Minimal Polinom, Benzerlik, Köşegenleştirme ve Eşzamanlı Olarak Köşegenleştirme

Teorem 2.27. $M\in\mathbb{C}_n$ verilmiş olsun. t yerine M matrisi yazıldığında sıfır matrisini veren en küçük dereceli bir tek $q_M(t)$ monik (en yüksek dereceli teriminin katsayısı 1 olan) polinomu vardır. Bu polinomun derecesi en fazla n olabilir. Eğer $p(t)$; $p(M)=\mathbf{0}$ olacak şekildeki herhangi bir polinom ise, $q_M(t)$ polinomu $p(t)$ polinomunu böler [31].

Tanım 2.28. $M\in\mathbb{C}_n$ verilmiş olsun. t yerine M matrisi yazıldığında sıfır matrisini veren en küçük dereceli bir tek $q_M(t)$ monik polinomuna, M matrisinin *minimal polinomu* denir [31].

Teorem 2.29. Her $M\in\mathbb{C}_n$ matrisi için, $q_M(t)$ minimal polinomu $p_M(t)$ karakteristik polinomunu böler. Ayrıca $q_M(\lambda)=0$ olması için gerek ve yeter koşul λ

skalerinin M matrisinin bir özdeğeri olmasıdır. Dolayısıyla $p_M(t)=0$ denkleminin her kökü $q_M(t)=0$ denkleminin de bir köküdür [31].

Tanım 2.30. $M_1,\ M_2 \in \mathbb{C}_n$ matrisleri için $M_2 = S^{-1}M_1S$ eşitliğini sağlayan bir $S \in \mathbb{C}_n$ tersinir matrisi varsa, M_2 *matrisi* M_1 *matrisine benzerdir* denir [9].

Tanım 2.31. Bir $M \in \mathbb{C}_n$ matrisi bir köşegen matrise benzer ise, M matrisine *köşegenleştirilebilirdir* denir [9].

Bir matrisin köşegenleştirilebilir olup olmadığını belirlemenin pek çok yolu vardır. Bunlarla ilgili olan teoremlerden bazıları aşağıda verilmektedir.

Teorem 2.32. Aşağıdaki koşulların her biri, bir $M \in \mathbb{C}_n$ matrisinin köşegenleştirilebilir olması için gerek ve yeter koşuldur.

i) $q_M(t)$ minimal polinomu farklı lineer çarpanlara sahiptir.

ii) $q_M(t)=0$ denkleminin her bir kökü tek katlıdır (yani minimal polinom basit köklere sahiptir).

iii) $q_M(t)=0$ olacak şekildeki her bir t değeri için $q_M(t)$ polinomunun türevi sıfırdan farklıdır [31].

Teorem 2.33. $M \in \mathbb{C}_n$ verilmiş olsun. Bu durumda $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_k)$ ve $D \in \mathbb{C}_{n-k}$ ($1 \le k < n$) olmak üzere, M matrisinin

$$\begin{bmatrix} \Lambda & C \\ \mathbf{0} & D \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

şeklindeki bir blok matrise benzer olması için gerek ve yeter koşul $\mathbb{C}^n$'de her biri M matrisinin bir özvektörü olan k tane lineer bağımsız vektörün mevcut olmasıdır. M

matrisinin köşegenleştirilebilir olması için gerek ve yeter koşul her biri M matrisinin özvektörü olan n tane lineer bağımsız vektörün mevcut olmasıdır. Eğer $\mathbf{x}^{(1)},\ldots,\mathbf{x}^{(n)}$, M matrisinin lineer bağımsız özvektörleri ve $S=[\mathbf{x}^{(1)} \;\; \cdots \;\; \mathbf{x}^{(n)}]$ ise, bu durumda $S^{-1}MS$ bir köşegen matristir. Eğer M matrisi (2.1) biçimli bir matrise benzer ise, bu durumda Λ matrisinin köşegen elemanları M matrisinin özdeğerleridir; M, bir Λ köşegen matrisine benzer ise, Λ matrisinin köşegen elemanları, M matrisinin özdeğerlerinin tamamıdır [9].

Teorem 2.34. Bir $M \in \mathbb{C}_n$ matrisinin köşegenleştirilebilir olması için gerek ve yeter koşul her $\lambda \in \sigma(M)$ için $\text{cebkat}_M(\lambda)=\text{geokat}_M(\lambda)$ olmasıdır [28].

Teorem 2.35. $M_{11} \in \mathbb{C}_{n_1},\ldots,M_{kk} \in \mathbb{C}_{n_k}$ verilmiş olsun ve M matrisi, bunların direkt toplamı yani,

$$M=\begin{bmatrix} M_{11} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & M_{kk} \end{bmatrix}=M_{11}\oplus\cdots\oplus M_{kk}$$

olsun. Bu durumda M matrisinin köşegenleştirilebilir olması için gerek ve yeter koşul her bir $M_{11},\ldots,M_{kk}$ matrisinin köşegenleştirilebilir olmasıdır [9].

Tanım 2.36. M_1, $M_2 \in \mathbb{C}_n$ matrisleri için $S^{-1}M_1S$ ve $S^{-1}M_2S$ çarpımlarının her ikisi de köşegen olacak şekilde bir $S \in \mathbb{C}_n$ tersinir matrisi varsa, M_1 ve M_2 matrislerine *eşzamanlı olarak köşegenleştirilebilirdir* denir [9].

Teorem 2.37. M_1, $M_2 \in \mathbb{C}_n$ matrisleri köşegenleştirilebilir olsun. M_1 ve M_2 matrislerinin eşzamanlı olarak köşegenleştirilebilir olması için gerek ve yeter koşul M_1 ve M_2 matrislerinin değişmeli, yani $M_1M_2=M_2M_1$ olmasıdır [9].

2.5. Bir Matrisin Jordan Biçimi

Birbirinden farklı özdeğerleri $\lambda_1,\dots,\lambda_s \in \mathbb{C}$ olan her $M \in \mathbb{C}_n$ matrisi için

$$P^{-1}MP = J = \begin{bmatrix} J(\lambda_1) & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & J(\lambda_s) \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

olacak şekilde bir P tersinir matrisi vardır. Burada $J(\lambda_j)$ $(j=1,\dots,s)$ matrisi, $t_j = \text{sıfırlık}(\lambda_j I_n - M)$ olmak üzere,

$$\begin{bmatrix} J_1(\lambda_j) & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & J_{t_j}(\lambda_j) \end{bmatrix}$$

şeklindeki bir matristir (Buna, λ_j 'ye ilişkin bir *Jordan segmanı* da denir). Burada da $J_k(\lambda_j)$ $(k=1,\dots,t_j)$ matrisi, $\begin{bmatrix} \lambda_j & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_j \end{bmatrix}$ ile tanımlanan λ_j 'ye ilişkin bir *Jordan bloğu*dur.

$J(\lambda_j)$ matrisindeki en geniş Jordan bloğu, $k_j = \text{indeks}(\lambda_j)$ olmak üzere $k_j \times k_j$ boyutludur. $J(\lambda_j)$ matrisindeki $i \times i$ boyutlu Jordan bloklarının sayısı, $r_i(\lambda_j) = \text{rank}\left((\lambda_j I_n - M)^i\right)$ olmak üzere $v_i(\lambda_j) = r_{i-1}(\lambda_j) - 2r_i(\lambda_j) + r_{i+1}(\lambda_j)$ ile verilir. (2.2)'deki J matrisine M matrisinin *Jordan biçimi* denir. Her bir $J(\lambda_j)$ matrisindeki Jordan bloklarının sayısı ve boyutu, M matrisinin elemanları ile tek türlü belirlidir. İki matris benzer ise, bu matrisler aynı Jordan biçime (dolayısıyla aynı özdeğerlere) sahiptirler [28].

2.6. Bazı Özel Tipli Matrisler ve Bu Matrislerin Bazı Özellikleri

Bu kısımda, matrislerin kuvvetlerinin sağladığı özelliklere göre tanımlanan bazı özel tipli matrisler tanıtılmakta ve onlarla ilgili bazı temel teoremler ispatsız olarak verilmektedir.

Tanım 2.38. Bir $M \in \mathbb{C}_n$ matrisi için $M^2 = cM$ olacak şekilde bir $c \in \mathbb{C}^*$ sayısı varsa, M matrisine bir *skaler-potent matris* denir [32].

Tanım 2.39. Bir $M \in \mathbb{C}_n$ matrisi $M^2 = M$ özelliğini sağlıyorsa, M matrisine bir *idempotent matris* denir [1].

Bir idempotent matrisin bir skaler-potent matris olduğuna dikkat etmek gerekir.

Tanım 2.40. Bir $M \in \mathbb{C}_n$ matrisi $M^2 = I_n$ özelliğini sağlıyorsa, M matrisine bir *involutif matris* denir [9].

Tanım 2.41. Bir $M \in \mathbb{C}_n$ matrisi $M^3 = M$ özelliğini sağlıyorsa, M matrisine bir *tripotent matris* denir [1].

Yukarıdaki tanımlar göz önüne alındığında, idempotent ve involutif matrislerin aynı zamanda birer tripotent matris oldukları ve ayrıca, involutif matrislerin tersinir tripotent matrisler olduğu görülmektedir.

Tanım 2.42. Bir $M \in \mathbb{C}_n$ matrisi $M^3 = M$, $M^2 \neq M$ ve $M^2 \neq -M$ özelliklerini sağlıyorsa, M matrisine bir *esas tripotent matris* denir [33].

Tanım 2.43. Bir $M \in \mathbb{C}_n$ matrisi $M^2 = -M$ özelliğini sağlıyorsa, M matrisine bir *ters idempotent matris*, $M^2 = -I_n$ özelliğini sağlıyorsa, M matrisine bir *ters involutif matris* denir [34].

Tanım 2.44. Bir $M \in \mathbb{C}_n$ matrisi, P matrisi birim matristen farklı bir idempotent matris olmak üzere $M^2 = P$ özelliğini sağlıyorsa, M matrisine bir *genelleştirilmiş involutif* matris denir [15].

Tanım 2.45. Bir $M \in \mathbb{C}_n$ matrisi, P matrisi birim matristen farklı bir idempotent matris olmak üzere $M^2 = -P$ özelliğini sağlıyorsa, M matrisine bir *genelleştirilmiş ters involutif* matris denir [15].

Tanım 2.46. Bir $M \in \mathbb{C}_n$ matrisi için, $M^k = \mathbf{0}$ olacak şekilde bir pozitif k tamsayısı varsa, M matrisine bir *nilpotent matris* denir [35].

Teorem 2.47. M matrisi bir idempotent matris ise $\sigma(M) \subset \{0,\ 1\}$ 'dir [1].

Teorem 2.48. $M \in \mathbb{C}_n$ matrisi m ranklı ($m < n$) herhangi bir matris olsun. Eğer M bir idempotent matris ise, M matrisinin m tane sıfırdan farklı özdeğeri vardır ve bunların hepsi 1'e eşittir [1].

Teorem 2.49. M matrisi bir involutif matris ise $\sigma(M) \subset \{-1,\ 1\}$ 'dir [35].

Teorem 2.50. M matrisi bir tripotent matris ise, $\sigma(M) \subset \{-1,\ 0,\ 1\}$ 'dir [1].

Teorem 2.51. İdempotent ve involutif matrisler köşegenleştirilebilirdir [35].

Teorem 2.52. Tripotent matrisler köşegenleştirilebilirdir [36].

Teorem 2.53. M matrisi bir ters idempotent matris ise, bu matris köşegenleştirilebilirdir ve $\sigma(M) \subset \{-1,\ 0\}$ 'dır. Benzer şekilde, M matrisi bir ters involutif matris ise, yine bu matris köşegenleştirilebilirdir ve $\sigma(M) \subset \{-i,\ i\}$ 'dir [34].

Teorem 2.54. M matrisi bir nilpotent matris ise, bu matrisin tüm özdeğerleri sıfırdır. Ayrıca, köşegenleştirilebilir olan yegane nilpotent matris sıfır matrisidir [37].

Teorem 2.55. Bir $M \in \mathbb{C}_n$ matrisinin bir tripotent matris olması için gerek ve yeter koşul $M = X - Y$ olacak şekilde iki ayrık idempotent X ve Y matrislerinin mevcut olmasıdır. Ayrıca, bu matrisler $X = \frac{1}{2}(M^2 + M)$ ve $Y = \frac{1}{2}(M^2 - M)$ şeklinde tek türlü olarak belirlidir [11].

Teorem 2.56. $P,\ Q \in \mathbb{C}_n$ matrisleri, $PQ = QP$ olacak şekilde iki idempotent matris ve $a,\ b \in \mathbb{C}^*$ olsun. Bu durumda, $\sigma(aP + bQ) \subset \{0,\ a,\ b,\ a+b\}$ ’dir [24].

Teorem 2.57. $P,\ Q \in \mathbb{C}_n$ matrisleri $PQ \neq QP$ olacak şekilde iki idempotent matris ve $a,\ b \in \mathbb{C}^*$ olmak üzere $aP + bQ$ matrisi köşegenleştirilebilir olsun. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur.

i)

$$P = S\left(\left(\bigoplus_{i=1}^{k} P_i\right) \oplus P_0\right) S^{-1},\quad Q = S\left(\left(\bigoplus_{i=1}^{k} Q_i\right) \oplus Q_0\right) S^{-1},$$

$P_0 Q_0 = Q_0 P_0$ ve $i = 1, \ldots, k$ için $P_i Q_i \neq Q_i P_i$ olacak şekilde bir $S \in \mathbb{C}_n$ tersinir matrisi ve $m_0 + m_1 + \cdots + m_k = n$ olmak üzere $i = 0, 1, \ldots, k$ için $P_i,\ Q_i \in \mathbb{C}_{m_i}$ idempotent matrisleri vardır.

ii) $i = 1, \ldots, k$ için

$$a + b = \mu_i + \nu_i,\quad \sigma(aP_i + bQ_i) = \{\mu_i,\ \nu_i\},\quad ab(P_i - Q_i)^2 = \mu_i \nu_i \, \mathrm{I}_{m_i}$$

olacak şekilde $\mu_1, \nu_1, \ldots, \mu_k, \nu_k$ farklı karmaşık sayıları vardır.

iii) $i=1,\dots,k$ için $x_i=\operatorname{rank}(P_i)$ olsun. Bu durumda,

$$K_i=\left(1-\frac{\mu_i\nu_i}{ab}\right)\mathrm{I}_{x_i},$$

$$L_iM_i=\frac{\mu_i\nu_i}{ab}\left(1-\frac{\mu_i\nu_i}{ab}\right)\mathrm{I}_{x_i},$$

$$M_iL_i=\frac{\mu_i\nu_i}{ab}\left(1-\frac{\mu_i\nu_i}{ab}\right)\mathrm{I}_{m_i-x_i}$$

ve

$$N_i=\frac{\mu_i\nu_i}{ab}\mathrm{I}_{m_i-x_i}$$

olmak üzere,

$$P_i=S_i\begin{bmatrix}\mathrm{I}_{x_i} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}S_i^{-1},\quad Q_i=S_i\begin{bmatrix}K_i & L_i\\ M_i & N_i\end{bmatrix}S_i^{-1}$$

olacak şekilde $S_i\in\mathbb{C}_{m_i}$ tersinir matrisleri vardır [24].

Teorem 2.58. $P,\ Q\in\mathbb{C}_n$ matrisleri $PQ\neq QP$ olacak şekilde iki idempotent matris ve $a,\ b\in\mathbb{C}^*$ olmak üzere $aP+bQ$ matrisi köşegenleştirilebilir olsun. Eğer $\lambda\in\sigma(aP+bQ)\setminus\{0,\ a,\ b,\ a+b\}$ ise, bu durumda $\lambda\neq\mu$ ve $\lambda+\mu=a+b$ olacak şekilde bir $\mu\in\sigma(aP+bQ)$ sayısı vardır [24].

2.7. Kuadratik ve Genelleştirilmiş Kuadratik Matrisler

Bu kısımda, çalışmada temel olarak ele alınan ve yine birer özel tipli matris olan kuadratik ve genelleştirilmiş kuadratik matris tanımları verilerek bu matrislerin temel özelliklerinden bahsedilecektir. Daha sonra da bu matris sınıflarının pek çok özel tipli matris sınıflarını kapsadığı gösterilecektir.

Tanım 2.59. $M \in \mathbb{C}_n$ olmak üzere, $(M - pI_n)(M - qI_n) = \mathbf{0}$ olacak şekilde $p,\ q \in \mathbb{C}$ sayıları varsa, M matrisine bir *kuadratik matris* denir [14].

Buradan sonra, yukarıdaki tanımdaki p ve q karmaşık sayıları ile belirlenen $M \in \mathbb{C}_n$ matrisine, kısaca bir $\{p,\ q\}$-*kuadratik matris* denilecektir. Özel olarak, $p = q$ ise, $M \in \mathbb{C}_n$ matrisine kısaca bir $\{p\}$-*kuadratik matris* denilecektir.

$M \in \mathbb{C}_n$ matrisi bir $\{p,\ q\}$-kuadratik matris ise $\sigma(M) \subset \{p,\ q\}$ ve $M \in \mathbb{C}_n$ matrisi bir $\{p\}$-kuadratik matris ise $\sigma(M) = \{p\}$ olduğuna dikkat etmek gerekir.

$(p,\ q) \in \{(0,\ 1),\ (1,\ 0)\}$, $(p,\ q) \in \{(-1,\ 1),\ (1,\ -1)\}$, $(p,\ q) \in \{(-1,\ 0),\ (0,\ -1)\}$, $(p,\ q) \in \{(-i,\ i),\ (i,\ -i)\}$ ve $(p,\ q) = (0,\ 0)$ olması durumunda, M matrisinin sırasıyla bir idempotent matris, bir involutif matris, bir ters idempotent matris, bir ters involutif matris ve bir nilpotent matris olduğu açıktır. Bu nedenle kuadratik matrisler sınıfı, idempotent, involutif, ters idempotent, ters involutif ve nilpotent matrisler sınıflarını kapsar.

Tanım 2.60. $M^2 = pM + qP$ ve $MP = PM = M$ olacak şekilde $p,\ q \in \mathbb{C}$ sayıları ve sıfırdan farklı bir $P \in \mathbb{C}_n$ idempotent matrisi varsa, $M \in \mathbb{C}_n$ matrisine bir *genelleştirilmiş kuadratik matris* denir [15].

Bu tanımdaki $M^2 = pM + qP$ ifadesi, bir genelleştirilmiş kuadratik matris tanımının bir kuadratik matris tanımı ile uyumlu olması adına, $\alpha,\ \beta \in \mathbb{C}$ sayıları p ve q karmaşık sayıları ile belirlenen sayılar olmak üzere, $(M-\alpha P)(M-\beta P) = \mathbf{0}$ şeklinde de yazılabilir.

Buradan sonra $(M-\alpha P)(M-\beta P) = \mathbf{0}$ ve $MP = PM = M$ koşullarını sağlayan bir M matrisine P *idempotent matrisine göre bir genelleştirilmiş* $\{\alpha,\ \beta\}$*-kuadratik matris* denilecek ve bu tip M matrislerinin kümesi $\mathfrak{L}(P;\ \alpha,\ \beta)$ ile gösterilecektir. Bir P idempotent matrisine göre bir genelleştirilmiş $\{\alpha,\ \beta\}$-kuadratik matris tanımında, $P = I_n$ olması durumunda, $MP = PM = M$ ifadesi zaten gerçeklenir. Ayrıca, yine bu durumda, $(M-\alpha I_n)(M-\beta I_n) = \mathbf{0}$ olduğundan, bir P idempotent matrisine göre bir genelleştirilmiş $\{\alpha,\ \beta\}$-kuadratik matrisin, özel olarak $P = I_n$ olması durumunda bir $\{\alpha,\ \beta\}$-kuadratik matrise indirgendiğine dikkat etmek gerekir.

Teorem 2.61. $\alpha \neq \beta$ olmak üzere $M \in \mathfrak{L}(P;\ \alpha,\ \beta)$ olması için gerek ve yeter koşul

$$M = \alpha X + \beta Y,\ \ X + Y = P \text{ ve } XY = YX = \mathbf{0}$$

olacak şekilde X ve Y idempotent matrislerinin mevcut olmasıdır [10].

Teorem 2.62. $M \in \mathfrak{L}(P;\ \alpha,\ \beta)$ olsun. Bu durumda, M matrisinin mümkün olabilecek olan tüm özdeğerleri 0, α ve β karmaşık sayılarından ibarettir, yani $\sigma(M) \subset \{0,\ \alpha,\ \beta\}$'dır [15].

Teorem 2.50'ye göre, M bir tripotent matris ise $\sigma(M) \subset \{-1,\ 0,\ 1\}$ olur. Öte yandan, Teorem 2.55'e göre, bir M tripotent matrisi $M = \frac{1}{2}(M^2 + M) - \frac{1}{2}(M^2 - M)$

olacak şekilde iki ayrık idempotent matrisin farkı olarak yazılabilir. $X = \frac{1}{2}(M^2 + M)$ ve $Y = \frac{1}{2}(M^2 - M)$ olarak tanımlanırsa $X + Y = M^2$ olur. M matrisi tripotent olduğundan, M^2 matrisi idempotenttir. Dolayısıyla Teorem 2.61 dikkate alındığında, bir esas tripotent M matrisi, M^2 matrisine göre bir genelleştirilmiş $\{-1,\ 1\}$-kuadratik matris olarak düşünülebilir. Öte yandan, tripotent matrisler sınıfı; esas tripotent matrisler sınıfı, idempotent matrisler sınıfı ve ters idempotent matrisler sınıfının bileşimidir. Ayrıca, genelleştirilmiş kuadratik matrisler sınıfının, kuadratik matrisler sınıfını, kuadratik matrisler sınıfının da idempotent ve ters idempotent matrisler sınıflarını kapsadığı bilinmektedir. Böylece, genelleştirilmiş kuadratik matrisler sınıfı tripotent matrisler sınıfını kapsar. Yine, $M \in \mathfrak{L}(P;\ \alpha,\ \beta)$ olmak üzere, $(\alpha,\ \beta) = (1,\ 1)$ ve $P = M$ ise, M matrisinin bir idempotent, $(\alpha,\ \beta) = (-1,\ -1)$ ve $P = -M$ ise, M matrisinin bir ters idempotent, $(\alpha,\ \beta) \in \{(-1,\ 1),\ (1,\ -1)\}$ ve $P \neq I$ ise, M matrisinin bir genelleştirilmiş involutif, $(\alpha,\ \beta) \in \{(-i,\ i),\ (i,\ -i)\}$ ve $P \neq I$ ise, M matrisinin bir genelleştirilmiş ters involutif matris olduğu da görülür. Böylece, genelleştirilmiş kuadratik matrisler sınıfı, idempotent, involutif, ters idempotent, ters involutif, nilpotent, tripotent, genelleştirilmiş involutif ve genelleştirilmiş ters involutif matrisler sınıflarını kapsayan geniş bir sınıftır.

BÖLÜM 3. İKİ KUADRATİK MATRİSTEN TÜRETİLEN BAZI MATRİSLERİN SPEKTRUMLARI

3.1. Giriş

Bu bölümde, iki idempotent matrise bağlı olan bazı matrislerin spektrumları ile ilgili olarak Liu ve Benítez tarafından [24]'te ele alınan çalışma, iki kuadratik matris çiftine genişletilmektedir. Bunun için, önce bazı hazırlık bilgileri, daha sonra ise esas sonuçlar verilmektedir.

3.2. Ön Bilgiler

Aşağıdaki teoremde kuadratik matrisler ile idempotent matrisler arasında bir ilişki kurulmaktadır. Bu teorem, bu kısımdaki diğer teoremlerin ve başta Teorem 3.6'nın ispatındaki özellikler olmak üzere Kısım 3.3'teki esas sonuçların elde edilmesinde kullanılmaktadır.

Teorem 3.1. $M \in \mathbb{C}_n$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

i) $\alpha \neq \beta$ ve $(M-\alpha I_n)(M-\beta I_n)=\mathbf{0}$ olacak şekilde $\alpha,\ \beta \in \mathbb{C}$ sayıları vardır.

ii) M köşegenleştirilebilirdir ve $\sigma(M) \subset \{\alpha,\ \beta\}$'dır.

iii) $\alpha \neq \beta$, $M=\alpha X+\beta Y$, $X+Y=I_n$ ve $XY=YX=\mathbf{0}$ olacak şekilde $\alpha,\ \beta \in \mathbb{C}$ sayıları ve $X,\ Y \in \mathbb{C}_n$ idempotent matrisleri vardır.

iv) $a \neq 0$ ve $M=aX+bI_n$ olacak şekilde bir X idempotent matrisi ve $a,\ b \in \mathbb{C}$ sayıları vardır.

İspat. i) $\Rightarrow$ ii). Teorem 2.29 ve Teorem 2.32 ii)'den hemen görülür.

ii)$\Rightarrow$iii). Hipoteze göre, $p,\ q \in \{0,1,\ldots,n\}$ ve $p+q=n$ olmak üzere, Teorem 2.33 çerçevesinde

$$M = S(\alpha I_p \oplus \beta I_q)S^{-1}$$

olacak şekilde bir S tersinir matrisi vardır. X ve Y matrisleri

$$X = S(I_p \oplus \mathbf{0})S^{-1} \text{ ve } Y = S(\mathbf{0} \oplus I_q)S^{-1}$$

biçiminde tanımlanırsa, $M = \alpha X + \beta Y$, $X + Y = I_n$ ve $XY = YX = \mathbf{0}$ olduğu görülür.

iii)$\Rightarrow$iv). $M = \alpha X + \beta Y$ ve $Y = I_n - X$ olduğundan

$$M = (\alpha - \beta)X + \beta I_n$$

yazılabilir. $a = \alpha - \beta$ ve $b = \beta$ alınırsa istenen sonuç elde edilir.

iv)$\Rightarrow$i). X bir idempotent olduğundan, $p = \text{rank}(X)$ olmak üzere, Teorem 2.33, Teorem 2.48 ve Teorem 2.51 göz önüne alınarak, $X = S(I_p \oplus \mathbf{0})S^{-1}$ olacak şekilde bir S tersinir matrisinin mevcut olduğu görülür. Buradan, hipoteze göre

$$M = aS(I_p \oplus \mathbf{0})S^{-1} + bS(I_p \oplus I_{n-p})S^{-1} = S\left((a+b)I_p \oplus bI_{n-p}\right)S^{-1}$$

yazılabilir. $\alpha = a + b$ ve $\beta = b$ olarak tanımlanırsa

$$M - \alpha I_n = S\left(\mathbf{0} \oplus (\beta - \alpha)I_{n-p}\right)S^{-1} \text{ ve } M - \beta I_n = S\left((\alpha - \beta)I_p \oplus \mathbf{0}\right)S^{-1}$$

olur ve dolayısıyla $(M - \alpha I_n)(M - \beta I_n) = \mathbf{0}$ eşitliği sağlanır. ■

Uyarı 3.2. $M \in \mathbb{C}_n$ matrisi bir $\{p\}$-kuadratik matris olsun. Bu durumda, $rk\left((pI_n - M)^k\right) = rk\left((pI_n - M)^{k+1}\right)$ olacak şekildeki en küçük pozitif k tamsayısı $k = 2$ olacağından, bir matrisin Jordan biçimine göre, $t = \text{sıfırlık}(pI_n - M)$ ve $i = 1,\ldots,t$ için $J_i(p) = \begin{bmatrix} p & 1 \\ 0 & p \end{bmatrix}$ veya $J_i(p) = [p]$ olmak üzere $M = S\left(J_1(p) \oplus \cdots \oplus J_t(p)\right)S^{-1}$ olacak şekilde bir $S \in \mathbb{C}_n$ tersinir matrisi vardır. Açık olarak, eğer M matrisi köşegenleştirilebilirse (bu, $k = 1$ olması ile mümkündür), bu durumda $M = pI_n$ olur. Yani, M matrisi bir skaler matristir.

Uyarı 3.3. $M \in \mathbb{C}_n$ matrisi bir $\{p,\ q\}$-kuadratik matris ve $c \in \mathbb{C}^*$ olsun. Bu durumda cM matrisi bir $\{cp,\ cq\}$-kuadratik matristir. Bu basit gözlem, iki $\{p,\ q\}$-kuadratik matrisinin keyfi bir lineer bileşiminin spektrumunu çalışmak yerine iki $\{p,\ q\}$-kuadratik matrisin toplamının spektrumunu çalışmaya izin verir.

Şimdi A ve B değişmeli iki kuadratik matris olmak üzere $A + B$ matrisinin spektrumu hakkındaki aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 3.4. $A,\ B \in \mathbb{C}_n$ matrisleri, $\alpha \neq \beta$, $\gamma \neq \delta$ ve $AB = BA$ olacak şekilde sırasıyla $\{\alpha,\ \beta\}$ ve $\{\gamma,\ \delta\}$-kuadratik matrisler olsun. Bu durumda,

$$\sigma(A + B) \subset \{\alpha + \gamma,\ \alpha + \delta,\ \beta + \gamma,\ \beta + \delta\}$$

dır.

İspat. Teorem 3.1 iii)$\Rightarrow$iv)'nin ispatına göre, $A = (\alpha - \beta)X + \beta I_n$ ve $B = (\gamma - \delta)Y + \delta I_n$ olacak şekilde X ve Y idempotent matrisleri vardır. $AB = BA$, $\alpha \neq \beta$ ve $\gamma \neq \delta$ olduğundan, $XY = YX$ bulunur. Dolayısıyla Teorem 2.37 ve

Teorem 2.51’e göre $(\alpha-\beta)X+(\gamma-\delta)Y$ matrisi köşegenleştirilebilirdir. Ayrıca Teorem 2.56’ya göre de

$$\sigma\big((\alpha-\beta)X+(\gamma-\delta)Y\big)\subset\{0,\ \alpha-\beta,\ \gamma-\delta,\ \alpha-\beta+\gamma-\delta\}$$

yazılabilir. Bu son kapsama, $A+B=(\alpha-\beta)X+(\gamma-\delta)Y+(\beta+\delta)I_n$ eşitliği ile birlikte düşünülürse Teorem 2.23’e göre teoremin ispatı tamamlanır. ■

$\sigma(A)\subset\{\alpha,\ \beta\}$, $\sigma(B)\subset\{\gamma,\ \delta\}$ ve $AB=BA$ olduğundan, Teorem 2.24’e göre direkt olarak $\sigma(A+B)\subset\{\alpha+\gamma,\ \alpha+\delta,\ \beta+\gamma,\ \beta+\delta\}$ olduğu söylenebilirdi. Ayrıca $\alpha\neq\beta$ ve $\gamma\neq\delta$ olmasına da gerek yoktur. Fakat bu bölüm boyunca $p\neq q$ olmak üzere hep $\{p,\ q\}$-kuadratik matrislerle ilgilenileceğinden, bölümdeki bütünlüğün sağlanması adına yukarıdaki teoremde de $\alpha\neq\beta$ ve $\gamma\neq\delta$ alınmıştır.

Teorem 3.5. $A,\ B\in\mathbb{C}_n$ matrisleri $\alpha\neq\beta$, $\gamma\neq\delta$ ve $AB\neq BA$ olacak şekilde sırasıyla $\{\alpha,\ \beta\}$ ve $\{\gamma,\ \delta\}$-kuadratik matrisler olsun. Ayrıca, $A+B$ matrisi köşegenleştirilebilir olsun. Eğer $\lambda\in\sigma(A+B)\setminus\{\alpha+\gamma,\ \alpha+\delta,\ \beta+\gamma,\ \beta+\delta\}$ ise, bu durumda $\lambda\neq\mu$ ve $\lambda+\mu=\alpha+\beta+\gamma+\delta$ olacak şekilde bir $\mu\in\sigma(A+B)$ sayısı vardır.

İspat. Teorem 3.1 iii)$\Rightarrow$iv)’nin ispatına göre, $A=(\alpha-\beta)X+\beta I_n$ ve $B=(\gamma-\delta)Y+\delta I_n$ olacak şekilde X ve Y idempotent matrisleri vardır. $AB\neq BA$, $\alpha\neq\beta$ ve $\gamma\neq\delta$ olduğundan, $XY\neq YX$ bulunur. $A+B$ matrisi köşegenleştirilebilir olduğundan, Teorem 2.33’e göre

$$A+B=T\Lambda T^{-1} \tag{3.1}$$

olacak şekilde bir T tersinir matrisi ve köşegeni üzerinde $A+B$ matrisinin tüm özdeğerlerini bulunduran bir Λ köşegen matrisi vardır. $A+B=(\alpha-\beta)X+(\gamma-\delta)Y+(\beta+\delta)I_n$ olduğundan, (3.1) eşitliğinden

$$(\alpha-\beta)X+(\gamma-\delta)Y=T\left(\Lambda-(\beta+\delta)I_n\right)T^{-1} \qquad (3.2)$$

yazılabilir. Bu, $(\alpha-\beta)X+(\gamma-\delta)Y$ matrisinin köşegenleştirilebilir olduğunu ifade eder.

Şimdi, $\lambda\in\sigma(A+B)\setminus\{\alpha+\gamma,\ \alpha+\delta,\ \beta+\gamma,\ \beta+\delta\}$ olsun. Bu durumda, $\lambda-(\beta+\delta)\notin\{0,\ \alpha-\beta,\ \gamma-\delta,\ \alpha-\beta+\gamma-\delta\}$ olduğu açıktır. Üstelik (3.2) eşitliğine göre, $\lambda-(\beta+\delta)\in\sigma\left((\alpha-\beta)X+(\gamma-\delta)Y\right)$ yazılabilir. Dolayısıyla, X ve Y değişmeli olmayan iki idempotent matris ve $(\alpha-\beta)X+(\gamma-\delta)Y$ matrisi köşegenleştirilebilir olduğundan, Teorem 2.58'e göre,

$$\lambda-(\beta+\delta)+\mu^*=\alpha-\beta+\gamma-\delta \qquad (3.3)$$

olacak şekilde $\lambda-(\beta+\delta)$ sayısından farklı bir $\mu^*\in\sigma\left((\alpha-\beta)X+(\gamma-\delta)Y\right)$ sayısı vardır. Ayrıca, $A+B=(\alpha-\beta)X+(\gamma-\delta)Y+(\beta+\delta)I_n$ eşitliği de dikkate alınırsa, Teorem 2.23'ten $\mu^*+\beta+\delta\in\sigma(A+B)$ olduğu görülür. $\mu=\mu^*+\beta+\delta$ olarak tanımlanır ve (3.3) eşitliği göz önüne alınırsa, $\lambda+\mu=\alpha+\beta+\gamma+\delta$ elde edilir. Ayrıca, $\mu^*\neq\lambda-(\beta+\delta)$ olduğundan $\lambda\neq\mu^*+\beta+\delta$ yani $\lambda\neq\mu$ bulunur ve böylece ispat tamamlanır. ■

3.3. İki Kuadratik Matristen Türetilen Bazı Matrislerin Spektrumları

Bu kısımda, A ve B matrisleri, $A+B$ matrisi köşegenleştirilebilir olacak şekilde sırasıyla $\{\alpha,\ \beta\}$ ve $\{\gamma,\ \delta\}$-kuadratik matrisler olmak üzere $A+B$ matrisinin spektrumu ile $(\gamma+\delta)A+(\alpha+\beta)B-AB-BA$, $AB-BA$, $\alpha\beta B-ABA$,

$\alpha BAB-(AB)^2$ ve $\beta B-AB$ matrislerinin spektrumları arasındaki bazı ilişkiler incelenecektir.

Aşağıdaki teoremde, $A+B$ matrisinin spektrumu ile $(\gamma+\delta)A+(\alpha+\beta)B-AB-BA$ matrisinin spektrumu arasında bir ilişki ortaya konulmaktadır.

Teorem 3.6. $A,\ B\in\mathbb{C}_n$ matrisleri $\alpha\neq\beta$, $\gamma\neq\delta$ ve $AB\neq BA$ olacak şekilde sırasıyla $\{\alpha,\ \beta\}$ ve $\{\gamma,\ \delta\}$-kuadratik matrisler olsun. Ayrıca, $A+B$ matrisi köşegenleştirilebilir olsun. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur.

i) $\mu\in\sigma(A+B)\setminus\{\alpha+\gamma,\ \alpha+\delta,\ \beta+\gamma,\ \beta+\delta\}$ ise, $\mu(\alpha+\beta+\gamma+\delta-\mu)-\alpha\beta-\gamma\delta\in\sigma\big((\gamma+\delta)A+(\alpha+\beta)B-AB-BA\big)$'dır.

ii) $\lambda\in\sigma\big((\gamma+\delta)A+(\alpha+\beta)B-AB-BA\big)\setminus\{\alpha\gamma+\beta\delta,\ \alpha\delta+\beta\gamma\}$ ise, $x^2-(\alpha+\beta+\gamma+\delta)x+\lambda+\alpha\beta+\gamma\delta$ polinomunun kökleri $A+B$ matrisinin özdeğerleridir.

İspat. Teorem 3.1 iii)$\Rightarrow$iv)'nin ispatına göre, $A=(\alpha-\beta)X+\beta I_n$ ve $B=(\gamma-\delta)Y+\delta I_n$ olacak şekilde X ve Y idempotent matrisleri vardır. $AB\neq BA$, $\alpha\neq\beta$ ve $\gamma\neq\delta$ olduğundan, $XY\neq YX$ bulunur. Ayrıca $A+B$ matrisi köşegenleştirilebilir olduğundan, $(\alpha-\beta)X+(\gamma-\delta)Y$ matrisi de köşegenleştirilebilirdir. Böylece Teorem 2.57 i)'ye göre,

$$X=S\left(\left(\bigoplus_{i=1}^{k}X_i\right)\oplus X_0\right)S^{-1},\quad Y=S\left(\left(\bigoplus_{i=1}^{k}Y_i\right)\oplus Y_0\right)S^{-1},\tag{3.4}$$

$X_0Y_0=Y_0X_0$, $i=1,\ldots,k$ için $X_iY_i\neq Y_iX_i$ olacak şekilde bir $S\in\mathbb{C}_n$ tersinir matrisi ve $m_0+m_1+\ldots+m_k=n$ olmak üzere $i=0,1,\ldots,k$ için $X_i,\ Y_i\in\mathbb{C}_{m_i}$ idempotent matrisleri vardır. $A=(\alpha-\beta)X+\beta I_n$ ve $B=(\gamma-\delta)Y+\delta I_n$ eşitlikleri (3.4) ile birlikte göz önüne alınırsa,

$$A=S\left(\left(\bigoplus_{i=1}^{k}\left((\alpha-\beta)X_i+\beta I_{m_i}\right)\right)\oplus\left((\alpha-\beta)X_0+\beta I_{m_0}\right)\right)S^{-1}$$

ve

$$B=S\left(\left(\bigoplus_{i=1}^{k}\left((\gamma-\delta)Y_i+\delta I_{m_i}\right)\right)\oplus\left((\alpha-\beta)Y_0+\delta I_{m_0}\right)\right)S^{-1}$$

yazılabilir. Şimdi, $i=0,1,\dots,k$ için A_i ve B_i matrislerini

$$A_i=(\alpha-\beta)X_i+\beta I_{m_i} \quad \text{ve} \quad B_i=(\gamma-\delta)Y_i+\delta I_{m_i} \tag{3.5}$$

olarak tanımlayalım. Tüm A_i matrislerinin $\{\alpha,\ \beta\}$-kuadratik ve tüm B_i matrislerinin $\{\gamma,\ \delta\}$-kuadratik matris olduğu açıktır. Ayrıca, $X_0Y_0=Y_0X_0$ ve $i=1,\dots,k$ için $X_iY_i\neq Y_iX_i$ olduğundan, $A_0B_0=B_0A_0$ ve $i=1,\dots,k$ için $A_iB_i\neq B_iA_i$ bulunur. Böylece teoremin hipotezleri altında $i=0,1,\dots,k$ için $A_i,\ B_i\in\mathbb{C}_{m_i}$, $A_0B_0=B_0A_0$ ve $i=1,\dots,k$ için $A_iB_i\neq B_iA_i$ olmak üzere

$$A=S\left(\left(\bigoplus_{i=1}^{k}A_i\right)\oplus A_0\right)S^{-1} \quad \text{ve} \quad B=S\left(\left(\bigoplus_{i=1}^{k}B_i\right)\oplus B_0\right)S^{-1} \tag{3.6}$$

olacak şekilde $A_0,A_1,\dots,A_k$ $\{\alpha,\ \beta\}$-kuadratik matrisleri, $B_0,B_1,\dots,B_k$ $\{\gamma,\ \delta\}$-kuadratik matrisleri ve bir $S\in\mathbb{C}_n$ tersinir matrisi vardır. Öte yandan, Teorem 2.57 ii)'ye göre, $i=1,\dots,k$ için

$$\alpha-\beta+\gamma-\delta=\xi_i+\eta_i, \quad \sigma\left((\alpha-\beta)X_i+(\gamma-\delta)Y_i\right)=\{\xi_i,\ \eta_i\} \tag{3.7}$$

ve

$$(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)(X_i-Y_i)^2=\xi_i\eta_i I_{m_i} \tag{3.8}$$

olacak şekilde $\xi_1,\eta_1,\dots,\xi_k,\eta_k$ farklı karmaşık sayıları vardır. (3.5) eşitlikleri ve (3.7) nin ikinci eşitliğinden Teorem 2.23'e göre $\sigma(A_i+B_i)=\{\xi_i+\beta+\delta,\ \eta_i+\beta+\delta\}$ yazılabilir. $i=1,\dots,k$ için μ_i ve η_i 'yi

$$\mu_i=\xi_i+\beta+\delta \quad \text{ve} \quad \nu_i=\eta_i+\beta+\delta \tag{3.9}$$

olarak tanımlayalım. Böylece, $i=1,\dots,k$ için

$$\sigma(A_i+B_i)=\{\mu_i,\ \nu_i\} \tag{3.10}$$

dir. (3.7)'nin ilk eşitliği ve (3.9) eşitlikleri göz önüne alınarak

$$\mu_i+\nu_i=\alpha+\beta+\gamma+\delta \tag{3.11}$$

elde edilir. (3.5), (3.9) ve (3.11) eşitlikleri (3.8) eşitliğinde kullanılarak $i=1,\dots,k$ için

$$(\gamma+\delta)A_i+(\alpha+\beta)B_i-A_iB_i-B_iA_i=(\mu_i\nu_i-\alpha\beta-\gamma\delta)I_{m_i} \tag{3.12}$$

bulunur. $A_0B_0=B_0A_0$ olduğu dikkate alınarak, (3.6) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}&(\gamma+\delta)A+(\alpha+\beta)B-AB-BA\\&=S\left(\left(\bigoplus_{i=1}^{k}\left((\gamma+\delta)A_i+(\alpha+\beta)B_i-A_iB_i-B_iA_i\right)\right)\oplus\left((\gamma+\delta)A_0+(\alpha+\beta)B_0-2A_0B_0\right)\right)S^{-1}\end{aligned} \tag{3.13}$$

yazılabilir. Ayrıca, (3.5) eşitliklerinden

$$(\gamma+\delta)A_0+(\alpha+\beta)B_0-2A_0B_0$$

ve

$$(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)(X_0+Y_0-2X_0Y_0)+(\alpha\delta+\gamma\beta)I_{m_0}$$

matrislerinin eşit olduğu ve X_0 ile Y_0 matrisleri değişmeli idempotent matrisler olduğundan, $X_0+Y_0-2X_0Y_0$ matrisinin bir idempotent olduğu kolaylıkla görülebilir. Üstelik $(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)\neq 0$ olduğu da açıktır. Böylece, Teorem 3.1 iii)$\Rightarrow$iv)'nin ispatına göre $(\gamma+\delta)A_0+(\alpha+\beta)B_0-2A_0B_0$ matrisi bir $\{\alpha\gamma+\beta\delta,\ \alpha\delta+\beta\gamma\}$-kuadratik matristir.

Şimdi, $\mu\in\sigma(A+B)\setminus\{\alpha+\gamma,\ \alpha+\delta,\ \beta+\gamma,\ \beta+\delta\}$ olsun. Bu durumda, Teorem 3.4'ten $\mu\notin\sigma(A_0+B_0)$ olur. Böylece Teorem 2.25 ve (3.6)'ya göre, $\mu\in\sigma(A_i+B_i)$ ve dolayısıyla (3.10) ve (3.11) eşitliklerine göre $\sigma(A_i+B_i)=\{\mu,\ \alpha+\beta+\gamma+\delta-\mu\}$ olacak şekilde bir $i\in\{1,\ldots,k\}$ vardır. O halde (3.10) ve (3.12) eşitlikleri birlikte düşünülerek, Sonuç 2.26'ya göre

$$\mu(\alpha+\beta+\gamma+\delta-\mu)-\alpha\beta-\gamma\delta\in\sigma\left((\gamma+\delta)A_i+(\alpha+\beta)B_i-A_iB_i-B_iA_i\right)$$

yazılabilir. Buradan, $\sigma\left((\gamma+\delta)A_i+(\alpha+\beta)B_i-A_iB_i-B_iA_i\right)$ kümesinin $\sigma\left((\gamma+\delta)A+(\alpha+\beta)B-AB-BA\right)$ kümesinin bir alt kümesi olduğu göz önüne alınırsa, i)'de istenen sonuç elde edilir.

Şimdi de $\lambda\in\sigma\left((\gamma+\delta)A+(\alpha+\beta)B-AB-BA\right)\setminus\{\alpha\gamma+\beta\delta,\ \alpha\delta+\beta\gamma\}$ olsun. $\lambda\notin\{\alpha\gamma+\beta\delta,\ \alpha\delta+\beta\gamma\}$ ve $(\gamma+\delta)A_0+(\alpha+\beta)B_0-2A_0B_0$ matrisi bir $\{\alpha\gamma+\beta\delta,\ \alpha\delta+\beta\gamma\}$-kuadratik matris olduğundan $\lambda\notin\sigma\left((\gamma+\delta)A_0+(\alpha+\beta)B_0-2A_0B_0\right)$

olduğu açıktır. Böylece, Teorem 2.25 ve (3.13)'e göre $\lambda \in \sigma\left((\gamma+\delta)A_i + (\alpha+\beta)B_i - A_iB_i - B_iA_i\right)$ ve dolayısıyla Sonuç 2.26'ya göre, (3.12) eşitliğinden $\lambda = \mu_i\nu_i - \alpha\beta - \gamma\delta$ olacak şekilde bir $i \in \{1,\ldots,k\}$ vardır. (3.11)'e göre $\mu = \mu_i$ ve $\nu = \nu_i$ olmak üzere, $\mu+\nu = \alpha+\beta+\gamma+\delta$ yazılabilir. Bu son ifade ile birlikte $\mu\nu = \lambda + \alpha\beta + \gamma\delta$ eşitliği göz önüne alınarak, ii)'nin ispatı tamamlanır. ■

Teorem 3.6'da A ve B matrislerinin yerine $c_1,\ c_2 \in \mathbb{C}^*$ olmak üzere c_1A ve c_2B matrisleri alınır ve Uyarı 3.3 göz önüne alınırsa, Teorem 3.6'nın aşağıda verilen genel hali elde edilebilir. Bu teorem, A ve B'nin herhangi iki lineer bileşiminin spektrumu arasında bir ilişki ortaya koyan sonucu türetmek için kullanılacaktır.

Teorem 3.7. $A,\ B \in \mathbb{C}_n$ matrisleri, $\alpha \neq \beta$, $\gamma \neq \delta$ ve $AB \neq BA$ olacak şekilde sırasıyla $\{\alpha,\ \beta\}$ ve $\{\gamma,\ \delta\}$-kuadratik matrisler olsun. c_1 ve c_2 sayıları $c_1A + c_2B$ matrisi köşegenleştirilebilir olacak şekilde sıfırdan farklı karmaşık sayılar olsun. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur.

i) $\mu \in \sigma(c_1A + c_2B) \setminus \{c_1\alpha + c_2\gamma,\ c_1\alpha + c_2\delta,\ c_1\beta + c_2\gamma,\ c_1\beta + c_2\delta\}$ ise, $\frac{1}{c_1c_2}\left(\mu\left(c_1(\alpha+\beta) + c_2(\gamma+\delta) - \mu\right) - c_1^2\alpha\beta - c_2^2\gamma\delta\right)$ karmaşık sayısı, $(\gamma+\delta)A + (\alpha+\beta)B - AB - BA$ matrisinin spektrumundadır.

ii) $\lambda \in \sigma\left((\gamma+\delta)A + (\alpha+\beta)B - AB - BA\right) \setminus \{\alpha\gamma + \beta\delta,\ \alpha\delta + \beta\gamma\}$ ise, $x^2 - \left(c_1(\alpha+\beta) + c_2(\gamma+\delta)\right)x + \lambda c_1c_2 + c_1^2\alpha\beta + c_2^2\gamma\delta$ polinomunun kökleri $c_1A + c_2B$ matrisinin özdeğerleridir.

Sonuç 3.8. $A,\ B \in \mathbb{C}_n$ matrisleri, $\alpha \neq \beta$, $\gamma \neq \delta$ ve $AB \neq BA$ olacak şekilde sırasıyla $\{\alpha,\ \beta\}$ ve $\{\gamma,\ \delta\}$-kuadratik matrisler olsun. $aA + bB$ ve $a'A + b'B$ matrisleri köşegenleştirilebilir olacak şekilde $a,\ b,\ a',\ b' \in \mathbb{C}^*$ sayılarını alalım. $\mu \in \sigma(aA + bB) \setminus \{a\alpha + b\gamma,\ a\alpha + b\delta,\ a\beta + b\gamma,\ a\beta + b\delta\}$ olması durumunda

$$x^2-\left(a'(\alpha+\beta)+b'(\gamma+\delta)\right)x+\frac{1}{ab}\left(\mu\left(a(\alpha+\beta)+b(\gamma+\delta)-\mu\right)-a^2\alpha\beta-b^2\gamma\delta\right)a'b'+a'^2\,\alpha\beta+b'^2\,\gamma\delta$$

polinomunun kökleri $a'A+b'B$ matrisinin özdeğerleridir.

İspat. $\mu\in\sigma(aA+bB)\setminus\{a\alpha+b\gamma,\ a\alpha+b\delta,\ a\beta+b\gamma,\ a\beta+b\delta\}$ ise, Teorem 3.7 i)'ye göre,

$$\lambda=\frac{1}{ab}\left(\mu\left(a(\alpha+\beta)+b(\gamma+\delta)-\mu\right)-a^2\alpha\beta-b^2\gamma\delta\right)\in\sigma\left((\gamma+\delta)A+(\alpha+\beta)B-AB-BA\right)$$

yazılabilir. Buradan, $\mu\notin\{a\alpha+b\gamma,\ a\alpha+b\delta,\ a\beta+b\gamma,\ a\beta+b\delta\}$ olduğu dikkate alınırsa, $\lambda\notin\{\alpha\gamma+\beta\delta,\ \alpha\delta+\beta\gamma\}$ olduğu görülür. Dolayısıyla Teorem 3.7 ii)'ye göre $x^2-\left(a'(\alpha+\beta)+b'(\gamma+\delta)\right)x+\lambda a'b'+a'^2\,\alpha\beta+b'^2\,\gamma\delta$ polinomunun kökleri $a'A+b'B$ matrisinin özdeğerleridir. ■

Aşağıdaki teoremde, $A+B$ matrisinin spektrumu ile $AB-BA$ matrisinin spektrumu arasında bir ilişki kurulmaktadır.

Teorem 3.9. $A,\ B\in\mathbb{C}_n$ matrisleri, $\alpha\neq\beta$, $\gamma\neq\delta$ ve $AB\neq BA$ olacak şekilde sırasıyla $\{\alpha,\ \beta\}$ ve $\{\gamma,\ \delta\}$-kuadratik matrisler olsun. Ayrıca, $A+B$ matrisi köşegenleştirilebilir olsun. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur.

i) $\lambda\in\sigma(AB-BA)\setminus\{0\}$ ise, $\mu+\nu=\alpha+\beta+\gamma+\delta$ ve $\lambda^2=\left(\mu\nu-(\alpha+\gamma)(\beta+\delta)\right)\left(\mu\nu-(\alpha+\delta)(\beta+\gamma)\right)$ olacak şekilde $\mu,\ \nu\in\sigma(A+B)$ sayıları vardır.

ii) $\mu\in\sigma(A+B)\setminus\{\alpha+\gamma,\ \alpha+\delta,\ \beta+\gamma,\ \beta+\delta\}$ ise, $\phi=\mu(\alpha+\beta+\gamma+\delta-\mu)$ olmak üzere, $\lambda^2=\left(\phi-(\alpha+\gamma)(\beta+\delta)\right)\left(\phi-(\alpha+\delta)(\beta+\gamma)\right)$ olacak şekilde bir $\lambda\in\sigma(AB-BA)$ sayısı vardır.

İspat. Genelliği bozmaksızın, A ve B matrisleri (3.6)'daki gibi olsun. Bu durumda,

$$\left(AB-BA\right)^2 = S\left(\left(\bigoplus_{i=1}^{k}(A_iB_i-B_iA_i)^2\right)\oplus\mathbf{0}\right)S^{-1} \tag{3.14}$$

yazılabilir. Ayrıca, Teorem 3.1 iii)$\Rightarrow$iv)'nin ispatına göre $A=(\alpha-\beta)X+\beta I_n$ ve $B=(\gamma-\delta)Y+\delta I_n$ olacak şekilde X ve Y idempotent matrisleri vardır. $AB\neq BA$, $\alpha\neq\beta$ ve $\gamma\neq\delta$ olduğundan, $XY\neq YX$ bulunur. $A+B$ matrisi köşegenleştirilebilir olduğundan, $(\alpha-\beta)X+(\gamma-\delta)Y$ matrisi de köşegenleştirilebilirdir. Böylece, Teorem 2.57 iii)'ye göre, $i=1,\ldots,k$ için

$$K_i=(1-\rho_i^*)I_{x_i}, \tag{3.15}$$

$$L_iM_i=\rho_i^*(1-\rho_i^*)I_{x_i},\quad M_iL_i=\rho_i^*(1-\rho_i^*)I_{m_i-x_i} \tag{3.16}$$

ve

$$N_i=\rho_i^*I_{m_i-x_i} \tag{3.17}$$

olmak üzere

$$X_i=S_i\begin{bmatrix} I_{x_i} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}S_i^{-1} \text{ ve } Y_i=S_i\begin{bmatrix} K_i & L_i\\ M_i & N_i\end{bmatrix}S_i^{-1} \tag{3.18}$$

olacak şekilde S_i tersinir matrisleri vardır. Burada ξ_i ile η_i, (3.7)'yi sağlayan birbirinden farklı karmaşık sayılar olmak üzere, $\rho_i{*}=\dfrac{\xi_i\eta_i}{(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)}$ ve $x_i=\mathrm{rank}(X_i)$'dir.

$i=1,\ldots,k$ için $A_i=(\alpha-\beta)X_i+\beta I_{m_i}$ olduğundan, (3.18)'e göre

$$A_i = S_i \begin{bmatrix} \alpha I_{x_i} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \beta I_{m_i - x_i} \end{bmatrix} S_i^{-1} \tag{3.19}$$

yazılabilir. Benzer şekilde $i = 1,\ldots,k$ için $B_i = (\gamma - \delta)Y_i + \delta I_{m_i}$ olduğundan, (3.15)-(3.18) eşitlikleri dikkate alınarak

$$V_i = (\gamma - \delta)K_i + \delta I_{x_i} = \left(\gamma - (\gamma - \delta)\rho_i^*\right) I_{x_i}\,, \tag{3.20}$$

$$F_i G_i = (\gamma - \delta)^2 L_i M_i = (\gamma - \delta)^2 \rho_i^* (1 - \rho_i^*) I_{x_i}\,, \tag{3.21}$$

$$G_i F_i = (\gamma - \delta)^2 M_i L_i = (\gamma - \delta)^2 \rho_i^* (1 - \rho_i^*) I_{m_i - x_i} \tag{3.22}$$

ve

$$W_i = (\gamma - \delta)N_i + \delta I_{m_i - x_i} = \left((\gamma - \delta)\rho_i^* + \delta\right) I_{m_i - x_i} \tag{3.23}$$

olmak üzere

$$B_i = S_i \begin{bmatrix} V_i & F_i \\ G_i & W_i \end{bmatrix} S_i^{-1} \tag{3.24}$$

yazılabilir.

Öte yandan, (3.9) ve (3.11) eşitlikleri göz önüne alınarak

$$\rho_i^* = \frac{1}{(\alpha - \beta)(\gamma - \delta)} \xi_i \eta_i = \frac{1}{(\alpha - \beta)(\gamma - \delta)} \left(\mu_i \nu_i - (\alpha + \gamma)(\beta + \delta)\right) \tag{3.25}$$

olduğu görülür. Buradan,

$$\gamma - (\gamma - \delta)\rho_i^* = -\frac{\mu_i \nu_i - \alpha(\beta + \gamma) - \delta(\alpha + \gamma)}{\alpha - \beta} \tag{3.26}$$

olur. Şimdi, $i=1,\ldots,k$ için ρ_i'yi

$$\rho_i = \frac{\mu_i \nu_i - \alpha(\beta+\gamma) - \delta(\alpha+\gamma)}{\alpha-\beta} \tag{3.27}$$

olarak tanımlayalım. Böylece (3.26)'ya göre, $\gamma-(\gamma-\delta)\rho_i^* = -\rho_i$ ve dolayısıyla $\rho_i^* = \dfrac{\xi_i \eta_i}{(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)}$ eşitliği de dikkate alınarak $\gamma+\rho_i = \dfrac{\xi_i\eta_i}{\alpha-\beta}$ bulunur. Buradan $\xi_i\eta_i = (\alpha-\beta)(\gamma+\rho_i)$ olur. $i=1,\ldots,k$ için $\rho_i^* = \dfrac{\xi_i\eta_i}{(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)}$ ve $\xi_i\eta_i = (\alpha-\beta)(\gamma+\rho_i)$ eşitliklerinden $\rho_i^*(1-\rho_i^*) = -\dfrac{(\gamma+\rho_i)(\delta+\rho_i)}{(\gamma-\delta)^2}$ olduğu açıktır. Böylece (3.21) ve (3.22) eşitliklerine göre

$$F_i G_i = -(\gamma+\rho_i)(\delta+\rho_i) I_{x_i} \quad \text{ve} \quad G_i F_i = -(\gamma+\rho_i)(\delta+\rho_i) I_{m_i - x_i} \tag{3.28}$$

yazılabilir. Öte yandan, (3.19), (3.24) ve (3.28) eşitliklerinden, $i=1,\ldots,k$ için

$$(A_i B_i - B_i A_i)^2 = (\alpha-\beta)^2(\gamma+\rho_i)(\delta+\rho_i) I_{m_i} \tag{3.29}$$

elde edilir.

Şimdi, $\lambda \in \sigma(AB-BA) \setminus \{0\}$ olsun. Buradan Teorem 2.22'ye göre $\lambda^2 \in \sigma\left((AB-BA)^2\right) \setminus \{0\}$ yazılabilir. Dolayısıyla Teorem 2.25 ve (3.14)'e göre $\lambda^2 \in \sigma\left((A_i B_i - B_i A_i)^2\right)$ olacak şekilde bir $i \in \{1,\ldots,k\}$ vardır. Sonuç 2.26 ile birlikte (3.11), (3.27) ve (3.29) eşitlikleri göz önüne alınmak suretiyle $\mu = \mu_i$ ve $\nu = \nu_i$ denirse, i)'de istenen sonuç elde edilir.

Şimdi de $\mu \in \sigma(A+B) \setminus \{\alpha+\gamma,\ \alpha+\delta,\ \beta+\gamma,\ \beta+\delta\}$ olsun. Bu durumda, Teorem 3.4'e göre $\mu \notin \sigma(A_0+B_0)$ olur. Böylece Teorem 2.25 ve (3.6) eşitliklerine göre

$\mu \in \sigma(A_i + B_i)$ olacak şekilde bir $i \in \{1,\dots,k\}$ vardır. O halde, (3.10), (3.11) ve (3.27) eşitlikleri göz önüne alınarak, (3.29) eşitliği ve Sonuç 2.26'ya göre $\rho = \dfrac{\mu(\alpha+\beta+\gamma+\delta-\mu)-\alpha(\beta+\gamma)-\delta(\alpha+\gamma)}{\alpha-\beta}$ olmak üzere, $(\alpha-\beta)^2(\gamma+\rho)(\delta+\rho) \in \sigma\left((A_iB_i - B_iA_i)^2\right) \subset \sigma\left((AB-BA)^2\right)$ olduğu görülür. Dolayısıyla Teorem 2.22'ye göre, $\lambda^2 = (\alpha-\beta)^2(\gamma+\rho)(\delta+\rho)$ olacak şekilde bir $\lambda \in \sigma(AB-BA)$ vardır. Böylece ii)'nin ispatı tamamlanır. ■

Aşağıdaki teoremde, $A+B$ matrisinin spektrumu ile $\alpha\beta B - ABA$ matrisinin spektrumu arasında bir ilişki kurulmaktadır.

Teorem 3.10. $A, B \in \mathbb{C}_n$ matrisleri, $\alpha \neq \beta$, $\gamma \neq \delta$ ve $AB \neq BA$ olacak şekilde sırasıyla $\{\alpha, \beta\}$ ve $\{\gamma, \delta\}$-kuadratik matrisler olsun. Ayrıca, $A+B$ matrisi köşegenleştirilebilir olsun. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur.

i) $\lambda \in \sigma(\alpha\beta B - ABA) \setminus \{\alpha\gamma(\beta-\alpha),\ \alpha\delta(\beta-\alpha),\ \beta\delta(\alpha-\beta),\ \beta\gamma(\alpha-\beta)\}$ ise,

$$x^2 - (\alpha+\beta+\gamma+\delta)x + \alpha(\beta+\gamma) + \delta(\alpha+\gamma) + \frac{1}{\alpha}\lambda$$

veya

$$x^2 - (\alpha+\beta+\gamma+\delta)x + \beta(\alpha+\delta) + \gamma(\beta+\delta) + \frac{1}{\beta}\lambda$$

polinomunun kökleri $A+B$ matrisinin özdeğerleridir.

ii) $\mu \in \sigma(A+B) \setminus \{\alpha+\gamma,\ \alpha+\delta,\ \beta+\gamma,\ \beta+\delta\}$ ise, $\tau = \mu(\alpha+\beta+\gamma+\delta-\mu)$ olmak üzere $\alpha\left(\tau - \alpha(\beta+\gamma) - \delta(\alpha+\gamma)\right)$ ve $\beta\left(\tau - \beta(\alpha+\delta) - \gamma(\beta+\delta)\right)$ karmaşık sayıları $\sigma(\alpha\beta B - ABA)$ kümesinin elemanıdır.

İspat. Genelliği bozmaksızın, A ve B matrisleri (3.6)'daki gibi olsun. Bu durumda,

$$\alpha\beta B - ABA = S\left(\left(\bigoplus_{i=1}^{k}(\alpha\beta B_i - A_iB_iA_i)\right) \oplus (\alpha\beta B_0 - A_0B_0A_0)\right)S^{-1} \tag{3.30}$$

yazılabilir. $X_0^{\ 2} = X_0$, $Y_0^{\ 2} = Y_0$ ve $X_0Y_0 = Y_0X_0$ olmak üzere $A_0 = (\alpha - \beta)X_0 + \beta I_{m_0}$ ve $B_0 = (\gamma - \delta)Y_0 + \delta I_{m_0}$ olduğundan,

$$\alpha\beta B_0 - A_0B_0A_0 = (\beta^2 - \alpha^2)\left((\gamma - \delta)X_0Y_0 + \delta X_0\right) + \beta(\alpha - \beta)\left((\gamma - \delta)Y_0 + \delta I_{m_0}\right) \tag{3.31}$$

bulunur. Ayrıca X_0 ve Y_0 matrisleri değişmeli olduğundan, Teorem 2.24 ve (3.31) eşitliğinden $\sigma(\alpha\beta B_0 - A_0B_0A_0) \subset \{\alpha\gamma(\beta - \alpha),\ \alpha\delta(\beta - \alpha),\ \beta\delta(\alpha - \beta),\ \beta\gamma(\alpha - \beta)\}$ olduğu görülür.

Şimdi, $\lambda \in \sigma(\alpha\beta B - ABA) \setminus \{\alpha\gamma(\beta - \alpha),\ \alpha\delta(\beta - \alpha),\ \beta\delta(\alpha - \beta),\ \beta\gamma(\alpha - \beta)\}$ olsun. Buradan, $\lambda \notin \sigma(\alpha\beta B_0 - A_0B_0A_0)$ yazılabilir. Böylece, Teorem 2.25 ve (3.30)'a göre, $\lambda \in \sigma(\alpha\beta B_i - A_iB_iA_i)$ olacak şekilde bir $i \in \{1, \ldots, k\}$ vardır. Öte yandan, (3.19) ve (3.24) eşitliklerinden, $i = 1, \ldots, k$ için

$$\alpha\beta B_i - A_iB_iA_i = S_i\begin{bmatrix} \alpha(\beta - \alpha)V_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \beta(\alpha - \beta)W_i \end{bmatrix}S_i^{-1} \tag{3.32}$$

olur. (3.20) ve (3.26)'dan $i = 1, \ldots, k$ için $\rho_i = \dfrac{\mu_i\nu_i - \alpha(\beta + \gamma) - \delta(\alpha + \gamma)}{\alpha - \beta}$ olmak üzere,

$$V_i = -\rho_i I_{x_i} \tag{3.33}$$

bağıntısı elde edilir. Benzer şekilde, (3.23) ve (3.25) eşitliklerinden de

$$W_i = \frac{\mu_i \nu_i - \gamma(\beta+\delta) - \beta(\alpha+\delta)}{\alpha-\beta} I_{m_i - x_i} \qquad (3.34)$$

bulunur. (3.32)-(3.34) eşitlikleri birlikte düşünülürse, Teorem 2.25'e göre $\lambda = \alpha\left(\mu_i\nu_i - \alpha(\beta+\gamma) - \delta(\alpha+\gamma)\right)$ veya $\lambda = \beta\left(\mu_i\nu_i - \beta(\alpha+\delta) - \gamma(\beta+\delta)\right)$ olduğu görülür. Buradan $\mu_i\nu_i = \frac{1}{\alpha}\lambda + \alpha(\beta+\gamma) + \delta(\alpha+\gamma)$ veya $\mu_i\nu_i = \frac{1}{\beta}\lambda + \beta(\alpha+\delta) + \gamma(\beta+\delta)$ yazılabilir. Dolayısıyla, (3.11) eşitliği,

$$x^2 - (\alpha+\beta+\gamma+\delta)x + \alpha(\beta+\gamma) + \delta(\alpha+\gamma) + \frac{1}{\alpha}\lambda$$

veya

$$x^2 - (\alpha+\beta+\gamma+\delta)x + \beta(\alpha+\delta) + \gamma(\beta+\delta) + \frac{1}{\beta}\lambda$$

polinomunun köklerinin $A+B$ matrisinin özdeğerleri olduğunu garantiler. Böylece i)'nin ispatı tamamlanır.

Şimdi de $\mu \in \sigma(A+B) \setminus \{\alpha+\gamma,\ \alpha+\delta,\ \beta+\gamma,\ \beta+\delta\}$ olsun. Bu durumda, Teorem 3.4'e göre $\mu \notin \sigma(A_0+B_0)$ yazılabilir. Dolayısıyla, (3.6) eşitliklerine ve Teorem 2.25'e göre $\mu \in \sigma(A_i+B_i)$ olacak şekilde bir $i \in \{1,\dots,k\}$ vardır. Buradan, (3.10) ve (3.11) eşitlikleri dikkate alınarak, $\sigma(A_i+B_i) = \{\mu,\ \alpha+\beta+\gamma+\delta-\mu\}$ yazılabilir. Böylece, Teorem 2.25 ve (3.32)-(3.34) eşitlikleri göz önüne alınarak, $\alpha\left(\mu(\alpha+\beta+\gamma+\delta-\mu) - \alpha(\beta+\gamma) - \delta(\alpha+\gamma)\right)$, $\beta\left(\mu(\alpha+\beta+\gamma+\delta-\mu) - \beta(\alpha+\delta) - \gamma(\beta+\delta)\right)$ karmaşık sayılarının $\sigma(\alpha\beta B_i - A_iB_iA_i)$ kümesinin elemanı olduğu görülür. $\sigma(\alpha\beta B_i - A_iB_iA_i) \subset \sigma(\alpha\beta B - ABA)$ olduğundan ii)'de istenen elde edilir. ■

Aşağıdaki teoremde, $A+B$ matrisinin spektrumu ile $\alpha BAB-(AB)^2$ matrisinin spektrumu arasında bir ilişki kurulmaktadır.

Teorem 3.11. $A,\ B\in\mathbb{C}_n$ matrisleri, $\alpha\neq\beta$, $\gamma\neq\delta$ ve $AB\neq BA$ olacak şekilde sırasıyla $\{\alpha,\ \beta\}$ ve $\{\gamma,\ \delta\}$-kuadratik matrisler olsun. Ayrıca, $A+B$ matrisi köşegenleştirilebilir olsun. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur.

i) $\lambda\in\sigma(\alpha BAB-(AB)^2)\setminus\{0,\ \beta\gamma^2(\alpha-\beta),\ \beta\delta^2(\alpha-\beta)\}$ ise,

$$x^2-(\alpha+\beta+\gamma+\delta)x+\frac{1}{2}\left((\alpha+2\beta)(\gamma+\delta)\pm\sqrt{\alpha^2(\gamma-\delta)^2+4(\alpha\beta\gamma\delta-\lambda)}\right)+\alpha\beta+\gamma\delta$$

polinomunun kökleri $A+B$ matrisinin özdeğerleridir.

ii) $\mu\in\sigma(A+B)\setminus\{\alpha+\gamma,\ \alpha+\delta,\ \beta+\gamma,\ \beta+\delta\}$ ise,

$\vartheta=\mu(\alpha+\beta+\gamma+\delta-\mu)-\alpha\beta-\gamma\delta$ ve $\omega=2\beta^2-\alpha^2-\alpha\beta$ olmak üzere,

$$-\vartheta^2-\frac{1}{\alpha-\beta}\left((\gamma+\delta)\omega\vartheta+\alpha(\alpha\delta+\beta\gamma)(\alpha\gamma+\beta\delta)-\beta^3(\gamma+\delta)^2\right)\in\sigma\left(\alpha BAB-(AB)^2\right)$$

dir.

İspat. Genelliği bozmaksızın, A ve B matrisleri (3.6)'daki gibi olsun. Bu durumda

$$\alpha BAB-(AB)^2=S\left(\left(\bigoplus_{i=1}^{k}\left(\alpha B_iA_iB_i-(A_iB_i)^2\right)\right)\oplus\left(\alpha B_0A_0B_0-(A_0B_0)^2\right)\right)S^{-1} \tag{3.35}$$

yazılabilir. $A_0=(\alpha-\beta)X_0+\beta I_{m_0}$, $B_0=(\gamma-\delta)Y_0+\delta I_{m_0}$ ve $X_0Y_0=Y_0X_0$ olduğundan

$$\alpha B_0A_0B_0-(A_0B_0)^2=\beta(\beta-\alpha)(\gamma^2-\delta^2)(X_0Y_0-Y_0)+\beta\delta^2(\beta-\alpha)(X_0-I_{m_0}) \tag{3.36}$$

bulunur. X_0 ve Y_0 matrisleri değişmeli olduğundan, Teorem 2.24 ve (3.36)'ya göre $\sigma\left(\alpha B_0A_0B_0-(A_0B_0)^2\right)\subset\{0,\ \beta\gamma^2(\alpha-\beta),\ \beta\delta^2(\alpha-\beta)\}$ olduğu görülür.

Şimdi $\lambda \in \sigma\left(\alpha BAB-(AB)^2\right) \setminus \left\{0,\ \beta\gamma^2(\alpha-\beta),\ \beta\delta^2(\alpha-\beta)\right\}$ olsun. Buradan $\lambda \notin \sigma\left(\alpha B_0A_0B_0-(A_0B_0)^2\right)$ yazılabilir. Böylece (3.35) ve Teorem 2.25'e göre $\lambda \in \sigma\left(\alpha B_iA_iB_i-(A_iB_i)^2\right)$ olacak şekilde bir $i \in \{1,\dots,k\}$ vardır. (3.19) ve (3.24) eşitliklerine göre $i=1,\dots,k$ için

$$\alpha B_iA_iB_i-(A_iB_i)^2 = S_i \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ (\alpha-\beta)(\alpha G_iV_i+\beta W_iG_i) & (\alpha-\beta)(\alpha G_iF_i+\beta W_i^2) \end{bmatrix} S_i^{-1} \quad (3.37)$$

yazılabilir. Öte yandan (3.23), (3.25), (3.27) ve (3.28) eşitliklerine göre, $\vartheta_i=\mu_i\nu_i-\alpha\beta-\gamma\delta$ ve $\omega=2\beta^2-\alpha^2-\alpha\beta$ olmak üzere,

$$(\alpha-\beta)(\alpha G_iF_i+\beta W_i^2)=\left[-\vartheta_i^2-\frac{1}{\alpha-\beta}\left(\omega(\gamma+\delta)\vartheta_i+\alpha(\alpha\delta+\beta\gamma)(\alpha\gamma+\beta\delta)-\beta^3(\gamma+\delta)^2\right)\right]I_{m_i-x_i} \quad (3.38)$$

olduğu görülür. Böylece, (3.37) dikkate alınarak

$$\lambda=-(\mu_i\nu_i-\alpha\beta-\gamma\delta)^2-\frac{1}{\alpha-\beta}\left((\gamma+\delta)(2\beta^2-\alpha^2-\alpha\beta)(\mu_i\nu_i-\alpha\beta-\gamma\delta)+\alpha(\alpha\delta+\gamma\beta)(\alpha\gamma+\beta\delta)-\beta^3(\gamma+\delta)^2\right)$$

yazılabilir. Buradan

$$\mu_i\nu_i=\frac{1}{2}\left((\alpha+2\beta)(\gamma+\delta)\pm\sqrt{\alpha^2(\gamma-\delta)^2+4(\alpha\beta\gamma\delta-\lambda)}\right)+\alpha\beta+\gamma\delta$$

olur. (3.11) eşitliği göz önüne alınarak i)'deki iddianın doğru olduğu görülür.

Şimdi de $\mu \in \sigma(A+B) \setminus \{\alpha+\gamma,\ \alpha+\delta,\ \beta+\gamma,\ \beta+\delta\}$ olsun. Bu durumda, Teorem 3.4'ten $\mu \notin \sigma(A_0+B_0)$ yazılabilir. Dolayısıyla, (3.6) eşitliklerine ve Teorem 2.25'e göre, $\mu \in \sigma(A_i+B_i)$ olacak şekilde bir $i \in \{1,\dots,k\}$ vardır. O halde, (3.10) ve (3.11) eşitlikleri göz önüne alınarak, $\sigma(A_i+B_i)=\{\mu,\ \alpha+\beta+\gamma+\delta-\mu\}$ olduğu görülür.

Böylece, $\sigma\left(\alpha B_i A_i B_i-(A_i B_i)^2\right)\subset\sigma\left(\alpha BAB-(AB)^2\right)$ olduğu dikkate alınarak, Teorem 2.25, (3.37) ve (3.38)'den ii)'de istenen sonuç elde edilir. ■

Aşağıdaki teoremde, $A+B$ matrisinin spektrumu ile $\beta B-AB$ matrisinin spektrumu arasında bir ilişki kurulmaktadır.

Teorem 3.12. $A, B\in\mathbb{C}_n$ matrisleri, $\alpha\neq\beta$, $\gamma\neq\delta$ ve $AB\neq BA$ olmak üzere sırasıyla $\{\alpha,\ \beta\}$ ve $\{\gamma,\ \delta\}$-kuadratik matrisler olsun. Ayrıca, $A+B$ matrisi köşegenleştirilebilir olsun. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur.

i) $\lambda\in\sigma(\beta B-AB)\setminus\{0,\ \gamma(\beta-\alpha),\ \delta(\beta-\alpha)\}$ ise, $x^2-(\alpha+\beta+\gamma+\delta)x+\lambda+\alpha(\beta+\gamma)+\delta(\alpha+\gamma)$ polinomunun kökleri $A+B$ matrisinin özdeğerleridir.

ii) $\mu\in\sigma(A+B)\setminus\{\alpha+\gamma,\ \alpha+\delta,\ \beta+\gamma,\ \beta+\delta\}$ ise, $\mu(\alpha+\beta+\gamma+\delta-\mu)-\alpha(\beta+\gamma)-\delta(\alpha+\gamma)\in\sigma(\beta B-AB)$'dir.

İspat. Genelliği bozmaksızın, A ve B matrisleri (3.6)'daki gibi olsun. Bu durumda,

$$\beta B-AB=S\left(\left(\bigoplus_{i=1}^{k}(\beta B_i-A_iB_i)\right)\oplus(\beta B_0-A_0B_0)\right)S^{-1} \tag{3.39}$$

yazılabilir. (3.19), (3.24) ve (3.33)'e göre $i=1,\ldots,k$ için $\rho_i=\dfrac{\mu_i\nu_i-\alpha(\beta+\gamma)-\delta(\alpha+\gamma)}{\alpha-\beta}$ olmak üzere

$$\beta B_i-A_iB_i=S_i\begin{bmatrix}(\alpha-\beta)\rho_i I_{x_i} & (\beta-\alpha)F_i\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}S_i^{-1} \tag{3.40}$$

bulunur. Öte yandan, $\beta B_0 - A_0B_0 = (\beta-\alpha)(\gamma-\delta)X_0Y_0 + \delta(\beta-\alpha)X_0$ olup, X_0 ve Y_0 matrisleri değişmeli idempotent matrisler olduğundan, Teorem 2.24'e göre $\sigma(\beta B_0 - A_0B_0) \subset \{0,\ \gamma(\beta-\alpha),\ \delta(\beta-\alpha)\}$ yazılabilir.

Şimdi, $\lambda \in \sigma(\beta B - AB) \setminus \{0,\ \gamma(\beta-\alpha),\ \gamma(\beta-\alpha)\}$ olsun. Bu durumda, (3.39) ve Teorem 2.25'e göre $\lambda \in \sigma(\beta B_i - A_iB_i)$ ve dolayısıyla (3.40) eşitliğine göre $\lambda = (\alpha-\beta)\rho_i$ olacak şekilde bir $i \in \{1,\dots,k\}$ vardır. Ayrıca (3.11) ve (3.27) eşitliklerine göre $\rho_i = \dfrac{\mu\nu - \alpha(\beta+\gamma) - \delta(\alpha+\gamma)}{\alpha-\beta}$ ve $\mu+\nu = \alpha+\beta+\gamma+\delta$ olacak şekilde $\mu,\ \nu \in \sigma(A+B)$ sayıları vardır. Dolayısıyla $\mu\nu = \lambda + \alpha(\beta+\gamma) + \delta(\alpha+\gamma)$ ve $\mu+\nu = \alpha+\beta+\gamma+\delta$ yazılabilir. Böylece μ ve ν, i)'de bahsedilen polinomun kökleridir.

Şimdi de $\mu \in \sigma(A+B) \setminus \{\alpha+\gamma,\ \alpha+\delta,\ \beta+\gamma,\ \beta+\delta\}$ olsun. Bu durumda, Teorem 3.4'e göre $\mu \notin \sigma(A_0+B_0)$ yazılabilir. Dolayısıyla, (3.6) eşitliklerine ve Teorem 2.25'e göre, $\mu \in \sigma(A_i+B_i)$ olacak şekilde bir $i \in \{1,\dots,k\}$ vardır. O halde, (3.10) ve (3.11) eşitlikleri göz önüne alınarak, $\sigma(A_i+B_i) = \{\mu,\ \alpha+\beta+\gamma+\delta-\mu\}$ yazılabilir. Buradan, Teorem 2.25 ile birlikte (3.27) ve (3.40) eşitlikleri dikkate alınarak, $\mu(\alpha+\beta+\gamma+\delta-\mu) - \alpha(\beta+\gamma) - \delta(\alpha+\gamma) \in \sigma(\beta B_i - A_iB_i) \subset \sigma(\beta B - AB)$ olduğu görülür. Böylece ii)'nin ispatı tamamlanır. ■

BÖLÜM 4. İKİ GENELLEŞTİRİLMİŞ KUADRATİK MATRİSTEN TÜRETİLEN BAZI MATRİSLERİN SPEKTRUMLARI

4.1. Giriş

Bu bölümde, önceki bölümde kuadratik matrisler ele alınarak yapılan çalışma, orada kullanılandan farklı bir yöntem ile iki genelleştirilmiş kuadratik matris çiftine genişletilmektedir. Bunun için öncelikle, esas sonuçları türetmede yardımcı olacak olan iki sonuç ve daha sonra esas sonuçlar verilmektedir.

4.2. Ön Bilgiler

A ve B matrisleri sırasıyla P ve Q idempotent matrislerine göre genelleştirilmiş $\{\alpha_1, \beta_1\}$ ve genelleştirilmiş $\{\alpha_2, \beta_2\}$-kuadratik matrisler olsun. Kolaylıkla görülebilir ki bir M kare matrisi için $M \in \mathfrak{L}(P;\, a,\, b)$ olması için gerek ve yeter koşul her $c \in \mathbb{C}^*$ için $cM \in \mathfrak{L}(P;\, ca,\, cb)$ olmasıdır. Böylece $c_1, c_2 \in \mathbb{C}^*$ olmak üzere $c_1A + c_2B$ matrisinin spektrumu yerine $A+B$ matrisinin spektrumu çalışılacaktır.

Aşağıdaki teorem, A ve B matrislerinin değişmeli olması durumunda, $A+B$ matrisinin spektrumu hakkında bilgi verir.

Teorem 4.1. $A, B \in \mathbb{C}_n$ olmak üzere, $A \in \mathfrak{L}(P;\, \alpha,\, \beta)$ ve $B \in \mathfrak{L}(Q;\, \gamma,\, \delta)$ olsun. $AB = BA$ ise, bu durumda $\sigma(A+B) \subset \{0,\, \alpha,\, \beta\} + \{0,\, \gamma,\, \delta\}$'dır.

İspat. P bir idempotent matris olduğundan, Teorem 2.33, Teorem 2.48 ve Teorem 2.51'e göre, $r = \operatorname{rank}(P)$ olmak üzere $P = S(I_r \oplus \mathbf{0})S^{-1}$ olacak şekilde bir $S \in \mathbb{C}_n$

tersinir matrisi vardır. $AP = PA = A$ olduğundan, bir $X \in \mathbb{C}_r$ için $A = S(X \oplus \mathbf{0})S^{-1}$ yazılabilir. Ayrıca, $(A-\alpha P)(A-\beta P) = \mathbf{0}$ olduğundan $(X-\alpha I_r)(X-\beta I_r) = \mathbf{0}$ veya denk olarak $X^2 - (\alpha+\beta)X + \alpha\beta I_r = \mathbf{0}$ eşitliği gerçeklenir. Buradan, $\lambda \in \sigma(X)$ ise, Teorem 2.22'ye göre $\lambda^2 - (\alpha+\beta)\lambda + \alpha\beta = 0$ ve dolayısıyla $\lambda \in \{\alpha,\ \beta\}$ yazılabilir. $A = S(X \oplus \mathbf{0})S^{-1}$ olduğu dikkate alınırsa Teorem 2.25'e göre $\sigma(A) \subset \{0\} \cup \sigma(X) \subset \{0,\ \alpha,\ \beta\}$ olur. Benzer şekilde, $\sigma(B) \subset \{0,\ \gamma,\ \delta\}$ ifadesi de elde edilebilir. Böylece, A ve B matrislerine Teorem 2.24 uygulanırsa istenen sonuca varılır. ■

Aslında Teorem 2.62'ye göre $\sigma(A) \subset \{0,\ \alpha,\ \beta\}$ ve $\sigma(B) \subset \{0,\ \gamma,\ \delta\}$ olduğu açıktır. Buradan, Teorem 2.24 de dikkate alınarak, Teorem 4.1'deki iddianın doğruluğu görülebilir. Fakat, bütünlük olması adına, yukarıdaki ispat direkt olarak yapılmıştır.

Aşağıdaki lemma, A ve B matrislerinin değişmeli olmaması durumunda $A+B$ matrisinin spektrumu ile A ve B matrislerinden türetilen bazı matrislerin spektrumları arasındaki ilişkileri ortaya koymak için oldukça kullanışlıdır.

Lemma 4.2. $A,\ B \in \mathbb{C}_n$ olmak üzere $A \in \mathfrak{L}(P;\ \alpha,\ \beta)$ ve $B \in \mathfrak{L}(Q;\ \gamma,\ \delta)$ olsun. Ayrıca, $(A+B)(\alpha\beta P - \gamma\delta Q) = (\alpha\beta P - \gamma\delta Q)(A+B)$, $AB \neq BA$ ve $A+B$ matrisi köşegenleştirilebilir olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur.

i)

$$A = S\left(\left(\bigoplus_{i=1}^{k} A_i\right) \oplus A_0\right)S^{-1}, \quad B = S\left(\left(\bigoplus_{i=1}^{k} B_i\right) \oplus B_0\right)S^{-1},$$

$$P = S\left(\left(\bigoplus_{i=1}^{k} P_i\right) \oplus P_0\right)S^{-1}, \quad Q = S\left(\left(\bigoplus_{i=1}^{k} Q_i\right) \oplus Q_0\right)S^{-1},$$

$A_0B_0 = B_0A_0$, $P_0Q_0 = Q_0P_0$ ve $i = 1,\ldots,k$ için $A_iB_i \neq B_iA_i$ olacak şekilde bir $S \in \mathbb{C}_n$ tersinir matrisi, $m_0 + m_1 + \cdots + m_k = n$ olmak üzere $i = 0,1,\ldots,k$ için $P_i,\ Q_i \in \mathbb{C}_{m_i}$ idempotent matrisleri, $A_i \in \mathfrak{L}(P_i;\ \alpha,\ \beta)$ ve $B_i \in \mathfrak{L}(Q_i;\ \gamma,\ \delta)$ matrisleri vardır.

ii) $i = 1,\ldots,k$ için

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = \mu_i + \nu_i, \quad \sigma(A_i + B_i) = \{\mu_i,\ \nu_i\} \tag{4.1}$$

ve

$$A_iB_i + B_iA_i + \mu_i\nu_i I_{m_i} = (\gamma + \delta)A_i + (\alpha + \beta)B_i + \alpha\beta P_i + \gamma\delta Q_i \tag{4.2}$$

olacak şekilde $\mu_1, \nu_1, \ldots, \mu_k, \nu_k$ farklı karmaşık sayıları vardır.

iii) Eğer $\alpha \neq \beta$ ve $PQ = QP$ ise, $i = 1,\ldots,k$ için

$$A_i = S_i \begin{bmatrix} \alpha I_{x_i} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \beta I_{y_i} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} S_i^{-1}, \qquad P_i = S_i \begin{bmatrix} I_{x_i} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_{y_i} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} S_i^{-1}$$

ve

$$B_i = S_i \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & \mathbf{0} \\ M_{21} & M_{22} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & M_{33} \end{bmatrix} S_i^{-1}, \qquad Q_i = S_i \begin{bmatrix} Y_{11} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Y_{22} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & Y_{33} \end{bmatrix} S_i^{-1}$$

olacak şekilde S_i tersinir matrisleri vardır. Burada, $r_i = \mathrm{rank}(P_i)$ olmak üzere, $0 < x_i,\ y_i < r_i$, $M_{11},\ Y_{11} \in \mathbb{C}_{x_i}$, $M_{22},\ Y_{22} \in \mathbb{C}_{y_i}$, $M_{33},\ Y_{33} \in \mathbb{C}_{m_i-(x_i+y_i)}$,

$$(\alpha-\beta)M_{11}-\gamma\delta Y_{11}=\left(\alpha(\beta+\gamma+\delta)-\mu_i\nu_i\right)I_{x_i},$$

$$(\beta-\alpha)M_{22}-\gamma\delta Y_{22}=\left(\beta(\alpha+\gamma+\delta)-\mu_i\nu_i\right)I_{y_i}$$

ve

$$(\alpha+\beta)M_{33}+\gamma\delta Y_{33}=\mu_i\nu_i I_{m_i-(x_i+y_i)}$$

dir.

İspat. İlk olarak lemmanın i) ve ii) şıkları ispatlanacaktır.

$X=A+B$ olsun. X matrisi köşegenleştirilebilir olduğundan, Teorem 2.33'e göre $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ farklı karmaşık sayılar ve $p_1+\cdots+p_m=n$ olmak üzere,

$$X=S(\lambda_1 I_{p_1}\oplus\cdots\oplus\lambda_m I_{p_m})S^{-1} \tag{4.3}$$

olacak şekilde bir $S\in\mathbb{C}_n$ tersinir matrisi vardır. Genelliği bozmaksızın, A, P ve Q matrislerini, $i=1,\ldots,m$ için $A_{ii},\ P_{ii},\ Q_{ii}\in\ \mathbb{C}_{p_i}$ olmak üzere,

$$A=S\begin{bmatrix}A_{11}&\cdots&A_{1m}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ A_{m1}&\cdots&A_{mm}\end{bmatrix}S^{-1},\qquad P=S\begin{bmatrix}P_{11}&\cdots&P_{1m}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ P_{m1}&\cdots&P_{mm}\end{bmatrix}S^{-1}$$

ve

$$Q=S\begin{bmatrix}Q_{11}&\cdots&Q_{1m}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ Q_{m1}&\cdots&Q_{mm}\end{bmatrix}S^{-1}$$

şeklinde yazalım. Buradan, (4.3) eşitliği dikkate alınarak

$$AX = S\begin{bmatrix} \lambda_1 A_{11} & \cdots & \lambda_m A_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1 A_{m1} & \cdots & \lambda_m A_{mm} \end{bmatrix} S^{-1} \quad \text{ve} \quad XA = S\begin{bmatrix} \lambda_1 A_{11} & \cdots & \lambda_1 A_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_m A_{m1} & \cdots & \lambda_m A_{mm} \end{bmatrix} S^{-1}$$

elde edilir. Öte yandan, $AB \neq BA$ olduğundan, $AX \neq XA$ olur. Dolayısıyla $i_0 \neq j_0$ ve $\lambda_{i_0} A_{i_0 j_0} \neq \lambda_{j_0} A_{i_0 j_0}$ olacak şekilde $i_0, j_0 \in \{1,\ldots,m\}$ vardır. Özellikle, $A_{i_0 j_0} \neq \mathbf{0}$ 'dır. $X = A + B$, $A^2 = (\alpha+\beta)A - \alpha\beta P$ ve $B^2 = (\gamma+\delta)B - \gamma\delta Q$ eşitlikleri çerçevesinde

$$X^2 + (\alpha+\beta+\gamma+\delta)A - \alpha\beta P = (\gamma+\delta)X + AX + XA - \gamma\delta Q$$

elde edilir. Buradan, eğer $i, j \in \{1,\ldots,m\}$ ve $i \neq j$ ise, bu durumda

$$(\alpha+\beta+\gamma+\delta)A_{ij} - \alpha\beta P_{ij} = (\lambda_i + \lambda_j)A_{ij} - \gamma\delta Q_{ij} \tag{4.4}$$

yazılabilir. $\alpha\beta P - \gamma\delta Q$ matrisini W ile gösterelim ve bu matrisi $i = 1,\ldots,m$ için $W_{ii} \in \mathbb{C}_{p_i}$ olmak üzere $W = S[W_{ij}]S^{-1}$ şeklinde parçalayalım. (4.3)'ten

$$WX = S\begin{bmatrix} \lambda_1 W_{11} & \cdots & \lambda_m W_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1 W_{m1} & \cdots & \lambda_m W_{mm} \end{bmatrix} S^{-1} \quad \text{ve} \quad XW = S\begin{bmatrix} \lambda_1 W_{11} & \cdots & \lambda_1 W_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_m W_{m1} & \cdots & \lambda_m W_{mm} \end{bmatrix} S^{-1}$$

olduğu açıktır. Eğer $i \neq j$ ise, bu durumda $WX = XW$ ve $\lambda_i \neq \lambda_j$ ifadeleri, $W_{ij} = \mathbf{0}$ eşitliğini verir. Böylece, $i \neq j$ ve $i, j \in \{1,\ldots,m\}$ için

$$\alpha\beta P_{ij} = \gamma\delta Q_{ij} \tag{4.5}$$

bulunur. (4.4) ve (4.5) birlikte göz önüne alınırsa, $i \neq j$ ve $i, j \in \{1,\ldots,m\}$ için

$$(\alpha+\beta+\gamma+\delta)A_{ij}=(\lambda_i+\lambda_j)A_{ij} \tag{4.6}$$

elde edilir. $A_{i_0 j_0}\neq \mathbf{0}$ olduğundan (4.6) eşitliği $\lambda_{i_0}+\lambda_{j_0}=\alpha+\beta+\gamma+\delta$ ifadesini verir.

İndisleri, $i_0=1$ ve $j_0=2$ olacak şekilde yeniden düzenleyelim. Bu durumda, $\lambda_1+\lambda_2=\alpha+\beta+\gamma+\delta$ yazılabilir. $\alpha+\beta+\gamma+\delta=\lambda_1+\lambda_t$ olacak şekilde bir $t\in\{3,\ldots,m\}$'nin var olduğunu kabul edelim. Bu durumda, $\lambda_1+\lambda_2=\lambda_1+\lambda_t$ ve buradan da $\lambda_2=\lambda_t$ bulunur. Fakat bu durum, $i\neq j$ iken $\lambda_i\neq\lambda_j$ olması ile çelişir. Böylece, her $t\in\{3,\ldots,m\}$ için $\lambda_1+\lambda_t\neq\alpha+\beta+\gamma+\delta$ olur. Dolayısıyla, (4.6) eşitliğinden, her $t\in\{3,\ldots,m\}$ için $A_{1t}=\mathbf{0}$ bulunur. Ayrıca, simetriklikten dolayı her $t\in\{3,\ldots,m\}$ için $A_{2t}=\mathbf{0}$, $A_{t1}=\mathbf{0}$ ve $A_{t2}=\mathbf{0}$ elde edilir. Böylece A matrisi, $\widetilde{A}_1$ uygun boyutlu bir kare matris olmak üzere

$$A=S(A_1\oplus\widetilde{A}_1)S^{-1},\qquad A_1=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix},\qquad A_{11}\in\mathbb{C}_{p_1},\qquad A_{22}\in\mathbb{C}_{p_2} \tag{4.7}$$

şeklinde yazılabilir. $A^2=(\alpha+\beta)A-\alpha\beta P$ olduğundan, eğer $\alpha\beta\neq 0$ ise, bu durumda $A_1^2=(\alpha+\beta)A_1-\alpha\beta P_1$ ve $\widetilde{P}_1$, $\widetilde{A}_1^{\,2}=(\alpha+\beta)\widetilde{A}_1-\alpha\beta\widetilde{P}_1$ eşitliğini sağlayan uygun boyutlu bir kare matris olmak üzere,

$$P=S(P_1\oplus\widetilde{P}_1)S^{-1},\qquad P_1=\begin{bmatrix}P_{11} & P_{12}\\ P_{21} & P_{22}\end{bmatrix},\qquad P_{11}\in\mathbb{C}_{p_1},\qquad P_{22}\in\mathbb{C}_{p_2} \tag{4.8}$$

yazılabilir. P matrisinin idempotentliğinden, P_1 ve $\widetilde{P}_1$ matrislerinin birer idempotent olduğu görülür. Ayrıca $AP=PA=A$ olduğundan (4.7) ve (4.8) dikkate alınarak $A_1P_1=P_1A_1=A_1$ ve $\widetilde{A}_1\widetilde{P}_1=\widetilde{P}_1\widetilde{A}_1=\widetilde{A}_1$ eşitlikleri elde edilir. Dolayısıyla $A_1\in\mathfrak{L}(P_1;\ \alpha,\beta)$ ve $\widetilde{A}_1\in\mathfrak{L}(\widetilde{P}_1;\ \alpha,\beta)$ olur. Eğer $\alpha\beta=0$ ise, bu durumda $P=I_n$ alınabilir. Her iki durumda da P matrisinin $1,2$ ve $2,1-$blokları sıfırdır.

Buradan sonra $\mu_1 = \lambda_1,\ \nu_1 = \lambda_2,\ r_1 = p_1$ ve $s_1 = p_2$ olduğu kabul edilecektir. O halde, (4.3)'ten, Λ_2 uygun boyutlu bir köşegen matris olmak üzere

$$X = S\left((\mu_1 I_{r_1} \oplus \nu_1 I_{s_1}) \oplus \Lambda_2\right) S^{-1} \tag{4.9}$$

yazılabilir. $X = A + B$ olduğu dikkate alınırsa, (4.7) ve (4.9)'dan,

$$B = X - A = S\left(\left((\mu_1 I_{r_1} \oplus \nu_1 I_{s_1}) - A_1\right) \oplus (\Lambda_2 - \widetilde{A}_1)\right) S^{-1}$$

elde edilir. $B_1 = (\mu_1 I_{r_1} \oplus \nu_1 I_{s_1}) - A_1$ ve $\widetilde{B}_1 = \Lambda_2 - \widetilde{A}_1$ olarak tanımlanırsa,

$$B = S(B_1 \oplus \widetilde{B}_1) S^{-1} \tag{4.10}$$

olur. $B^2 = (\gamma + \delta)B - \gamma\delta Q$ olduğundan, $\gamma\delta \neq 0$ ise $B_1^2 = (\gamma + \delta)B_1 - \gamma\delta Q_1$ ve $\widetilde{B}_1^{\,2} = (\gamma + \delta)\widetilde{B}_1 - \gamma\delta\widetilde{Q}_1$ olmak üzere,

$$Q = S(Q_1 \oplus \widetilde{Q}_1)S^{-1}, \qquad Q_1 = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix}, \qquad Q_{11} \in \mathbb{C}_{p_1}, \qquad Q_{22} \in \mathbb{C}_{p_2} \tag{4.11}$$

elde edilir. Q bir idempotent olduğundan, Q_1 ve $\widetilde{Q}_1$ matrisleri de birer idempotenttir. Ayrıca $BQ = QB = B$ olduğundan (4.10) ve (4.11) eşitlikleri dikkate alınarak $B_1 Q_1 = Q_1 B_1 = B_1$ ve $\widetilde{B}_1\widetilde{Q}_1 = \widetilde{Q}_1\widetilde{B}_1 = \widetilde{B}_1$ olduğu görülür. Dolayısıyla, $B_1 \in \mathfrak{L}\left(Q_1;\ \gamma,\ \delta\right)$ ve $\widetilde{B}_1 \in \mathfrak{L}\left(\widetilde{Q}_1;\ \gamma,\ \delta\right)$ olur. Eğer $\gamma\delta = 0$ ise, bu durumda $Q = I_n$ alınabilir. Her iki durumda da Q matrisinin $1,2$ ve $2,1-$blokları sıfırdır. Eğer $\widetilde{A}_1\widetilde{B}_1 = \widetilde{B}_1\widetilde{A}_1$ ise, lemmanın i) şıkkının ispatını tamamlamak için $A_0 = \widetilde{A}_1$ ve $B_0 = \widetilde{B}_1$ almak yeterlidir. Ek olarak, $A_0 = \widetilde{A}_1$ ve $B_0 = \widetilde{B}_1$ olması durumunda $\alpha + \beta + \gamma + \delta = \mu_1 + \nu_1$ ve $A_1 + B_1 = \mu_1 I_{r_1} \oplus \nu_1 I_{s_1}$ olur. Böylece $\sigma(A_1 + B_1) = \{\mu_1,\ \nu_1\}$ olarak bulunur.

$\widetilde{A_1}\widetilde{B_1} \neq \widetilde{B_1}\widetilde{A_1}$ olsun. Teorem 2.35'e göre, $\widetilde{A_1}+\widetilde{B_1}$ matrisinin köşegenleştirilebilir olduğu açıktır. $\widetilde{A_1}$, $\widetilde{B_1}$, $\widetilde{P_1}$ ve $\widetilde{Q_1}$ matrisleri lemmanın diğer hipotezlerini de sağladığından, $A_2 \in \mathfrak{L}(P_2;\ \alpha,\ \beta)$, $\widetilde{A_2} \in \mathfrak{L}\left(\widetilde{P_2};\ \alpha,\ \beta\right)$, $B_2 \in \mathfrak{L}(Q_2;\ \gamma,\ \delta)$ ve $\widetilde{B_2} \in \mathfrak{L}\left(\widetilde{Q_2};\ \gamma,\ \delta\right)$ olmak üzere, $\widetilde{A_1} = A_2 \oplus \widetilde{A_2}$, $\widetilde{B_1} = B_2 \oplus \widetilde{B_2}$, $\widetilde{P_1} = P_2 \oplus \widetilde{P_2}$ ve $\widetilde{Q_1} = Q_2 \oplus \widetilde{Q_2}$ ifadelerini elde etmek için ispatın ilk adımı uygulanabilir. Bu şekilde $S^{-1}AS$ ve $S^{-1}BS$ matrislerinin karşılıklı olarak değişmeli olan bloklarına ulaşıncaya kadar devam edilerek lemmanın i) şıkkı ve ii) şıkkının (4.1) bağıntıları elde edilir (A ve B matrisleri sonlu boyutlu olduğundan $S^{-1}AS$ ve $S^{-1}BS$ matrisleri de sonlu boyutludur. Dolayısıyla bu matrisler, en fazla sonlu tane matrisin direkt toplamı olarak ifade edilebilirler. Fakat bu matrislerin mümkün olabilecek olan bütün parçalanmaları yapıldığında bile elde edilen son bloklar karşılıklı olarak değişmeli olmayabilir. Yani değişmeli olmayan bu son bloklar (4.1) bağıntılarını sağlayacak şekilde daha fazla alt matrislere parçalanamayabilir. Bu, lemmanın i) şıkkındaki A_0 ve B_0 bloklarının görünmeyeceği anlamına gelir. Bu durumda i) şıkkının ve ii) şıkkının (4.1) bağıntısının ispatı burada sonlandırılır).

Şimdi ii) şıkkının son eşitliği olan (4.2) eşitliği ispatlanacaktır.

$i = 1, \ldots, k$ için $A_i + B_i = \mu_i I_{r_i} \oplus \nu_i I_{s_i}$ olduğu açıktır. $m_i = r_i + s_i$ denirse, $(A_i + B_i - \mu_i I_{m_i})(A_i + B_i - \nu_i I_{m_i}) = \mathbf{0}$ olduğu görülür. Buradan $(A_i + B_i)^2 - (\mu_i + \nu_i)(A_i + B_i) + \mu_i \nu_i I_{m_i} = \mathbf{0}$ yazılabilir. Bu son eşitlikte, i) şıkkı ve ii) şıkkının burada ispatlanan (4.1) bağıntıları kullanılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa, (4.2) eşitliği elde edilir.

Şimdi de lemmanın iii) şıkkı ispatlanacaktır.

$i \in \{1, \ldots, k\}$ keyfi fakat sabit olsun. P_i bir idempotent matris olduğundan, Teorem 2.33, Teorem 2.48 ve Teorem 2.51'e göre, $r_i = \text{rank}(P_i)$ olmak üzere

$P_i = R_i(I_{r_i} \oplus \mathbf{0})R_i^{-1}$ olacak şekilde bir $R_i \in \mathbb{C}_{m_i}$ tersinir matrisi vardır. $K \in \mathbb{C}_{r_i}$ olmak üzere

$$A_i = R_i \begin{bmatrix} K & L \\ M & N \end{bmatrix} R_i^{-1}$$

olsun. $A_iP_i = P_iA_i = A_i$ eşitliklerinden $L = \mathbf{0}$, $M = \mathbf{0}$ ve $N = \mathbf{0}$ bulunur. Ayrıca, $(A_i - \alpha P_i)(A_i - \beta P_i) = \mathbf{0}$ olduğundan, $(K - \alpha I_{r_i})(K - \beta I_{r_i}) = \mathbf{0}$ eşitliği gerçeklenir. $\alpha \neq \beta$ olmak üzere, $(K - \alpha I_{r_i})(K - \beta I_{r_i}) = \mathbf{0}$ olduğundan Teorem 3.1'e göre K matrisi köşegenleştirilebilirdir ve $\sigma(K) \subset \{\alpha, \beta\}$ olur. Dolayısıyla, $K = T_i(\alpha I_{x_i} \oplus \beta I_{y_i})T_i^{-1}$ olacak şekilde bir $T_i \in \mathbb{C}_{r_i}$ tersinir matrisi ve $x_i, y_i \in \{0, \ldots, r_i\}$ vardır. S_i matrisi $S_i = R_i(T_i \oplus I_{m_i - r_i})$ ile tanımlanan bir tersinir matris ve $D = \alpha I_{x_i} \oplus \beta I_{y_i}$ olsun. Bu durumda,

$$A_i = S_i(D \oplus \mathbf{0})S_i^{-1} \quad \text{ve} \quad P_i = S_i(I_{r_i} \oplus \mathbf{0})S_i^{-1} \tag{4.12}$$

olduğunu görmek kolaydır. B_i ve Q_i matrisleri, $M_1, Y_1 \in \mathbb{C}_{r_i}$ olmak üzere,

$$B_i = S_i \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{bmatrix} S_i^{-1} \quad \text{ve} \quad Q_i = S_i \begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_3 & Y_4 \end{bmatrix} S_i^{-1} \tag{4.13}$$

şeklinde olsun. $Q_iP_i = P_iQ_i$ olduğundan, $Y_2 = \mathbf{0}$ ve $Y_3 = \mathbf{0}$ elde edilir. Böylece,

$$Q_i = S_i(Y_1 \oplus Y_4)S_i^{-1}$$

bulunur. $(A_i + B_i)(\alpha\beta P_i - \gamma\delta Q_i) = (\alpha\beta P_i - \gamma\delta Q_i)(A_i + B_i)$, $A_iP_i = P_iA_i = A_i$ ve $B_iQ_i = Q_iB_i = B_i$ eşitliklerinden de

$$\alpha\beta(P_iB_i - B_iP_i) = \gamma\delta(Q_iA_i - A_iQ_i)$$

elde edilir. Öte yandan (4.12) ve (4.13)'ten

$$P_iB_i - B_iP_i = S_i\begin{bmatrix} \mathbf{0} & M_2 \\ -M_3 & \mathbf{0} \end{bmatrix}S_i^{-1} \quad \text{ve} \quad Q_iA_i - A_iQ_i = S_i\begin{bmatrix} Y_1D - DY_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}S_i^{-1} \quad (4.14)$$

yazılabilir. Şimdi, dört durum söz konusudur:

Durum I. $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta \neq 0$ *olması durumu.*

Bu durumda $\alpha\beta(P_iB_i - B_iP_i) = \gamma\delta(Q_iA_i - A_iQ_i)$ eşitliğinden

$$M_2 = \mathbf{0}, \qquad M_3 = \mathbf{0}, \qquad Y_1D = DY_1 \qquad (4.15)$$

elde edilir. Buradan, (4.13)'e göre

$$B_i = S_i(M_1 \oplus M_4)S_i^{-1}$$

olur. $M_{11},\ Y_{11} \in \mathbb{C}_{x_i}$ olmak üzere

$$M_1 = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad Y_1 = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \qquad (4.16)$$

olsun. (4.15)'in ve (4.16)'nın son eşitlikleri, $\alpha \neq \beta$ olmak üzere $D = \alpha I_{x_i} \oplus \beta I_{y_i}$ eşitliği ile birlikte dikkate alınırsa, $Y_{12} = \mathbf{0}$ ve $Y_{21} = \mathbf{0}$ elde edilir.

Buradan sonra $Y_{33} = Y_4$ ve $M_{33} = M_4$ olarak alınacaktır.

Durum II. $\alpha\beta \neq 0$ *ve* $\gamma\delta = 0$ *olması durumu.*

Bu durumda, $\alpha\beta(P_iB_i - B_iP_i) = \gamma\delta(Q_iA_i - A_iQ_i)$ eşitliğinden $P_iB_i = B_iP_i$ elde edilir. Bu son eşitlik (4.14) ile birlikte göz önüne alınırsa, $M_2 = \mathbf{0}$ ve $M_3 = \mathbf{0}$ bulunur. Dolayısıyla, (4.13)'ün ilk eşitliğine göre $B_i = S_i(M_1 \oplus M_4)S_i^{-1}$ olur. $\gamma\delta = 0$ olduğundan, $Q = I_n$ alınabilir. Buradan, $Q_i = I_{m_i} = S_i(I_{x_i} \oplus I_{y_i} \oplus I_{m_i-(x_i+y_i)})S_i^{-1}$ yazılabilir. Bu durumda Y_{11}, Y_{22} ve Y_{33} matrisleri, özel olarak, uygun boyutlu birim matrisler olur. Böylece ilk durumun özel bir hali elde edilmiş olur.

Durum III. $\alpha\beta = 0$ *ve* $\gamma\delta \neq 0$ *olması durumu.*

Bu durumda, $\alpha\beta(P_iB_i - B_iP_i) = \gamma\delta(Q_iA_i - A_iQ_i)$ eşitliğinden $Q_iA_i = A_iQ_i$ elde edilir. Böylece (4.14)'ün ikinci eşitliğinden $Y_1D = DY_1$ olur. Y_1 matrisi (4.16)'daki gibi olsun. $\alpha \neq \beta$ ve $Y_1D = DY_1$ olduğundan $Y_{12} = \mathbf{0}$ ve $Y_{21} = \mathbf{0}$ elde edilir. Ayrıca $\alpha\beta = 0$ olduğundan $P = I_n$ alınabilir. Böylece $P_i = I_{m_i}$ olur. Bu, (4.12)'deki direkt toplamdaki son toplamların görünmeyeceği anlamına gelir. Böylece, yine ilk durumun bir özel hali elde edilir.

Durum IV. $\alpha\beta = 0$ *ve* $\gamma\delta = 0$ *olması durumu.*

Bu durumda, $P = Q = \mathrm{I}_n$ alınabilir ve böylece $P_i = Q_i = I_{m_i}$ olur. $P_i = I_{m_i}$ olduğundan, A_i ve P_i matrislerinin son blokları görünmez. $Q_i = I_{m_i}$ olması sebebiyle $Y_{11} = I_{x_i}$ ve $Y_{22} = I_{y_i}$ olur. Ayrıca Y_{33}(Q_i'nin) ve M_{33}(B_i'nin) blokları da görünmez. Böylece, yine ilk durumun özel bir hali elde edilmiş olur. Sonuç olarak, buradan sonra genelliği bozmaksızın, ilk durum göz önüne alınarak ilerlenecektir. Böylece A_i, B_i, P_i ve Q_i matrisleri iii)'deki gibi yazılabilir.

Yukarıdaki gözlemler çerçevesinde,

$$A_iB_i = S_i \begin{bmatrix} \alpha M_{11} & \alpha M_{12} & \mathbf{0} \\ \beta M_{21} & \beta M_{22} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} S_i^{-1} \quad \text{ve} \quad B_iA_i = S_i \begin{bmatrix} \alpha M_{11} & \beta M_{12} & \mathbf{0} \\ \alpha M_{21} & \beta M_{22} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} S_i^{-1} \quad (4.17)$$

olduğunu görmek kolaydır. Ayrıca, ii) şıkkının burada ispatlanan son bağıntısına, yani (4.2)'ye göre, $i = 1, \ldots, k$ için

$$A_iB_i + B_iA_i + \mu_i \nu_i I_{m_i} = (\gamma + \delta)A_i + (\alpha + \beta)B_i + \alpha\beta P_i + \gamma\delta Q_i$$

olduğu bilinmektedir. A_i, P_i, B_i ve Q_i matrislerinin iii)'deki ifadeleri ve (4.17) eşitlikleri, yukarıdaki son eşitlikte yerine koyulursa,

$$(\alpha - \beta)M_{11} - \gamma\delta Y_{11} = \left(\alpha\beta + (\gamma + \delta)\alpha - \mu_i \nu_i\right) I_{x_i},$$

$$(\beta - \alpha)M_{22} - \gamma\delta Y_{22} = \left(\alpha\beta + (\gamma + \delta)\beta - \mu_i \nu_i\right) I_{y_i}$$

ve

$$(\alpha + \beta)M_{33} + \gamma\delta Y_{33} = \mu_i \nu_i I_{m_i - (x_i + y_i)}$$

olduğu görülür. Böylece iii)'nin ve dolayısıyla lemmanın ispatı tamamlanır. ■

Lemma 4.2 i)'de A_0 ve B_0 bloklarının görünmeme ihtimaline karşılık, P_0 ve Q_0 bloklarının görünmeyebileceğine dikkat etmek gerekir.

Lemma 4.2 çerçevesinde aşağıdaki uyarının yapılmasında fayda vardır.

Uyarı 4.3. İlk olarak, Lemma 4.2 iii)'ye göre, $\alpha \neq \beta$ koşulu altında $i = 1, \ldots, k$ için α, β, γ, δ karmaşık sayıları ne olursa olsun $P_iB_i = B_iP_i$ ve $Q_iA_i = A_iQ_i$ eşitlikleri mevcuttur. Ayrıca aşağıdakiler doğrudur.

i) $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta \neq 0$ ise, bu durumda $P_0B_0 = B_0P_0$ ve $Q_0A_0 = A_0Q_0$ olduğundan, Lemma 4.2'deki $(A+B)(\alpha\beta P - \gamma\delta Q) = (\alpha\beta P - \gamma\delta Q)(A+B)$ koşulu, $\alpha \neq \beta$ ise $PB = BP$ ve $QA = AQ$ koşullarına denktir.

ii) $(A+B)(\alpha\beta P - \gamma\delta Q) = (\alpha\beta P - \gamma\delta Q)(A+B)$ koşulu, eğer $\alpha\beta \neq 0 = \gamma\delta$ ise $PB = BP$ koşuluna, $\alpha\beta = 0 \neq \gamma\delta$ ise $QA = AQ$ koşuluna denktir.

iii) $\alpha\beta = 0$ ve $\gamma\delta = 0$ olması durumunda, $(A+B)(\alpha\beta P - \gamma\delta Q) = (\alpha\beta P - \gamma\delta Q)(A+B)$ koşulu ortadan kalkar.

Ayrıca, Teorem 4.1 ve Lemma 4.2'nin aşağıdaki sonucu da verilebilir.

Sonuç 4.4. $A,\ B \in \mathbb{C}_n$ olmak üzere $A \in \mathfrak{L}(P;\ \alpha,\ \beta)$, $B \in \mathfrak{L}(Q;\ \gamma,\ \delta)$, $(A+B)(\alpha\beta P - \gamma\delta Q) = (\alpha\beta P - \gamma\delta Q)(A+B)$, $AB \neq BA$ ve $A+B$ matrisi köşegenleştirilebilir olsun. Eğer $\lambda \in \sigma(A+B) \setminus \left[\{0,\ \alpha,\ \beta\} + \{0,\ \gamma,\ \delta\}\right]$ ise, bu durumda $\lambda \neq \mu$ ve $\lambda + \mu = \alpha + \beta + \gamma + \delta$ olacak şekilde bir $\mu \in \sigma(A+B)$ sayısı vardır.

Bu bölümün buradan sonraki kısımlarında, iki genelleştirilmiş kuadratik matrisin toplamının köşegenleştirilebilir olup olmaması durumlarına göre irdeleme yapılacaktır.

4.3. İki Genelleştirilmiş Kuadratik Matrisin Toplamının Köşegenleştirilebilir Olduğu Durumundaki Sonuçlar

$A,\ B \in \mathbb{C}_n$ olmak üzere $A \in \mathfrak{L}(P;\ \alpha,\ \beta)$ ve $B \in \mathfrak{L}(Q;\ \gamma,\ \delta)$ olsun. Bu kısımda $(A+B)(\alpha\beta P - \gamma\delta Q) = (\alpha\beta P - \gamma\delta Q)(A+B)$, $PQ = QP$, $AB \neq BA$ ve $A+B$ matrisinin köşegenleştirilebilir olması koşuluyla $A+B$ matrisinin spektrumu ile A ve B matrislerinden türetilen bazı matrislerin spektrumları arasındaki bazı ilişkiler incelenmektedir.

Öncelikle, daha sonraki teoremlerin ispatı için bir araç niteliğinde olan aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 4.5. $A, B \in \mathbb{C}_n$ olmak üzere $A \in \mathfrak{L}(P;\ \alpha,\ \beta)$ ve $B \in \mathfrak{L}(Q;\ \gamma,\ \delta)$ olsun. Eğer $AB = BA$ ise, bu durumda aşağıdakiler doğrudur.

i) $PQ = QP$ olması durumunda, $\Gamma_1 = \{0,\ \alpha\beta,\ \gamma\delta,\ \alpha\beta + \gamma\delta\}$ ve $\Gamma_2 = \{0,\ \alpha(\gamma+\delta),\ \beta(\gamma+\delta),\ (\alpha+\beta)\gamma,\ (\alpha+\beta)\delta,\ \alpha\delta+\beta\gamma,\ \alpha\gamma+\beta\delta\}$ olmak üzere, $\sigma\big((\gamma+\delta)A + (\alpha+\beta)B + \alpha\beta P + \gamma\delta Q - AB - BA\big) \subset \Gamma_1 + \Gamma_2$ dir.

ii) $PB = BP$ ve $PQ = QP$ olması durumunda $\Psi_1 = \{0,\ -\beta\gamma,\ -\beta\delta,\ -\gamma\delta,\ -\gamma(\beta+\delta),\ -\delta(\beta+\gamma)\}$ ve $\Psi_2 = \{0,\ \alpha\gamma,\ \alpha\delta,\ \beta\gamma,\ \beta\delta\}$ olmak üzere, $\sigma(AB - \beta B - \gamma\delta PQ) \subset \Psi_1 + \Psi_2$ dir.

iii) $\Gamma = \{0,\ -\gamma\delta,\ (\alpha-\beta)\gamma,\ -(\beta-\alpha+\delta)\gamma,\ (\alpha-\beta)\delta,\ -(\beta-\alpha+\gamma)\delta\}$ olmak üzere, $\sigma\big((\alpha-\beta)B + BA - AB - \gamma\delta Q\big) \subset \Gamma$ 'dır.

İspat. i) P ve Q iki idempotent matris olduğundan, Teorem 2.24'e göre $\sigma(\alpha\beta P) \subset \{0,\ \alpha\beta\}$ ve $\sigma(\gamma\delta Q) \subset \{0,\ \gamma\delta\}$ olduğunu görmek kolaydır. Ayrıca $PQ = QP$ olduğundan, yine Teorem 2.24'e göre

$$\sigma(\alpha\beta P + \gamma\delta Q) \subset \Gamma_1 \tag{4.18}$$

yazılabilir. Öte yandan, A ve B matrisleri değişmeli olup, $\sigma(A) \subset \{0,\ \alpha,\ \beta\}$ ve $\sigma(B) \subset \{0,\ \gamma,\ \delta\}$ olduğundan, Teorem 2.24,

$$\sigma((\gamma+\delta)A + (\alpha+\beta)B - AB - BA) \subset \Gamma_2 \tag{4.19}$$

olduğunu garantiler. Ayrıca $\alpha\beta P+\gamma\delta Q$ ve $(\gamma+\delta)A+(\alpha+\beta)B-AB-BA$ matrisleri değişmeli matrislerdir. Dolayısıyla (4.18), (4.19) ve Teorem 2.24 dikkate alınarak i)'de istenen sonuç elde edilir.

ii) $BP=PB$ ve $BQ=QB=B$ olduğundan, $(\beta B)(\gamma\delta PQ)=(\gamma\delta PQ)(\beta B)$ olur. Ayrıca, P ve Q değişmeli iki idempotent matris olduğundan, PQ matrisi de bir idempotenttir. O halde, Teorem 2.24'e göre $\sigma(-\gamma\delta PQ)\subset\{0,\ -\gamma\delta\}$ yazılabilir. Öte yandan $\sigma(B)\subset\{0,\ \gamma,\ \delta\}$ olduğundan, yine Teorem 2.24'e göre $\sigma(-\beta B)\subset\{0,\ -\beta\gamma,\ -\beta\delta\}$ olur. Üstelik $(\beta B)(\gamma\delta PQ)=(\gamma\delta PQ)(\beta B)$ olduğundan, Teorem 2.24'ten

$$\sigma(-\beta B-\gamma\delta PQ)\subset\Psi_1 \tag{4.20}$$

bulunur. $AB=BA$, $BP=PB$, $AP=PA=A$ ve $BQ=QB=B$ bağıntıları dikkate alındığında, AB matrisinin $-\beta B-\gamma\delta PQ$ matrisi ile değişmeli olduğu görülür. Öte yandan, $\sigma(A)\subset\{0,\ \alpha,\ \beta\}$, $\sigma(B)\subset\{0,\ \gamma,\ \delta\}$ ve $AB=BA$ olduğundan, Teorem 2.24'e göre

$$\sigma(AB)\subset\Psi_2 \tag{4.21}$$

bulunur. Dolayısıyla $AB(-\beta B-\gamma\delta PQ)=(-\beta B-\gamma\delta PQ)AB$ eşitliği, (4.20), (4.21) ve Teorem 2.24'e göre

$$\sigma(AB-\beta B-\gamma\delta PQ)\subset\Psi_1+\Psi_2 \tag{4.22}$$

olur. Böylece ii)'de istenen sonuç elde edilir.

iii) $AB = BA$ olduğundan, $(\alpha-\beta)B - AB + BA - \gamma\delta Q = (\alpha-\beta)B - \gamma\delta Q$ olduğu açıktır. $\sigma(B) \subset \{0,\ \gamma,\ \delta\}$, $\sigma(Q) \subset \{0,\ 1\}$ ve $BQ = QB$ olduğundan, Teorem 2.24'ten

$$\sigma\big((\alpha-\beta)B - \gamma\delta Q\big) \subset \{0,\ -\gamma\delta,\ (\alpha-\beta)\gamma,\ -(\beta-\alpha+\delta)\gamma,\ (\alpha-\beta)\delta,\ -(\beta-\alpha+\gamma)\delta\} = \Gamma$$

yazılabilir. Böylece iii)'nin, dolayısıyla teoremin ispatı tamamlanır. ■

Lemma 4.2'nin ii) şıkkının (4.2) bağıntısından aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 4.6. $A, B \in \mathbb{C}_n$ olmak üzere, $A \in \mathfrak{L}(P;\ \alpha,\ \beta)$, $B \in \mathfrak{L}(Q;\ \gamma,\ \delta)$, $(A+B)(\alpha\beta P - \gamma\delta Q) = (\alpha\beta P - \gamma\delta Q)(A+B)$, $AB \neq BA$ ve $A+B$ matrisi köşegenleştirilebilir olsun. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur.

i) $\mu \in \sigma(A+B) \setminus \big[\{0,\ \alpha,\ \beta\} + \{0,\ \gamma,\ \delta\}\big]$ ise,
$\mu(\alpha+\beta+\gamma+\delta-\mu) \in \sigma\big((\gamma+\delta)A + (\alpha+\beta)B + \alpha\beta P + \gamma\delta Q - AB - BA\big)$
dır.

ii) $\Gamma_1 = \{0,\ \alpha(\gamma+\delta),\ \beta(\gamma+\delta),\ (\alpha+\beta)\gamma,\ (\alpha+\beta)\delta,\ \alpha\delta+\beta\gamma,\ \alpha\gamma+\beta\delta\}$ ve $\Gamma_2 = \{0,\ \alpha\beta,\ \gamma\delta,\ \alpha\beta+\gamma\delta\}$ olmak üzere, $\lambda \in \sigma\big((\gamma+\delta)A + (\alpha+\beta)B + \alpha\beta P + \gamma\delta Q - AB - BA\big) \setminus [\Gamma_1 + \Gamma_2]$ ise, $x^2 - (\alpha+\beta+\gamma+\delta)x + \lambda$ polinomunun kökleri $A+B$ matrisinin özdeğerleridir.

İspat. Genelliği bozmaksızın, A, B, P ve Q matrisleri Lemma 4.2'deki gibi olsun. Şimdi, $\mu \in \sigma(A+B) \setminus \big[\{0,\ \alpha,\ \beta\} + \{0,\ \gamma,\ \delta\}\big]$ durumunu ele alalım. Teorem 4.1 ve Lemma 4.2'ye göre, $\sigma(A_i + B_i) = \{\mu,\ \alpha+\beta+\gamma+\delta-\mu\}$ olacak şekilde bir $i \in \{1, \ldots, k\}$ vardır. Lemma 4.2'nin ii) şıkkının son bağıntısı olan (4.2)'ye göre,

$$\begin{aligned}\mu(\alpha+\beta+\gamma+\delta-\mu) &\in \sigma\big((\gamma+\delta)A_i + (\alpha+\beta)B_i + \alpha\beta P_i + \gamma\delta Q_i - A_iB_i - B_iA_i\big)\\ &\subset \sigma\big((\gamma+\delta)A + (\alpha+\beta)B + \alpha\beta P + \gamma\delta Q - AB - BA\big)\end{aligned}$$

yazılabilir. Böylece i)'nin ispatı tamamlanır.

Şimdi de $\lambda \in \sigma\big((\gamma+\delta)A+(\alpha+\beta)B+\alpha\beta P+\gamma\delta Q-AB-BA\big)\setminus[\Gamma_1+\Gamma_2]$ olsun. Teorem 4.5 i)'ye göre $\lambda \in \sigma\big((\gamma+\delta)A_i+(\alpha+\beta)B_i+\alpha\beta P_i+\gamma\delta Q_i-A_iB_i-B_iA_i\big)$ olacak şekilde bir $i \in \{1,\ldots,k\}$ vardır. Böylece, (4.1) ve (4.2)'ye göre $\alpha+\beta+\gamma+\delta=\mu+\nu$ ve $\lambda=\mu\nu$ olacak şekilde ve dolayısıyla μ ve ν, $x^2-(\alpha+\beta+\gamma+\delta)x+\lambda$ polinomunun kökleri olacak şekilde $\mu,\ \nu \in \sigma(A_i+B_i)$ sayıları vardır. Buradan, $\sigma(A_i+B_i)\subset\sigma(A+B)$ olduğundan ii)'de istenen sonuç elde edilir. ■

Aşağıdaki teoremde, $A+B$ matrisinin spektrumu ile $AB-\beta B-\gamma\delta PQ$ matrisinin spektrumu arasında bir ilişki kurulmaktadır.

Teorem 4.7. $A,\ B\in\mathbb{C}_n$ olmak üzere $A\in\mathfrak{L}\big(P;\ \alpha,\ \beta\big)$, $B\in\mathfrak{L}\big(Q;\ \gamma,\ \delta\big)$, $(A+B)(\alpha\beta P-\gamma\delta Q)=(\alpha\beta P-\gamma\delta Q)(A+B)$, $\alpha\neq\beta$, $AB\neq BA$ ve $A+B$ matrisi köşegenleştirilebilir olsun. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur.

i) $\Psi_1=\{0,-\beta\gamma,-\beta\delta,-\gamma\delta,-\gamma\delta-\beta\gamma,-\gamma\delta-\beta\delta\}$, $\Psi_2=\{0,\alpha\gamma,\alpha\delta,\beta\gamma,\beta\delta\}$ ve $\Psi_3=\{0,-\beta\gamma,-\beta\delta,-\gamma\delta\}$ olmak üzere, $\lambda\in\sigma(AB-\beta B-\gamma\delta PQ)\setminus[(\Psi_1+\Psi_2)\cup\Psi_3]$ ise, $x^2-(\alpha+\beta+\gamma+\delta)x+\alpha(\beta+\gamma+\delta)-\lambda$ polinomunun kökleri $A+B$ matrisinin özdeğerleridir.

ii) $\mu\in\sigma(A+B)\setminus\big[\{0,\ \alpha,\ \beta\}+\{0,\ \gamma,\ \delta\}\big]$ ise, $\mu^2-\mu(\alpha+\beta+\gamma+\delta)+\alpha(\beta+\gamma+\delta)\in\sigma(AB-\beta B-\gamma\delta PQ)$'dur.

İspat. Genelliği bozmaksızın, A, B, P ve Q matrisleri, Lemma 4.2'deki gibi olsun. Lemma 4.2 i)'ye göre,

$$AB-\beta B-\gamma\delta PQ = S\left(\left(\bigoplus_{i=1}^{k}(A_iB_i-\beta B_i-\gamma\delta P_iQ_i)\right)\oplus(A_0B_0-\beta B_0-\gamma\delta P_0Q_0)\right)S^{-1} \quad (4.23)$$

yazılabilir. Lemma 4.2 iii)'den $i=1,\ldots,k$ için

$$A_iB_i-\beta B_i-\gamma\delta P_iQ_i = S_i\begin{bmatrix}(\alpha-\beta)M_{11}-\gamma\delta Y_{11} & (\alpha-\beta)M_{12} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & -\gamma\delta Y_{22} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\beta M_{33}\end{bmatrix}S_i^{-1} \quad (4.24)$$

ve ayrıca

$$(\alpha-\beta)M_{11}-\gamma\delta Y_{11} = \left(\alpha(\beta+\gamma+\delta)-\mu_i\nu_i\right)I_{x_i} \quad (4.25)$$

olduğu açıktır. Öte yandan, Y_{22} matrisi bir idempotenttir ve M_{33} matrisi $(M_{33}-\gamma Y_{33})(M_{33}-\delta Y_{33})=\mathbf{0}$ ve $M_{33}Y_{33}=Y_{33}M_{33}=M_{33}$ eşitliklerini sağlar. Dolayısıyla, Teorem 2.24'ten $\sigma(-\gamma\delta Y_{22})\subset\{0,\ -\gamma\delta\}$ ve $\sigma(-\beta M_{33})\subset\{0,\ -\beta\gamma,\ -\beta\delta\}$ olur. Böylece

$$\sigma(-\gamma\delta Y_{22}\oplus -\beta M_{33})\subset\Psi_3 \quad (4.26)$$

yazılabilir. $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta\neq 0$ almak genelliği bozmadığından $B_0P_0=P_0B_0$ olur. $A_0B_0=B_0A_0$, $B_0P_0=P_0B_0$ ve $P_0Q_0=Q_0P_0$ olduğundan, Teorem 4.5 ii)'ye göre

$$\sigma(A_0B_0-\beta B_0-\gamma\delta P_0Q_0)\subset\Psi_1+\Psi_2 \quad (4.27)$$

bulunur.

Şimdi, $\lambda\in\sigma(AB-\beta B-\gamma\delta PQ)\setminus[(\Psi_1+\Psi_2)\cup\Psi_3]$ olsun. Dolayısıyla (4.23)-(4.27) bağıntılarına göre, $\lambda=\alpha(\beta+\gamma+\delta)-\mu_i\nu_i$ olacak şekilde bir $i\in\{1,\ldots,k\}$ vardır.

Üstelik Lemma 4.2 ii)'den $\mu_i,\ \nu_i \in \sigma(A+B)$ ve $\mu_i+\nu_i=\alpha+\beta+\gamma+\delta$ olduğu bilinmektedir. Dolayısıyla, μ_i ve ν_i, $x^2-(\alpha+\beta+\gamma+\delta)x+\alpha(\beta+\gamma+\delta)-\lambda$ polinomunun kökleridir.

Şimdi de $\mu \in \sigma(A+B)\setminus[\{0,\ \alpha,\ \beta\}+\{0,\ \gamma,\ \delta\}]$ olsun. μ ve $\alpha+\beta+\gamma+\delta-\mu$ sayıları, A_i+B_i matrisinin özdeğerleri olacak şekilde bir $i\in\{1,\ldots,k\}$'nın var olduğunu Teorem 4.1 ve Lemma 4.2 garantiler. $\nu=\alpha+\beta+\gamma+\delta-\mu$ olsun. (4.24) ve (4.25) eşitliklerinden

$$\alpha(\beta+\gamma+\delta)-\mu\nu \in \sigma(A_iB_i-\beta B_i-\gamma\delta P_iQ_i)\subset\sigma(AB-\beta B-\gamma\delta PQ)$$

yazılabilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Aşağıdaki teoremde, $A+B$ matrisinin spektrumu ile $(\alpha-\beta)B+BA-AB-\gamma\delta Q$ matrisinin spektrumu arasında bir ilişki kurulmaktadır.

Teorem 4.8. $A,\ B\in\mathbb{C}_n$ olmak üzere, $A\in\mathfrak{L}(P;\ \alpha,\ \beta)$, $B\in\mathfrak{L}(Q;\ \gamma,\ \delta)$, $(A+B)(\alpha\beta P-\gamma\delta Q)=(\alpha\beta P-\gamma\delta Q)(A+B)$, $\alpha\neq\beta$, $AB\neq BA$ ve $A+B$ matrisi köşegenleştirilebilir olsun. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur.

i) $\mu\in\sigma(A+B)\setminus[\{0,\ \alpha,\ \beta\}+\{0,\ \gamma,\ \delta\}]$ ise,

a) $\alpha(\beta+\gamma+\delta)-\mu(\alpha+\beta+\gamma+\delta-\mu)\in\sigma\big((\alpha-\beta)B+BA-AB-\gamma\delta Q\big)$ dur.

b) $\omega=-\beta(\alpha+\gamma+\delta)+\mu(\alpha+\beta+\gamma+\delta-\mu)$ olmak üzere, ω veya $-2\gamma\delta+\omega$ karmaşık sayılarından biri $(\alpha-\beta)B+BA-AB-\gamma\delta Q$ matrisinin spektrumundadır.

ii) $\Gamma = \{0,\ -\gamma\delta,\ (\alpha-\beta)\gamma,\ -(\beta-\alpha+\delta)\gamma,\ (\alpha-\beta)\delta,\ -(\beta-\alpha+\gamma)\delta\}$ olmak üzere, $\lambda \in \sigma\big((\alpha-\beta)B + BA - AB - \gamma\delta Q\big) \setminus \Gamma$ ise, aşağıdaki polinomlardan birinin kökleri $A+B$ matrisinin özdeğerleridir.

a) $x^2 - (\alpha+\beta+\gamma+\delta)x + \alpha(\beta+\gamma+\delta) - \lambda,$

b) $x^2 - (\alpha+\beta+\gamma+\delta)x + \lambda + \beta(\alpha+\gamma+\delta),$

c) $x^2 - (\alpha+\beta+\gamma+\delta)x + \lambda + \beta(\alpha+\gamma+\delta) + 2\gamma\delta$.

İspat. A, B, P ve Q matrisleri, genelliği bozmaksızın, Lemma 4.2'deki gibi olsun. O halde, Lemma 4.2 i)'ye göre

$$\begin{aligned}&(\alpha-\beta)B - AB + BA - \gamma\delta Q\\ &= S\left(\left(\bigoplus_{i=1}^{k}\big((\alpha-\beta)B_i - A_iB_i + B_iA_i - \gamma\delta Q_i\big)\right)\oplus\big((\alpha-\beta)B_0 - A_0B_0 + B_0A_0 - \gamma\delta Q_0\big)\right)S^{-1}\end{aligned} \tag{4.28}$$

yazılabilir. Öte yandan Lemma 4.2 iii)'ye göre de $i = 1,\ldots,k$ için

$$\begin{aligned}&(\alpha-\beta)B_i - A_iB_i + B_iA_i - \gamma\delta Q_i\\ &= S_i\begin{bmatrix}(\alpha-\beta)M_{11} - \gamma\delta Y_{11} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ 2(\alpha-\beta)M_{21} & (\alpha-\beta)M_{22} - \gamma\delta Y_{22} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & (\alpha-\beta)M_{33} - \gamma\delta Y_{33}\end{bmatrix}S_i^{-1}\end{aligned} \tag{4.29}$$

olduğu görülür. Ayrıca, yine Lemma 4.2'nin iii) şıkkından

$$(\alpha-\beta)M_{11} - \gamma\delta Y_{11} = \big(\alpha(\beta+\gamma+\delta) - \mu_i\nu_i\big)I_{x_i},\ (\alpha-\beta)M_{22} + \gamma\delta Y_{22} = \big(-\beta(\alpha+\gamma+\delta) + \mu_i\nu_i\big)I_{y_i}$$

ve buradan, sırasıyla,

$$\sigma\big((\alpha-\beta)M_{11} - \gamma\delta Y_{11}\big) = \{\alpha(\beta+\gamma+\delta) - \mu_i\nu_i\} \tag{4.30}$$

ve

$$(\alpha-\beta)M_{22}-\gamma\delta Y_{22}=-2\gamma\delta Y_{22}+\left(-\beta(\alpha+\gamma+\delta)+\mu_i\nu_i\right)I_{y_i} \tag{4.31}$$

yazılabilir. Y_{22} bir idempotent olduğundan, Teorem 2.24 ve (4.31) eşitliğine göre

$$\sigma\left((\alpha-\beta)M_{22}-\gamma\delta Y_{22}\right)\subset\left\{-\beta(\alpha+\gamma+\delta)+\mu_i\nu_i,\ -2\gamma\delta-\beta(\alpha+\gamma+\delta)+\mu_i\nu_i\right\} \tag{4.32}$$

elde edilir. Öte yandan, $(M_{33}-\gamma Y_{33})(M_{33}-\delta Y_{33})=\mathbf{0}$, $M_{33}Y_{33}=Y_{33}M_{33}=M_{33}$ ve $Y_{33}^2=Y_{33}$ olduğundan, Teorem 2.24'e göre

$$\sigma\left((\alpha-\beta)M_{33}-\gamma\delta Y_{33}\right)\subset\left\{0,-\gamma\delta,(\alpha-\beta)\gamma,\gamma(\alpha-\beta-\delta),(\alpha-\beta)\delta,\delta(\alpha-\beta-\gamma)\right\}=\Gamma \tag{4.33}$$

olur. Lemma 4.2 iii)'de B_i matrisinin M_{11} ve M_{22} blokları görünmek zorundadır, aksi halde $A_iB_i=B_iA_i$ çelişkisine varılır.

Şimdi, $\mu\in\sigma(A+B)\setminus\left[\{0,\ \alpha,\ \beta\}+\{0,\ \gamma,\ \delta\}\right]$ olsun. Dolayısıyla Teorem 4.1 ve Lemma 4.2'ye göre, μ ve $\alpha+\beta+\gamma+\delta-\mu$, A_i+B_i matrisinin özdeğerleri olacak şekilde bir $i\in\{1,\ldots,k\}$ vardır. $\nu=\alpha+\beta+\gamma+\delta-\mu$ olsun. (4.28)-(4.30) eşitliklerine göre

$$\alpha(\beta+\gamma+\delta)-\mu\nu\in\sigma\left((\alpha-\beta)M_{11}-\gamma\delta Y_{11}\right)\subset\sigma\left((\alpha-\beta)B+BA-AB-\gamma\delta Q\right)$$

yazılabilir. Ayrıca, (4.32)'den $-\beta(\alpha+\gamma+\delta)+\mu\nu\in\sigma\left((\alpha-\beta)M_{22}-\gamma\delta Y_{22}\right)$ veya $-2\gamma\delta-\beta(\alpha+\gamma+\delta)+\mu\nu\in\sigma\left((\alpha-\beta)M_{22}-\gamma\delta Y_{22}\right)$ olduğu görülür. $\sigma\left((\alpha-\beta)M_{22}-\gamma\delta Y_{22}\right)\subset\sigma\left((\alpha-\beta)B+BA-AB-\gamma\delta Q\right)$ olduğundan, i)'nin ispatı tamamlanır.

Şimdi de $\lambda \in \sigma\big((\alpha-\beta)B - AB + BA - \gamma\delta Q\big) \setminus \Gamma$ olsun. Teorem 4.5 iii), (4.29), (4.30) (4.32) ve (4.33) bağıntıları göz önüne alınarak, $\mu_i,\ \nu_i \in \sigma(A_i + B_i)$ sayıları $\alpha+\beta+\gamma+\delta = \mu_i + \nu_i$ eşitliğini sağlamak üzere $\lambda = \alpha(\beta+\gamma+\delta) - \mu_i\nu_i$ veya $\lambda = -\beta(\alpha+\gamma+\delta) + \mu_i\nu_i$ veya $\lambda = -2\gamma\delta - \beta(\alpha+\gamma+\delta) + \mu_i\nu_i$ olacak şekilde bir $i \in \{1,\ldots,k\}$ 'nın var olduğu görülür. Dolayısıyla, μ_i ve ν_i, teoremin ii) şıkkında yazılan polinomlardan birinin köküdür. ■

4.4. İki Genelleştirilmiş Kuadratik Matrisin Toplamının Köşegenleştirilebilir Olmadığı Durumdaki Sonuçlar

$A,\ B \in \mathbb{C}_n$ olmak üzere $A \in \mathfrak{L}(P;\ \alpha,\ \beta)$ ve $B \in \mathfrak{L}(Q;\ \gamma,\ \delta)$ olsun. Bu kısımda $A+B$ matrisi üzerindeki köşegenleştirilebilir olma koşulu kaldırılarak, $\alpha\beta P = \gamma\delta Q$ ve $AB \neq BA$ koşulları altında $A+B$ matrisinin özdeğerleri ile ilgili bazı sonuçlar elde edilmektedir.

Öncelikle $x,\ y \in \mathbb{C}$, P ve Q matrisleri birer idempotent olmak üzere, $xP = yQ$ ifadesinin aşağıdaki durumlardan birini sağladığına dikkat etmek gerekir.

Durum I. $x = 0$ *olması durumu.*

Bu durumda $yQ = \mathbf{0}$ olur. Buradan,

$$y = 0 \quad \text{veya} \quad Q = \mathbf{0} \tag{4.34}$$

bulunur.

Durum II. $x \neq 0$ *olması durumu.*

Bu durumda $P = zQ$ ($z \in \mathbb{C}$) olur. Dolayısıyla $zQ = P = P^2 = z^2Q^2 = z^2Q$ bulunur. Buradan da

$$z = 0 \text{ veya } z = 1 \text{ veya } Q = \mathbf{0} \tag{4.35}$$

olur. $x = \alpha\beta$, $y = \gamma\delta$ (ve dolayısıyla $z = \dfrac{y}{x} = \dfrac{\gamma\delta}{\alpha\beta}$) alınarak, (4.34) ve (4.35) birlikte değerlendirilirse, bu bölümün buradan sonraki kısımlarının, aşağıdaki durumları içerdiği görülür.

i) A ve B matrisleri skaler-potent matrislerdir.

ii) $\alpha\beta = \gamma\delta$ olmak üzere $A \in \mathfrak{L}(P;\ \alpha,\ \beta)$ ve $B \in \mathfrak{L}(P;\ \gamma,\ \delta)$'dır.

Kısalık olsun diye, önce $n = 2$ durumu için aşağıdaki lemma ifade ve ispat edilecektir.

Lemma 4.9. $A,\ B \in \mathbb{C}_2$ olmak üzere $A \in \mathfrak{L}(P;\ \alpha,\ \beta)$ ve $B \in \mathfrak{L}(Q;\ \gamma,\ \delta)$ olsun. Ayrıca, $\alpha\beta P = \gamma\delta Q$ ve $AB \neq BA$ koşulları sağlansın. Eğer $A + B$ matrisi $\lambda \in \mathbb{C}$ skalerine ilişkin bir Jordan bloğu ise, bu durumda $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 2\lambda$'dır.

İspat. $X = A + B$ olsun. $B^2 = (\gamma + \delta)B - \gamma\delta Q$ eşitliğinden $(X - A)^2 = (\gamma + \delta)(X - A) - \gamma\delta Q$ yazılabilir. Buradan, $A^2 = (\alpha + \beta)A - \alpha\beta P$ ve $\alpha\beta P = \gamma\delta Q$ eşitlikleri dikkate alınarak,

$$X^2 + (\alpha + \beta + \gamma + \delta)A = AX + XA + (\gamma + \delta)X \tag{4.36}$$

elde edilir. Öte yandan, hipoteze göre $X = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ yazılabilir. $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$ olsun.

Bu durumda, (4.36)'dan

$$\begin{bmatrix} \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & \lambda^2 \end{bmatrix} + (\alpha + \beta + \gamma + \delta)\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_1 & a_1 + \lambda a_2 \\ \lambda a_3 & a_3 + \lambda a_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda a_1 + a_3 & \lambda a_2 + a_4 \\ \lambda a_3 & \lambda a_4 \end{bmatrix} + (\gamma + \delta)\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \tag{4.37}$$

bulunur. $AX \neq XA$ olduğundan iki durum söz konusudur:

Durum I. $a_3 \neq 0$ *olması durumu.*

(4.37)'de, $2,1-$bloklarının eşitliğinden

$$(\alpha+\beta+\gamma+\delta)a_3 = 2\lambda a_3$$

yazılabilir. Buradan, $a_3 \neq 0$ olduğundan

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta = 2\lambda$$

bulunur.

Durum II. $a_1 \neq a_4$ *olması durumu.*

(4.37)'nin karşılıklı $1,1$ ve karşılıklı $2,2-$bloklarının eşitliğinden, sırasıyla

$$\lambda^2 + (\alpha+\beta+\gamma+\delta)a_1 = 2\lambda a_1 + a_3 + (\gamma+\delta)\lambda$$

ve

$$\lambda^2 + (\alpha+\beta+\gamma+\delta)a_4 = 2\lambda a_4 + a_3 + (\gamma+\delta)\lambda$$

yazılabilir. Son iki eşitlik birbirinden çıkarılırsa

$$(\alpha+\beta+\gamma+\delta)(a_1-a_4) = 2\lambda(a_1-a_4)$$

bulunur. Burada $a_1 \neq a_4$ olduğu göz önüne alınırsa $\alpha+\beta+\gamma+\delta = 2\lambda$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Şimdi, genel durum için aşağıdaki lemma ifade ve ispat edilecektir.

Lemma 4.10. $A,\ B\in\mathbb{C}_n$ olmak üzere, $A\in\mathfrak{L}(P;\ \alpha,\ \beta)$ ve $B\in\mathfrak{L}(Q;\ \gamma,\ \delta)$ olsun. Ayrıca, $\alpha\beta P=\gamma\delta Q$, $AB\neq BA$, $\alpha\neq\beta$ ve $\gamma\neq\delta$ koşulları sağlansın. Eğer $A+B$ matrisi $\lambda\in\mathbb{C}$ skalerine ilişkin bir Jordan bloğu ise, bu durumda $\alpha+\beta+\gamma+\delta=2\lambda$ dır.

İspat. İspat, tümevarım yöntemi ile yapılacaktır. İlk olarak not etmek gerekir ki $n=1$ olması mümkün değildir aksi halde A ve B matrisleri birer skaler olurdu ve bu durum $AB\neq BA$ olması ile çelişirdi. $n=2$ durumu önceki lemmada ispatlanmıştır.

Şimdi $n>2$ olmak üzere, $(n-1)\times(n-1)$ boyutlu tüm karmaşık matrisler için iddia doğru ve $X=A+B$ olsun. X matrisi $\lambda\in\mathbb{C}$ skalerine ilişkin bir Jordan bloğu olduğundan,

$$X=\left[\begin{array}{c|cccccc} \lambda & 1 & & & & & \\ \hline & \lambda & 1 & & & & \\ & & \lambda & \ddots & & & \\ & & & \ddots & 1 & & \\ & & & & \lambda & 1 & \\ & & & & & \lambda & \end{array}\right]=\begin{bmatrix}\lambda & \mathbf{u}\\ \mathbf{0} & J\end{bmatrix},\quad \mathbf{u}\in\mathbb{C}_{1\times(n-1)},\quad J\in\mathbb{C}_{n-1} \tag{4.38}$$

olarak yazılabilir. Burada J, λ skalerine ilişkin bir Jordan bloğudur. A matrisi

$$A=\begin{bmatrix}a_1 & \mathbf{a}_2\\ \mathbf{a}_3 & A_0\end{bmatrix},\quad a_1\in\mathbb{C},\quad \mathbf{a}_2\in\mathbb{C}_{1\times(n-1)},\quad \mathbf{a}_3\in\mathbb{C}^{n-1},\quad A_0\in\mathbb{C}_{n-1} \tag{4.39}$$

şeklinde olsun. (4.36) eşitliğinden

$$\begin{bmatrix}\lambda^2 & \lambda\mathbf{u}+\mathbf{u}J\\ \mathbf{0} & J^2\end{bmatrix}+(\alpha+\beta+\gamma+\delta)\begin{bmatrix}a_1 & \mathbf{a}_2\\ \mathbf{a}_3 & A_0\end{bmatrix}=(\gamma+\delta)\begin{bmatrix}\lambda & \mathbf{u}\\ \mathbf{0} & J\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\lambda a_1 & a_1\mathbf{u}+\mathbf{a}_2J\\ \lambda\mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_3\mathbf{u}+A_0J\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\lambda a_1+\mathbf{u}\mathbf{a}_3 & \lambda\mathbf{a}_2+\mathbf{u}A_0\\ J\mathbf{a}_3 & JA_0\end{bmatrix} \tag{4.40}$$

bulunur. (4.40) eşitliğinin $2,1-$bloklarından $(\alpha+\beta+\gamma+\delta)\mathbf{a}_3 = \lambda\mathbf{a}_3 + J\mathbf{a}_3$ yazılabilir.

$\mathbf{a}_3 \neq \mathbf{0}$ ise, bu durumda $\alpha+\beta+\gamma+\delta-\lambda \in \sigma(J) = \{\lambda\}$ ve dolayısıyla $\alpha+\beta+\gamma+\delta = 2\lambda$ olur.

Şimdi, $\mathbf{a}_3 = \mathbf{0}$ olsun. Bu durumda, $\alpha\beta \neq 0$ ise, $A^2 = (\alpha+\beta)A - \alpha\beta P$ eşitliğinden,

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{0} & P_0 \end{bmatrix}, \quad p_1 \in \mathbb{C}, \quad \mathbf{p}_2 \in \mathbb{C}_{1\times(n-1)}, \quad P_0 \in \mathbb{C}_{n-1} \tag{4.41}$$

yazılabilir. Eğer $\alpha\beta = 0$ ise, bu durumda $P = I_n$ alınabilir ve dolayısıyla yine P matrisi (4.41)'deki gibi yazılabilir. $X = A+B$, (4.38), (4.39), $\mathbf{a}_3 = \mathbf{0}$ ve $B^2 = (\gamma+\delta)B - \gamma\delta Q$ eşitlikleri çerçevesinde, $b_1,\ q_1 \in \mathbb{C}$, $\mathbf{b}_2, \mathbf{q}_2 \in \mathbb{C}_{1\times(n-1)}$ ve $B_0,\ Q_0 \in \mathbb{C}_{n-1}$ olmak üzere,

$$B = \begin{bmatrix} b_1 & \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{0} & B_0 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad Q = \begin{bmatrix} q_1 & \mathbf{q}_2 \\ \mathbf{0} & Q_0 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Böylece A_0 ve B_0 matrisleri, belki $A_0B_0 \neq B_0A_0$ koşulu hariç lemmanın tüm koşullarını sağlar.

$\alpha \neq \beta$, $\gamma \neq \delta$ ve dolayısıyla A_0 ve B_0 matrisleri köşegenleştirilebilir olduğundan, eğer $A_0B_0 = B_0A_0$ ise, Teorem 2.36, $A_0 + B_0$ matrisinin köşegenleştirilebilir olduğunu garantiler. Fakat bu bir çelişkidir. Çünkü $J = A_0 + B_0$, boyutu birden büyük bir Jordan bloğudur. Dolayısıyla $A_0B_0 \neq B_0A_0$ olmalıdır. Tümevarım hipotezi A_0 ve B_0 matrislerine uygulanarak $\alpha+\beta+\gamma+\delta = 2\lambda$ elde edilir. ■

Aşağıdaki lemma, Lemma 4.10'un, $A+B$ matrisinin $\lambda \in \mathbb{C}$ skalerine ilişkin Jordan bloklarının direkt toplamı (yani $\lambda \in \mathbb{C}$ skalerine ilişkin bir Jordan segmanı) olması durumuna genelleştirilmesidir.

Lemma 4.11. $A,\ B \in \mathbb{C}_n$ olmak üzere, $A \in \mathfrak{L}(P;\ \alpha,\ \beta)$ ve $B \in \mathfrak{L}(Q;\ \gamma,\ \delta)$ olsun. Ayrıca, $\alpha\beta P = \gamma\delta Q$, $AB \neq BA$, $\alpha \neq \beta$ ve $\gamma \neq \delta$ koşuları sağlansın. Eğer $A+B$ matrisi $\lambda \in \mathbb{C}$ skalerine ilişkin Jordan bloklarının direkt toplamı ise, bu durumda $\alpha+\beta+\gamma+\delta = 2\lambda$'dır.

İspat. $X = A+B$ ve her $i \in \{1,\ldots,m\}$ için $J_i(\lambda) \in \mathbb{C}_{k_i}$, λ skalerine ilişkin bir Jordan bloğu olmak üzere $X = J_1(\lambda) \oplus \cdots \oplus J_m(\lambda)$ ve $A_{ii} \in \mathbb{C}_{k_i}$ olmak üzere $A = [A_{ij}]$ olsun. $AB \neq BA$ koşulu, $AX \neq XA$ koşuluna denktir. Dolayısıyla iki durum söz konusudur:

Durum I. $i \neq j$ *olmak üzere her* $i,\ j \in \{1,\ldots,m\}$ *için* $A_{ij} = \mathbf{0}$ *olması durumu.*

$A^2 = (\alpha+\beta)A - \alpha\beta P$ olduğundan, P matrisi, $P_i \in \mathbb{C}_{k_i}$ olmak üzere $P_1 \oplus \cdots \oplus P_m$ olarak yazılabilir. (Eğer $\alpha\beta = 0$ ise $P = I_n$ alınabilir.) Buradan $B_i = J_i(\lambda) - A_{ii}$ olmak üzere, $B = B_1 \oplus \cdots \oplus B_m$ olur. $B^2 = (\gamma+\delta)B - \gamma\delta Q$ olduğundan, Q matrisi, $Q_i \in \mathbb{C}_{k_i}$ olmak üzere $Q_1 \oplus \cdots \oplus Q_m$ şeklinde yazılabilir. $A = A_{11} \oplus \cdots \oplus A_{mm}$, $P = P_1 \oplus \cdots \oplus P_m$, $B = B_1 \oplus \cdots \oplus B_m$, $Q = Q_1 \oplus \cdots \oplus Q_m$, $A \in \mathfrak{L}(P;\ \alpha,\ \beta)$ ve $B \in \mathfrak{L}(Q;\ \gamma,\ \delta)$ olduğundan her $i \in \{1,\ldots,m\}$ için $A_{ii} \in \mathfrak{L}(P_i;\ \alpha,\ \beta)$ ve $B_i \in \mathfrak{L}(Q_i;\ \gamma,\ \delta)$ bulunur. Ayrıca, $\alpha\beta P = \gamma\delta Q$, $P = P_1 \oplus \cdots \oplus P_m$ ve $Q = Q_1 \oplus \cdots \oplus Q_m$ olduğundan her $i \in \{1,\ldots,m\}$ için $\alpha\beta P_i = \gamma\delta Q_i$ olur. Öte yandan, $AB \neq BA$ olduğundan $A_{ii}B_i \neq B_iA_{ii}$ olacak şekilde en az bir $i \in \{1,\ldots,m\}$ vardır. Dolayısıyla, bu i için A_{ii} ve B_i matrislerine Lemma 4.10'u uygulamak suretiyle istenen sonuç elde edilir.

Durum II. $i \neq j$ *olmak üzere* $A_{ij} \neq \mathbf{0}$ *olacak şekilde* $i, j \in \{1, \ldots, m\}$ *indislerinin mevcut olması durumu.*

$X = J_1(\lambda) \oplus \cdots \oplus J_m(\lambda)$ olduğu hatırlanarak (4.36) eşitliğinin $i, j-$bloklarından

$$(\alpha+\beta+\gamma+\delta)A_{ij} = J_i(\lambda)A_{ij} + A_{ij}J_j(\lambda) \tag{4.42}$$

yazılabilir. $A_{ij} = [\mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_{k_j}] \neq \mathbf{0}$ olduğundan, A_{ij}'nin sıfırdan farklı en az bir sütunu vardır. Sıfırdan farklı olan ilk sütun $\mathbf{v}_{k_l}$ olsun. (4.42) eşitliğinin k_l. sütunlarından

$$(\alpha+\beta+\gamma+\delta)\mathbf{v}_{k_l} = J_i(\lambda)\mathbf{v}_{k_l} + \lambda \mathbf{v}_{k_l}$$

yazılabilir. Buradan, $\alpha+\beta+\gamma+\delta-\lambda \in \sigma\big(J_i(\lambda)\big) = \{\lambda\}$ olur. Dolayısıyla, bu durumda da istenen sonuç elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Aşağıdaki teorem, $A+B$ matrisinin köşegenleştirilebilir olmadığı durumda bu matrisin spektrumu hakkında değerlendirme yapılmasına olanak sağlar.

Teorem 4.12. $A, B \in \mathbb{C}_n$ olmak üzere, $A \in \mathfrak{L}(P;\ \alpha,\ \beta)$ ve $B \in \mathfrak{L}(Q;\ \gamma,\ \delta)$ olsun. Ayrıca, $\alpha\beta P = \gamma\delta Q$, $AB \neq BA$, $\alpha \neq \beta$ ve $\gamma \neq \delta$ koşulları sağlansın. Eğer $A+B$ matrisi köşegenleştirilebilir değilse, $\alpha+\beta+\gamma+\delta = \lambda+\mu$ olacak şekilde $\lambda,\ \mu \in \sigma(A+B)$ sayıları vardır.

İspat. $X = A+B$ ve X matrisinin Jordan biçimi $X = SJS^{-1}$ olsun. Burada $i = 1, \ldots, m$ için her bir $J(\lambda_i) \in \mathbb{C}_{k_i}$, $\lambda_i \in \mathbb{C}$ skalerine ilişkin Jordan bloklarının direkt toplamı olmak üzere, $J = J(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus J(\lambda_m)$ ve $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$'nin farklı olduğu kabul edilmektedir. Ayrıca $K = S^{-1}AS$, $\tilde{P} = S^{-1}PS$ ve $\tilde{Q} = S^{-1}QS$ olarak tanımlayalım. $i = 1, \ldots, m$ için $K_{ii},\ P_{ii},\ Q_{ii} \in \mathbb{C}_{k_i}$ olmak üzere, $K = [K_{ij}]$, $\tilde{P} = [P_{ij}]$ ve $\tilde{Q} = [Q_{ij}]$

olarak parçalayalım. $AX - XA = A(A+B) - (A+B)A = AB - BA \neq \mathbf{0}$ olduğunu gözlemlemek kolaydır. Dolayısıyla $KJ \neq JK$ olur.

Şimdi iki olası durum söz konusudur:

Durum I. $i \neq j$ *ve* $K_{ij} \neq \mathbf{0}$ *olacak şekilde* $i, j \in \{1, \ldots, m\}$ *indislerinin mevcut olması durumu.*

Bu durumda, (4.36)'dan

$$J^2 + (\alpha + \beta + \gamma + \delta)K = JK + KJ + (\gamma + \delta)J \tag{4.43}$$

yazılabilir. $J = J(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus J(\lambda_m)$ olduğu hatırlanıp (4.43) eşitliğinde $i, j-$ bloklarına bakılarak

$$(\alpha + \beta + \gamma + \delta)K_{ij} = J(\lambda_i)K_{ij} + K_{ij}J(\lambda_j) \tag{4.44}$$

olduğu görülür. Şimdi, $K_{ij} \neq \mathbf{0}$ olduğunu hatırlayalım. Eğer $\mathbf{v}_k$, K_{ij}'nin sıfır olmayan ilk sütunu ise, bu durumda (4.44) eşitliğinin $k.$ sütunlarından

$$(\alpha + \beta + \gamma + \delta)\mathbf{v}_k = J(\lambda_i)\mathbf{v}_k + \lambda_j \mathbf{v}_k$$

yazılabilir. Buradan $\alpha + \beta + \gamma + \delta - \lambda_j \in \sigma\left(J(\lambda_i)\right) = \left\{\lambda_i\right\}$ ve dolayısıyla $\alpha + \beta + \gamma + \delta = \lambda_j + \lambda_i$ elde edilir.

Durum II. $i \neq j$ *olmak üzere her* $i, j \in \{1, \ldots, m\}$ *için* $K_{ij} = \mathbf{0}$ *olması durumu.*

Bu durumda $K = K_{11} \oplus \cdots \oplus K_{mm}$ yazılabilir. Dolayısıyla

$$A = S(K_{11} \oplus \cdots \oplus K_{mm})S^{-1}$$

olur. $B = X - A = S(J - K)S^{-1}$, $J = J(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus J(\lambda_m)$ ve $K = K_{11} \oplus \cdots \oplus K_{mm}$ olduğundan,

$$B = S\left(J(\lambda_1) - K_{11} \oplus \cdots \oplus J(\lambda_m) - K_{mm}\right)S^{-1}$$

bulunur $A^2 = (\alpha + \beta)A - \alpha\beta P$ ve $B^2 = (\gamma + \delta)B - \gamma\delta Q$ olduğundan, $P = S(P_{11} \oplus \cdots \oplus P_{mm})S^{-1}$ ve $Q = S(Q_{11} \oplus \cdots \oplus Q_{mm})S^{-1}$ olur. Öte yandan $KJ \neq JK$ olduğundan $K_{ii}J(\lambda_i) \neq J(\lambda_i)K_{ii}$ olacak şekilde bir $i \in \{1, \dots, m\}$ vardır. Dolayısıyla $K_{ii}(J(\lambda_i) - K_{ii}) \neq (J(\lambda_i) - K_{ii})K_{ii}$ olur. K_{ii} ve $J(\lambda_i) - K_{ii}$ matrislerine Lemma 4.11 uygulanmak suretiyle bu durumun ve dolayısıyla teoremin ispatı tamamlanır. ■

BÖLÜM 5. UYGULAMALAR VE ÖRNEKLER

Bu bölümde, öncelikle, özel tipli matrislerin lineer bileşimlerinin karakterize edilmesi ile ilgili olarak literatürde mevcut olan bazı sonuçların, bu çalışmada ortaya konulan sonuçlar vasıtasıyla nasıl elde edilebileceği gösterilmektedir. Daha sonra, önceki bölümlerdeki sonuçların uygulanabilirliğini göstermek adına örnekler ortaya konulmaktadır. Ayrıca çalışmanın birer uygulaması olarak, yine özel tipli matrislerin lineer bileşimleri ile ilgili olarak, literatürde mevcut olmayan bazı sonuçlar da elde edilmektedir.

Sarduvan ve Özdemir, iki değişmeli olmayan involutif matrisin lineer bileşimlerinin ne zaman yine bir involutif matris olacağı ile ilgili aşağıdaki teoremi ifade ve ispat etmişlerdir.

Teorem 5.1. [[20], Teorem 2.4 (b)] $c_1,\ c_2 \in \mathbb{C}^*$ ve $P_1,\ P_2 \in \mathbb{C}_n$ involutif matrisleri için $P_1P_2 \neq P_2P_1$ koşulu altında $P_1P_2 + P_2P_1 = \dfrac{1-(c_1^{\,2}+c_2^{\,2})}{c_1c_2} I_n$ ise, $c_1P_1 + c_2P_2$ biçimindeki bir lineer bileşim matrisi bir involutif matristir.

Üçüncü bölümdeki sonuçlar vasıtasıyla bu sonucun tersinin de doğru olduğu aşağıdaki şekilde gösterilebilir.

$A = c_1P_1$ ve $B = c_2P_2$ olsun. P_1 ve P_2 matrisleri birer involutif olduğundan, A matrisi bir $\{-c_1,\ c_1\}$-kuadratik, B matrisi bir $\{-c_2,\ c_2\}$-kuadratik matris olur. Ayrıca $c_1,\ c_2 \in \mathbb{C}^*$ olduğundan $-c_1 \neq c_1$ ve $-c_2 \neq c_2$ olduğu açıktır. Üstelik, $c_1,\ c_2 \in \mathbb{C}^*$ olup, P_1 ve P_2 matrisleri değişmeli olmadığından, A ve B matrisleri de değişmeli değildir. Öte yandan, $A + B = c_1P_1 + c_2P_2$ matrisi involutif olduğundan, Teorem 2.51'e göre bu matris köşegenleştirilebilirdir. O halde (3.6) ifadelerine göre, genelliği bozmaksızın, $i=0,1$ için $A_i,\ B_i \in \mathbb{C}_{m_i}$ olmak üzere

$$A = S(A_1 \oplus A_0)S^{-1} \ \text{ ve } \ B = S(B_1 \oplus B_0)S^{-1} \tag{5.1}$$

yazılabilir. Burada $m_0 + m_1 = n$ olduğuna dikkat etmek gerekir. $A+B$ matrisi bir involutif olduğundan, $A_1 + B_1$ matrisi de bir involutiftir. Dolayısıyla, Teorem 2.49'a göre $\sigma(A_1+B_1) \subset \{-1,\ 1\}$ yazılabilir. O halde (3.10) eşitliğine göre, $\{\mu_1,\ \nu_1\} = \{-1,\ 1\}$ olur. Yine, $\alpha = -c_1$, $\beta = c_1$, $\gamma = -c_2$ ve $\delta = c_2$ alınırsa, (3.12) eşitliğine göre,

$$(-c_2 + c_2)A_1 + (-c_1 + c_1)B_1 - A_1B_1 - B_1A_1 = (-1 + c_1^{\ 2} + c_2^{\ 2})I_{m_1}$$

ve buradan da

$$-A_1B_1 - B_1A_1 = (-1 + c_1^{\ 2} + c_2^{\ 2})I_{m_1} \tag{5.2}$$

yazılabilir.

Eğer A_0 ve B_0 blokları görünmüyorsa, (5.1) ve (5.2) eşitliklerinden

$$AB + BA = (1 - c_1^{\ 2} - c_2^{\ 2})I_n$$

olur. Bu son eşitlikte $A = c_1P_1$ ve $B = c_2P_2$ ifadeleri yerlerine yazılır ve $c_1,\ c_2 \in \mathbb{C}^*$ olduğu dikkate alınırsa,

$$P_1P_2 + P_2P_1 = \frac{1-(c_1^{\ 2} + c_2^{\ 2})}{c_1c_2} I_n$$

elde edilir.

Eğer A_0 ve B_0 blokları görünüyorsa, (5.1)'den

$$c_1P_1 + c_2P_2 = A + B = S\left((A_1 + B_1) \oplus (A_0 + B_0)\right)S^{-1}$$

yazılabilir. P_{1_0}, $P_{2_0} \in \mathbb{C}_{m_0}$ ve P_{1_1}, $P_{2_1} \in \mathbb{C}_{m_1}$ olmak üzere,

$$P_1 = S(P_{1_1} \oplus P_{1_0})S^{-1} \text{ ve } P_2 = S(P_{2_1} \oplus P_{2_0})S^{-1} \tag{5.3}$$

olsun. A_1 ve B_1 matrisleri değişmeli olmadığından, P_{1_1} ve P_{2_1} matrisleri de değişmeli değildir. Benzer şekilde, A_0 ve B_0 matrisleri değişmeli olduğundan, P_{1_0} ve P_{2_0} matrisleri de değişmelidir.

Eğer $P_{1_0} \neq \pm P_{2_0}$ ise, [20]'deki Teorem 2.4 (a)'ya göre, $c_1P_{1_0} + c_2P_{2_0}$ matrisi ve dolayısıyla $c_1P_1 + c_2P_2$ matrisi involutif olamaz.

Eğer $P_{1_0} = P_{2_0}$ ise, $A_0 + B_0 = (c_1 + c_2)P_{2_0}$ olur. P_{2_0} matrisi bir involutif olduğundan $A_0 + B_0$ matrisinin bir involutif olması için $(c_1 + c_2)^2 = 1$ olmalıdır. Ayrıca $P_{1_0} = P_{2_0}$ ise, $P_{1_0}P_{2_0} + P_{2_0}P_{1_0} = 2I_{m_0}$ olur. Dolayısıyla $P_{1_0}P_{2_0} + P_{2_0}P_{1_0} = \dfrac{1-(c_1^2 + c_2^2)}{c_1c_2} I_{m_0}$ bulunur.

Eğer $P_{1_0} = -P_{2_0}$ ise, $A_0 + B_0 = (-c_1 + c_2)P_{2_0}$ olur. P_{2_0} matrisi bir involutif olduğundan, $A_0 + B_0$ matrisinin bir involutif olması için $(-c_1 + c_2)^2 = 1$ olmalıdır. Ayrıca, $P_{1_0} = -P_{2_0}$ olduğundan $P_{1_0}P_{2_0} + P_{2_0}P_{1_0} = -2I_{m_0}$ olur. Dolayısıyla, yine $P_{1_0}P_{2_0} + P_{2_0}P_{1_0} = \dfrac{1-(c_1^2 + c_2^2)}{c_1c_2} I_{m_0}$ bulunur. Sonuç olarak her iki durumda da

$$P_{1_0}P_{2_0} + P_{2_0}P_{1_0} = \frac{1-(c_1^2 + c_2^2)}{c_1c_2} I_{m_0} \tag{5.4}$$

elde edilir.

Öte yandan, (5.2)'de $A_1 = c_1 P_{1_1}$ ve $B_1 = c_2 P_{2_1}$ ifadeleri yerlerine yazılır ve $c_1,\ c_2 \in \mathbb{C}^*$ olduğu dikkate alınırsa,

$$P_{1_1} P_{2_1} + P_{2_1} P_{1_1} = \frac{1-(c_1{}^2 + c_2{}^2)}{c_1 c_2} I_{m_1} \tag{5.5}$$

elde edilir. (5.3)-(5.5) eşitliklerinden

$$P_1 P_2 + P_2 P_1 = \frac{1-(c_1{}^2 + c_2{}^2)}{c_1 c_2} I_n$$

bulunur. Böylece Teorem 5.1'in tersinin de doğruluğu görülmüş olur.

Sarduvan ve Özdemir, iki değişmeli olmayan idempotent matrisin lineer bileşimlerinin ne zaman bir involutif matris olacağı ile ilgili olarak da yukarıdaki teoreme benzer şekilde aşağıdaki teoremi ifade ve ispat etmişlerdir.

Teorem 5.2. [[20], Teorem 2.5 (b)] $c_1,\ c_2 \in \mathbb{C}^*$ ve $P_1,\ P_2 \in \mathbb{C}_n$ idempotent matrisleri için $P_1 P_2 \neq P_2 P_1$ koşulu altında $c_1 + c_2 = 0$ ve $\frac{1}{c_1{}^2} I_n + P_1 P_2 + P_2 P_1 = P_1 + P_2$ ise, $c_1 P_1 + c_2 P_2$ biçimindeki bir lineer bileşim matrisi bir involutif matristir.

Yine üçüncü bölümdeki sonuçlar vasıtasıyla bu sonucun tersinin de doğru olduğu aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$A = c_1 P_1$ ve $B = c_2 P_2$ olsun. P_1 ve P_2 matrisleri birer idempotent olduğundan, A matrisi bir $\{0,\ c_1\}$-kuadratik, B matrisi bir $\{0,\ c_2\}$-kuadratik matristir. $c_1,\ c_2 \in \mathbb{C}^*$ olup P_1 ve P_2 matrisleri değişmeli olmadığından, A ve B matrisleri de değişmeli değildir. Öte yandan $A+B=c_1P_1+c_2P_2$ matrisi bir involutif olduğundan Teorem 2.51'e göre köşegenleştirilebilirdir. O halde (3.6) ifadelerine göre, genelliği bozmaksızın, $i=0,1$ için $A_i,\ B_i \in \mathbb{C}_{m_i}$ olmak üzere

$$A=S(A_1 \oplus A_0)S^{-1} \text{ ve } B=S(B_1 \oplus B_0)S^{-1} \tag{5.6}$$

yazılabilir. $A+B$ matrisi bir involutif olduğundan, A_1+B_1 matrisi de bir involutiftir ve dolayısıyla Teorem 2.49'a göre $\sigma(A_1+B_1)\subset\{-1,\ 1\}$ yazılabilir. O halde (3.10) göre $\{\mu_1,\ \nu_1\}=\{-1,\ 1\}$ olur. $\alpha=0$, $\beta=c_1$, $\gamma=0$ ve $\delta=c_2$ alınırsa, (3.11)'den

$$c_1+c_2=0 \tag{5.7}$$

yazılabilir. Öte yandan (3.12)'ye göre

$$c_1B_1+c_2A_1-B_1A_1-A_1B_1=(-1-0-0)I_{m_1}=-I_{m_1} \tag{5.8}$$

olur.

Eğer (5.6) ifadelerinde A_0 ve B_0 blokları görünmüyorsa, (5.8)'den

$$c_1B+c_2A-BA-AB=-I_n \tag{5.9}$$

elde edilir. $A=c_1P_1$ ve $B=c_2P_2$ ifadeleri, (5.7) eşitliği dikkate alınarak (5.9)'da yerlerine yazılırsa

$$\frac{1}{c_1^{\,2}}I_n+P_1P_2+P_2P_1=P_1+P_2 \tag{5.10}$$

bulunur. (5.7) ve (5.10)'dan Teorem 5.2'nin tersinin de doğru olduğu görülür.

(5.6) ifadelerinde A_0 ve B_0 blokları mevcut ise,

$$c_1P_1 + c_2P_2 = A + B = S\left((A_1 + B_1) \oplus (A_0 + B_0)\right)S^{-1}$$

yazılabilir. P_{1_0}, $P_{2_0} \in \mathbb{C}_{m_0}$ ve P_{1_1}, $P_{2_1} \in \mathbb{C}_{m_1}$ olmak üzere,

$$P_1 = S(P_{1_1} \oplus P_{1_0})S^{-1} \text{ ve } P_2 = S(P_{2_1} \oplus P_{2_0})S^{-1} \tag{5.11}$$

olsun. A_1 ve B_1 matrisleri değişmeli olmadığından, P_{1_1} ve P_{2_1} matrisleri de değişmeli değildir. Benzer şekilde, A_0 ve B_0 matrisleri değişmeli olduğundan, P_{1_0} ve P_{2_0} matrisleri de değişmelidir. Dolayısıyla (5.7) eşitliği de dikkate alınarak [20]'deki Teorem 2.5 (a)'dan $(c_1,\ c_2) \in \{(-1,\ 1),\ (1,\ -1)\}$ ve $P_{1_0} + P_{2_0} = I_{m_0}$ yazılabilir. Bu son eşitlik sağdan P_{2_0} ile çarpılır ve ${P_{2_0}}^2 = P_{2_0}$ olduğu kullanılırsa $P_{1_0}P_{2_0} = \mathbf{0}$ olur. P_{1_0} matrisi P_{2_0} matrisi ile değişmeli olduğundan $P_{2_0}P_{1_0} = \mathbf{0}$ eşitliği gerçeklenir. $P_{1_0} + P_{2_0} = I_{m_0}$ ve $P_{1_0}P_{2_0} = P_{2_0}P_{1_0} = \mathbf{0}$ ifadeleri $c_1 = \pm 1$ ile birlikte değerlendirilirse,

$$\frac{1}{{c_1}^2} I_{m_0} + P_{1_0}P_{2_0} + P_{2_0}P_{1_0} = P_{1_0} + P_{2_0} \tag{5.12}$$

yazılabilir. Öte yandan (5.8)'de $A_1 = c_1P_{1_1}$ ve $B_1 = c_2P_{2_1}$ ifadeleri yerlerine yazılır ve (5.7) eşitliği dikkate alınırsa,

$$\frac{1}{{c_1}^2} I_{m_1} + P_{1_1}P_{2_1} + P_{2_1}P_{1_1} = P_{1_1} + P_{2_1} \tag{5.13}$$

olur. (5.11)-(5.13) bağıntılarından

$$\frac{1}{{c_1}^2} I_n + P_1P_2 + P_2P_1 = P_1 + P_2$$

elde edilir. Bu son ifade (5.7) ile birlikte düşünülürse, Teorem 5.2'nin tersinin de doğru olduğu görülür.

Örnek 5.3. $P=\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & -9 & 6 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & -3 & 6 \end{bmatrix}$, $A=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -16 & 10 \\ 0 & -6 & 6 \\ 1 & -17 & 14 \end{bmatrix}$ ve $B=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -8 & 5 \\ 1 & -10 & 7 \\ 2 & -19 & 13 \end{bmatrix}$

matrisleri verilmiş olsun. $P^2=P$, $(A-2P)(A-3P)=\mathbf{0}$, $AP=PA=A$, $(B-P)^2=\mathbf{0}$ ve $BP=PB=B$ olduğunu görmek kolaydır. Şimdi, $A+zB$ matrisini bir idempotent yapacak şekildeki tüm z karmaşık sayılarını bulalım. $B\in\mathfrak{L}(P;\ 1,\ 1)$ olduğundan $zB\in\mathfrak{L}(P;\ z,\ z)$ olduğu açıktır. $A+zB$ matrisi bir idempotent olduğundan, Teorem 2.51'e göre bu matris köşegenleştirilebilirdir ve Teorem 2.47'ye göre de $\sigma(A+zB)\subset\{0,\ 1\}$ yazılabilir. Sonuç 4.4'ün tüm koşullarının sağlandığı açıktır. Bu sonuca göre $1\notin\{0,\ 2,\ 3\}+\{0,\ z\}$ ise, bu durumda $1+0=2+3+z+z$ yazılabilir. Fakat $\{0,\ 2,\ 3\}+\{0,\ z\}=\{0,\ 2,\ 3,\ z,\ 2+z,\ 3+z\}$'dir. Böylece dört mümkün durum söz konusudur:

$$1=z,\ 1=2+z,\ 1=3+z \text{ veya } 1=5+2z\,.$$

z'nin bu değerleri ile basit bir sayısal hesaplama yapmak suretiyle, $A+zB$ matrisinin bir idempotent matris olup olmadığını kontrol etmek yeterlidir. Bu kontrolden sonra $A+zB$ matrisini idempotent yapacak olan tek karmaşık sayının $z=-2$ olduğu görülür.

Örnek 5.4. $a,\ b,\ c,\ d\in\mathbb{C}^*$ olmak üzere $A\in\mathfrak{L}(P;\ a,\ b)$ ve $B\in\mathfrak{L}(P;\ c,\ d)$ olsun. Ayrıca $x,\ y$ ve z karmaşık sayıları verilmiş olsun. $M=xA+yB+zP-AB-BA$ matrisinin özdeğerlerinin kümesini inceleyelim.

İlk olarak $a+b\neq 0\neq c+d$ olmak üzere,

$$x=\gamma+\delta,\quad \frac{c}{d}=\frac{\gamma}{\delta},\quad y=\alpha+\beta,\quad \frac{a}{b}=\frac{\alpha}{\beta} \tag{5.14}$$

olacak şekildeki $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$ karmaşık sayılarını bulalım.

$M = xA+yB+zP-AB-BA$ olduğundan, (5.14)'e göre

$$M = (\gamma+\delta)A+(\alpha+\beta)B+zP-AB-BA$$

yazılabilir. Öte yandan (5.14)'ün çözümü

$$\alpha=\frac{ay}{a+b},\ \beta=\frac{by}{a+b},\ \gamma=\frac{cx}{c+d},\ \delta=\frac{dx}{c+d}$$

şeklindedir.

$$N = M-zP+(\alpha\beta+\gamma\delta)P=(\gamma+\delta)A+(\alpha+\beta)B+(\alpha\beta+\gamma\delta)P-AB-BA \tag{5.15}$$

olsun. $AP=PA=A$ ve $BP=PB=B$ olduğundan, $MP=PM=M$ yazılabilir. P matrisi bir idempotent olduğundan, $r=\operatorname{rank}(P)$ olmak üzere, $P=S(I_r\oplus\mathbf{0})S^{-1}$ olacak şekilde bir S tersinir matrisi vardır. $MP=PM=M$ olduğundan, bir $X\in\mathbb{C}_r$ için

$$M = S(X\oplus\mathbf{0})S^{-1}$$

ve buradan (5.15) dikkate alınarak

$$N=S\left(X+(\alpha\beta+\gamma\delta-z)I_r\oplus\mathbf{0}\right)S^{-1}$$

yazılabilir. Böylece $\sigma(M)$ ve $\sigma(N)$ kümeleri arasında basit bir ilişki kurmak mümkündür. Fakat Teorem 4.6 vasıtasıyla $\sigma(N)$ kümesi incelenebilir. Çünkü

$A \in \mathfrak{L}(P;\ a,\ b)$ ise, $\dfrac{y}{a+b} A \in \mathfrak{L}\left(P;\ \dfrac{y}{a+b} a,\ \dfrac{y}{a+b} b \right) = \mathfrak{L}(P;\ \alpha, \beta)$ olur. Benzer şekilde, $\dfrac{x}{c+d} B \in \mathfrak{L}(P;\ \gamma,\ \delta)$ yazılabilir. Böylece $\dfrac{y}{a+b} A + \dfrac{x}{c+d} B$ matrisinin özdeğerlerini bulmak suretiyle keyfi bir $z \in \mathbb{C}$ için M matrisinin özdeğerleri hakkında değerlendirme yapılabilir.

A ve B matrisleri Lemma 4.2'nin hipotezlerini sağladığında, bu lemma sayesinde $A+B$ matrisinin karakterizasyonu ile ilgili pek çok durum incelenebilir. Bunlardan bazıları aşağıdadır.

Teorem 5.5. $A, B \in \mathbb{C}_n$ olmak üzere $A \in \mathfrak{L}(P;\ \alpha,\ \beta)$, $B \in \mathfrak{L}(Q;\ \gamma,\ \delta)$, $(A+B)(\alpha\beta P - \gamma\delta Q) = (\alpha\beta P - \gamma\delta Q)(A+B)$ ve $AB \neq BA$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur.

i) $A+B$ bir idempotent matris ise $\alpha+\beta+\gamma+\delta = 1$'dir.

ii) $A+B$ bir involutif matris ise $\alpha+\beta+\gamma+\delta = 0$'dır.

iii) $A+B$ bir tripotent matris ise $\alpha+\beta+\gamma+\delta \in \{-1,\ 0,\ 1\}$'dir.

İspat. i) $A+B$ matrisi bir idempotent matris olduğundan, Teorem 2.51'e göre bu matris köşegenleştirilebilirdir ve Teorem 2.47'ye göre de $\sigma(A+B) \subset \{0,\ 1\}$ yazılabilir. A ve B matrisleri Lemma 4.2'deki gibi olsun. $AB \neq BA$ olduğundan $k \geq 1$ olduğu açıktır. Böylece $\mu \neq \nu$ ve $\mu + \nu = \alpha+\beta+\gamma+\delta$ olacak şekilde $\mu,\ \nu \in \sigma(A_1 + B_1)$ sayıları vardır. $\sigma(A_1+B_1) \subset \sigma(A+B)$ olduğundan $\{\mu,\ \nu\} = \{0,\ 1\}$ olur. Böylece $\alpha+\beta+\gamma+\delta = 1$, yani teoremin i) şıkkı elde edilir.

ii) $A+B$ matrisi bir involutif matris olduğundan, Teorem 2.51'e göre bu matris köşegenleştirilebilirdir ve Teorem 2.49'a göre de $\sigma(A+B) \subset \{-1,\ 1\}$ yazılabilir. Bu şıkkın ispatının devamı önceki şıktaki gibi ilerlenerek tamamlanır.

iii) $A+B$ matrisi bir tripotent matris olduğundan, Teorem 2.52'ye göre bu matris köşegenleştirilebilirdir ve Teorem 2.50'ye göre de $\sigma(A+B)\subset\{-1,\ 0,\ 1\}$ yazılabilir. A ve B matrisleri Lemma 4.2'deki gibi olsun. $AB\neq BA$ olduğundan $k\geq 1$ olmalıdır. Böylece $\mu\neq\nu$ ve $\mu+\nu=\alpha+\beta+\gamma+\delta$ olacak şekilde $\mu,\ \nu\in\sigma(A_1+B_1)$ sayıları vardır. $\sigma(A_1+B_1)\subset\sigma(A+B)$ olduğundan üç olası durum söz konusudur:

$$\{\mu,\ \nu\}=\{0,\ 1\} \text{ veya } \{\mu,\ \nu\}=\{-1,\ 0\} \text{ veya } \{\mu,\ \nu\}=\{-1,\ 1\}.$$

Buradan $\alpha+\beta+\gamma+\delta\in\{-1,\ 0,\ 1\}$ olduğu görülür. ■

Teorem 5.6. $A,\ B\in\mathbb{C}_n$ olmak üzere $A\in\mathfrak{L}(P;\ \alpha,\ \beta)$, $B\in\mathfrak{L}(Q;\ \gamma,\ \delta)$, $(A+B)(\alpha\beta P-\gamma\delta Q)=(\alpha\beta P-\gamma\delta Q)(A+B)$ ve $AB\neq BA$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur.

i) $(A+B)^2=A+B$ olması için gerek ve yeter koşul $\alpha+\beta+\gamma+\delta=1$ ve $AB+BA-\alpha\beta P-\gamma\delta Q=(\alpha+\beta)B+(\gamma+\delta)A$ olmasıdır.

ii) $(A+B)^2=I_n$ olması için gerek ve yeter koşul $\alpha+\beta+\gamma+\delta=0$ ve $AB+BA-\alpha\beta P-\gamma\delta Q=I_n-(\alpha+\beta)(A-B)$ olmasıdır.

iii) $(A+B)^3=A+B$ olması için gerek ve yeter koşul $\varpi=1-\alpha^2-\beta^2-\alpha\beta$ ve $\theta=1-\gamma^2-\delta^2-\gamma\delta$ olmak üzere A, B, P ve Q matrislerinin aşağıdaki koşullardan birini sağlamasıdır.

a) $\alpha+\beta+\gamma+\delta=0$ ve
$\varpi A+\theta B=-2\gamma\delta QA-2\alpha\beta BP-\alpha\beta(\alpha+\beta)P-\gamma\delta(\gamma+\delta)Q+ABA+BAB$.

b) $\alpha+\beta+\gamma+\delta=1$ ve
$\varpi A+\theta B=AB+BA-2\gamma\delta QA-2\alpha\beta BP-\alpha\beta(\alpha+\beta)P-\gamma\delta(\gamma+\delta)Q+ABA+BAB$.

c) $\alpha+\beta+\gamma+\delta=-1$ ve
$\varpi A+\theta B=-AB-BA-2\gamma\delta QA-2\alpha\beta BP-\alpha\beta(\alpha+\beta)P-\gamma\delta(\gamma+\delta)Q+ABA+BAB$.

İspat. i) $(A+B)^2 = A+B$ olması için gerek ve yeter koşul $A^2+B^2+AB+BA = A+B$ olmasıdır. Bu son eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter koşul da

$$(\alpha+\beta)A-\alpha\beta P+(\gamma+\delta)B-\gamma\delta Q+AB+BA = A+B \tag{5.16}$$

olmasıdır. Teorem 5.5 i)'ye göre $\alpha+\beta+\gamma+\delta=1$ olduğundan, (5.16) eşitliğinin sağlanması için gerek ve yeter koşul $AB+BA-\alpha\beta P-\gamma\delta Q = (\alpha+\beta)B+(\gamma+\delta)A$ olmasıdır. Böylece i)'nin ispatı tamamlanır.

ii) $(A+B)^2 = I_n$ olması için gerek ve yeter koşul $A^2+B^2+AB+BA = I_n$ ve dolayısıyla $(\alpha+\beta)A-\alpha\beta P+(\gamma+\delta)B-\gamma\delta Q+AB+BA = I_n$ olmasıdır. Öte yandan, Teorem 5.5 ii)'ye göre $\alpha+\beta+\gamma+\delta=0$ olduğundan, $(\alpha+\beta)A-\alpha\beta P+(\gamma+\delta)B-\gamma\delta Q+AB+BA = I_n$ olması için gerek ve yeter koşulun $AB+BA-\alpha\beta P-\gamma\delta Q = I_n-(\alpha+\beta)(A-B)$ olduğu görülür. Böylece ii)'nin ispatı tamamlanır.

iii) $(A+B)^3 = A+B$ olması için gerek ve yeter koşul $A^3+B^3+ABA+BAB+AB^2+BA^2+B^2A+A^2B = A+B$ eşitliğinin sağlanmasıdır. $A^2 = (\alpha+\beta)A-\alpha\beta P$ ve $B^2 = (\gamma+\delta)B-\gamma\delta Q$ olduğundan, bu son eşitlik $C = AB+BA$, $D = BP+PB$ ve $E = QA+AQ$ olmak üzere

$$\varpi A+\theta B = (\alpha+\beta+\gamma+\delta)C-\alpha\beta D-\gamma\delta E-(\alpha+\beta)\alpha\beta P-(\gamma+\delta)\gamma\delta Q+ABA+BAB \tag{5.17}$$

eşitliğine dönüşür. Teorem 5.5 iii)'ye göre $\alpha+\beta+\gamma+\delta=0$ veya $\alpha+\beta+\gamma+\delta=1$ veya $\alpha+\beta+\gamma+\delta=-1$ olduğundan (5.17)'den sırasıyla

$$\varpi A+\theta B = -\alpha\beta D-\gamma\delta E-(\alpha+\beta)\alpha\beta P-(\gamma+\delta)\gamma\delta Q+ABA+BAB$$

veya

$$\varpi A + \theta B = AB + BA - \alpha\beta D - \gamma\delta E - (\alpha + \beta)\alpha\beta P - (\gamma + \delta)\gamma\delta Q + ABA + BAB$$

veya

$$\varpi A + \theta B = -\alpha\beta D - \gamma\delta E - AB - BA - (\alpha + \beta)\alpha\beta P - (\gamma + \delta)\gamma\delta Q + ABA + BAB$$

bulunur. Ayrıca teoremin hipotezinden $\alpha\beta(PB - BP) = \gamma\delta(QA - AQ)$ ve dolayısıyla $-\alpha\beta(PB + BP) - \gamma\delta(QA + AQ) = -2\gamma\delta QA - 2\alpha\beta BP$ yazılabilir. Böylece iii) şıkkının ve dolayısıyla teoremin ispatı tamamlanır. ■

Bu teoremin ii) şıkkında $A = c_1 P_1$, $B = c_2 P_2$, $\alpha = c_1$, $\beta = -c_1$, $\gamma = c_2$, $\delta = -c_2$ ve $P = Q = I_n$ alınırsa Teorem 5.1 elde edilir. Ayrıca Teorem 5.1'in tersinin de doğru olduğu görülür.

Yine bu teoremin ii) şıkkında $A = c_1 P_1$, $B = c_2 P_2$, $\alpha = c_1$, $\beta = 0$, $\gamma = c_2$, $\delta = 0$ ve $P = Q = I_n$ alınırsa Teorem 5.2 elde edilir. Hatta Teorem 5.2'nin tersinin de doğru olduğu görülür.

Teorem 4.12'de λ ve μ özdeğerleri eşit olabilir. Bu teoremin uygulanabilirliğinin bir örneği olarak aşağıdaki durumu çalışalım.

Örnek 5.7. X, $Y \in \mathbb{C}_n$ matrisleri, değişmeli olmayan iki idempotent matris olsun. $aX + bY$ matrisi nilpotent olacak şekilde sıfırdan farklı a, b karmaşık sayılarını bulalım. $A = aX$, $B = bY$, $P = Q = I_n$, $\alpha = a$, $\beta = 0$, $\gamma = b$ ve $\delta = 0$ olarak tanımlanırsa, Teorem 4.12'nin koşulları sağlanır. Dahası, $A + B$ bir nilpotent matris olduğundan, Teorem 2.54'e göre $\sigma(A + B) = \{0\}$ ve dolayısıyla $a + b = 0$ yazılabilir. Böylece $aX + bY$ matrisinin nilpotent olması için gerek ve yeter koşul $a + b = 0$ ve $X - Y$ matrisinin nilpotent olmasıdır.

BÖLÜM 6. TARTIŞMA VE ÖNERİLER

Liu ve Benítez [24]'teki çalışmalarında iki idempotent matrise bağlı olan bazı matrislerin spektrumlarını incelemişlerdir.

Bu çalışmanın üçüncü bölümünde, kuadratik matrislerin idempotent matrislerle olan ilişkisinden faydalanılarak yukarıda bahsedilen çalışma iki kuadratik matris çiftine genişletilmiştir. [24]'teki tüm sonuçlar, bu çalışmada elde edilen sonuçların bir özel durumu olarak elde edilebilir. Örneğin, Teorem 3.7'de $\alpha = \gamma = 1$, $\beta = \delta = 0$, $c_1 = a$, $c_2 = b$, $A = P$ ve $B = Q$ alınırsa, [24]'teki Teorem 3 elde edilir. Benzer şekilde Sonuç 3.8'de $\alpha = \gamma = 1$, $\beta = \delta = 0$, $A = P$ ve $B = Q$ alınırsa, [24]'teki Teorem 4 elde edilir. Yine, üçüncü bölümde elde edilen sonuçlar vasıtasıyla idempotent ve/veya involutif gibi özel tipli matrislerin lineer bileşiminin karakterizasyonuna dair literatürde mevcut olan bazı sonuçların tersinin de doğru olduğu beşinci bölümde gösterilmiştir. Çalışmanın üçüncü bölümünde geniş hali ile verilen sonuçlar [25]'deki çalışmada yer almaktadır.

Daha sonra, dördüncü bölümde, önceki bölümde yapılanlar kuadratik matrisler sınıfını da örten genelleştirilmiş kuadratik matrisler sınıfına genişletilmiştir. Fakat önceki bölümden farklı olarak, iki genelleştirilmiş kuadratik matrisin toplamının köşegenleştirilebilir olmadığı durumda da bazı sonuçlar elde edilmiştir. Ayrıca, bu bölümde kullanılan yöntem önceki bölümde kullanılan yöntemden farklıdır. Yine dördüncü bölümde elde edilen sonuçların, özel tipli matrislerin lineer bileşimlerinin karakterizasyonu ile ilgili bazı uygulamaları ve elde edilen sonuçları destekleyici nitelikteki bazı örnekler beşinci bölümde verilmektedir. Dördüncü ve beşinci bölümlerde detayları ile ele alınıp incelenen sonuçlar, [38]'deki çalışmada özetlenmektedir.

Bu aşamada akla gelen soru şu olabilir: Genelleştirilmiş kuadratik matrisler sınıfını da örten bir başka matris sınıfı var mıdır? Örneğin, $\alpha,\ \beta,\ \gamma \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$(A-\alpha I_n)(A-\beta I_n)(A-\gamma I_n)=\mathbf{0} \tag{6.1}$$

eşitliğini sağlayan $A \in \mathbb{C}_n$ matrislerinin kümesi düşünülebilir. (6.1)'i sağlayan A matrisine bir $\{\alpha,\ \beta,\ \gamma\}$*-kübik matris* denilebilir. Eğer $\alpha \neq \beta$, $\alpha \neq \gamma$ ve $\beta \neq \gamma$ ise, bu durumda yapılan bir ön çalışmada

$$A=\alpha X+\beta Y+\gamma Z, \quad X+Y+Z=I_n,\ XY=YX=\mathbf{0},\ XZ=ZX=\mathbf{0},\ YZ=ZY=\mathbf{0}$$

olacak şekilde X, Y ve Z idempotent matrislerinin varlığı görülmüştür. $Z=I_n-X-Y$ olduğundan $A=(\alpha-\gamma)X+(\beta-\gamma)Y+\gamma I_n$ yazılabilir. X ve Y matrisleri $XY=YX=\mathbf{0}$ olacak şekildeki iki idempotent matris olduğundan, $X+Y$ matrisi de bir idempotenttir. Dolayısıyla $(\alpha-\gamma)X+(\beta-\gamma)Y$ matrisine, $X+Y$ idempotent matrisine göre bir genelleştirilmiş $\{\alpha-\gamma,\ \beta-\gamma\}$-kuadratik matris olarak bakılabilir. Bu, $\alpha \neq \beta$, $\alpha \neq \gamma$ ve $\beta \neq \gamma$ olmak üzere bir $\{\alpha,\ \beta,\ \gamma\}$-kübik A matrisinin, aslında bir genelleştirilmiş kuadratik matris ile bir birim matrisin bir lineer bileşiminden ibaret olduğu anlamına gelir. Dolayısıyla genelleştirilmiş kuadratik matrislerin kullanılarak yapıldığı bu çalışma, kübik matrisler sınıfı için de çalışılabilir. Elde edilecek olası sonuçlar yardımıyla da, literatürdeki birçok sonuç yeniden türetilebilir.

KAYNAKLAR

[1] Graybill, F. A., Matrices with Applications in Statistics, Wadsworth International Group, California, 1983.

[2] Adler, S. L., Quaternionic Quantum Mechanics and Quantum Fields, Oxford University Press, Inc., New York, 1995.

[3] Bethe, H. A. ve Salpeter, E. E., Quantum Mechanics of One-and Two-Electron Atoms, Plenum Publishing Corporation, New York, 1977.

[4] Drake, G. W. F., Springer Handbook of Atomic, Molecular, and Optical Physics, Springer Science+Business Media, Inc., New York, 2006.

[5] Pearcy, C. ve Topping, D. M., Sums of Small Number of Idempotents, Michigan Math. J., 14(4): 453-465, 1967.

[6] Johnson, R. A. ve Wichern, D. W., Applied Multivariate Statistical Analysis, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1982.

[7] Lay, D. C., Linear Algebra and its Applications, Pearson Education, Inc., Boston, 2006.

[8] Majumdar, R., Quantum Mechanics in Physics and Chemistry with Applications to Biology, PHI Learning Private Limited, Delhi, 2015.

[9] Horn, R. A. ve Jhonson, C. R., Matrix Analysis, 2. Baskı, Cambrige University Press, New York, 2013.

[10] Petik, T., Uç, M. ve Özdemir, H., Generalized Quadraticity of Linear Combination of Two Generalized Quadratic Matrices, Linear Multilinear Algebra, 63(12): 2430-2439, 2015.

[11] Rao, C. R. ve Mitra, S. K., Generalized Inverse of Matrices and its Applications, John Wiley & Sons. Inc., New York, 1971.

[12] Wang, J. H., Factorization of Matrices Into Quadratic Ones. II, Linear Algebra Appl., 231: 111-152, 1995.

[13] Wang, J. H., Factorization of Matrices Into Quadratic Ones. III, Linear Algebra Appl., 240: 21-39, 1996.

[14] Aleksiejczyk, M. ve Smoktunowicz, A., On Properties of Quadratic Matrices, Math. Pannon., 11(2): 239-248, 2000.

[15] Farebrother, R. W. ve Trenkler, G., On Generalized Quadratic Matrices, Linear Algebra Appl., 410: 244-253, 2005.

[16] Deng, C. Y., On Properties of Generalized Quadratic Operators, Linear Algebra Appl., 432(4): 847-856, 2010.

[17] Uç, M., Özdemir, H. ve Özban, A. Y., On the Quadraticity of Linear Combinations of Quadratic Matrices, Linear Multilinear Algebra, 63(6): 1125-1137, 2015.

[18] Baksalary, J. K. ve Baksalary, O. M., Idempotency of Linear Combinations of Two Idempotent Matrices, Linear Algebra Appl., 321(1): 3-7, 2000.

[19] Özdemir, H. ve Sarduvan, M., Notes on Linear Combinations of Two Tripotent, Idempotent, and Involutive Matrices That Commute, An. Ştiinț. Univ. "Ovidius" Constanța Ser. Mat., 16(2): 83-90, 2008.

[20] Sarduvan, M. ve Özdemir, H., On Linear Combinations of Two Tripotent, Idempotent, and Involutive Matrices, Appl. Math. Comput., 200(1): 401-406, 2008.

[21] Uç, M., Petik, T. ve Özdemir, H., The Generalized Quadraticity of Linear Combinations of Two Commuting Quadratic Matrices, Linear Multilinear Algebra, 64(9): 1696-1715, 2016.

[22] Benítez, J. ve Rakočević, V., Applications of CS Decomposition in Linear Combinations of Two Orthogonal Projectors, Appl. Math. Comput., 203(2): 761-769, 2008.

[23] Benítez, J. ve Rakočević, V., On the Spectrum of Linear Combinations of Two Projections in $\mathbb{C}^*$-Algebras, Linear Multilinear Algebra, 58(6): 673-679, 2010.

[24] Liu, X. ve Benítez, J., The Spectrum of Matrices Depending on Two Idempotents, Appl. Math. Lett., 24(10): 1640-1646, 2011.

[25] Özdemir, H. ve Petik, T., On the Spectra of Some Matrices Derived From Two Quadratic Matrices, Bull. Iranian Math. Soc., 39(2): 225-238, 2013.

[26] Venit, S. ve Bishop, W., Elementary Linear Algebra, Prindle, Weber & Schmidt, Boston, 1985.

[27] Harville, D. A., Matrix Algebra From a Statistician's Perspective, Springer-Verlag, New York, 1997.

[28] Meyer, C. D., Matrix Analysis and Applied Linear Algebra, SIAM, Philadelphia, PA, 2000.

[29] Seber, G. A. F., A Matrix Handbook for Statisticians, John Wiley & Sons. Inc., Hoboken, New Jersey, 2008.

[30] Spindler, K., Abstract Algebra With Applications: V.1: Vector Spaces and Groups, Taylor & Francis, Inc., New York, 1993.

[31] Horn, R. A. ve Jhonson, C. R., Matrix Analysis, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1985.

[32] Tian, Y. ve Styan, G. P. H., Rank Equalities for Idempotent and Involutory Matrices, Linear Algebra Appl., 335(1): 101-117, 2001.

[33] Özdemir, H., Sarduvan, M., Özban, A. Y. ve Güler, N., On Idempotency and Tripotency of Linear Combinations of Two Commuting Tripotent Matrices, Appl. Math. Comput., 207(1): 197-201, 2009.

[34] Bernstein, D. S., Matrix Mathematics, Theory, Facts, and Formulas, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 2009.

[35] Zhang, F., Matrix Theory, Basic Results and Techniques, Springer Science+Business Media, LLC., New York, 2011.

[36] Bu, C., Linear Maps Preserving Drazin Inverses of Matrices over Fields, Linear Algebra Appl., 396: 159-173, 2005.

[37] Serre, D., Matrices: Theory and Applications, Springer-Verlag, New York, 2002.

[38] Petik, T., Özdemir, H. ve Benítez, J., On the Spectra of Some Combinations of Two Generalized Quadratic Matrices, Appl. Math. Comput., 268: 978-990, 2015.

ÖZGEÇMİŞ

Tuğba PETİK, 14.11.1987 tarihinde Sakarya'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini 2004 yılında tamamladı. 2005 yılında Sakarya Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde lisans öğrenimine başladı. 2009 yılında lisans öğrenimini tamamladı. Aynı yıl Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Enstitü Anabilim Dalında yüksek lisans programına kaydoldu. 2011 yılında yüksek lisans öğrenimini tamamladı. Aynı yıl doktora programına kaydoldu ve ÖYP kapsamında Matematiğin Temelleri ve Matematik Lojik Bilim Dalında Araştırma Görevlisi olarak çalışmaya başladı. Halen bu görevine devam etmektedir.