T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KOMÜTATİF KUATERNİYONLARIN MATRİSLERİ ÜZERİNE

DOKTORA TEZİ

Hidayet Hüda KÖSAL

Enstitü Anabilim Dalı	**:**	**MATEMATİK**
Enstitü Bilim Dalı	**:**	**GEOMETRİ**
Tez Danışmanı	**:**	**Prof. Dr. Murat TOSUN**

Mayıs 2016

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KOMÜTATİF KUATERNİYONLARIN MATRİSLERİ ÜZERİNE

DOKTORA TEZİ

Hidayet Hüda KÖSAL

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Bu tez 11 / 05 / 2016 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği/~~oyçokluğu~~ ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. **Yusuf YAYLI** **Jüri Başkanı**	**Prof. Dr.** **F. Nejat EKMEKCİ** **Üye**	**Prof. Dr.** **Murat TOSUN** **Üye**
Prof. Dr. **İbrahim OKUR** **Üye**	**Doç. Dr.** **Soley ERSOY** **Üye**	

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

Hidayet Hüda KÖSAL
11.05.2016

TEŞEKKÜR

Tezimin hazırlanması sırasında ilminden faydalandığım, yanında çalışmaktan onur duyduğum değerli danışmanım Prof. Dr. Murat TOSUN’a sonsuz teşekkür ve saygılarımı sunarım.

Bilgilerini ve deneyimlerini her zaman cömertçe benimle paylaşan Matematik Bölümü Öğretim Üyeleri Doç. Dr. Soley ERSOY’a, Doç. Dr. Mehmet Ali GÜNGÖR’e ve Yrd. Doç. Dr. Mahmut AKYİĞİT’e tezime olan katkılarından dolayı şükranlarımı sunarım.

Hem tezimin hazırlanması süresince hem de hayatımın her anında yanımda olan, yüksek sabrı ile beni sürekli destekleyen değerli eşim Işıl ARDA KÖSAL’a ve her zaman benim için en iyisini isteyen, maddi manevi bütün imkânlarıyla beni bugünlere getiren aileme tüm kalbimle teşekkür ederim.

TÜBİTAK Bilim İnsan Destekleme Daire Başkanlığı’na, "2211-Yurt İçi Doktora Burs Programı" kapsamında doktora öğrenimim sırasında vermiş oldukları destekler için teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

2014-50-02-029 nolu proje ile çalışmama destek veren SAÜ Bilimsel Araştırma Projeleri Komisyonuna da teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$A \sim B$	: A matrisi B matrisine benzerdir
$A \overset{c}{\sim} B$	: A matrisi B matrisine eşlenik-benzerdir
$A \approx B$	: A matrisi B matrisine yarı-benzerdir
$A \overset{c}{\approx} B$	: A matrisi B matrisine yarı-eşlenik-benzerdir
$A \simeq B$	: A matrisi B matrisine yakın-benzerdir
$A \overset{c}{\simeq} B$	: A matrisi B matrisine yakın-eşlenik-benzerdir
A^*	: A matrisinin eşlenik transpozu
A^-	: A matrisinin genelleştirilmiş tersi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayıların cümlesi
$\mathbb{C}^{m\times n}$	: $m \times n$ tipinde kompleks matrislerin cümlesi
$\mathbb{C}_p$	: Eliptik sayıların cümlesi
$\mathbb{C}_p^{m\times n}$	$m \times n$ tipinde eliptik matrislerin cümlesi
$\mathbb{H}$	: Komütatif kuaterniyonların cümlesi
$\mathbb{H}^{m\times n}$	: $m \times n$ tipinde komütatif kuaterniyon matrislerinin cümlesi
$\mathbb{H}_p$	: Eliptik kuaterniyonların cümlesi
$\mathbb{H}_p^{m\times n}$	: $m \times n$ tipinde eliptik kuaterniyon matrislerinin cümlesi
$\mathbb{K}$	: Reel kuaterniyonların cümlesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayıların cümlesi
$\mathbb{R}^{m\times n}$	: $m \times n$ tipinde reel matrislerin cümlesi

ŞEKİLLER LİSTESİ

ÖZET

Anahtar Kelimeler: Kompleks sayılar, eliptik sayılar, komütatif kuaterniyonlar, eliptik kuaterniyonlar.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Giriş bölümünde konu ile ilgili literatürde yer alan çalışmalar hakkında bilgiler verilmiştir.

İkinci bölümde çalışmamız boyunca kullanacağımız kompleks sayılar ve onların matrislerinin temel kavram ve teoremleri verilmiştir.

Üçüncü bölümde kompleks sayıların genelleştirilmiş hali olan eliptik sayıların bazı temel cebirsel özellikleri verildikten sonra eliptik sayıların matrisleri tanımlanarak bu matrislerin temel tanım ve teoremleri üzerinde durulmuştur. Ardından bu matris cümlesinde denklik bağıntıları tanımlanarak bu bağıntılar arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Son olarak da bu matris cümlesinde Sylvester-eşlenik ve Kalman-Yakubovich eşlenik lineer denklemleri tanımlanarak bu lineer denklemlerin çözümleri araştırılmıştır.

Dördüncü bölümde komütatif kuaterniyonların bazı cebirsel özellikleri verildikten sonra komütatif kuaterniyonlara karşılık gelen temel matrisleri kullanarak bu cümle üzerinde tanımlı birtakım lineer denklem ve denklem sistemlerinin çözümleri çalışılmıştır. Daha sonra komütatif kuaterniyonların matrisleri tanımlanarak eliptik sayıların matrisleri için incelenmiş olan özellikler komütatif kuaterniyon matrisleri için incelenmiştir.

Son kısımda ise eliptik sayıların ve komütatif kuaterniyonların genelleştirilmiş formu olan eliptik kuaterniyonlar tanıtılarak bu bölüme kadar elde edilmiş tüm özellikler eliptik kuaterniyonlar ve onların matrisleri için genelleştirilmiştir.

ON COMMUTATIVE QUATERNION MATRICES

SUMMARY

Keywords: Complex numbers, elliptic numbers, commutative quaternions, elliptic quaternions.

This study consists of five parts. The first part is an introduction devoted to the literature knowledge.

In the second part of this study the fundamental definitions and theorems related to the complex numbers and complex matrices are given.

In the third part, after the fundamental definitions and the theorems related to the elliptic number which is a general form of complex number are given, also, elliptic matrices are defined and studied. Some equivalence relations on elliptic matrices are given and relationships between the equivalence relations are investigated. Lastly, Sylvester-conjugate and Kalman-Yakubovich-conjugate linear equations are defined and studied on elliptic matrices.

In the fourth part, after some algebraic properties of commutative quaternions are given, solutions of some linear equations and linear equations system of commutative quaternions are studied by means of real representation of commutative quaternions. Lastly, commutative quaternion matrices are defined and examined. Properties for elliptic matrices are investigated for commutative quaternions.

In the fifth parth, after fundamental definitions and theorems of elliptic quaternions are given, The obtained results throughout the study are generalized for elliptic quaternions.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Reel kuaterniyonlar 1843 yılında W. R. Hamilton tarafından tanımlanmıştır. W. R. Hamilton'un amacı kompleks sayıları daha yüksek boyutlara genişletmektir. Reel kuaterniyonlar cümlesi

$$\mathbb{K} = \{a = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k : a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\} \tag{1.1}$$

biçiminde ifade edilir. Burada i, j, k birimlerinin çarpımı

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1,\ ij = -ji = k,\ jk = -kj = i,\ ki = -ik = j \tag{1.2}$$

biçiminde tanımlanmıştır. Bu çarpım kuralından reel kuaterniyonlarda çarpma işleminin değişme özelliği olmadığı görülmektedir. Reel kuaterniyonlar cümlesi, tanımlanan toplama ve skalarla çarpma işlemleri ile birlikte kompleks sayılar cümlesi üzerinde 2-boyutlu, reel sayılar cümlesi üzerinde ise 4-boyutlu vektör uzayıdır [1].

Reel kuaterniyonların hareket geometrisi, diferensiyel geometri, sayısal görüntü işleme, bilgisayar programlama, kuantum mekaniği gibi birçok alanda uygulamaları mevcuttur. Bu uygulamalarda reel kuaterniyonların matris teorisi birçok kolaylık sağlamaktadır.

Reel kuaterniyonların matrisleri üzerine çalışmalar 1936 yılına kadar dayanır. L. A. Wolf reel kuaterniyon matrislerinin benzer olabilmeleri için gerek ve yeter şartı ortaya koymuştur [2]. J. L. Brenner ise her kare kuaterniyon matrisinin bir karakteristik köke sahip olduğunu ve benzer matrislerin aynı karakteristik köke sahip olduğunu ispatlamıştır [3]. Ardından N. A. Weigmann $n \times n$ tipindeki kuaterniyon matrisleri ile

$2n \times 2n$ tipindeki kompleks matrisler arasında bir izomorfizma tanımlamış ve bu izomorfizma yardımıyla reel kuaterniyon matrisleri ile ilgili bazı teoremleri çalışmıştır [4]. M. L. Mehta reel kuaterniyon matrislerinin determinantlarının iki farklı tanımını vermiştir. Ayrıca bu iki farklı tanımın genelde farklı olmasına rağmen Hermityen matrisler için aynı olduğunu göstermiştir [5].

Günümüzde reel kuaterniyon matrisleri üzerine en kapsamlı çalışma F. Zhang'ın yapmış olduğu [6] çalışmasıdır. F. Zhang reel kuaterniyon matrisleri ile kompleks matrisler arasındaki ilişkiden yola çıkarak reel kuaterniyon matrislerinin genel cebirsel özelliklerini incelemiştir.

Reel kuaterniyonların değişme özelliğinin olmaması bu matrislerde sağ ve sol özdeğer olmak üzere iki farklı özdeğer tanımlanmasına yol açmıştır [6]. A. Baker, Lefschetz sabit nokta teoremini kullanarak her kare reel kuaterniyon matrisinin bir sağ özdeğere sahip olduğunu göstermiştir [7]. Ayrıca L. Huang ve W. So bu matrislerin sağ ve sol özdeğerlerinin bazı özelliklerini inceleyerek bu iki özdeğer arasındaki ilişkileri ortaya koymuşlardır [8].

Reel kuaterniyon matrislerinin lineer denklemlerinin çözümleri üzerine de literatürde birçok çalışma mevcuttur. T. S. Jiang ve M. S. Wei $X - A\widetilde{X}B = C$ reel kuaterniyon matris denkleminin çözümünü ve bu denklemin uygulamalarını çalışmışlardır [9]. Ardından Q. W. Wang, H. S. Zhang ve S. W. Yu $AXB + CYD = E$ reel kuaterniyon matris denkleminin bir çözüme sahip olabilmesi için gerek ve yeter koşulları incelemişlerdir [10]. T. Jiang ve S. Ling ise $A\widetilde{X} - XB = C$ matris denkleminin çözümleri ve uygulamaları üzerine bir çalışma yapmışlardır [11].

Hamilton'un keşfinden sonra C. Segre tarafından 1892 yılında komütatif kuaterniyonlar cümlesi tanımlanmıştır [12]. Komütatif kuaterniyonlar tıpkı reel kuaterniyonlar gibi kompleks sayılar cümlesi üzerinde 2-boyutlu ve reel sayılar cümlesi üzerinde 4-boyutlu vektör uzayıdır. Komütatif kuaterniyonlar, reel kuaterniyonlardan farklı olarak çarpma işlemine göre değişme özelliğine sahiptir. Bunun yanısıra komütatif kuaterniyonlar cümlesi sıfır bölen elemana sahiptir. Komütatif kuaterniyonların genelleştirilmiş hali eliptik kuaterniyonlardır [13]. Eliptik kuaterniyonlar, eliptik sayılar cümlesi üzerinde 2-boyutlu ve reel sayılar cümlesi üzerinde 4-boyutlu vektör uzayıdır [14].

Komütatif kuaterniyonlar ve eliptik kuaterniyonlar da hareket geometrisi, diferensiyel geometri, sayısal görüntü işleme, sinyal işleme, bilgisayar programlama gibi birçok alanda uygulamalara sahiptirler. G. Scorza-Dragoni [15] ve U. Morin [16] her iki sayı sistemlerinin fonksiyonlarının diferensiyellenebilmesi üzerine çalışmalar yapmışlardır. S. C. Pei, J. H. Chang ve J. J. Ding komütatif kuaterniyonları ve onların Fourier dönüşümlerini kullanarak görüntü ve sinyal işleme süreçlerinin birçok uygulamalarını gerçekleştirmişlerdir [17]. F. Catoni, R. Cannata, V. Catoni ve P. Zampetti bu iki sayı sistemlerini N boyuta taşıyarak geometrik açıdan incelemişlerdir [18]. F. Catoni, R. Cannata ve P. Zampetti komütatif kuaterniyonların ve eliptik kuateniyonların holomorfik fonksiyonları, kutupsal gösterimleri ve konformal dönüşümleri konularını çalışıp bu konularla ilgili sonuçlar elde etmişlerdir [13]. T. Isokawa, H. Nishimura ve M. Matsui komütatif kuaterniyonları baz alarak çoklu hopfield sinir ağlarını çalışmışlardır [19]. H. H. Kosal ve M. Tosun da komütatif kuaterniyon matrislerinin temel cebirsel özelliklerini onların temel matrisleri yardımıyla incelemişlerdir [20].

BÖLÜM 2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Kompleks Sayılar

Kompleks sayıların cümlesi

$$\mathbb{C} = \left\{ z = x + iy : x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1 \right\} \tag{2.1}$$

biçiminde ifade edilir. $z = x + iy \in \mathbb{C}$ için $\operatorname{Re}(z) = x$ ifadesine z kompleks sayısının reel kısmı, $\operatorname{Im}(z) = y$ ifadesine ise z kompleks sayının sanal kısmı denir [21].

Bir $z = x + iy$ kompleks sayısının eşleniği ve normu sırasıyla

$$\overline{z} = x - iy \text{ ve } \|z\| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{2.2}$$

eşitlikleriyle tanımlanır [21].

$z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2 \in \mathbb{C}$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\mathbb{C}$ cümlesi üzerinde toplama, çarpma ve skalarla çarpma işlemleri sırasıyla

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2),$$

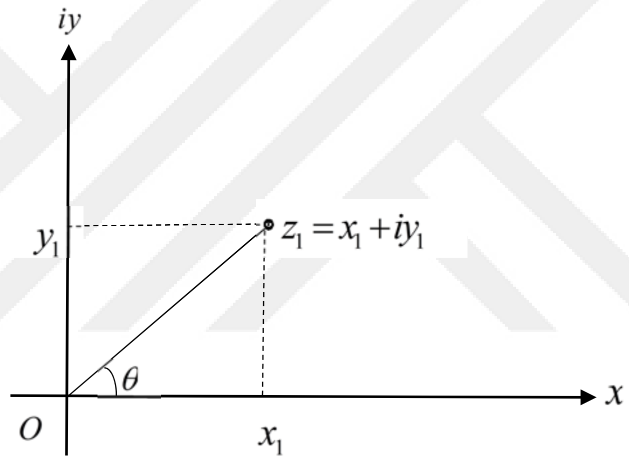
$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1),$$

$$\lambda z_1 = \lambda(x_1 + iy_1) = \lambda x_1 + i\lambda y_1$$

eşitlikleri ile tanımlanır [21].

Teorem 2.1.1. $\mathbb{C}$ cümlesi, üzerinde tanımlanan toplama ve skalarla çarpma işlemleri ile birlikte $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi üstünde 2-boyutlu bir vektör uzayıdır [21].

Kompleks sayılar cümlesi ile $\mathbb{R}^2$ arasında birebir bir eşleme mevcuttur. Yani her bir kompleks sayıya düzlem üstünde bir tek nokta, tersine düzlem üstündeki her bir noktaya da $\mathbb{C}$ de bir tek kompleks sayı karşılık gelir. $z_1 = x_1 + iy_1$ kompleks sayısı düzlemde (x_1, y_1) noktasına eşlenir ve kompleks sayının reel kısmı kartezyen koordinatlarda apsise, sanal kısmı da ordinata karşılık gelir [21].



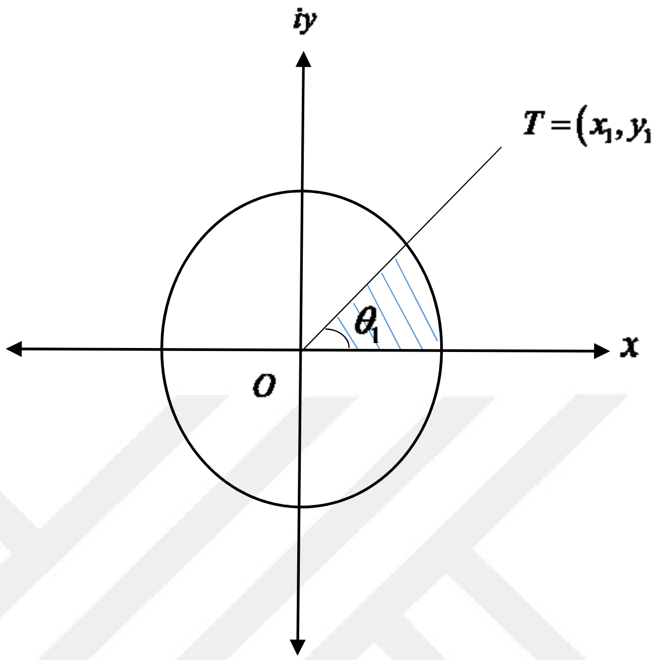
Şekil 2.1. Kompleks düzlem

Şekil 2.1 ile verilen düzleme kompleks düzlem denir. Kompleks düzlemde $z_1 = (x_1, y_1)$ ve $z_2 = (x_2, y_2)$ noktaları arasındaki uzaklık

$$\|z_1 - z_2\| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \tag{2.3}$$

eşitliği ile tanımlanır. Bu düzlemde başlangıç noktasına olan uzaklıkları 1 birim olan kompleks sayıların cümlesi merkezcil birim çemberdir. Bu noktalar $x^2 + y^2 = 1$ şartını sağlarlar [21].

Kompleks düzlemde her bir $z_1 = (x_1, y_1)$ kompleks sayısı bir $\overrightarrow{OT}$ yönlü doğru parçası ile gösterilebilir.



Şekil 2.2. Bir kompleks sayının kompleks düzlemde gösterilmesi

Bu durumda $\overrightarrow{OT}$ vektörü ile reel eksen arasında kalan yay uzunluğuna $z_1 = (x_1, y_1)$ sayısının argümenti denir ve

$$\theta_1 = \arctan \frac{y_1}{x_1} \tag{2.4}$$

biçiminde gösterilir [21].

$z_1 = (x_1, y_1)$ kompleks sayısının argümenti θ_1 olmak üzere bir kompleks sayı

$$z_1 = \|z_1\| (\cos\theta_1 + i \sin\theta_1) \tag{2.5}$$

eşitliği ile de ifade edilebilir. Bu gösterime kompleks sayının kutupsal gösterimi denir. Kutupsal koordinatlarda gösterim kompleks sayıların bir çok özelliğinin incelenmesinde kolaylık sağlar. Örneğin iki kompleks sayının çarpımı öyle bir kompleks sayıdır ki bu yeni kompleks sayının normu, çarpılan sayıların normları çarpımına; argümenti ise çarpılan sayıların argümentleri toplamına eşittir. Kısaca

$$z_1 = \|z_1\|\left(\cos(\theta_1) + i\sin(\theta_1)\right) \text{ ve } z_2 = \|z_2\|\left(\cos(\theta_2) + i\sin(\theta_2)\right) \quad (2.6)$$

olmak üzere

$$z_1 z_2 = \|z_1\|\|z_2\|\left(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\right) \quad (2.7)$$

dir. $z = (x, y)$ kompleks sayısı

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

Euler denklemi yardımıyla

$$z = \|z\|\left(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right) = \|z\|e^{i\theta} = \|z\|e^{i(\theta+2\pi k)},\ k \in \mathbb{Z} \quad (2.8)$$

biçiminde de ifade edilebilir. Bu durumda bir $z = (x, y)$ kompleks sayısının *n.* tam sayı kuvveti

$$z^n = \|z\|^n e^{i(n\theta)} = \|z\|^n \left(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\right) \quad (2.9)$$

eşitliği ile tanımlanır [21].

Teorem 2.1.2. Her $z = x + iy$ kompleks sayısı

$$\alpha(z)=\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$$

biçiminde 2×2 tipinde bir reel matris ile ifade edilebilir [22].

Tanım 2.1.3. $\alpha(z)=\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$ matrisine z kompleks sayısının temel matrisi denir [22].

Teorem 2.1.4. $z_1 = x_2 + iy_2$ ve $z_2 = x_2 + iy_2 \in \mathbb{C}$ olmak üzere $\alpha(z)$ temel matrisi aşağıdaki özellikleri sağlar [22]:

1. $\alpha(z_1 z_2)=\alpha(z_1)\alpha(z_2)$,

2. $\alpha(\alpha(z_1)z_2)=\alpha(z_1)\alpha(z_2)$,

3. $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \alpha(z_1)=\alpha(z_2)$,

4. $\alpha(z_1+z_2)=\alpha(z_1)+\alpha(z_2)$,

5. $\alpha(\lambda z_1)=\lambda\alpha(z_1)$,

6. $iz(\alpha(z_1)) = z_1 + \overline{z_1}$,

7. $\|z_1\|^2 = \det(\alpha(z_1))$.

Teorem 2.1.5. $z = x + iy \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$P^{-1}\begin{pmatrix} x+yi & 0 \\ 0 & x-yi \end{pmatrix}P=\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}=\alpha(z)$$

eşitliği mevcuttur. Burada

$$P = P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & -1 \end{pmatrix}$$

dir [22].

Teoremin doğruluğu eşitliğin her iki tarafının hesaplanmasıyla kolayca gösterilir.

$$P^{-1}\begin{pmatrix} x+yi & 0 \\ 0 & x-yi \end{pmatrix}P = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} = \alpha(z)$$

eşitliğine evrensel benzerlik eşitliği denir. Bu eşitlik yardımı ile aşağıdaki sonuçlar söylenebilir:

1. $\mathbb{C}$ cümlesi

$$\mathbb{C}' = \left\{ \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

cümlesine izomoftur. Bu iki cümle arasındaki izomorfizma

$$\alpha : \quad \mathbb{C} \to \mathbb{C}'$$

$$z = x + iy \to \alpha(z) = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$$

biçimindedir.

2. Her $z = x + iy \in \mathbb{C}$ kompleks sayısı

$$\alpha(z) = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$$

matrisi ile ifade edilebilir.

3. $\mathbb{C}'$ cümlesinin her bir elemanı $\mathbb{C}$ cümlesi üstünde tek bir biçimde köşegenleştirilebilir [22].

2.2. Kompleks Matrisler

Elemanları kompleks sayılar olan $m \times n$ tipindeki matrislerin cümlesi $\mathbb{C}^{m\times n}$ ile gösterilir. Bu cümlede $A=\left(a_{ij}\right)$, $B=\left(b_{ij}\right)\in\mathbb{C}^{m\times n}$, $C=\left(c_{jk}\right)\in\mathbb{C}^{n\times l}$ ve $\lambda\in\mathbb{R}$ için toplama, skalarla çarpma ve çarpma işlemleri sırasıyla

$$A+B=\left(a_{ij}\right)+\left(b_{ij}\right)=\left(a_{ij}+b_{ij}\right)\in\mathbb{C}^{m\times n},$$

$$\lambda A=\lambda\left(a_{ij}\right)=\left(\lambda a_{ij}\right)\in\mathbb{C}^{m\times n},$$

$$AC=\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_{jk}\right)\in\mathbb{C}^{m\times l}$$

eşitlikleri ile tanımlanır [23].

Tanım 2.2.1. $A=\left(a_{ij}\right)\in\mathbb{C}^{n\times n}$ olmak üzere $i\neq j$ için $a_{ij}=0$ ve $i=j$ için $a_{ij}=1$ ise A matrisine birim matris denir ve I_n ile gösterilir [23].

Tanım 2.2.2. $A=\left(a_{ij}\right)\in\mathbb{C}^{n\times n}$ olmak üzere $i\neq j$ için $a_{ij}=0$ ve $i=j$ için $a_{ij}=c\in\mathbb{R}$ ise A matrisine skalar matris denir [23].

Tanım 2.2.3. $A=\left(a_{ij}\right)\in\mathbb{C}^{n\times n}$ olmak üzere $i\neq j$ için $a_{ij}=0$ ve $i=j$ için $a_{ij}\in\mathbb{R}$ ise A matrisine köşegen matris denir ve $A=diag\left(a_{11},a_{22},...,a_{nn}\right)$ ile gösterilir [23].

Tanım 2.2.4. $A=(a_{ij})\in\mathbb{C}^{n\times n}$ için $A^2=A$ ise A matrisine idempotent matris denir [23].

Tanım 2.2.5. $A=(a_{ij})\in\mathbb{C}^{n\times n}$ için $A^r=0,\ r\in\mathbb{Z}^+$ ise A matrisine nilpotent matris denir. $A^r=0$ eşitliğini sağlayan en küçük r pozitif tamsayısına ise A matrisinin nilpotentlik derecesi denir [23].

Tanım 2.2.6. $A=(a_{ij})\in\mathbb{C}^{n\times n}$ olmak üzere $i>j$ için $a_{ij}=0$ ise A matrisine üst üçgensel matris, $i<j$ için $a_{ij}=0$ ise A matrisine alt üçgensel matris denir [23].

Tanım 2.2.7. $A=(a_{ij})\in\mathbb{C}^{n\times n}$ olmak üzere $AB=BA=I_n$ eşitliğini sağlayan $B\in\mathbb{C}^{n\times n}$ matrisi varsa A matrisine regüler matris denir. Aksi halde A matrisine singüler matris denir. $AB=BA=I_n$ eşitliğini sağlayan $B\in\mathbb{C}^{n\times n}$ matrisine ise A matrisinin tersi denir ve $A^{-1}=B$ biçiminde gösterilir [23].

Teorem 2.2.8. $A=(a_{ij}),\ B=(b_{ij})\in\mathbb{C}^{n\times n}$ olmak üzere aşağıdaki özellikler doğrudur [23]:

1. $\left(A^{-1}\right)^{-1}=A,$

2. $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1},$

3. $\left(A^k\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^k,\ k\in\mathbb{Z}^+.$

Tanım 2.2.9. $A=(a_{ij})\in\mathbb{C}^{m\times n}$ olmak üzere A matrisinin satırları sütun yapılarak elde edilen yeni matrise A matrisinin transpozu denir ve A^T ile gösterilir [23].

Teorem 2.2.10. $A=\left(a_{ij}\right),\ B=\left(b_{ij}\right)\in\mathbb{C}^{m\times n},\ C=\left(c_{jk}\right)\in\mathbb{C}^{n\times l}$ ve $\lambda\in\mathbb{R}$ olmak üzere aşağıdaki özellikler doğrudur [23]:

1. $\left(A^T\right)^T=A,$

2. $\left(A+B\right)^T=A^T+B^T,$

3. $\left(\lambda A\right)^T=\lambda A^T,$

4. $\left(AC\right)^T=C^T A^T,$

5. $\left(A^k\right)^T=\left(A^T\right)^k, k\in\mathbb{Z}^+.$

Tanım 2.2.11. $A=\left(a_{ij}\right)\in\mathbb{C}^{n\times n}$ olmak üzere $A^T=A$ ise A matrisine simetrik matris denir. $A^T=-A$ ise A matrisine ters simetrik matris denir [23].

Tanım 2.2.12. $A=\left(a_{ij}\right)\in\mathbb{C}^{m\times n}$ olmak üzere $\overline{A}=\left(\overline{a_{ij}}\right)\in\mathbb{C}^{m\times n}$ matrisine A matrisinin kompleks eşleniği denir. $A^*=\left(\overline{A}\right)^T\in\mathbb{C}^{m\times n}$ matrisine ise A matrisinin eşlenik transpozu denir [23].

Teorem 2.2.13. $A=\left(a_{ij}\right),\ B=\left(b_{ij}\right)\in\mathbb{C}^{m\times n},\ C=\left(c_{jk}\right)\in\mathbb{C}^{n\times l}$ ve $\lambda\in\mathbb{C}$ olmak üzere aşağıdaki özellikler doğrudur [23]:

1. $\overline{\left(\overline{A}\right)}=A,\ \left(A^*\right)^*=A,$

2. $\overline{\left(A+B\right)}=\overline{A}+\overline{B},\ \left(A+B\right)^*=A^*+B^*,$

3. $\overline{(\lambda A)} = \overline{\lambda}\,\overline{A},\ (\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^*,$

4. $\overline{(AC)} = \overline{A}\,\overline{C},\ (AC)^* = C^* A^*,$

5. $\left(\overline{A}\right)^T = \overline{\left(A^T\right)}.$

Tanım 2.2.14. $A = A_1 + iA_2 \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ve $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ olsun.

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_2 & -A_1 \end{pmatrix}$$

matrisine A matrisinin adjoint matrisi denir ve $\eta(A)$ ile gösterilir [24].

Teorem 2.2.15. $A = (a_{ij}),\ B = (b_{ij}) \in \mathbb{C}^{m\times n},\ C = (c_{jk}) \in \mathbb{C}^{n\times l}$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$ olmak üzere aşağıdaki özellikler doğrudur [24]:

1. $\eta(AC) = \eta(A)\eta(C),$

2. $A = B \Leftrightarrow \eta(A) = \eta(B),$

3. $\eta(A+B) = \eta(A) + \eta(B),$

4. $\eta(\lambda A) = \lambda \eta(A),$

5. $\det(AB) = \det(A)\det(B).$

Tanım 2.2.16. $\lambda \in \mathbb{C},\ A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ve $x \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ olmak üzere

$$Ax = \lambda x$$

eşitliğini sağlayan sıfırdan farklı bir x vektörü varsa λ sayısına A matrisinin özdeğeri ve x vektörüne de λ özdeğerine karşılık gelen özvektör denir [25].

Teorem 2.2.17. $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ matrisinin $2n$ tane özdeğeri vardır [25].

Teorem 2.2.18. $A = A_1 + iA_2 \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ve $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$ için λ nın A matrisinin özdeğeri olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{pmatrix} A_1 - \lambda_1 I_n & A_2 - \lambda_2 I_n \\ A_2 - \lambda_2 I_n & A_1 - \lambda_1 I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eşitliğinin doğru olmasıdır [25].

Teorem 2.2.19. $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir [25]:

1. A matrisi regülerdir,

2. $Ax = 0$ denkleminin tek çözümü vardır,

3. $\det\left(\eta\left(A\right)\right) \neq 0$,

4. A matrisinin özdeğerleri sıfırdan farklıdır.

2.2.2. Kompleks matrisler üzerinde tanımlı bazı bağıntılar

Tanım 2.2.2.1. $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ olmak üzere

$$P^{-1}AP = B$$

olacak biçimde P regüler matrisi mevcut ise A matrisi B matrisine benzerdir denir ve $A \sim B$ biçiminde gösterilir [25].

Tanım 2.2.2.2. $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ olmak üzere

$$\overline{P}AP^{-1} = B$$

olacak biçimde P regüler matrisi mevcut ise A matrisi B matrisine eşlenik-benzerdir denir ve $A \overset{c}{\sim} B$ biçiminde gösterilir [25].

Tanım 2.2.2.3. $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ için

$$YAX = B \text{ ve } XBY = A$$

olacak biçimde $X, Y \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrisleri mevcut ise A matrisi B matrisine yarı-benzerdir denir ve $A \approx B$ biçiminde gösterilir [26].

Tanım 2.2.2.4. $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ için

$$\overline{Y}AX = B \text{ ve } \overline{X}BY = A$$

olacak biçimde $X, Y \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrisleri mevcut ise A matrisi B matrisine yarı-eşlenik-benzerdir denir ve $A \overset{c}{\approx} B$ biçiminde gösterilir [27].

Tanım 2.2.2.5. $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ olmak üzere $AXA = A$ eşitliğini sağlayan $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrisi varsa X matrisine A matrisinin genelleştirilmiş tersi denir ve A^{-} ile gösterilir [23].

Tanım 2.2.2.6. $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ için

$$X^{-}AX = B,\ XBX^{-} = A \text{ ve } XX^{-}X = X$$

olacak biçimde $X, X^- \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrisleri mevcut ise A matrisi B matrisine yakın-benzerdir denir ve $A \simeq B$ biçiminde gösterilir [26].

Tanım 2.2.2.7. $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ için

$$\overline{X^-} AX = B,\ \overline{X} BX^- = A \ \text{ ve } \ XX^- X = X$$

olacak biçimde $X, X^- \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrisleri mevcut ise A matrisi B matrisine yakın-eşlenik-benzerdir denir ve $A \overset{c}{\simeq} B$ biçiminde gösterilir [27].

Tanım 2.2.2.8. $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ için aşağıdaki şartları sağlayan $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrisi varsa bu durumda X matrisine A matrisinin Drazin tersi denir ve $A^d = X$ ile gösterilir [26].

1. $A^{k+1}X = A^k,\ k \geq 0,$

2. $XAX = X,$

3. $AX = XA.$

Teorem 2.2.2.9. $\mathbb{C}^{n\times n}$ cümlesinde $(XY)^d$ ve $(YX)^d$ mevcut ise aşağıdaki önermeler doğrudur [26]:

1. $(XY)^d X = X(YX)^d,$

2. $(XY)^d$ idempotent $\Leftrightarrow$ $Y(XY)^d = \left[(XY)^d X\right]^-$ dir.

Teorem 2.2.2.10. $A, B, X, Y \in \mathbb{C}^{n\times n}$ için $(XY)^d$, $(YX)^d$ mevcut ve A matrisi B matrisine yarı-benzer olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlikler doğrudur [26]:

1. $A^{2k}X = XB^{2k}, \quad B^{2k}X = X\,A^{2k}, \quad k = 1,2,3,...,$

2. $\left(XY\right)^k A\left(XY\right)^k = A, \quad k = 1,2,3,...,$

3. $\left(XY\right)^d A\left(XY\right)^d = A,$

4. $\left(XY\right)\left(XY\right)^d A = A = A\left(XY\right)\left(XY\right)^d .$

Teorem 2.2.2.11. $A, B, X, Y \in \mathbb{C}^{n\times n}$ için $\left(\overline{X}\,\overline{Y}\right)^d$, $\left(\overline{Y}\,\overline{X}\right)^d$ mevcut ve A matrisi B matrisine yarı-eşlenik-benzer olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlikler doğrudur [27]:

1. $\left(\overline{X}\,\overline{Y}\right)^k A\left(\overline{X}\,\overline{Y}\right)^k = A, \quad \left(\overline{Y}\,\overline{X}\right)^k B\left(\overline{Y}\,\overline{X}\right)^k = B, \quad k = 1,2,3,\ldots,$

2. $\left(A\overline{A}\right)^k \overline{X} = \overline{X}\left(B\overline{B}\right)^k, \quad \overline{Y}\left(A\overline{A}\right)^k = \left(B\overline{B}\right)^k \overline{Y},$

3. $A\left(XY\right)\left(XY\right)^d = A = \left(\overline{X}\,\overline{Y}\right)\left(\overline{X}\,\overline{Y}\right)^d A, \; B\left(YX\right)\left(YX\right)^d = B = \left(\overline{Y}\,\overline{X}\right)\left(\overline{Y}\,\overline{X}\right)^d B$ **.**

Teorem 2.2.2.12. $A, B, X, Y \in \mathbb{C}^{n\times n}$ olsun. A matrisi B matrisine yarı-eşlenik-benzer ise $A\overline{A}$ matrisi $B\overline{B}$ matrisine yakın-benzerdir [27].

Teorem 2.2.2.13. $A, B, X, Y \in \mathbb{C}^{n\times n}$ için A matrisi B matrisine yarı-benzer ise aşağıdaki önermeler doğrudur [26]:

1. A^{2k+1} matrisi B^{2k+1} matrisine yarı-benzerdir,

2. A^{2k} matrisi B^{2k} matrisine yakın-benzerdir,

3. AA^d matrisi BB^d matrisine yakın-benzerdir,

4. A^d matrisi B^d matrisine yarı-benzerdir,

5. A^2A^d matrisi B^2B^d matrisine yarı-benzerdir.

2.2.3. Kompleks matrislerin bazı lineer denklemleri

$AX - XB = C$ ve $X - AXB = C$ kompleks matris denklemleri sırasıyla Sylvester ve Kalman-Yakubovich denklemleri olarak bilinir. Bu denklemler sinyal ve görüntü işleme süreçlerinde, matematiksel modellemelerde, adi ve kısmi diferensiyel denklemler için ayrışma tekniğinde, matrislerin köşegenleştirmelerinde, dayanıklılık ve kontrol teorilerinin uygulamalarında önemli bir yere sahiptirler [28-33].

Özel olarak bu iki denklemde $B^* = A$ alınırsa matris denklemleri sırasıyla literatürde iyi bilinen Stein ve Lyapunov denklemlerine dönüşür [34]. Ayrıca

$$A\overline{X} - XB = C \tag{2.10}$$

ve

$$X - A\overline{X}B = C \tag{2.11}$$

denklemlerine sırasıyla Sylvester-eşlenik ve Kalman-Yakubovich-eşlenik denklemleri denir. Bu iki denklemin çözümleri normal Sylvester ve Kalman-Yakubovich denklemlerinin çözümlerinin araştırılmasında ve ifade edilmesinde birçok kolaylık sağlar [34].

Bu bölümde Sylvester-eşlenik ve Kalman-Yakubovich-eşlenik matris denklemlerinin literatürde yer alan bazı temel teoremleri verilmiştir.

Teorem 2.2.3.1. $A\overline{X} - XB = C$ matris denkleminin bir çözüme sahip olabilmesi için gerek ve yeter şart bu denklemin reel temsili olan

$$\eta(A)Y - Y\eta(B) = \eta(C) \tag{2.12}$$

denkleminin bir çözüme sahip olmasıdır. $Y \in \mathbb{R}^{2m\times 2n}$ matrisi reel temsilin bir çözümü ise

$$X = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} I_m & iI_m \end{pmatrix}\left(Y + Q_m^{-1} Y Q_m\right)\begin{pmatrix} I_n \\ -iI_n \end{pmatrix}$$

matrisi $A\overline{X} - XB = C$ matris denkleminin çözümüdür. Burada

$$Q_t = \begin{pmatrix} 0 & -I_t \\ I_t & 0 \end{pmatrix}$$

dır [11].

Teorem 2.2.3.2. $A\overline{X} - XB = C$ matris denkleminin bir çözüme sahip olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$\begin{pmatrix} \eta(A) & \eta(C) \\ 0 & \eta(B) \end{pmatrix}$$

matrisinin

$$\begin{pmatrix} \eta(A) & 0 \\ 0 & \eta(B) \end{pmatrix}$$

matrisine benzer olmasıdır [11].

Teorem 2.2.3.3. $A\overline{X} - XB = C$ denkleminde $C = 0$ olsun. Eğer A matrisi B matrisine eşlenik-benzer ise bu durumda $\eta(A)$ matrisi de $\eta(B)$ matrisine benzerdir [11].

Teorem 2.2.3.4. $X - A\overline{X}B = C$ matris denkleminin çözüme sahip olabilmesi için gerek ve yeter şart bu denklemin reel temsili olan

$$Y - \eta(A) Y \eta(B) = \eta(C) \tag{2.13}$$

denkleminin bir çözüme sahip olmasıdır. $Y \in \mathbb{R}^{2m\times 2n}$ matrisi reel temsilin bir çözümü ise

$$X = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} I_m & iI_m \end{pmatrix}\left(Y - Q_m^{-1} Y Q_m\right)\begin{pmatrix} I_n \\ -iI_n \end{pmatrix}$$

matrisi $X - A\overline{X}B = C$ matris denkleminin çözümüdür. Burada

$$Q_t = \begin{pmatrix} 0 & -I_t \\ I_t & 0 \end{pmatrix}$$

dır [9].

BÖLÜM 3. ELİPTİK SAYILAR

Kompleks sayılar ilk kez İtalyan matematikçiler G. Cardan ve R. Bombelli tarafından cebirsel işlemlerde kullanılmıştır [14]. Tarihte çeşitli matematikçiler i kompleks birimi modifiye etmişlerdir. İngiliz geometrici W. Clifford $i^2 = 1 \ (i \neq \pm 1)$ alarak hiperbolik sayıları tanımlamıştır [35]. W. Clifford'un geliştirdiği bu sayı sistemi mekanik problemlerinde birçok kolaylık sağlamıştır. Alman geometrici E. Study $i^2 = 0 \ (i \neq 0)$ alarak dual sayıları tanımlamıştır. Dual sayılar da kinematik, robotik kontrol, uzaysal mekanik gibi birçok alanda uygulamalara sahiptir [36].

Daha sonraki yıllarda bu üç sayı sistemi $i^2 = p$ ve $p \in \mathbb{R}$ olacak biçimde genelleştirilmiştir [14]. $i^2 = p$ birimi ile tanımlanan sayı sistemine genelleştirilmiş kompleks sayı sistemi adı verilmiştir. Burada p değeri $(-\infty, \infty)$ aralığındadır. $p < 0$ için elde edilen sayı sistemine eliptik sayılar sistemi (özel olarak $p = -1$ alındığında kompleks sayılar elde edilir.), $p = 0$ alındığında parabolik veya dual sayılar sistemi ve son olarak $p > 0$ alındığında hiperbolik sayılar sistemi elde edilir [14].

Bu bölümde eliptik sayıların ve onların matrislerinin bazı cebirsel özellikleri incelenecektir.

3.1. Eliptik Sayıların Cebirsel Özellikleri

Eliptik sayıların cümlesi

$$\mathbb{C}_p = \left\{ z = x + iy : x, y \in \mathbb{R},\ i^2 = p < 0 \right\} \tag{3.1}$$

biçiminde ifade edilir. $z = x + iy \in \mathbb{C}_p$ için $\operatorname{Re}(z) = x$ ifadesine z eliptik sayısının reel kısmı, $\operatorname{Im}(z) = y$ ifadesine ise z eliptik sayının sanal kısmı denir [14]. Bir $z = x + iy$ eliptik sayısının eşleniği ve normu sırasıyla

$$\bar{z} = x - iy \quad \text{ve} \quad \|z\| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 - py^2} \tag{3.2}$$

eşitlikleri ile tanımlanır [14].

$z_1 = x_1 + iy_1,\ z_2 = x_2 + iy_2 \in \mathbb{C}_p$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\mathbb{C}_p$ cümlesi üzerinde toplama, çarpma ve skalarla çarpma işlemleri sırasıyla

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2),$$

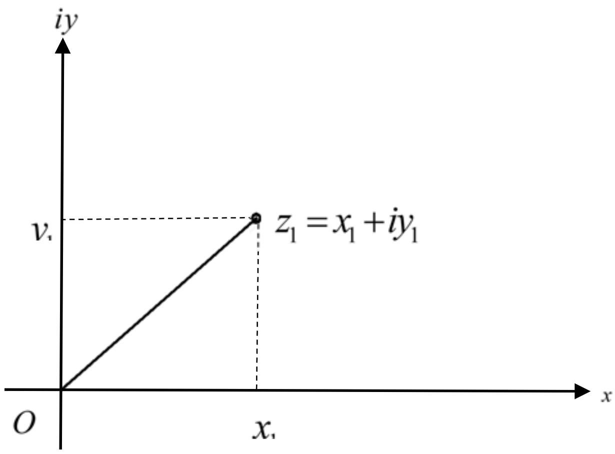
$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 + p y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1),$$

$$\lambda z_1 = \lambda(x_1 + iy_1) = \lambda x_1 + i\lambda y_1$$

eşitlikleri ile hesaplanır [14].

Teorem 3.1.1. $\mathbb{C}_p$ cümlesi toplama ve skalarla çarpma işlemleri ile birlikte $\mathbb{R}$ cismi üstünde 2-boyutlu bir vektör uzayıdır [14].

Eliptik sayılar cümlesiden $\mathbb{R}^2$ ye de birebir bir eşleme yapılabileceğinden her bir $z_1 = x_1 + iy_1$ eliptik sayısı da düzlemde tek bir biçimde ifade edilebilir.



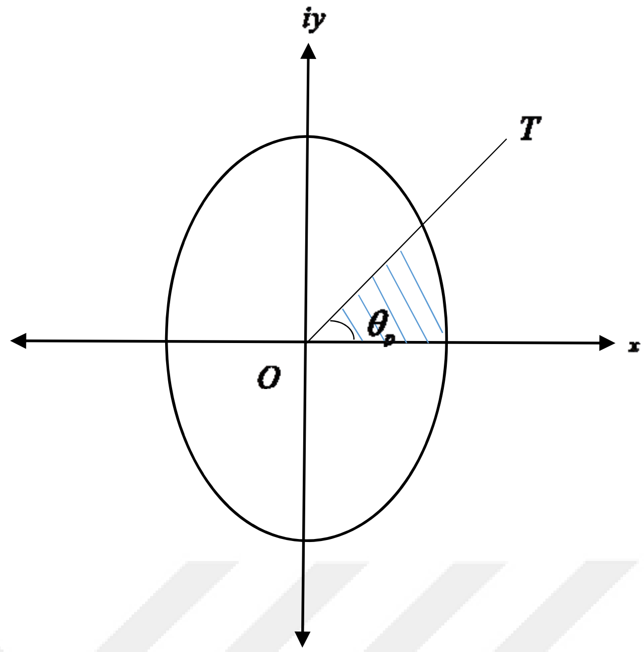
Şekil 3.1. Eliptik düzlem

Şekil 3.1 ile verilen düzleme eliptik düzlem denir. Eliptik düzlemde $z_1 = (x_1, y_1)$ ve $z_2 = (x_2, y_2)$ eliptik sayıları arasındaki uzaklık

$$\|z_1 - z_2\| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 - p(y_1 - y_2)^2} \tag{3.3}$$

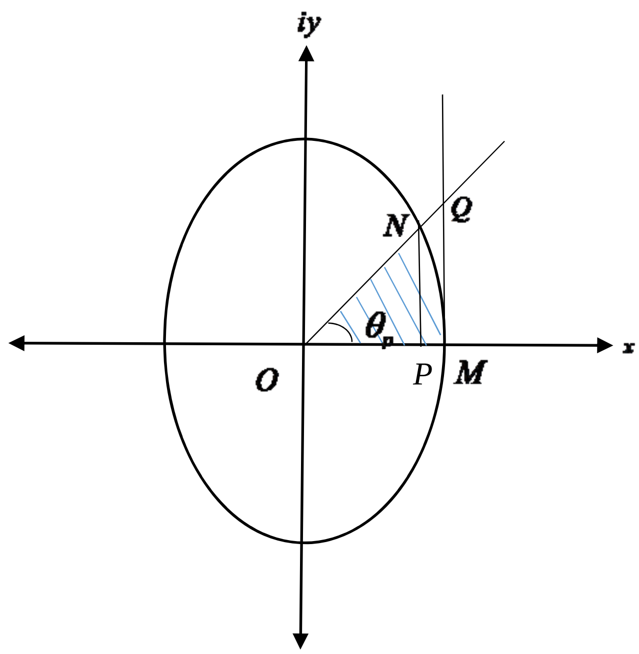
biçiminde tanımlanır. Bu düzlemde başlangıç noktasına 1 birim uzaklıkta olan eliptik sayıların cümlesi bir elipstir ve $x^2 - py^2 = 1$ denklemi ile verilir [14].

Eliptik düzlemde $z_1 = (x_1, y_1)$ eliptik sayısı bir $\overrightarrow{OT}$ yönlü doğru parçası ile gösterilebilir.



Şekil 3.2. Bir eliptik sayının eliptik düzlemde gösterilmesi

Bu durumda $\overrightarrow{OT}$ vektörü ile reel eksen arasında kalan elipsin yay uzunluğuna $z_1 = (x_1, y_1)$ eliptik sayısının argümenti denir. Ayrıca, eliptik düzlemde trigonometrik fonksiyonlar da tanımlanabilir.



Şekil 3.3. Eliptik düzlemde trigonometrik fonksiyonların tanımlanması

$\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{NP}$ ve $\overrightarrow{QM}$ vektörleri sırasıyla $\cos_p \theta_p$, $\sin_p \theta_p$ ve $\tan_p \theta_p$ trigonometrik fonksiyonlarını tanımlar.

$\cos_p \theta_p$ ve $\sin_p \theta_p$ fonksiyonları Maclaurin serisine açılırsa

$$\cos_p \theta_p = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^n}{(2n)!} \theta_p^{2n}$$

ve

$$\sin_p \theta_p = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^n}{(2n+1)!} \theta_p^{2n+1}$$

olur. Bu durumda $e^{i\theta_p}$ nin kuvvet serisi yardımıyla

$$e^{i\theta_p} = \cos_p \theta_p + i \sin_p \theta_p$$

eşitliği elde edilir. Sonuç olarak $z_1 = (x_1, y_1)$ eliptik sayısının argümenti θ_p olmak üzere bir eliptik sayı

$$z_1 = \|z_1\| \left(\cos_p \theta_p + i \sin_p \theta_p \right)$$

biçiminde de ifade edilebilir. Bu gösterime eliptik sayının kutupsal koordinatlarda gösterimi denir.

$$z_1 = \|z_1\| \left(\cos_p (\theta_p) + i \sin_p (\theta_p) \right), \quad z_2 = \|z_2\| \left(\cos_p (\gamma_p) + i \sin_p (\gamma_p) \right)$$

kutupsal gösterimlerine sahip iki eliptik sayının çarpımı

$$z_1 z_2 = \|z_1\| \|z_2\| \left(\cos_p (\theta_p + \gamma_p) + i \sin (\theta_p + \gamma_p) \right)$$

eşitliği ile verilir. Ayrıca $z_1=(x_1,y_1)$ eliptik sayısının $n.$ tam sayı kuvveti

$$z_1^n=\|z_1\|^n e^{i(n\theta_p)}=\|z_1\|^n\left(\cos_p(n\theta_p)+i\sin_p(n\theta_p)\right)$$

biçimindedir [14].

Teorem 3.1.2. Her $z=x+iy$ eliptik sayısı

$$\alpha_p(z)=\begin{pmatrix} x & py \\ y & x \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

şeklinde 2×2 tipinde bir reel matris ile ifade edilebilir [37].

Tanım 3.1.3. $\alpha_p(z)$ matrisine z eliptik sayısının temel matrisi denir [37].

Teorem 3.1.4. $z_1=x_2+iy_2$ ve $z_2=x_2+iy_2\in\mathbb{C}_p$ olmak üzere $\alpha_p(z)$ temel matrisi aşağıdaki özellikleri sağlar [37]:

1. $\alpha_p(z_1z_2)=\alpha_p(z_1)\alpha_p(z_2),$

2. $\alpha_p(\alpha_p(z_1)z_2)=\alpha_p(z_1)\alpha_p(z_2),$

3. $z_1=z_2\Leftrightarrow\alpha_p(z_1)=\alpha_p(z_2),$

4. $\alpha_p(z_1+z_2)=\alpha_p(z_1)+\alpha_p(z_2),$

5. $\alpha_p(\lambda z_1)=\lambda\alpha_p(z_1),$

6. $iz(\alpha_p(z_1))=z_1+\overline{z_1},$

7. $\|z_1\|^2 = \det\left(\alpha_p\left(z_1\right)\right).$

Teorem 3.1.5. $z = x + iy \in \mathbb{C}_p$ olmak üzere

$$P^{-1}\begin{pmatrix} x+iy & 0 \\ 0 & x-iy \end{pmatrix}P = \begin{pmatrix} x & py \\ y & x \end{pmatrix} = \alpha_p\left(z\right)$$

eşitliği mevcuttur. Burada

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & p \end{pmatrix} \text{ ve } P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{i}{p} \\ \frac{i}{p} & \frac{1}{p} \end{pmatrix}$$

dir.

Teoremin doğruluğu eşitliğin her iki tarafının hesaplanmasıyla kolayca gösterilir.

$$P^{-1}\begin{pmatrix} x+iy & 0 \\ 0 & x-iy \end{pmatrix}P = \begin{pmatrix} x & py \\ y & x \end{pmatrix} = \alpha_p\left(z\right)$$

eşitliğine evrensel benzerlik eşitliği denir. Bu eşitlik yardımı ile aşağıdaki sonuçlar verilebilir.

1. $\mathbb{C}_p$ cümlesi

$$\mathbb{C}'_p = \left\{\begin{pmatrix} x & py \\ y & x \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R}\right\}$$

cümlesine izomoftur. Bu iki cümle arasındaki izomorfizma

$$\alpha_p : \quad \mathbb{C}_p \quad \to \quad \mathbb{C}'_p$$

$$z = x + iy \to \alpha_p(z) = \begin{pmatrix} x & py \\ y & x \end{pmatrix}$$

şeklindedir.

2. Her $z = x + iy \in \mathbb{C}_p$ eliptik sayısı

$$\alpha_p(z) = \begin{pmatrix} x & py \\ y & x \end{pmatrix}$$

matrisi ile ifade edilebilir.

3. $\mathbb{C}'_p$ cümlesinin her bir elemanı $\mathbb{C}_p$ cümlesi üstünde tek bir biçimde köşegenleştirilebilir.

3.2. Elemanları Eliptik Sayı Olan Matrisler

Elemanları eliptik sayılar olan $m \times n$ tipindeki matrislerin cümlesi $\mathbb{C}_p^{m \times n}$ ile gösterilir. Bu cümlede $A = (a_{ij}),\ B = (b_{ij}) \in \mathbb{C}_p^{m \times n},\ C = (c_{jk}) \in \mathbb{C}_p^{n \times l}$ için toplama, skalarla çarpma ve çarpma işlemleri sırasıyla

$$A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) \in \mathbb{C}_p^{m \times n},$$

$$\lambda A = \lambda(a_{ij}) = (\lambda a_{ij}) \in \mathbb{C}_p^{m \times n}$$

ve

$$AC = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_{jk} \right) \in \mathbb{C}_p^{m \times l}$$

eşitlikleri ile tanımlanır.

Teorem 3.2.1. A ve B uygun boyutlara sahip iki eliptik matris olmak üzere aşağıdaki eşitlikler doğrudur:

1. $\left(A^{-1}\right)^{-1}=A,$

2. $\left(AB\right)^{-1}=B^{-1}A^{-1},$

3. $\left(A^{k}\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^{k},\ k\in\mathbb{Z}^{+},$

4. $\left(A^{T}\right)^{T}=A,$

5. $\left(A+B\right)^{T}=A^{T}+B^{T},$

6. $\left(\lambda A\right)^{T}=\lambda A^{T},$

7. $\left(AB\right)^{T}=B^{T}A^{T},$

8. $\left(A^{k}\right)^{T}=\left(A^{T}\right)^{k},\ k\in\mathbb{Z}^{+},$

9. $\overline{\left(\overline{A}\right)}=A,\ \left(A^{*}\right)^{*}=A,$

10. $\overline{\left(A+B\right)}=\overline{A}+\overline{B},\ \left(A+B\right)^{*}=A^{*}+B^{*},$

11. $\overline{\left(\lambda A\right)}=\overline{\lambda}\,\overline{A},\ \left(\lambda A\right)^{*}=\overline{\lambda}A^{*},$

12. $\overline{\left(AB\right)}=\overline{A}\,\overline{B},\ \left(AB\right)^{*}=B^{*}A^{*},$

13. $\left(\overline{A}\right)^T = \overline{\left(A^T\right)}$.

İspat. 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 11 ve 13 deki özelliklerin doğruluğu kolay bir biçimde gösterilebilir. Burada sadece 5, 7, 10, 12 deki özellikleri ispatlanacaktır.

5. $A = A_1 + iA_2,\ B = B_1 + iB_2 \in \mathbb{C}_p^{m\times n}$ ve $A_1, A_2, B_1, B_2 \in \mathbb{R}^{m\times n}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\left(A+B\right)^T &= \left(A_1 + B_1 + i\left(A_2 + B_2\right)\right)^T \\ &= \left(A_1^T + B_1^T + i\left(A_2^T + B_2^T\right)\right) \\ &= A^T + B^T\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

7. $A = A_1 + iA_2 \in \mathbb{C}_p^{m\times n}$ ve $B = B_1 + iB_2 \in \mathbb{C}_p^{n\times l}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\left(AB\right)^T &= \left(\left(A_1B_1 + pA_2B_2\right) + i\left(A_1B_2 + A_2B_1\right)\right)^T \\ &= \left(\left(A_1B_1\right)^T + p\left(A_2B_2\right)^T\right) + i\left(\left(A_1B_2\right)^T + \left(A_2B_1\right)^T\right) \\ &= \left(B_1^T A_1^T + pB_2^T A_2^T\right) + i\left(B_2^T A_1^T + B_1^T A_2^T\right) \\ &= \left(B_1^T + iB_2^T\right)\left(A_1^T + iA_2^T\right) = B^T A^T\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

10. $A = A_1 + iA_2$ ve $B = B_1 + iB_2 \in \mathbb{C}_p^{m\times n}$ olmak üzere

$$\overline{(A+B)} = \left(A_1 + B_1 - i\left(A_2 + B_2\right)\right)$$

$$= A_1 - iA_2 + B_1 - iB_2$$

$$= \overline{A} + \overline{B}$$

ve

$$\left(A+B\right)^* = \left(A_1 + B_1 + i\left(A_2 + B_2\right)\right)^*$$

$$= \overline{\left(A_1^T + B_1^T + i\left(A_2^T + B_2^T\right)\right)}$$

$$= A_1^T + B_1^T - i\left(A_2^T + B_2^T\right)$$

$$= A^* + B^*$$

eşitlikleri elde edilir.

12. $A = A_1 + iA_2 \in \mathbb{C}_p^{m\times n}$ ve $B = B_1 + iB_2 \in \mathbb{C}_p^{n\times l}$ olmak üzere

$$\overline{(AB)} = \overline{\left(\left(A_1B_1 + pA_2B_2\right) + i\left(A_1B_2 + A_2B_1\right)\right)}$$

$$= \left(A_1B_1 + pA_2B_2\right) - i\left(A_1B_2 + A_2B_1\right)$$

$$= \left(A_1 - iA_2\right)\left(B_1 - iB_2\right)$$

$$= \overline{\left(A_1 + iA_2\right)}\overline{\left(B_1 + iB_2\right)} = \overline{A}\,\overline{B}$$

ve

$$
\begin{aligned}
(AB)^* &= \overline{\left((A_1B_1 + pA_2B_2) + i(A_1B_2 + A_2B_1)\right)^T} \\
&= \left((A_1B_1)^T + p(A_2B_2)^T\right) - i\left((A_1B_2)^T + (A_2B_1)^T\right) \\
&= \left(B_1^T A_1^T + pB_2^T A_2^T\right) - i\left(B_2^T A_1^T + B_1^T A_2^T\right) \\
&= \overline{\left(B_1^T + iB_2^T\right)}\,\overline{\left(A_1^T + iA_2^T\right)} = B^* A^*
\end{aligned}
$$

eşitlikleri elde edilir.

Tanım 3.2.2. $A = A_1 + iA_2 \in \mathbb{C}_p^{n\times n}$ ve $A_1,\ A_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ olsun.

$$
\begin{pmatrix} A_1 & pA_2 \\ A_2 & A_1 \end{pmatrix} \tag{3.5}
$$

matrisine A matrisinin adjoint matrisi denir ve $\eta_p(A)$ ile gösterilir.

Teorem 3.2.3. $A = (a_{ij}),\ B = (b_{ij}) \in \mathbb{C}_p^{m\times n},\ C = (c_{jk}) \in \mathbb{C}_p^{n\times l}$ ve $\lambda \in \mathbb{C}_p$ olmak üzere aşağıdaki özellikler doğrudur:

1. $\eta_p(I_n) = I_{2n}$,

2. $A = B \Leftrightarrow \eta_p(A) = \eta_p(B)$,

3. $\eta_p(A+B) = \eta_p(A) + \eta_p(B)$,

4. $\eta_p(AC) = \eta_p(A)\eta_p(C)$,

5. $\eta_p(\lambda A) = \lambda\eta_p(A)$,

6. $m = n$ ve A regüler ise $\eta_p(A)$ da regülerdir ve

$$\left(\eta_p(A)\right)^{-1} = \eta_p\left(A^{-1}\right)$$

dir.

İspat.

1. $I_n = I_n + i0$ olduğundan

$$\eta_p(I_n) = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = I_{2n}$$

eşitliği elde edilir.

2. $A = B$ olduğunda $\eta_p(A) = \eta_p(B)$ eşitliği açıktır.

3. $A = A_1 + iA_2$ ve $B = B_1 + iB_2 \in \mathbb{C}_p^{m\times n}$ olmak üzere $A + B = A_1 + B_1 + i\left(A_2 + B_2\right)$ dir. Bu durumda

$$\eta_p(A) = \begin{pmatrix} A_1 & pA_2 \\ A_2 & A_1 \end{pmatrix}, \ \eta_p(B) = \begin{pmatrix} B_1 & pB_2 \\ B_2 & B_1 \end{pmatrix}$$

ve

$$\eta_p(A+B) = \begin{pmatrix} A_1 + B_1 & p\left(A_2 + B_2\right) \\ A_2 + B_2 & A_1 + B_1 \end{pmatrix}$$

için $\eta_p(A+B) = \eta_p(A) + \eta_p(B)$ eşitliği sağlanır.

4. $A = A_1 + iA_2 \in \mathbb{C}_p^{m\times n}$ ve $C = C_1 + iC_2 \in \mathbb{C}_p^{n\times l}$ olmak üzere

$$AC = \left(A_1C_1 + \alpha A_2C_2\right) + i\left(A_1C_2 + A_2C_1\right)$$

dir. Bu durumda

$$\eta_p\left(A\right) = \begin{pmatrix} A_1 & pA_2 \\ A_2 & A_1 \end{pmatrix}, \eta_p\left(C\right) = \begin{pmatrix} C_1 & pC_2 \\ C_2 & C_1 \end{pmatrix}$$

ve

$$\eta_p\left(AC\right) = \begin{pmatrix} A_1C_1 + pA_2C_2 & p\left(A_1C_2 + A_2C_1\right) \\ A_1C_2 + A_2C_1 & A_1C_1 + pA_2C_2 \end{pmatrix}$$

için $\eta_p\left(AC\right) = \eta_p\left(A\right)\eta_p\left(C\right)$ eşitliği elde edilir.

5. $\lambda \in \mathbb{R}$ için $\lambda A = \lambda A_1 + i\left(\lambda A_2\right) \in \mathbb{C}_p^{m\times n}$ olduğundan

$$\eta_p\left(\lambda A\right) = \begin{pmatrix} \lambda A_1 & p\lambda A_2 \\ \lambda A_2 & \lambda A_1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} A_1 & pA_2 \\ A_2 & A_1 \end{pmatrix} = \lambda \eta_p\left(A\right)$$

elde edilir.

6. Kabul edelim ki $A \in \mathbb{C}_p^{n\times n}$ regüler olsun. Bu durumda $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$ olacak biçimde $A^{-1} \in \mathbb{C}_p^{n\times n}$ mevcuttur. $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$ eşitliğinden

$$\eta_p\left(AA^{-1}\right) = \eta_p\left(A^{-1}A\right) = \eta_p\left(I_n\right)$$

görülür ki

$$\eta_p(A)\eta_p\left(A^{-1}\right)=\eta_p\left(A^{-1}\right)\eta_p(A)=I_{2n}$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$\left(\eta_p(A)\right)^{-1}=\eta_p\left(A^{-1}\right)$$

dir.

Teorem 3.2.4. $A,B\in\mathbb{C}_p^{n\times n}$ olmak üzere $AB=I_n$ ise $BA=I_n$ dir.

İspat. $A=A_1+iA_2$ ve $B=B_1+iB_2$ olmak üzere $AB=I_n$ olduğundan

$$\eta_p(A)\eta_p(B)=I_{2n}$$

dır. $\eta_p(A),\eta_p(B)\in\mathbb{R}^{2n\times 2n}$ olduğundan

$$\eta_p(B)\eta_p(A)=I_{2n}$$

eşitliği yazılır. Buradan ise $BA=I_n$ elde edilir.

Tanım 3.2.5. $\lambda\in\mathbb{C}_p$, $A\in\mathbb{C}_p^{n\times n}$ ve $x\in\mathbb{C}_p^{n\times 1}$ olmak üzere

$$Ax=\lambda x$$

eşitliğini sağlayan sıfırdan farklı bir x vektörü varsa λ sayısına A matrisinin özdeğeri ve x vektörüne de λ özdeğerine karşılık gelen özvektörü denir. A matrisinin tüm özdeğerlerinin cümlesi

$$\sigma_p(A)=\left\{\lambda\in\mathbb{C}_p : Ax=\lambda x,\ \exists x\neq 0\right\}$$

biçiminde gösterilir.

Teorem 3.2.6. $A \in \mathbb{C}_p^{n \times n}$ matrisinin $2n$ tane eliptik özdeğeri vardır.

İspat. $A = A_1 + iA_2 \in \mathbb{C}_p^{n \times n}$ matrisinin özdeğeri $\lambda \in \mathbb{C}_p$ olsun. Bu durumda $Ax = \lambda x$ olacak biçimde sıfırdan farklı $x = x_1 + ix_2 \in \mathbb{C}_p^{n \times 1}$ vardır. Buradan

$$\left(A_1 + iA_2\right)\left(x_1 + ix_2\right) = \lambda\left(x_1 + ix_2\right),$$

$$A_1 x_1 + pA_2 x_2 = \lambda x_1 \text{ ve } A_1 x_2 + A_2 x_1 = \lambda x_2$$

eşitlikleri elde edilir. Son iki ifade

$$\begin{pmatrix} A_1 & pA_2 \\ A_2 & A_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

biçiminde de yazılabilir. $2n \times 2n$ tipinde bir reel matrisin $2n$ tane eliptik özdeğeri olacağından A matrisinin $2n$ tane eliptik özdeğeri mevcuttur.

Teorem 3.2.7. $A = A_1 + iA_2 \in \mathbb{C}_p^{n \times n}$ ve $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$ için λ eliptik sayısının A matrisinin özdeğeri olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{pmatrix} A_1 - \lambda_1 I_n & A_2 - \lambda_2 I_n \\ A_2 - \lambda_2 I_n & A_1 - \lambda_1 I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eşitliğinin doğru olmasıdır.

İspat. $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2 \in \mathbb{C}_p$ eliptik sayısı $A = A_1 + iA_2 \in \mathbb{C}_p^{n \times n}$ matrisinin bir özdeğeri olması için gerek ve yeter şart

$$\left(A_1 + iA_2\right)\left(x_1 + ix_2\right) = \left(\lambda_1 + i\lambda_2\right)\left(x_1 + ix_2\right) \tag{3.6}$$

eşitliği doğru olacak biçimde sıfırdan farklı $x_1 + ix_2 \in \mathbb{C}_p^{n\times 1}$ eliptik vektörünün var olmasıdır. (3.6) denkleminden

$$\left(A_1 - \lambda_1 I_n\right)x_1 + p\left(A_2 - \lambda_2 I_n\right)x_2 = 0$$

ve

$$\left(A_2 - \lambda_2 I_n\right)x_1 + \left(A_1 - \lambda_1 I_n\right)x_2 = 0$$

eşitlikleri elde edilir. Bu son iki ifade

$$\begin{pmatrix} A_1 - \lambda_1 I_n & pA_2 - p\lambda_2 I_n \\ A_2 - \lambda_2 I_n & A_1 - \lambda_1 I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

formunda yazılır.

Teorem 3.2.8. $A \in \mathbb{C}_p^{n\times n}$ olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir:

1. A matrisi regülerdir,

2. $Ax = 0$ denkleminin tek çözümü vardır,

3. $\det\left(\eta_p\left(A\right)\right) \neq 0$ veya $\eta_p\left(A\right)$ regülerdir,

4. A matrisinin özdeğerleri sıfırdan farklıdır.

İspat.

$1.\Rightarrow 2.$ A matrisi regüler olsun. Bu durumda $x = A^{-1}0 = 0$ olacağından $Ax = 0$ denkleminin tek çözümü mevcuttur.

$2.\Rightarrow 3.$ $A = A_1 + iA_2 \in \mathbb{C}_p^{n\times n}, x = x_1 + ix_2 \in \mathbb{C}_p^{n\times 1}$ için

$$\left(A_1 + iA_2\right)\left(x_1 + ix_2\right) = 0$$

olsun. Bu eşitlikten

$$\left(A_1x_1 + pA_2x_2\right) = 0, \left(A_1x_2 + A_2x_1\right) = 0$$

eşitlikleri elde edilir. Son iki eşitlik düzenlenirse

$$\begin{pmatrix} A_1 & pA_2 \\ A_2 & A_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \eta_p\left(A\right)x = 0$$

elde edilir. $Ax = 0$ denkleminin tek çözümü olduğunda, $\eta_p\left(A\right)x = 0$ denkleminin de tek çözümü olacağından $\eta_p\left(A\right)$ regülerdir. Sonuç olarak $\det\left(\eta_p\left(A\right)\right) \neq 0$ dır.

$3.\Rightarrow 4.$ $\det\left(\eta_p\left(A\right)\right) \neq 0$ olsun. Bu durumda $\eta_p\left(A\right)x = 0$ denkleminin bir tek çözümü mevcuttur.

$$\eta_p\left(A\right)x = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} A_1 & pA_2 \\ A_2 & A_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eşitliği doğru olduğunda $\left(A_1 + iA_2\right)\left(x_1 + ix_2\right) = 0$ ve $Ax = 0$ eşitlikleri de doğru olacağından $Ax = 0$ denkleminin de bir tek çözümü mevcuttur. Kabul edelim ki A sıfır özdeğerine sahip olsun. Bu durumda $\lambda = 0$ için $Ax = \lambda x = 0$ eşitliğini sağlayan sıfırdan farklı $x \in \mathbb{C}_p^{n\times 1}$ vektörü mevcuttur. $Ax = 0$ denkleminin bir tek çözümü vardı. Sonuç olarak kabulümüz yanlıştır. A matrisinin özdeğerleri sıfırdan farklıdır.

$3. \Rightarrow 1.$ $\eta_p(A)$ matrisi regüler olsun. Teorem 3.2.4.'den A matrisi de regülerdir.

Tanım 3.2.9. $A \in \mathbb{C}_p^{n\times n}$, $\lambda \in \mathbb{C}_p$ ve $0 \neq x \in \mathbb{C}_p^{n\times 1}$ olmak üzere

$$A\overline{x} = \lambda x$$

eşitliğini sağlayan sıfırdan farklı bir x vektörü varsa λ sayısına A matrisinin eşlenik-özdeğeri ve x vektörüne de λ eşlenik-özdeğerine karşılık gelen eşlenik-özvektörü denir. A matrisinin tüm eşlenik-özdeğerlerinin cümlesi

$$\overline{\sigma_p}(A) = \left\{\lambda \in \mathbb{C}_p : A\overline{x} = \lambda x,\ \exists x \neq 0\right\}$$

ile gösterilir.

3.2.1. Eliptik matrisler üzerinde tanımlı bazı bağıntılar

Tanım 3.2.1.1. $A, B \in \mathbb{C}_p^{n\times n}$ için

$$P^{-1}AP = B$$

olacak biçimde P regüler matrisi mevcut ise A matrisi B matrisine benzerdir denir.

Tanım 3.2.1.2. $A, B \in \mathbb{C}_p^{n\times n}$ için

$$\overline{P}AP^{-1} = B$$

olacak biçimde P regüler matrisi mevcut ise A matrisi B matrisine eşlenik-benzerdir denir.

Teorem 3.2.1.3 $A, B \in \mathbb{C}_p^{n\times n}$ için A matrisi B matrisine eşlenik-benzer olsun. Bu durumda A ve B matrisleri aynı eşlenik-özdeğerlere sahiptir.

İspat. A matrisi B matrisine eşlenik-benzer olsun. Bu durumda $\overline{P}AP^{-1} = B$ olacak biçimde P regüler matrisi mevcuttur. $\lambda \in \mathbb{C}_p$, A matrisinin bir eşlenik-özdeğeri ise $A\overline{x} = \lambda x$ olacak biçimde sıfırdan farklı $x \in \mathbb{C}_p^{n\times 1}$ vektörü vardır. $y = P\overline{x}$ olsun. Bu durumda

$$By = \overline{P}\,AP^{-1}y = \overline{P}A\overline{x} = \overline{P}\lambda x = \lambda\overline{y}$$

olacağından $\lambda \in \mathbb{C}_p$, B matrisinin de bir eşlenik-özdeğeridir.

Teorem 3.2.1.4. $A \in \mathbb{C}_p^{n\times n}$ ve $\lambda, \beta \in \mathbb{C}_p$ için λ eliptik sayısı A matrisinin bir eşlenik-özdeğeri ise $\overline{\beta}\lambda\beta^{-1} \in \mathbb{C}_p$ eliptik sayısı da A matrisinin eşlenik-özdeğeridir.

İspat. $A\overline{x} = \lambda x$ eşitliğinden

$$A\overline{x}\beta^{-1} = \left(\overline{\beta}\lambda\beta^{-1}\right)\left(x\overline{\beta^{-1}}\right)$$

yazılabileceğinden $\overline{\beta}\lambda\beta^{-1} \in \mathbb{C}_p$ eliptik sayısı da A matrisinin eşlenik-özdeğeri olur.

Tanım 3.2.1.5. $A, B \in \mathbb{C}_p^{n\times n}$ için

$$YAX = B \text{ ve } XBY = A$$

olacak biçimde $X, Y \in \mathbb{C}_p^{n\times n}$ matrisleri mevcut ise A matrisi B matrisine yarı-benzerdir denir.

Tanım 3.2.1.6. $A, B \in \mathbb{C}_p^{n\times n}$ için

$$\overline{Y}AX = B,\ \overline{X}BY = A$$

olacak biçimde $X, Y \in \mathbb{C}_p^{n\times n}$ matrisleri mevcut ise A matrisi B matrisine yarı-eşlenik-benzerdir denir.

Tanım 3.2.1.7. $A \in \mathbb{C}_p^{n\times n}$ olmak üzere $AXA = A$ eşitliğini sağlayan $X \in \mathbb{C}_p^{n\times n}$ matrisi varsa X matrisine A matrisinin genelleştirilmiş tersi denir ve A^{-} ile gösterilir.

Tanım 3.2.1.8. $A, B \in \mathbb{C}_p^{n\times n}$ için

$$X^{-}AX = B,\ XBX^{-} = A \text{ ve } XX^{-}X = X$$

olacak biçimde $X, X^{-} \in \mathbb{C}_p^{n\times n}$ matrisleri mevcut ise A matrisi B matrisine yakın-benzerdir denir.

Tanım 3.2.1.9. $A, B \in \mathbb{C}_p^{n\times n}$ için

$$\overline{X^{-}}AX = B,\ \overline{X}BX^{-} = A,\ X\,X^{-}X = X$$

olacak biçimde $X, X^{-} \in \mathbb{C}_p^{n\times n}$ matrisleri mevcut ise A matrisi B matrisine yakın-eşlenik-benzerdir denir.

Tanım 3.2.1.10. $A \in \mathbb{C}_p^{n\times n}$ için aşağıdaki şartları sağlayan $X \in \mathbb{C}_p^{n\times n}$ matrisi varsa bu durumda X matrisine A matrisinin Drazin tersi denir ve $A^{d} = X$ ile gösterilir.

1. $k \geq 0$ için $A^{k+1}X = A^{k}$,

2. $XAX = X$,

3. $AX = XA$.

Burada $A^{k+1}X = A^k$ eşitliğini sağlayan en küçük k doğal sayısına A matrisinin indeksi denir ve $ind(A)$ ile gösterilir.

Teorem 3.2.1.11. $\mathbb{C}_p^{n\times n}$ cümlesinde $(XY)^d$ ve $(YX)^d$ mevcut ise aşağıdaki önermeler doğrudur:

1. $(XY)^d X = X(YX)^d$,

2. $(XY)^d$ idempotent $\Leftrightarrow$ $Y(XY)^d = \left[(XY)^d X\right]^-$.

İspat.

1. [38]' de verilen $(XY)^d = X\left[(YX)^d\right]^2 Y$ Cline formülünün her iki tarafını X matrisi ile çarpalım. Bu durumda

$$(XY)^d X = X\left[(YX)^d\right]^2 YX = X(YX)^d$$

elde edilir.

2. $(XY)^d$ idempotent olsun. Bu durumda $\left[(XY)^d\right]^2 = (XY)^d$ sağlanır.

$$(XY)^d X\left(Y(XY)^d\right)(XY)^d X = \left((XY)^d\right)^2 X = (XY)^d X$$

olduğundan $Y(XY)^d = \left[(XY)^d X\right]^-$ elde edilir.

Tersine $Y(XY)^d = \left[(XY)^d X\right]^-$ olsun. Bu durumda

$$(XY)^d X\left(Y(XY)^d\right)(XY)^d X = (XY)^d X = \left((XY)^d\right)^2 X$$

olduğundan $(XY)^d$ idempotent olur.

Teorem 3.2.1.12. $A, B, X, Y \in \mathbb{C}_p^{n\times n}$ için $(XY)^d$ ve $(YX)^d$ mevcut ve A matrisi B matrisine yarı-benzer olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlikler doğrudur:

1. $A^{2k} X = X B^{2k}$ ve $B^{2k} X = X A^{2k}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$,

2. $(XY)^k A(XY)^k = A$, $k = 1, 2, 3, \ldots$,

3. $(XY)^d A(XY)^d = A$,

4. $(XY)(XY)^d A = A = A(XY)(XY)^d$.

İspat.

1. $YAX = B$ ve $XBY = A$ olduğundan

$$A = XBY = (XY)A(XY) \text{ ve } B = YAX = (YX)B(YX)$$

yazılabilir. Sonuç olarak

$$A^2 X = (XBY)(XBY)X = XB^2 \text{ ve } B^2 Y = (YAX)(YAX)Y = YA^2$$

elde edilir. Aynı yöntem takip edilerek

$$A^{2k} X = XB^{2k} \text{ ve } B^{2k} Y = Y A^{2k}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

eşitlikleri elde edilir.

2. $A=\left(XY\right)A\left(XY\right)=\left(XY\right)XBY\left(XY\right)=(XY)X(YAX)Y(XY)=(XY)^2A(XY)^2$

eşitliği elde edilir. Aynı işlem tekrarlanırsa

$$A=\left(XY\right)^k A\left(XY\right)^k, \quad k=1,2,3,...$$

eşitliği bulunur.

3. $ind\left(XY\right)=t$ olsun. Bu durumda

$$\left(XY\right)^d A\left(XY\right)^d=\left(XY\right)^d\left(XY\right)^{t+1}A\left(XY\right)^{t+1}\left(XY\right)^d=\left(XY\right)^t A\left(XY\right)^t=A$$

elde edilir.

4.

$$\begin{aligned}\left(XY\right)\left(XY\right)^d A&=\left(XY\right)\left(XY\right)^d\left(XY\right)^d A\left(XY\right)^d\\&=\left(XY\right)^d\left(XY\right)\left(XY\right)^d A\left(XY\right)^d\\&=\left(XY\right)^d A\left(XY\right)^d=A\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}A\left(XY\right)\left(XY\right)^d&=\left(XY\right)^d A\left(XY\right)^d\left(XY\right)\left(XY\right)^d\\&=\left(XY\right)^d A\left(XY\right)^d=A\end{aligned}$$

dır.

Teorem 3.2.1.13. $A,B,X,Y\in\mathbb{C}_p^{n\times n}$ için $\left(\overline{X}\,\overline{Y}\right)^d$ ve $\left(\overline{Y}\,\overline{X}\right)^d$ mevcut ve A matrisi B matrisine yarı-eşlenik-benzer olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlikler doğrudur:

1. $\left(\overline{X}\,\overline{Y}\right)^k A\left(XY\right)^k = A,\ \left(\overline{YX}\right)^k B\left(YX\right)^k = B,\ k = 1,2,3,\ldots,$

2. $\left(A\overline{A}\right)^k \overline{X} = \overline{X}\left(B\overline{B}\right)^k,\ \ \overline{Y}\left(A\overline{A}\right)^k = \left(B\overline{B}\right)^k \overline{Y},$

3. $A\left(XY\right)\left(XY\right)^d = A = \left(\overline{X}\,\overline{Y}\right)\left(\overline{X}\,\overline{Y}\right)^d A,\ B\left(YX\right)\left(YX\right)^d = B = \left(\overline{YX}\right)\left(\overline{YX}\right)^d B.$

İspat.

1.

$$A = \overline{X}BY = \left(\overline{X}\,\overline{Y}\right)A\left(XY\right) = \left(\overline{X}\,\overline{Y}\right)\overline{X}BY\left(XY\right) = \left(\overline{X}\,\overline{Y}\right)\overline{X}(\overline{Y}AX)Y(XY)$$

$$= \left(\overline{X}\,\overline{Y}\right)^2 A(XY)^2$$

eşitliği elde edilir. Aynı yöntem takip edilerek $\left(\overline{X}\,\overline{Y}\right)^k A\left(XY\right)^k = A$ eşitliği elde edilir. Benzer yolla $(\overline{Y}\,\overline{X})^k B(YX)^k = B,\ k = 1,2,3,\ldots$ eşitliğinin de doğru olduğu gösterilebilir.

2. $B = \overline{Y}\,\overline{X}\,BYX$ eşitliği var olduğundan

$$A\overline{A}\,\overline{X} = \overline{X}BYX\,\overline{B}\,\overline{Y}\,\overline{X} = \overline{X}\,B\left(YX\,\overline{B}\,\overline{Y}\,\overline{X}\right) = \overline{X}\,B\overline{B}$$

dir. Böyle devam edilerek $\left(A\overline{A}\right)^k \overline{X} = \overline{X}\left(B\overline{B}\right)^k$ eşitliği elde edilir. Benzer biçimde $\overline{Y}(A\overline{A})^k = (B\overline{B})^k\overline{Y}$ eşitliğinin de doğru olduğu gösterilebilir.

3. $ind\left(XY\right) = t$ olsun. Bu takdirde $ind\left(\overline{X}\,\overline{Y}\right) = t$ olur.

$$\left(\overline{X}\,\overline{Y}\right)^d A\left(XY\right)^d = \left(\overline{X}\,\overline{Y}\right)^d \left(\overline{X}\,\overline{Y}\right)^{t+1} A\left(XY\right)^{t+1}\left(XY\right)^d = \left(\overline{X}\,\overline{Y}\right)^t A\left(XY\right)^t = A$$

ve

$$(\overline{X}\,\overline{Y})(\overline{X}\,\overline{Y})^d A = (\overline{X}\,\overline{Y})^d (\overline{X}\,\overline{Y}) A = (\overline{X}\,\overline{Y})^d (\overline{X}\,\overline{Y})(\overline{X}\,\overline{Y})^d A(XY)^d$$

$$= (\overline{X}\,\overline{Y})^d A(XY)^d = A$$

elde edilir. Ayrıca

$$A(XY)(XY)^d = \left[(\overline{X}\,\overline{Y})^d A(XY)^d\right](XY)(XY)^d$$

$$= (\overline{X}\,\overline{Y})^d A(XY)^d = A$$

olduğundan

$$A(XY)(XY)^d = (\overline{X}\,\overline{Y})(\overline{X}\,\overline{Y})^d A = (\overline{X}\,\overline{Y})^d A(XY)^d = A$$

eşitliğini elde etmiş oluruz. Benzer yolla

$$B(YX)(YX)^d = B = (\overline{YX})(\overline{Y}\,\overline{X})^d B$$

eşitliğini de elde ederiz.

Teorem 3.2.1.14. $A, B, X, Y \in \mathbb{C}_p^{n\times n}$ olsun. A matrisi B matrisine yarı-eşlenik-benzer ise $A\overline{A}$ matrisi $B\overline{B}$ matrisine yakın-benzerdir.

İspat.

$$\overline{B} = \overline{B}(\overline{Y}\,\overline{X})(\overline{Y}\,\overline{X})^d, \ \overline{Y}(A\overline{A})(\overline{X}\,\overline{Y})^d\,\overline{X} = (B\overline{B})\overline{Y}(\overline{X}\,\overline{Y})^d\,\overline{X}$$

ve

$$\left(\overline{X}\,\overline{Y}\right)^{d}=\overline{X}\left[\left(\overline{Y}\,\overline{X}\right)^{d}\right]^{2}\overline{Y}$$

eşitliklerini kullanırsak

$$\left(\overline{X}\,\overline{Y}\right)^{d}\overline{X}=\overline{X}\left[\left(\overline{Y}\,\overline{X}\right)^{d}\right]^{2}\overline{Y}\,\overline{X}=\overline{X}\left(\overline{Y}\,\overline{X}\right)^{d},$$

$$\overline{Y}\left(A\overline{A}\right)\left(\overline{X}\,\overline{Y}\right)^{d}\overline{X}=\left(B\overline{B}\right)\overline{Y}\left(\overline{X}\,\overline{Y}\right)^{d}\overline{X}=B\overline{B}\,\overline{Y}\,\overline{X}\left(\overline{Y}\,\overline{X}\right)^{d}=B\overline{B},$$

$$\left(\overline{X}\,\overline{Y}\right)^{d}\overline{X}\left(B\overline{B}\right)\overline{Y}=\left(\overline{X}\,\overline{Y}\right)^{d}\overline{X}\,\overline{Y}\left(A\overline{A}\right)=A\overline{A}$$

ve

$$\left[\left(\overline{X}\,\overline{Y}\right)^{d}\overline{X}\right]\overline{Y}\left[\left(\overline{X}\,\overline{Y}\right)^{d}\overline{X}\right]=\left(\overline{X}\,\overline{Y}\right)^{d}\overline{X}$$

elde edilir. Sonuç olarak $A\overline{A}$ matrisi $B\overline{B}$ matrisine yakın-benzerdir.

Teorem 3.2.1.15. $A,B,X,Y\in\mathbb{C}_{p}^{n\times n}$ için A matrisi B matrisine yarı-benzer ise aşağıdaki önermeler doğrudur:

1. A^{2k+1} matrisi B^{2k+1} matrisine yarı-benzerdir,

2. A^{2k} matrisi B^{2k} matrisine yakın-benzerdir,

3. AA^{d} matrisi BB^{d} matrisine yakın-benzerdir,

4. A^{d} matrisi B^{d} matrisine yarı-benzerdir,

5. A^2A^d matrisi B^2B^d matrisine yarı-benzerdir.

İspat.

1. $YAA^{2k}X = YAXB^{2k} = B^{2k+1}$ ve benzer biçimde $XBB^{2k}Y = XBYA^{2k} = A^{2k+1}$ elde edilir. Sonuç olarak A^{2k+1} matrisi B^{2k+1} matrisine yarı-benzerdir.

2. $YA^{2k}\left(XY\right)^d X = B^{2k}Y\left(XY\right)^d X = B^{2k}YX\left(YX\right)^d = B^{2k}$ sağlanır. Ayrıca

$$\left(XY\right)^d XB^{2k}Y = \left(XY\right)^d XYA^{2k} = A^{2k} \text{ ve } Y = \left[\left(XY\right)^d X\right]^-$$

olduğundan A^{2k} matrisi B^{2k} matrisine yakın-benzerdir.

3. [26]' da $\left(A^d\right)^2 X = X\left(B^d\right)^2$ eşitliği kullanılarak $A^2\left(A^d\right)^2 = A^2A^dA^d = AA^d$ ve $B^2\left(B^d\right)^2 = BB^d$ eşitlikleri elde edilir. O halde

$$AA^dX = A^2\left(A^d\right)^2 X = A^2X\left(B^d\right)^2 = XB^2\left(B^d\right)^2 = XBB^d$$

olur. Buradan

$$\left(YX\right)^d Y\left(AA^d\right)X = \left(YX\right)^d\left(YX\right)BB^d = BB^d$$

$$X\left(BB^d\right)\left(YX\right)^d Y = AA^dX\left(YX\right)^d Y = AA^d\left(XY\right)^d\left(XY\right) = AA^d$$

ve

$$X^- = \left(YX\right)^d Y$$

olacağından AA^d matrisi BB^d matrisine yakın-benzerdir.

4.

$$
\begin{aligned}
(YX)^d YA^d X (YX)^d &= Y(XY)^d A^d X (YX)^d \\
&= Y(XY)^d A(A^d)^2 X (YX)^d \\
&= (YAX)Y(A^d)^2 X (YX)^d \\
&= B(B^d)^2 YX (YX)^d \\
&= B(B^d)^2 \\
&= B^d
\end{aligned}
$$

bulunur ve benzer biçimde $X(YX)^d B^d (YX)^d Y = A^d$ elde edilir. Sonuç olarak A^d matrisi B^d matrisine yarı-benzerdir.

5.

$$YA^2A^d X = (YA)\left(AA^d X\right) = YAXBB^d = B^2B^d$$

ve

$$XB^2B^dY = XBB^dBY = AA^dXBY = A^2A^d \;.$$

eşitlikleri elde edilir. Dolayısıyla A^2A^d matrisi B^2B^d matrisine yarı-benzerdir.

3.2.2. Eliptik matrislerin bazı lineer denklemleri

$A = A_1 + iA_2 \in \mathbb{C}_p^{m\times n}$ olsun. Burada $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{mxn}$ dır. $\phi_A(X) = A\overline{X}$ biçiminde bir lineer izomorfizma tanımlansın. Bu lineer izomorfizmanın $\{1, i\}$ tabanına karşılık gelen matrisi

$$\phi_A(1) = A_1 + iA_2$$

$$\phi_A(i) = -pA_2 - iA_1$$

olmak üzere aşağıdaki gibidir:

$$\phi_A = \begin{pmatrix} A_1 & -pA_2 \\ A_2 & -A_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2m\times 2n}.$$

Teorem 3.2.2.1. A eliptik matrisi için aşağıdaki özellikler doğrudur:

1. $A \in \mathbb{C}_p^{m\times n}$ olsun. Bu durumda

$$P_n = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix} \text{ ve } Q_n = \begin{pmatrix} 0 & pI_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$P_m^{-1}\phi_A P_n = \phi_{\bar{A}}, \quad Q_m^{-1}\phi_A Q_n = -\phi_A;$$

dır,

2. $A, B \in \mathbb{C}_p^{m\times n}$ ise $\phi_{A+B} = \phi_A + \phi_B$ dir,

3. $A \in \mathbb{C}_p^{m\times n}$, $B \in \mathbb{C}_p^{n\times l}$, ise $\phi_{AB} = \phi_A P_n \phi_B = \phi_A \phi_{\bar{B}} P_l$ dir,

4. $A \in \mathbb{C}_p^{m\times n}$ olmak üzere A^{-1} mevcuttur ancak ve ancak $(\phi_A)^{-1}$ mevcuttur ve

$$(\phi_A)^{-1} = P_m \phi_{A^{-1}} P_m$$

dır.

İspat. Mevcut eşitliklerin sağ ve sol tarafları hesaplanarak ispat kolay bir biçimde tamamlanır.

i. $A\overline{X} - XB = C$ **denkleminin çözümü üzerine**

Burada $A \in \mathbb{C}_p^{m\times m}$, $B \in \mathbb{C}_p^{n\times n}$ ve $C \in \mathbb{C}_p^{m\times n}$ için

$$A\overline{X} - XB = C \tag{3.7}$$

denkleminin çözümü eliptik matrislerinin reel gösterimleri yardımıyla araştırılacaktır.

(3.7) denkleminin reel temsili

$$\phi_A \phi_X P_n - \phi_X P_n \phi_B = \phi_C \tag{3.8}$$

biçimindedir.

Lemma 3.2.2.2. $A\overline{X} - XB = C$ denkleminin çözümü $X \in \mathbb{C}_p^{m\times n}$ olsun. Bu durumda

$$\phi_A Y - Y\phi_B = \phi_C \tag{3.9}$$

denkleminin çözümü $Y = \phi_X P_n \in \mathbb{R}^{2m\times 2n}$ dir.

Teorem 3.2.2.3. $A \in \mathbb{C}_p^{m\times m}$, $B \in \mathbb{C}_p^{n\times n}$ ve $C \in \mathbb{C}_p^{m\times n}$ olsun. $\phi_A Y - Y\phi_B = \phi_C$ denkleminin çözümü $Y \in \mathbb{R}^{2m\times 2n}$ olması durumunda $A\overline{X} - XB = C$ denkleminin çözümü

$$X = Z_1 + iZ_2 = \frac{1}{2(1-p)}\begin{pmatrix} 1 & i \end{pmatrix}\left(YP_n - \left(Q_m^{-1}\left(YP_n\right)Q_n\right)\right)\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \tag{3.10}$$

biçimindedir.

İspat.

$$Y=\begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix},\ Y_{uv}\in\mathbb{R}^{m\times n},\ u,v=1,2, \tag{3.11}$$

matrisi (3.9) denkleminin bir çözümü olsun. Bu durumda $Q_m^{-1}\phi_X Q_n=-\phi_X$ ve $Y=\phi_X P_n$ olduğundan

$$\phi_A\left(-Q_m^{-1}\left(YP_n\right)Q_n\right)P_n-\left(-Q_m^{-1}\left(YP_n\right)Q_n\right)P_n\phi_B=\phi_C \tag{3.12}$$

dır. Sonuç olarak Y matrisi (3.9) denkleminin bir çözümü ise $\left(-Q_m^{-1}\left(YP_n\right)Q_n\right)P_n$ ifadesi de (3.9) denkleminin bir çözümüdür. Ayrıca

$$Y'=\frac{1}{2}\left(Y-\left(Q_m^{-1}\left(YP_n\right)Q_n\right)P_n\right) \tag{3.13}$$

ifadesi de (3.9) denkleminin bir çözümüdür. $\phi_X=Y'\left(P_n\right)^{-1}$ olduğundan

$$\phi_X=\begin{pmatrix} Z_1 & -pZ_2 \\ Z_2 & -Z_1 \end{pmatrix} \tag{3.14}$$

dır. Burada

$$Z_1=\frac{1}{2}\left(Y_{11}+Y_{22}\right),\ \ Z_2=\frac{1}{2}\left(\frac{Y_{12}}{p}+Y_{21}\right) \tag{3.15}$$

dır. Bu durumda

$$X=Z_1+iZ_2=\frac{1}{1-p}\begin{pmatrix} I_m & iI_m \end{pmatrix}\phi_X\begin{pmatrix} I_n \\ uI_n \end{pmatrix} \tag{3.16}$$

biçimindedir.

Örnek 3.2.2.4. $\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1+i \end{pmatrix}\overline{X} - X\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2i & 1-p \\ 2i-p & -p \end{pmatrix}$ eşitliğini sağlayan $X \in \mathbb{C}_p^{2\times 2}$ matrisini bulalım.

Verilen denkleme karşılık gelen reel gösterim

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -p \\ 0 & 1 & -p & -p \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} Y - Y \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1-p & 2p & 0 \\ -p & -p & -2p & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -1+p \\ 2 & 0 & p & p \end{pmatrix}, \; Y \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

biçimindedir. Bu reel matris denklemi çözülürse

$$Y = \begin{pmatrix} 2 & 1 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

elde edilir. $\phi_X = \frac{1}{2}\left(YP_n - \left(Q_m^{-1}\left(YP_n\right)Q_n\right)\right)$ eşitliği kullanılırsa

$$\phi_X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

matrisi elde edilir. Buradan

$$X = \frac{1}{1-p}\begin{pmatrix} 1 & 0 & i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+i & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

matrisi elde edilir.

Teorem 3.2.2.5. $A\overline{X} - XB = C$ denkleminde $C = 0$ ve X regüler olsun. Bu durumda A matrisi B matrisine eşlenik-benzer, ϕ_A matrisi ise ϕ_B matrisine benzerdir.

İspat. X regüler olduğundan, $A\overline{X} - XB = 0$ denklemi $X^{-1}A\overline{X} = B$ olarak yazılır. Dolayısıyla A matrisi B matrisine eşlenik benzer olur. $X^{-1}A\overline{X} = B$ denkleminin reel temsili alındığında

$$\phi_{\left(X^{-1}\right)A}\phi_X P_n = \phi_B \;\Rightarrow\; \phi_{\left(X^{-1}\right)}P_n\phi_A\phi_X P_n = \phi_B \Rightarrow P_n\left(\phi_X\right)^{-1} P_n P_n\phi_A\phi_X P_n = \phi_B$$

ve

$$\left(P_n\right)^{-1}\left(\phi_X\right)^{-1}\phi_A\phi_X P_n = \phi_B \;\Rightarrow \left(\phi_X P_n\right)^{-1}\phi_A\phi_X P_n = \phi_B$$

olduğundan ϕ_A matrisi ϕ_B matrisine benzer olur.

ii. $X - A\overline{X}B = C$ **denkleminin çözümü üzerine**

$A \in \mathbb{C}_p^{m\times m}$, $B \in \mathbb{C}_p^{n\times n}$ ve $C \in \mathbb{C}_p^{m\times n}$ için

$$X - A\overline{X}B = C \tag{3.17}$$

denkleminin reel temsili

$$\phi_X - \phi_A\phi_X\phi_B = \phi_C \tag{3.18}$$

biçimindedir.

Lemma 3.2.2.6. $X - A\overline{X}B = C$ denkleminin çözümü $X \in \mathbb{C}_p^{m\times n}$ olsun. Bu durumda

$$Y - \phi_A Y \phi_B = \phi_C \tag{3.19}$$

denkleminin çözümü $Y = \phi_X \in \mathbb{R}^{2m\times 2n}$ dir.

Teorem 3.2.2.7. $A \in \mathbb{C}_p^{m\times m}$, $B \in \mathbb{C}_p^{n\times n}$ ve $C \in \mathbb{C}_p^{m\times n}$ olsun. $Y - \phi_A Y \phi_B = \phi_C$ denkleminin çözümü $Y \in \mathbb{R}^{2m\times 2n}$ olması durumunda $X - A\overline{X}B = C$ denkleminin çözümü

$$X = Z_1 + iZ_2 = \frac{1}{2(1-p)}\begin{pmatrix} 1 & i \end{pmatrix}\left(Y - Q_m^{-1} Y Q_n\right)\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \tag{3.20}$$

biçimindedir.

İspat. $Y_{uv} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ve $u, v = 1, 2,$ olmak üzere

$$Y = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} \tag{3.21}$$

matrisi (3.19) denkleminin çözümü olsun. Bu durumda $Q_m^{-1}\phi_X Q_n = -\phi_X$ ve $Y = \phi_X$ olduğundan

$$\left(-Q_m^{-1} Y Q_n\right) - \phi_A\left(-Q_m^{-1} Y Q_n\right)\phi_B = \phi_C \tag{3.22}$$

dır. Sonuç olarak Y matrisi (3.19) denkleminin bir çözümü ise $-Q_m^{-1} Y Q_n$ ifadesi de (3.19) denkleminin bir çözümüdür. Ayrıca

$$Y' = \frac{1}{2}\left(Y - Q_m^{-1} Y Q_n\right) \tag{3.23}$$

ifadesi de (3.19) denkleminin bir çözümüdür. Son bulunan ifade düzenlenirse

$$Y' = \begin{pmatrix} Z_1 & -pZ_2 \\ Z_2 & -Z_1 \end{pmatrix} \tag{3.24}$$

matrisi elde edilir. Burada

$$Z_1 = \frac{1}{2}\left(Y_{11} - Y_{22}\right) \quad \text{ve} \quad Z_2 = \frac{1}{2}\left(-\frac{Y_{12}}{p} + Y_{21}\right) \tag{3.25}$$

dır. $\phi_X = Y'$ olduğundan (3.17) denkleminin çözümü

$$X = Z_1 + iZ_2 = \frac{1}{1-p}\begin{pmatrix} 1 & i \end{pmatrix} Y' \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \tag{3.26}$$

biçimindedir.

Örnek 3.2.2.8. $X - \begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ i & 0 \end{pmatrix} \overline{X} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3p+5i & i \\ 3p-i & 1 \end{pmatrix}$ eşitliğini sağlayan $X \in \mathbb{C}_p^{2\times 2}$ matrisini bulalım.

Çözüm. Verilen denkleme karşılık gelen reel gösterim

$$Y - \begin{pmatrix} 1 & 1 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Y \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3p & 0 & -5p & -p \\ 3p & 1 & p & 0 \\ 5 & 1 & -3p & 0 \\ -1 & 0 & -3p & -1 \end{pmatrix}$$

biçimindedir. Bu reel matris denklemi çözülürse

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3p & -p \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

elde edilir. $\phi_X = \frac{1}{2}\left(Y - \left(Q_m^{-1}\left(Y\right)Q_n\right)\right)$ eşitliğini kullanılırsa

$$\phi_X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3p & -p \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

matrisi bulunur. Buradan

$$X = \frac{1}{1-p}\begin{pmatrix} 1 & 0 & i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3p & -p \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3i & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

çözümü elde edilir.

BÖLÜM 4. KOMÜTATİF KUATERNİYONLAR

Komütatif kuaterniyonlar cümlesi 1892 yılında C. Segre tarafından tanımlanmıştır [12]. Komütatif kuaterniyonlar hareket geometrisi, diferensiyel geometri, sayısal görüntü işleme, sinyal işleme, bilgisayar programlama gibi birçok alanda uygulamalara sahiptirler [15-16-17]. Bu bölümde komütatif kuaterniyonların bazı temel cebirsel özellikleri verildikten sonra komütatif kuaterniyonlara karşılık gelen temel matrisleri kullanarak bu cümle üzerinde tanımlı bazı lineer denklem ve lineer denklem sistemlerinin çözümleri çalışılmıştır. Daha sonra komütatif kuaterniyonların matrisleri tanımlanarak eliptik sayıların matrisleri için incelenmiş olan özellikler bu matris uzayına genelleştirilmiştir.

4.1. Komütatif Kuaterniyonların Cebirsel Özellikleri

Komütatif kuaterniyonların cümlesi

$$\mathbb{H} = \left\{ a = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k : a_0,\, a_1,\, a_2,\, a_3 \in \mathbb{R} \right\} \tag{4.1}$$

biçiminde ifade edilir. Burada i, j, k kuaterniyonik birimleri arasında aşağıdaki eşitlikler mevcuttur:

$$i^2 = k^2 = -1,\;\; j^2 = 1,\; ij = ji = k,\; jk = kj = i,\; ki = ik = -j. \tag{4.2}$$

Bu çarpım kurallarından açıktır ki $\mathbb{H}$ cümlesi çarpma işlemine göre değişme özelliğine sahiptir [13].

$a = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k,\; b = b_0 + b_1 i + b_2 j + b_3 k \in \mathbb{H}$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\mathbb{H}$ cümlesi üzerinde toplama, çarpma ve skalarla çarpma işlemleri sırasıyla

$$a+b=\left(a_0+b_0\right)+\left(a_1+b_1\right)i+\left(a_2+b_2\right)j+\left(a_3+b_3\right)k\ ,$$

$$\begin{aligned}pq=&\left(a_0b_0-a_1b_1+a_2b_2-a_3b_3\right)+\left(a_1b_0+a_0b_1+a_3b_2+a_2b_3\right)i\\&+\left(a_0b_2+a_2b_0-a_1b_3-a_3b_1\right)j+\left(a_3b_0+a_0b_3+a_1b_2+a_2b_1\right)k\end{aligned}$$

ve

$$\lambda a=\lambda\left(a_0+a_1i+a_2j+a_3k\right)=\lambda a_0+\lambda a_1i+\lambda a_2j+\lambda a_3k$$

eşitlikleri ile tanımlanır [13].

$a=a_0+a_1i+a_2j+a_3k\in\mathbb{H}$ komütatif kuaterniyonunun üç farklı eşleniği

$$\begin{aligned}{}^{1}\overline{a}&=a_0-a_1i+a_2j-a_3k,\\{}^{2}\overline{a}&=a_0+a_1i-a_2j-a_3k,\\{}^{3}\overline{a}&=a_0-a_1i-a_2j+a_3k\end{aligned}\tag{4.3}$$

eşitlikleri ile tanımlanır [13].

$a=a_0+a_1i+a_2j+a_3k\in\mathbb{H}$ komütatif kuaterniyonun normu

$$\|a\|=\sqrt[4]{a\left({}^{1}\overline{a}\right)\left({}^{2}\overline{a}\right)\left({}^{3}\overline{a}\right)}=\sqrt[4]{\left[\left(a_0+a_2\right)^2+\left(a_1+a_3\right)^2\right]\left[\left(a_0-a_2\right)^2+\left(a_1-a_3\right)^2\right]}\tag{4.4}$$

olarak tanımlıdır [13].

$a=a_0+a_1i+a_2j+a_3k\in\mathbb{H}$ ve $\|a\|\neq 0$ olmak üzere a komütatif kuaterniyonunun çarpma işlemine göre tersi a^{-1} olmak üzere

$$a^{-1} = \frac{\left({}^{1}\overline{a}\right)\left({}^{2}\overline{a}\right)\left({}^{3}\overline{a}\right)}{\|a\|^4}$$

dir [13].

$\|a\| \neq 0$ olmak üzere bir $a = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k \in \mathbb{H}$ komütatif kuaterniyonu

$$a = \|a\| e^{\phi i + \theta j + \psi k}$$

biçiminde de ifade edilebilir. Burada ϕ ve ψ Öklid açısı θ ise hiperbolik açıdır ve

$$\phi = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{2\left(a_0 a_1 - a_2 a_3\right)}{a_0^{\;2} - a_1^{\;2} - a_2^{\;2} + a_3^{\;2}}\right)$$

$$\theta = \frac{1}{2}\tanh^{-1}\left(\frac{2\left(a_0 a_2 + a_1 a_3\right)}{a_0^{\;2} + a_1^{\;2} + a_2^{\;2} + a_3^{\;2}}\right)$$

$$\psi = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{2\left(a_0 a_3 - a_1 a_2\right)}{a_0^{\;2} + a_1^{\;2} - a_2^{\;2} - a_3^{\;2}}\right)$$

dir. Bu gösterime a komütatif kuaterniyonunun kutupsal gösterimi denir [37].

$a = \|a\| e^{\phi_1 i + \theta_1 j + \psi_1 k}$ ve $b = \|b\| e^{\phi_2 i + \theta_2 j + \psi_2 k}$ olmak üzere bir komütatif kuaterniyonun tamsayı kuvveti, tersi ve iki komütatif kuaterniyonun çarpımı kutupsal gösterim yardımı ile

$$\begin{aligned}
a^n &= \|a\|^n \, e^{n\phi_1 i + n\theta_1 j + n\psi_1 k}, \; n \in \mathbb{Z}, \\
a^{-1} &= \|a\|^{-1} \, e^{-\phi_1 i - \theta_1 j - \psi_1 k}, \; \|a\| \neq 0, \qquad (4.5) \\
ab &= \|a\| \, \|b\| e^{\phi_1 i + \theta_1 j + \psi_1 k} e^{\phi_2 i + \theta_2 j + \psi_2 k} = \|ab\| \, e^{(\phi_1 + \phi_2) i + (\theta_1 + \theta_2) j + (\psi_1 + \psi_2) k}
\end{aligned}$$

eşitlikleri ile hesaplanır [37].

4.1.1. Komütatif kuaterniyonların temel matrisleri

$a = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k \in \mathbb{H}$ için $\varphi_a(x) = ax$ biçiminde $\varphi_a : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ bir dönüşüm tanımlansın. Bu dönüşüm lineerdir. φ lineer dönüşümünün $\{1, i, j, k\}$ tabanına karşılık gelen matrisi

$$\begin{aligned}
\varphi_a(1) &= (a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k) \\
\varphi_a(i) &= (a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k)\, i = -a_1 + a_0 i - a_3 j + a_2 k \\
\varphi_a(j) &= (a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k)\, j = a_2 + a_3 i + a_0 j + a_1 k \\
\varphi_a(k) &= (a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k)\, k = -a_3 + a_2 i - a_1 j + a_0 k
\end{aligned} \tag{4.6}$$

olmak üzere aşağıdaki gibidir:

$$\varphi(a) = \begin{pmatrix} a_0 & -a_1 & a_2 & -a_3 \\ a_1 & a_0 & a_3 & a_2 \\ a_2 & -a_3 & a_0 & -a_1 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix}. \tag{4.7}$$

Bu matrise $a \in \mathbb{H}$ nın temel matrisi denir [13].

$\mathbb{H}$ komütatif kuaterniyonlar cümlesi ile $\mathbb{R}^{4\times1}$ matris cümlesi arasında bir cebir izomorfizması kurulabilir. Bu izomorfizma

$$\tau : \mathbb{H} \to \mathbb{R}^{4\times 1}$$

$$a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k \to \tau\left(a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k\right) = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \tag{4.8}$$

biçiminde tanımlanır. Sonuç olarak

$$a = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k \cong \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \tag{4.9}$$

yazılabilir [13].

Yukarıdaki sonuçtan yola çıkılarak iki komütatif kuaterniyon $a = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$ ve $b = b_0 + b_1 i + b_2 j + b_3 k$ nin çarpımı aşağıdaki gibi de ifade edilebilir [13]:

$$ab = \begin{pmatrix} a_0 & -a_1 & a_2 & -a_3 \\ a_1 & a_0 & a_3 & a_2 \\ a_2 & -a_3 & a_0 & -a_1 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \varphi(a)b. \tag{4.10}$$

Tanımlanan φ fonksiyonunu için

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$$

$$\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b).$$

eşitlikleri doğrudur. Dolayısıyla φ bir cebir izomorfizmdir. Ayrıca,

$$\varphi(1)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=I_4;\quad \varphi(i)=\begin{pmatrix}0&-1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&1&0\end{pmatrix}=E_1;$$

$$\varphi(j)=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}=E_2;\quad \varphi(k)=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&-1&0\\0&1&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix}=E_3$$

olduğundan

$$\begin{gathered}E_1E_1=-I_4,\ E_2E_2=I_4,\ E_3E_3=-I_4,\\ E_1E_2=E_2E_1=E_3,\ E_2E_3=E_3E_2=E_1,\ E_1E_3=E_3E_1=-E_2\end{gathered}\tag{4.11}$$

eşitlikleri mevcuttur. Dolayısıyla E_1,E_2,E_3 matrisleri ile i,j,k elemanları birbirlerine izomorftur [13].

Teorem 4.1.1.1. $a,b\in\mathbb{H}$ olmak üzere φ temel matrisinin aşağıdaki özellikleri mevcuttur [37]:

1. $\varphi(ab)=\varphi(a)\varphi(b)$,

2. $\varphi(\varphi(a)b)=\varphi(a)\varphi(b)$,

3. $a=b\Leftrightarrow\varphi(a)=\varphi(b)$,

4. $\varphi(a+b)=\varphi(a)+\varphi(b)$,

5. $\varphi(\lambda a)=\lambda\varphi(a),\ \lambda\in\mathbb{R}$,

6. $iz(\varphi(a)) = a + {}^{1}\overline{a} + {}^{2}\overline{a} + {}^{3}\overline{a},$

7. $\|a\|^{4} = \left|\det(\varphi(a))\right|.$

Teorem 4.1.1.2. $a = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k \in \mathbb{H}$ olmak üzere

$$P\, diag\left(a,\ {}^{1}\overline{a},\ {}^{2}\overline{a},\ {}^{3}\overline{a}\right) P^{-1} = \varphi(a)$$

olacak biçimde

$$P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -i & i & i & -i \\ j & j & -j & -j \\ -k & k & -k & k \end{pmatrix} \text{ ve } P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i & j & k \\ 1 & -i & j & -k \\ 1 & -i & -j & k \\ 1 & i & -j & -k \end{pmatrix}$$

matrisleri mevcuttur.

Teoremin doğruluğu eşitliğin sol tarafının hesaplanmasıyla kolayca gösterilir. $P\, diag\left(a,\ {}^{1}\overline{a},\ {}^{2}\overline{a},\ {}^{3}\overline{a}\right) P^{-1} = \varphi(a)$ eşitliğine evrensel benzerlik eşitliği denir. Bu eşitlik yardımı ile aşağıdaki sonuçları söyleyebiliriz.

1. $\mathbb{H}$ cümlesi

$$\mathbb{H}' = \left\{ \begin{pmatrix} a_0 & -a_1 & a_2 & -a_3 \\ a_1 & a_0 & a_3 & a_2 \\ a_2 & -a_3 & a_0 & -a_1 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix} : a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

cümlesine izomoftur. Bu iki cümle arasındaki cebir izomorfizmi

$$\varphi : \mathbb{H} \to \mathbb{H}'$$

$$a = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k \to \varphi(a) = \begin{pmatrix} a_0 & -a_1 & a_2 & -a_3 \\ a_1 & a_0 & a_3 & a_2 \\ a_2 & -a_3 & a_0 & -a_1 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix}$$

biçimindedir.

2. Her $a = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k \in \mathbb{H}$ komütatif kuaterniyonu

$$\varphi(a) = \begin{pmatrix} a_0 & -a_1 & a_2 & -a_3 \\ a_1 & a_0 & a_3 & a_2 \\ a_2 & -a_3 & a_0 & -a_1 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix}$$

matrisi ile ifade edilebilir.

3. $\mathbb{H}'$ cümlesinin her bir elemanı $\mathbb{H}$ cümlesi üstünde tek bir biçimde köşegenleştirilebilir.

Tanım 4.1.1.3. a ve b komütatif kuaterniyonları $s.$ $(s = 1,2,3)$ eşleniğe göre eşlenik-benzerdir ancak ve ancak $a = \left({}^{s}\overline{q}\right) b\, q^{-1}$ olacak biçimde q $\left(\|q\| \neq 0\right)$ komütatif kuaterniyonu mevcuttur. a ve b, $s.$ eşleniğe göre eşlenik-benzer ise bu $a \overset{c_s}{\sim} b$ biçiminde gösterilir. Ayrıca iki komütatif kuaterniyon $s.$ eşleniğe göre eşlenik-benzer ise bunların normları aynıdır.

Teorem 4.1.1.4. $a, b, c \in \mathbb{H}$ olmak üzere aşağıdaki özellikler mevcuttur:

Yansıma: $a \overset{c_s}{\sim} a$,

Simetri: $a \overset{c_s}{\sim} b$ ise $b \overset{c_s}{\sim} a$, Geçişme: $a \overset{c_s}{\simeq} b,\ b \overset{c_s}{\simeq} c$ ise $a \overset{c_s}{\simeq} c.$

İspat. Yansıma: $a \in \mathbb{H}$ için $1a1^{-1} = a$ dır. Sonuç olarak $\overset{c_s}{\simeq}$ bağıntısı yansıyandır.

Simetri: $\left({}^{s}\overline{q}\right) a q^{-1} = b$ olsun. q terslenebilir olduğundan

$$\left({}^{s}q\right)^{-1} bq = \left({}^{s}q\right)^{-1} \left({}^{s}q\right) a q^{-1} q = a$$

olur ki, bu $\overset{c_z}{\simeq}$ simetriktir bağıntısının simetrik olduğunu gösterir.

Geçişme: $\left({}^{s}\overline{q_1}\right) a q_1^{-1} = b$ ve $\left({}^{s}\overline{q_2}\right) b q_2^{-1} = c$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} c &= \left({}^{s}\overline{q_2}\right)\left({}^{s}\overline{q_1}\right) a q_1^{-1} q_2^{-1} \\ &= {}^{s}\overline{(q_2 q_1)}\, a \left(q_2 q_1\right)^{-1} \end{aligned}$$

dır. Bu durumda $\overset{c_s}{\simeq}$ geçişkendir.

Sonuç olarak $\overset{c_s}{\simeq}$ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

Teorem 4.1.1.5. $a = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k \in \mathbb{H}$ verilsin

1. $\|a\| = 0$ ise $\varphi(a)$ matrisi singüler matristir ve $\varphi(a)$ matrisinin genelleştirilmiş tersi

$$\varphi^{-}(a) = \frac{\left(\varphi(a)\right)^{T}}{4\left(a_0^2 + a_1^2\right)}$$

dır.

2. $\|a\| \neq 0$ ise $\varphi(a)$ matrisi regüler matristir ve

$$\varphi^{-1}(a) = \varphi(a^{-1})$$

dir.

İspat.

1. $\|a\| = 0$ olduğunda $\det(\varphi(a)) = 0$ olur. Dolayısıyla $\varphi(a)$ matrisi singüler olur.

$$\varphi(a)(\varphi(a))^T \varphi(a) = 4(a_0^2 + a_1^2)\varphi(a)$$

ve

$$\varphi(a)\left[\frac{[\varphi(a)]^T}{4(a_0^2 + a_1^2)}\right]\varphi(a) = \varphi(a)$$

olduğundan

$$[\varphi(a)]^- = \frac{1}{4(a_0^2 + a_1^2)}[\varphi(a)]^T$$

eşitliği elde edilir.

2. $\|a\| \neq 0$ olduğunda $\det(\varphi(a)) \neq 0$ olacağından $\varphi(a)$ matrisi regüler olur.

$$I_4 = \varphi\left(aa^{-1}\right) = \varphi(a)\varphi\left(a^{-1}\right)$$

$$I_4 = \varphi\left(a^{-1}a\right) = \varphi\left(a^{-1}\right)\varphi(a)$$

olduğundan $\left[\varphi(a)\right]^{-1} = \varphi\left(a^{-1}\right)$ eşitliği elde edilir.

Teorem 4.1.1.6. $a,b,x \in \mathbb{H}$ ve $a = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k \in \mathbb{H}$ olmak üzere $ax = b$ denklemini sağlayan sıfırdan farklı $x \in \mathbb{H}$ mevcut olsun. Bu durumda

1. $\|a\| \neq 0$ ve $b \neq 0$ ise $x = a^{-1}b$ dir.

2. $\|a\| = 0$ ve $a \neq 0$ ise $a_0 + a_2 = 0,\ a_1 + a_3 = 0$ ya da $a_0 - a_2 = 0,\ a_1 - a_3 = 0$ eşitlikleri doğrudur. Diğer taraftan $a_0 + a_2 = 0$ ve $a_1 + a_3 = 0$ eşitlikleri sağlanırsa

$$x = \frac{1}{4}\frac{1}{\left(a_0^2 + a_1^2\right)}{}^{1}\overline{a}\,b + (1 + j)q$$

dır. $a_0 - a_2 = 0$ ve $a_1 - a_3 = 0$ eşitlikleri sağlandığında ise

$$x = \frac{1}{4}\frac{1}{\left(a_0^2 + a_1^2\right)}{}^{1}\overline{a}\,b + (1 - j)q$$

dır. Burada $q \in \mathbb{H}$ keyfidir.

İspat. $\|a\| \neq 0$ ve $b \neq 0$ olduğunda $x = a^{-1}b$ olduğu açıktır. Şimdi 2. durumu ispatlayalım. $\|a\| = 0$ olsun. Bu durumda

$$a_0 + a_2 = 0,\ a_1 + a_3 = 0 \text{ ya da } a_0 - a_2 = 0,\ a_1 - a_3 = 0$$

olmalıdır. Kabul edelim ki $a_0 + a_2 = 0$ ve $a_1 + a_3 = 0$ olsun. Bu eşitlikler altında $\varphi(a)$ matrisi singüler olur. $ax = b$ denklemi $\varphi(a)x = b$ biçiminde de yazılabileceğinden keyfi $q \in \mathbb{H}$ için

$$x = \left[\varphi(a)\right]^{-} b + \left(I_4 - \left[\varphi(a)\right]^{-} \varphi(a)\right) q$$

dır. Son ifade de $\left[\varphi(a)\right]^{-}$ nın eşiti yerine yazılır ve ifade düzenlenirse

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{4} \frac{1}{\left(a_0^2 + a_1^2\right)} \left[\varphi(a)\right]^{T} b + 2\left(I_4 - \frac{1}{4} \frac{1}{\left(a_0^2 + a_1^2\right)} \left[\varphi(a)\right]^{T} \varphi(a) \right) q \\ &= \frac{1}{4} \frac{1}{\left(a_0^2 + a_1^2\right)} \left[\varphi(a)\right]^{T} b + \left(I_4 - \varphi(j)\right) q \\ &= \frac{1}{4} \frac{1}{\left(a_0^2 + a_1^2\right)} {}^{1}\overline{a}\, b + (1 + j) q \end{aligned}$$

çözümü elde edilir. $a_0 - a_2 = 0$ ve $a_1 - a_3 = 0$ olması halinde ise benzer işlemler yapılarak

$$x = \frac{1}{4} \frac{1}{\left(a_0^2 + a_1^2\right)} {}^{1}\overline{a}\, b + (1 - j) q$$

çözümü elde edilir.

Tanım 4.1.1.7. $x, y, a, b \in \mathbb{H}$ olmak üzere

$$xay = b \ \text{ ve } \ ybx = a$$

olacak biçimde $x, y \in \mathbb{H}$ varsa a, b ye yarı-benzerdir denir. Bu durum $a \approx b$ biçiminde gösterilir. $\approx$ bağıntısı $\mathbb{H}$ üzerinde bir denklik bağıntısıdır.

Teorem 4.1.1.8. $x, y, a, b \in \mathbb{H}$ olmak üzere $a \approx b$ olsun. Bu durumda

$$xay = b,\ ybx = a,\ \|a\| \neq 0,\ \|b\| \neq 0$$

denklemlerini sağlayan x ve y mevcuttur ve

$$x = q_1, \quad y = a^{-1} q_1^{-1} b$$

ya da

$$x = b q_2^{-1} a^{-1}, \quad y = q_2$$

dır. Burada $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$ keyfidir ve $\|q_1\|, \|q_2\| \neq 0$ dır.

İspat. $\|a\| \neq 0$ ve $\|b\| \neq 0$ iken $\|x\| \neq 0$ ve $\|y\| \neq 0$ olur. $xay = b$ denkleminin her iki tarafı sağdan $y^{-1} a^{-1}$ ile çarpılırsa $x = b y^{-1} a^{-1}$ eşitliği elde edilir. Bu eşitlik $ybx = a$ denkleminde yerine yazılırsa $yb^2 = ya^2$ ifadesi elde edilir. Bu son eşitlik düzenlenirse

$$\left(a^2 - b^2\right) y = 0$$

bulunur. $a \approx b$ olduğunda $a^2 = b^2$ olacağından son eşitliği sağlayan y keyfidir. $y = q_2 \in \mathbb{H}$ denilirse $x = b q_2^{-1} a^{-1}$ elde edilir. Benzer biçimde $ybx = a$ denkleminin her iki tarafı $x^{-1} b^{-1}$ ile çarpılırsa $y = a x^{-1} b^{-1}$ elde edilir. Bu eşitlik $xay = b$ denkleminde yerine yazılır ve ifade düzenlenirse $x = q_1$ ve $y = a q_1^{-1} b^{-1}$ elde edilir.

Tanım 4.1.1.9. $a, b \in \mathbb{H}$ olmak üzere

$$\left({}^{s}\overline{x}\right)ay=b,\ \left({}^{s}\overline{y}\right)bx=a,\ s=1,2,3$$

olacak biçimde $x,y\in\mathbb{H}$ varsa $a,\ b$ ye $s.$ eşleniğe göre yarı-eşlenik-benzerdir denir. Bu durum $a\overset{c_s}{\approx}b$ biçiminde gösterilir.

$\mathbb{H}$ cümlesi üstünde tanımlanan $\overset{c_s}{\approx}$ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

Teorem 4.1.1.10. $x,y,a,b\in\mathbb{H}$ olmak üzere $a\overset{c_s}{\approx}b$ olsun. Bu durumda $\|a\|\neq 0,\ \|b\|\neq 0,\ s=1,2,3$ için

$$\left({}^{s}\overline{x}\right)ay=b,\ \left({}^{s}\overline{y}\right)bx=a$$

denklemlerini sağlayan x ve y mevcuttur ve

$$x=\left({}^{s}\overline{b}\right)q_2^{-1}\left({}^{s}\overline{a}\right)^{-1},\ \ y=q_2$$

ya da

$$x=q_1,\ \ y=\left({}^{s}\overline{a}\right)\left({}^{s}\overline{q_1}\right)^{-1}\left({}^{s}\overline{b}\right)^{-1}$$

dır. Burada $q_1,q_2\in\mathbb{H}$ keyfidir, $\|q_1\|\neq 0,\ \|q_2\|\neq 0$ dır.

İspat. $\|a\|\neq 0$ ve $\|b\|\neq 0$ olduğunda $\|x\|\neq 0$ ve $\|y\|\neq 0$ olur. $\left({}^{s}\overline{x}\right)ay=b$ denkleminin her iki tarafı sağdan $y^{-1}a^{-1}$ ile çarpılırsa $x=\left({}^{s}\overline{b}\right)\left({}^{s}\overline{y}\right)^{-1}\left({}^{s}\overline{a}\right)^{-1}$ eşitliği elde edilir. Bu eşitlik $\left({}^{s}\overline{y}\right)bx = a$ denkleminde yerine yazılırsa $y\left({}^{s}\overline{b}\right)b = y\left({}^{s}\overline{a}\right)a$ ifadesi elde edilir. Bu son eşitlik düzenlenirse

$$\left(\left({}^{s}\overline{a}\right)a - \left({}^{s}\overline{b}\right)b\right)y = 0$$

bulunur. $a \overset{c_s}{\approx} b$ olduğunda $\left({}^{s}\overline{a}\right)a = \left({}^{s}\overline{b}\right)b$ olacağından son eşitliği sağlayan y keyfidir. $y = q_2 \in \mathbb{H}$ denilirse $x = \left({}^{s}\overline{b}\right)q_2^{-1}\left({}^{s}\overline{a}\right)^{-1}$ elde edilir. Benzer biçimde $\left({}^{s}\overline{y}\right)bx = a$ denkleminin her iki tarafı $x^{-1}b^{-1}$ ile çarpılırsa $y = \left({}^{s}\overline{a}\right)\left({}^{s}\overline{q_1}\right)^{-1}\left({}^{s}\overline{b}\right)^{-1}$ elde edilir. Bu eşitlik $\left({}^{s}\overline{x}\right)ay = b$ denkleminde yerine yazılır ve ifade düzenlenirse $x = q_1$ ve $y = \left({}^{s}\overline{a}\right)\left({}^{s}\overline{q_1}\right)^{-1}\left({}^{s}\overline{b}\right)^{-1}$ elde edilir.

4.2. Komütatif Kuaterniyon Değerli Matrisler

4.2.1. Komütatif kuaterniyon değerli matrislerin temel özellikleri

Elemanları komütatif kuaterniyon olan $m \times n$ tipindeki matrislerin cümlesi $\mathbb{H}^{m\times n}$ ile gösterilir. Bu cümlede $A = \left(a_{ij}\right)$, $B = \left(b_{ij}\right) \in \mathbb{H}^{m\times n}$ ve $C = \left(c_{jk}\right) \in \mathbb{H}^{n\times l}$ için toplama, skalarla çarpma ve çarpma işlemleri sırasıyla

$$A + B = \left(a_{ij}\right) + \left(b_{ij}\right) = \left(a_{ij} + b_{ij}\right) \in \mathbb{H}^{m\times n},$$

$$\lambda A = \lambda\left(a_{ij}\right) = \left(\lambda a_{ij}\right) \in \mathbb{H}^{m\times n}$$

ve

$$AC = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_{jk}\right) \in \mathbb{H}^{m\times l}$$

eşitlikleri ile tanımlanır.

$A=\left(a_{ij}\right)\in\mathbb{H}^{m\times n}$ matrisi için üç tür eşlenik mevcuttur. Bunlar

$$^{1}\overline{A}=\left({}^{1}\overline{a_{ij}}\right)\in\mathbb{H}^{m\times n},\ {}^{2}\overline{A}=\left({}^{2}\overline{a_{ij}}\right)\in\mathbb{H}^{m\times n}\ \text{ve}\ {}^{3}\overline{A}=\left({}^{3}\overline{a_{ij}}\right)\in\mathbb{H}^{m\times n}$$

eşitlikleri ile tanımlanır.

A matrisinin transpozu $A^{T}\in\mathbb{H}^{m\times n}$ biçiminde gösterilir. $A^{*_s}=\left({}^{s}\overline{A}\right)^{T}\in\mathbb{H}^{m\times n}$ matrisine ise A matrisinin $s.$ $\left(s=1,2,3\right)$ eşleniğe göre eşlenik transpozu denir.

Teorem 4.2.1.1. A ve B boyutları uygun komütatif matrisler olmak üzere aşağıdaki eşitlikler doğrudur:

1. $\left({}^{s}\overline{A}\right)^{T}={}^{s}\overline{\left(A^{T}\right)}$,

2. $\left(AB\right)^{*_s}=B^{*_s}A^{*_s}$,

3. $\left(AB\right)^{T}=B^{T}A^{T}$,

4. ${}^{s}\overline{\left(AB\right)}=\left({}^{s}\overline{A}\right)\left({}^{s}\overline{B}\right)$,

5. A^{-1} ve B^{-1} mevcut ise $\left(AB\right)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$,

6. A^{-1} mevcut ise $\left(A^{\dagger_s}\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^{\dagger_s}$,

7. $\left({}^{s}\overline{A}\right)^{-1}={}^{s}\overline{\left(A^{-1}\right)}$.

İspat. 1, 3, 4, 5, 6 ve 7 önermeleri kolaylıkla gösterilebilir. Burada 2. önermenin doğru olduğu gösterilecektir.

.

2. $A = A_1 + jA_2$ ve $B = B_1 + jB_2$ olsun. Burada A_1, A_2, B_1 ve B_2 kompleks matrislerdir. Bu durumda

$$(AB)^{*_1} = \left[(A_1 + jA_2)(B_1 + jB_2)\right]^{*_1}$$

$$= \left[\overline{(A_1B_1)} + \overline{(A_2B_2)} + j\left[\overline{(A_1B_2)} + \overline{(A_2B_1)}\right]\right]^T$$

$$= \left[\overline{A_1}\,\overline{B_1} + \overline{A_2}\,\overline{B_2} + j\left(\overline{A_1}\,\overline{B_2} + \overline{A_2}\,\overline{B_1}\right)\right]^T$$

$$= \left(\overline{B_1}\right)^T\left(\overline{A_1}\right)^T + \left(\overline{B_2}\right)^T\left(\overline{A_2}\right)^T + j\left[\left(\overline{B_2}\right)^T\left(\overline{A_1}\right)^T + \left(\overline{B_1}\right)^T\left(\overline{A_2}\right)^T\right]$$

elde edilir. Diğer yandan

$$B^{*_1} = \left(\overline{B_1}\right)^T + j\left(\overline{B_2}\right)^T \quad \text{ve} \quad A^{*_1} = \left(\overline{A_1}\right)^T + j\left(\overline{A_2}\right)^T$$

$$B^{*_1}A^{*_1} = \left(\overline{B_1}\right)^T\left(\overline{A_1}\right)^T + \left(\overline{B_2}\right)^T\left(\overline{A_2}\right)^T + j\left[\left(\overline{B_2}\right)^T\left(\overline{A_1}\right)^T + \left(\overline{B_1}\right)^T\left(\overline{A_2}\right)^T\right].$$

Sonuç olarak $(AB)^{*_1} = B^{*_1}A^{*_1}$. Benzer biçimde $(AB)^{*_2} = B^{*_2}A^{*_2}$ ve $(AB)^{*_3} = B^{*_3}A^{*_3}$ eşitliklerinin de doğru olduğu gösterilebilir.

Teorem 4.2.1.2. $A, B \in \mathbb{H}^{n\times n}$ için eğer $AB = I_n$ ise $BA = I_n$ dir.

İspat. $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ için $AB = I_n$ ise $BA = I_n$ eşitliği doğrudur [25].

$A = A_1 + jA_2$ ve $B = B_1 + jB_2$ olsun. Burada A_1, A_2, B_1 ve B_2, $n \times n$ tipinde kompleks matrislerdir. Bu durumda,

$$AB = \left(A_1B_1 + A_2B_2\right) + j\left(A_1B_2 + A_2B_1\right) = I_n$$

dır. Bu eşitlik

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_2 & B_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \end{pmatrix}$$

biçiminde de gösterebilir. Sonuç olarak

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_2 & A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_2 & B_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}.$$

elde edilir.

$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_2 & A_1 \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_2 & B_1 \end{pmatrix}$ matrisleri $2n \times 2n$ kompleks matrisler olduklarından

$$\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_2 & B_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_2 & A_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$$

yazılabilir. Buradan da

$$B_1A_1 + B_2A_2 = I_n, \quad B_1A_2 + B_2A_1 = 0$$

$$\left(B_1A_1 + B_2A_2\right) + j\left(B_1A_2 + B_2A_1\right) = I_n$$

olduğundan $BA = I_n$ eşitliği elde edilir.

Tanım 4.2.1.3. $A = A_1 + jA_2 \in \mathbb{H}^{n\times n}$ olmak üzere

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_2 & A_1 \end{pmatrix} \tag{4.12}$$

matrisine A matrisinin adjoint matrisi denir ve $\eta(A)$ ile gösterilir.

Teorem 4.2.1.4. $A, B \in \mathbb{H}^{n\times n}$ olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlikler doğrudur:

1. $\eta(I_n) = I_{2n}$,

2. $\eta(A+B) = \eta(A) + \eta(B)$,

3. $\eta(AB) = \eta(A)\eta(B)$,

4. A^{-1} mevcut is $\eta(A^{-1}) = (\eta(A))^{-1}$,

5. $\eta(A^{*_1}) = (\eta(A))^{*}$, fakat genelde $\eta(A^{*_2}) \neq (\eta(A))^{*}$, $\eta(A^{*_3}) \neq (\eta(A))^{*}$, burada $(\eta(A))^{*}$ matrisi $\eta(A)$ kompleks matrisinin eşlenik transpozudur,

6. $\det(\eta(AB)) = \det(\eta(A))\det(\eta(B))$ ve $\det(\eta(A^{-1})) = (\det \eta(A))^{-1}$.

İspat. 1, 2 ve 4' deki eşitlikler kolaylıkla gösterilebilir. Burada 3, 5 ve 6 şıklarındaki eşitliklerin doğru olduğu gösterilecektir.

3. $A, B \in \mathbb{H}^{n\times n}$ olsun. Bu durumda A ve B nin adjoint matrisleri

$$\eta(A) = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_2 & A_1 \end{pmatrix}, \quad \eta(B) = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_2 & B_1 \end{pmatrix}$$

biçimindedir.

$$AB = \left(A_1B_1 + A_2B_2\right) + j\left(A_1B_2 + A_2B_2\right)$$

olduğundan

$$\eta\left(AB\right) = \begin{pmatrix} A_1B_1 + A_2B_2 & A_1B_2 + A_2B_2 \\ A_1B_2 + A_2B_2 & A_1B_1 + A_2B_2 \end{pmatrix}$$

dir. Diğer yandan

$$\eta\left(A\right)\eta\left(B\right) = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_2 & A_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_2 & B_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1B_1 + A_2B_2 & A_1B_2 + A_2B_2 \\ A_1B_2 + A_2B_2 & A_1B_1 + A_2B_2 \end{pmatrix}.$$

eşitliği mevcuttur. Sonuç olarak $\eta\left(AB\right) = \eta\left(A\right)\eta\left(B\right)$ eşitliği elde edilir.

5. $A = A_1 + jA_2 \in M_n\left(H\right)$ olsun. $A^{*_1} = \left(\overline{A_1}\right)^T + j\left(\overline{A_2}\right)^T$ olduğundan A^{*_1} nın adjoint matrisi

$$\eta\left(A^{*_1}\right) = \begin{pmatrix} \left(\overline{A_1}\right)^T & \left(\overline{A_2}\right)^T \\ \left(\overline{A_2}\right)^T & \left(\overline{A_2}\right)^T \end{pmatrix}$$

biçimindedir. Diğer taraftan

$$\eta\left(A\right) = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_2 & A_1 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad \left(\eta\left(A\right)\right)^* = \begin{pmatrix} \left(\overline{A_1}\right)^T & \left(\overline{A_2}\right)^T \\ \left(\overline{A_2}\right)^T & \left(\overline{A_2}\right)^T \end{pmatrix}$$

dır. Sonuç olarak $\eta\left(A^{*_1}\right) = \left(\eta\left(A\right)\right)^*$ eşitliği elde edilir.

Dahası

$$\eta\left(A^{*_2}\right)=\begin{pmatrix} A_1^T & -A_2^T \\ -A_2^T & A_1^T \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} \left(\overline{A_1}\right)^T & \left(\overline{A_2}\right)^T \\ \left(\overline{A_2}\right)^T & \left(\overline{A_2}\right)^T \end{pmatrix} = \left(\eta\left(A\right)\right)^*,$$

$$\eta\left(A^{*_3}\right)=\begin{pmatrix} \left(\overline{A_1}\right)^T & -\left(\overline{A_2}\right)^T \\ -\left(\overline{A_2}\right)^T & \left(\overline{A_1}\right)^T \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} \left(\overline{A_1}\right)^T & \left(\overline{A_2}\right)^T \\ \left(\overline{A_2}\right)^T & \left(\overline{A_2}\right)^T \end{pmatrix} = \left(\eta\left(A\right)\right)^*$$

dır.

6. $\eta\left(AB\right)=\eta\left(A\right)\eta\left(B\right)$ eşitliğinden

$$\begin{aligned}\det\left(\eta\left(AB\right)\right) &= \det\left(\eta\left(A\right)\eta\left(B\right)\right) \\ &= \det\left(\eta\left(A\right)\right)\det\left(\eta\left(B\right)\right)\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Burada $B=A^{-1}$ alınırsa $\det\left(\eta\left(A^{-1}\right)\right)=\left(\det\eta\left(A\right)\right)^{-1}$ eşitliği elde edilir.

Tanım 4.2.1.5. $A\in\mathbb{H}^{n\times n}$, $x\in\mathbb{H}^{n\times 1}$ ve $\lambda\in\mathbb{H}$ olmak üzere $Ax=\lambda x$ eşitliğini sağlayan sıfırdan farklı bir x vektörü varsa λ'ya A matrisinin özdeğeri denir. x vektörüne ise A matrisinin λ özdeğerine karşılık gelen özvektörü denir. A matrisinin özdeğerlerinin cümlesi

$$\xi\left(A\right)=\left\{\lambda\in\mathbb{H} : Ax=\lambda x\ ,\ \exists x\neq 0\right\} \tag{4.13}$$

biçiminde gösterilir.

Teorem 4.2.1.6. $A\in\mathbb{H}^{n\times n}$ matrisinin $2n$ tane kompleks özdeğeri vardır.

İspat. $A = A_1 + jA_2 \in \mathbb{H}^{n\times n}$ ve A matrisinin kompleks bir özdeğeri $\lambda \in \mathbb{C}$ olsun. Bu durumda sıfır vektöründen farklı $x = x_1 + jx_2 \in \mathbb{H}^{n\times 1}$ vektörü vardır öyle ki $Ax = \lambda x$ eşitliği doğrudur. Bu eşitlikten

$$(A_1 + jA_2)(x_1 + jx_2) = \lambda x_1 + j\lambda x_2$$

$$A_1x_1 + A_2x_2 = \lambda x_1 \quad \text{ve} \quad A_1x_2 + A_2x_1 = \lambda x_2$$

elde edilir. Bu son eşitlik

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_2 & A_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

biçiminde de yazılabilir. $\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_2 & A_1 \end{pmatrix}$ matrisi $2n \times 2n$ kompleks matris olduğundan $2n$ tane kompleks özdeğeri vardır. Sonuç olarak $A \in \mathbb{H}^{n\times n}$ matrisinin $2n$ tane kompleks özdeğeri vardır.

Teorem 4.2.1.7. $A \in \mathbb{H}^{n\times n}$ olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir:

1. A^{-1} matrisi mevcuttur,

2. $Ax = 0$ denklemin bir tek çözümü vardır,

3. $\det(\eta(A)) \neq 0$ dır veya $\eta(A)^{-1}$ mevcuttur,

4. A matrisi sıfır özdeğerine sahip değildir.

İspat. $1. \Rightarrow 2.$ açıktır.

$2. \Rightarrow 3.$ $A = A_1 + jA_2$, $x = x_1 + jx_2$ olsun. Bu durumda

$$Ax = \left(A_1x_1 + A_2x_2\right) + j\left(A_1x_2 + A_2x_1\right)$$

dır. $Ax = 0$ eşitliğinden

$$\left(A_1x_1 + A_2x_2\right) = 0 \quad \text{ve} \quad \left(A_1x_2 + A_2x_1\right) = 0$$

eşitlikleri, dolayısıyla

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_2 & A_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

elde edilir. Sonuç olarak $Ax = 0$ denkleminin tek çözümü varsa, $\eta\left(A\right)\left(x_1 \quad x_2\right)^T = 0$ denkleminin de tek çözümü vardır. Bu durumda $\eta\left(A\right)$ kompleks matris olduğundan, $\eta\left(A\right)^{-1}$ mevcuttur.

$3. \Rightarrow 4.$ $\det\left(\eta\left(A\right)\right) \neq 0$ olsun. Bu durumda $\eta_p\left(A\right)x = 0$ denkleminin bir tek çözümü mevcuttur.

$$\eta_p\left(A\right)x = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} A_1 & pA_2 \\ A_2 & A_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eşitliği doğru olduğunda $\left(A_1 + iA_2\right)\left(x_1 + ix_2\right) = 0$ ve $Ax = 0$ eşitlikleri de doğru olacağından $Ax = 0$ denkleminin de bir tek çözümü mevcuttur. Kabul edelim ki A sıfır özdeğerine sahip olsun. Bu durumda $\lambda = 0$ için $Ax = \lambda x = 0$ eşitliğini sağlayan sıfırdan farklı $x \in \mathbb{C}_p^{n\times 1}$ vektörü mevcuttur. $Ax = 0$ denkleminin bir tek çözümü vardır. Sonuç olarak kabulümüz yanlıştır. A matrisinin özdeğerleri sıfırdan farklıdır.

$3. \Rightarrow 1.$ $\eta\left(A\right)^{-1}$ mevcut olsun. Bu durumda

$$\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_2 & B_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_2 & A_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

olacak biçimde $\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_2 & B_1 \end{pmatrix}$ matrisi mevcuttur. Buradan

$$B_1A_1 + B_2A_2 = I \text{ ve } B_1A_2 + B_2A_1 = 0$$

ve

$$\left(B_1A_1 + B_2A_2\right) + j\left(B_1A_2 + B_2A_1\right) = I_n$$

denklemlerini elde ederiz. Buradan da $BA = I_n$ elde edilir. Teorem 4.2.1.2.'den $A^{-1} = B$ elde edilir. Sonuç olarak A matrisi regülerdir.

4.2.2. Komütatif kuaterniyon matrislerinin eşlenik-benzerliği

$A, B \in \mathbb{H}^{n\times n}$ olmak üzere $P^{-1}AP = B$ olacak biçimde $P \in \mathbb{H}^{n\times n}$ mevcut ise A matrisi B matrisine benzerdir denir ve $A \sim B$ biçiminde gösterilir. Açıktır ki $\sim$ bağıntısı $\mathbb{H}$ üzerinde bir denklik bağıntısıdır.

Tanım 4.2.2.1. $A, B \in \mathbb{H}^{n\times n}$ olmak üzere A matrisi B matrisine s. eşleniğe göre eşlenik-benzerdir ancak ve ancak $\left(\overline{{}^{s}P}\right)AP^{-1} = B$ eşitliğini sağlayan $P \in \mathbb{H}^{n\times n}$ regüler matrisi mevcuttur. A matrisi B matrisine eşlenik-benzer ise bunu $A \overset{c_s}{\sim} B$ biçiminde gösterilir.

$\mathbb{H}$ cümlesi üzerinde tanımlanan $\overset{c_s}{\sim}$ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

Tanım 4.2.2.2. $A \in \mathbb{H}^{n\times n}$, $\lambda \in \mathbb{H}$ olmak üzere $A\left(\overline{{}^{s}x}\right) = x\lambda$, $\left(s = 1,2,3\right)$ eşitliğini sağlayan sıfırdan farklı bir $x \in \mathbb{H}^{n\times n}$ mevcut ise bu durumda λ ya A matrisinin s. eşleniğine göre eşlenik-özdeğeri denir. x vektörüne ise A matrisinin λ eşlenik-özdeğerine karşılık gelen eşlenik-özvektörü denir. A matrisinin eşlenik-özvektörlerinin cümlesi

$$ {}^{s}\overline{\xi} = \left\{ \lambda \in \mathbb{H} : A\left({}^{s}\overline{x} \right) = x\lambda, \ x \neq 0 \right\} \tag{4.14} $$

biçiminde gösterilir.

Teorem 4.2.2.3. $A, B \in \mathbb{H}^{n\times n}$ olmak üzere $A \overset{c_s}{\sim} B$ ise A ve B matrisleri aynı eşlenik-özdeğerlere sahiptir.

İspat. $A \overset{c_s}{\sim} B$ olsun. Bu durumda $B = \left({}^{s}\overline{P} \right) A P^{-1}$ olacak biçimde $P \in \mathbb{H}^{n\times n}$ matrisi mevcuttur. $\lambda \in \mathbb{H}$, A matrisinin eşlenik-özdeğeri olsun. Bu durumda $A\left({}^{s}\overline{x} \right) = x\lambda, \ x \neq 0$ dır. $y = P\left({}^{s}\overline{x} \right)$ olmak üzere

$$ By = \left({}^{s}\overline{P} \right) A P^{-1} y = \left({}^{s}\overline{P} \right) A P P^{-1} \left({}^{s}\overline{x} \right) = \left({}^{s}\overline{P} \right) A \left({}^{s}\overline{x} \right) = \left({}^{s}\overline{P} \right) x\lambda = \left({}^{s}\overline{y} \right) \lambda $$

dır. Sonuç olarak A ve B matrisleri aynı eşlenik-özdeğerlere sahiptir.

Teorem 4.2.2.4. $A \in \mathbb{H}^{n\times n}$ ve $\lambda, \beta \in \mathbb{H}$ olmak üzere λ, A matrisinin eşlenik-özdeğeri ise $\left({}^{s}\overline{\beta} \right) \lambda \beta^{-1}$ da A matrisinin eşlenik-özdeğeridir.

İspat. $A\left({}^{s}\overline{x} \right) = x\lambda$ ise $A\left({}^{s}\overline{x} \right) \beta^{-1} = x \left({}^{s}\overline{\beta} \right)^{-1} \left({}^{s}\overline{\beta} \right) \lambda \beta^{-1}$ dir.

Tanım 4.2.2.5. $A \in \mathbb{H}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{H}^{n\times n}$ olmak üzere

$$ YAX = B, \quad XBY = A $$

olacak biçimde $X,Y\in\mathbb{H}^{n\times n}$ matrisleri varsa A matrisi B matrisine yarı-benzerdir denir.

Tanım 4.2.2.6. $A\in\mathbb{H}^{n\times n}$, $B\in\mathbb{H}^{n\times n}$ olmak üzere

$$\left({}^{s}\overline{Y}\right)AX=B,\quad \left({}^{s}\overline{X}\right)BY=A$$

olacak biçimde $X,Y\in\mathbb{H}^{n\times n}$ matrisleri varsa A matrisi B matrisine $s.$ eşleniğe göre yarı-eşlenik-benzerdir denir.

Tanım 4.2.2.7. $A\in\mathbb{H}^{n\times n}$ olmak üzere $AXA=A$ eşitliğini sağlayan $X\in\mathbb{H}^{n\times n}$ matrisi varsa X matrisine A matrisinin genelleştirilmiş tersi denir ve A^{-} ile gösterilir.

Tanım 4.2.2.8. $A\in\mathbb{H}^{n\times n}$ ve $B\in\mathbb{H}^{n\times n}$ olmak üzere

$$X^{-}AX=B,\quad XBX^{-}=A,\; XX^{-}X=X$$

olacak biçimde $X,X^{-}\in\mathbb{H}^{n\times n}$ matrisleri varsa A matrisi B matrisine yakın-benzerdir denir.

Tanım 4.2.2.9. $A\in\mathbb{H}^{n\times n}$ ve $B\in\mathbb{H}^{n\times n}$ olmak üzere

$$\left({}^{s}\overline{X}^{-}\right)AX=B,\quad \left({}^{s}\overline{X}\right)BX^{-}=A,\; XX^{-}X=X$$

olacak biçimde $X,X^{-}\in\mathbb{H}^{n\times n}$ matrisleri varsa A matrisi B matrisine $s.$ inci eşleniğe göre yakın-eşlenik-benzerdir denir.

Tanım 4.2.2.10. $A\in\mathbb{H}^{n\times n}$ için aşağıdaki şartları sağlayan $X\in\mathbb{H}^{n\times n}$ matrisi varsa bu durumda X matrisine A matrisinin Drazin tersi denir ve $X=(A)^{d}$ ile gösterilir.

i. $A^{k+1}X = A^k$, **ii.** $XAX = X$, **iii.** $AX = XA,\ \ k \geq 0.$

Burada $A^{k+1}X = A^k$ eşitliğini sağlayan en küçük k doğal sayısına A matrisinin indeksi denir ve $ind(A)$ ile gösterilir.

Teorem 4.2.2.11. $\mathbb{H}^{n\times n}$ cümlesinde $(XY)^d$ ve $(YX)^d$ mevcut ise aşağıdaki önermeler doğrudur:

1. $(XY)^d X = X(YX)^d$,

2. $(XY)^d$ idempotent $\Leftrightarrow$ $Y(XY)^d = \left[(XY)^d X\right]^-$.

İspat.

1. Cline formülünün [38] her iki tarafı X matrisi ile çarpılır ise

$$(XY)^d X = X\left[(YX)^d\right]YX = X(YX)^d$$

eşitliği elde edilir.

2. $(XY)^d$ idempotent olsun. Bu durumda $\left[(XY)^d\right]^2 = (XY)^d$ olur.

$$(XY)^d X\left(Y(XY)^d\right)(XY)^d X = \left((XY)^d\right)^2 X = (XY)^d X$$

olduğundan $Y(XY)^d = \left[(XY)^d X\right]^-$ elde edilir.

Tersine $Y(XY)^d = \left[(XY)^d X\right]^-$ olsun. Bu durumda

$$\left(XY\right)^{d} X\left(Y\left(XY\right)^{d}\right)\left(XY\right)^{d} X=\left(XY\right)^{d} X=\left(\left(XY\right)^{d}\right)^{2} X$$

olduğundan $(XY)^{d}$ idempotent olur.

Teorem 4.2.2.12. $A,B,X,Y\in\mathbb{H}^{n\times n}$ için $\left(XY\right)^{d}$, $\left(YX\right)^{d}$ mevcut ve A matrisi B matrisine yarı-benzer olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlikler doğrudur:

1. $A^{2k}X=X\,B^{2k},\quad B^{2k}X=X\,A^{2k},\quad k=1,2,3,...,$

2. $\left(XY\right)^{k} A\left(XY\right)^{k}=A,\quad k=1,2,3,...,$

3. $\left(XY\right)^{d} A\left(XY\right)^{d}=A,$

4. $\left(XY\right)\left(XY\right)^{d} A=A=A\left(XY\right)\left(XY\right)^{d}.$

İspat.

1. $YAX=B$ ve $XBY=A$ olduğundan

$$A=XBY=\left(XY\right)A\left(XY\right)\ \text{ ve }\ B=YAX=\left(YX\right)B\left(YX\right)$$

yazılabilir. Sonuç olarak

$$A^{2}X=\left(XBY\right)\left(XBY\right)X=XB^{2}\quad\text{ve}\quad B^{2}Y=\left(YAX\right)\left(YAX\right)Y=YA^{2}$$

elde edilir. Aynı işlemler sürdürülürse

$$A^{2k}X=XB^{2k},\ B^{2k}X=X\,A^{2k},\ k=1,2,3,...$$

eşitlikleri elde edilir.

2.

$$\begin{aligned} A &= (XY)A(XY) = (XY)XBY(XY) = (XY)X(YAX)Y(XY) \\ &= (XY)X(Y(XBY)X)Y(XY) = (XY)X(Y(X(YAX)Y)X)Y(XY) \\ &\ldots \\ &= (XY)^k A(XY)^k, \quad k = 1,2,3,\ldots \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

3. $ind(XY) = t$ olsun. Bu durumda

$$(XY)^d A(XY)^d = (XY)^d (XY)^{t+1} A(XY)^{t+1} (XY)^d = (XY)^t A(XY)^t = A$$

elde edilir.

4.

$$\begin{aligned} (XY)(XY)^d A &= (XY)(XY)^d (XY)^d A(XY)^d \\ &= (XY)^d (XY)(XY)^d A(XY)^d \\ &= (XY)^d A(XY)^d = A \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} A(XY)(XY)^d &= (XY)^d A(XY)^d (XY)(XY)^d \\ &= (XY)^d A(XY)^d = A \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir.

Teorem 4.2.2.13. $A, B, X, Y \in H^{n\times n}$ için $\left(\left({}^{s}\overline{X}\right)\left({}^{s}\overline{Y}\right)\right)^{d}$, $\left(\left({}^{s}\overline{Y}\right)\left({}^{s}\overline{X}\right)\right)^{d}$ mevcut ve A matrisi B matrisine yarı-eşlenik-benzer olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlikler doğrudur:

1. $\left(\left({}^{s}\overline{X}\right)\left({}^{s}\overline{Y}\right)\right)^{k} A\left(XY\right)^{k} = A,\; \left(\left({}^{s}\overline{Y}\right)\left({}^{s}\overline{X}\right)\right)^{k} B\left(YX\right)^{k} = B,\; k = 1,2,3,...,$

2. $\left(A\left({}^{s}\overline{A}\right)\right)^{k}\left({}^{s}\overline{X}\right) = \left({}^{s}\overline{X}\right)\left(B\left({}^{s}\overline{B}\right)\right)^{k},\; \left({}^{s}\overline{Y}\right)\left(A\left({}^{s}\overline{A}\right)\right)^{k} = \left(B\left({}^{s}\overline{B}\right)\right)^{k}\left({}^{s}\overline{Y}\right),$

3.
$$A\left(XY\right)\left(XY\right)^{d} = A = \left(\left({}^{s}\overline{X}\right)\left({}^{s}\overline{Y}\right)\right)\left(\left({}^{s}\overline{X}\right)\left({}^{s}\overline{Y}\right)\right)^{d} A,$$

$$B\left(YX\right)\left(YX\right)^{d} = B = \left(\left({}^{s}\overline{Y}\right)\left({}^{s}\overline{X}\right)\right)\left(\left({}^{s}\overline{Y}\right)\left({}^{s}\overline{X}\right)\right)^{d} B.$$

İspat.

1. $A = \left({}^{s}\overline{X}\right)BY = \left(\left({}^{s}\overline{X}\right)\left({}^{s}\overline{Y}\right)\right)A\left(XY\right) = \left(\left({}^{s}\overline{X}\right)\left({}^{s}\overline{Y}\right)\right)\left({}^{s}\overline{X}\right)BY\left(XY\right)$

$$= \left(\left({}^{s}\overline{X}\right)\left({}^{s}\overline{Y}\right)\right)\left({}^{s}\overline{X}\right)\left(\left({}^{s}\overline{Y}\right)AX\right)Y\left(XY\right)$$

$$= \left(\left({}^{s}\overline{X}\right)\left({}^{s}\overline{Y}\right)\right)\left({}^{s}\overline{X}\right)\left(\left({}^{s}\overline{Y}\right)\left(\left({}^{s}\overline{X}\right)BY\right)X\right)Y\left(XY\right)$$

$$\ldots$$

$$= \left(\left({}^{s}\overline{X}\right)\left({}^{s}\overline{Y}\right)\right)^{k} A\left(\left({}^{s}\overline{X}\right)\left({}^{s}\overline{Y}\right)\right)^{k},\; k = 1,2,3,...$$

eşitliği elde edilir. Benzer biçimde $k = 1,2,3,...$ için $\left(\left({}^{s}\overline{Y}\right)\left({}^{s}\overline{X}\right)\right)^{k} B\left(YX\right)^{k} = B$ eşitliğinin sağlandığı görülür.

2. $B = \left({}^{s}\overline{Y}\right)\left({}^{s}\overline{X}\right)BYX$ eşitliği var olduğundan

$$A\left({}^{s}\overline{A}\right)\left({}^{s}\overline{X}\right)=\left({}^{s}\overline{X}\right)BYX\left({}^{s}\overline{B}\right)\left({}^{s}\overline{Y}\right)\left({}^{s}\overline{X}\right)=\left({}^{s}\overline{X}\right)B\left(YX\left({}^{s}\overline{B}\right)\left({}^{s}\overline{Y}\right)\left({}^{s}\overline{X}\right)\right)$$

$$=\left({}^{s}\overline{X}\right)B\left({}^{s}\overline{B}\right)$$

bulunur. Aynı işlemler sürdürülerek $\left(A\left({}^{s}\overline{A}\right)\right)^{k}\left({}^{s}\overline{X}\right)=\left({}^{s}\overline{X}\right)\left(B\left({}^{s}\overline{B}\right)\right)^{k}$ eşitliği elde edilir. Benzer yolla $\left({}^{s}\overline{Y}\right)\left(A\left({}^{s}\overline{A}\right)\right)^{k}=\left(B\left({}^{s}\overline{B}\right)\right)^{k}\left({}^{s}\overline{Y}\right)$ olduğu görülür.

3. $ind\left(XY\right)=t$ olsun. Bu durumda $i\left(\left({}^{s}\overline{X}\right)\left({}^{s}\overline{Y}\right)\right)=t$ sağlanır.

$$\left(\left({}^{s}\overline{X}\right)\left({}^{s}\overline{Y}\right)\right)^{d}A\left(XY\right)^{d}=\left(\left({}^{s}\overline{X}\right)\left({}^{s}\overline{Y}\right)\right)^{d}\left(\left({}^{s}\overline{X}\right)\left({}^{s}\overline{Y}\right)\right)^{t+1}A\left(XY\right)^{t+1}\left(XY\right)^{d}$$

$$=\left(\left({}^{s}\overline{X}\right)\left({}^{s}\overline{Y}\right)\right)^{t}A\left(XY\right)^{t}=A$$

ve

$$\left(\left({}^{s}\overline{X}\right)\left({}^{s}\overline{Y}\right)\right)\left(\left({}^{s}\overline{X}\right)\left({}^{s}\overline{Y}\right)\right)^{d}A=\left(\left({}^{s}\overline{X}\right)\left({}^{s}\overline{Y}\right)\right)^{d}\left(\left({}^{s}\overline{X}\right)\left({}^{s}\overline{Y}\right)\right)A$$

$$=\left(\left({}^{s}\overline{X}\right)\left({}^{s}\overline{Y}\right)\right)^{d}\left(\left({}^{s}\overline{X}\right)\left({}^{s}\overline{Y}\right)\right)\left(\left({}^{s}\overline{X}\right)\left({}^{s}\overline{Y}\right)\right)^{d}A\left(XY\right)^{d}$$

$$=\left(\left({}^{s}\overline{X}\right)\left({}^{s}\overline{Y}\right)\right)^{d}A\left(XY\right)^{d}=A$$

elde edilir. Ayrıca

$$A\left(XY\right)\left(XY\right)^{d}=\left(\left({}^{s}\overline{X}\right)\left({}^{s}\overline{Y}\right)\right)^{d}A\left(XY\right)^{d}\left(XY\right)\left(XY\right)^{d}=\left(\left({}^{s}\overline{X}\right)\left({}^{s}\overline{Y}\right)\right)^{d}A\left(XY\right)^{d}=A$$

eşitliği elde edilir. Benzer yolla

$$B(YX)(YX)^d = B = \left(\left({}^s\overline{Y}\right)\left({}^s\overline{X}\right)\right)\left(\left({}^s\overline{Y}\right)\left({}^s\overline{X}\right)\right)^d B$$

eşitliği de elde edilir.

Teorem 4.2.2.14. $A, B, X, Y \in \mathbb{H}^{n\times n}$ olsun. A matrisi B matrisine yarı-eşlenik-benzer ise $A\left({}^s\overline{A}\right)$ matrisi $B\left({}^s\overline{B}\right)$ matrisine yakın-benzerdir.

İspat.

$$\left({}^s\overline{B}\right) = \left({}^s\overline{B}\right)\left(\left({}^s\overline{Y}\right)\left({}^s\overline{X}\right)\right)\left(\left({}^s\overline{Y}\right)\left({}^s\overline{X}\right)\right)^d,$$

$$\left({}^s\overline{Y}\right)\left(A\left({}^s\overline{A}\right)\right)\left(\left({}^s\overline{X}\right)\left({}^s\overline{Y}\right)\right)^d\left({}^s\overline{X}\right) = \left(B\left({}^s\overline{B}\right)\right)\left({}^s\overline{Y}\right)\left(\left({}^s\overline{X}\right)\left({}^s\overline{Y}\right)\right)^d\left({}^s\overline{X}\right),$$

$$\left(\left({}^s\overline{X}\right)\left({}^s\overline{Y}\right)\right)^d = \left({}^s\overline{X}\right)\left[\left(\left({}^s\overline{Y}\right)\left({}^s\overline{X}\right)\right)^d\right]^2\left({}^s\overline{Y}\right)$$

eşitliklerini kullanırsak

$$\left(\left({}^s\overline{X}\right)\left({}^s\overline{Y}\right)\right)^d\left({}^s\overline{X}\right) = \left({}^s\overline{X}\right)\left[\left(\left({}^s\overline{Y}\right)\left({}^s\overline{X}\right)\right)^d\right]^2\left({}^s\overline{Y}\right)\left({}^s\overline{X}\right) = \left({}^s\overline{X}\right)\left(\left({}^s\overline{Y}\right)\left({}^s\overline{X}\right)\right)^d,$$

$$\begin{aligned}\left({}^s\overline{Y}\right)\left(A\left({}^s\overline{A}\right)\right)\left(\left({}^s\overline{X}\right)\left({}^s\overline{Y}\right)\right)^d\left({}^s\overline{X}\right) &= \left(B\left({}^s\overline{B}\right)\right)\left({}^s\overline{Y}\right)\left(\left({}^s\overline{X}\right)\left({}^s\overline{Y}\right)\right)^d\left({}^s\overline{X}\right)\\ &= B\left({}^s\overline{B}\right)\left({}^s\overline{Y}\right)\left({}^s\overline{X}\right)\left(\left({}^s\overline{Y}\right)\left({}^s\overline{X}\right)\right)^d = B\left({}^s\overline{B}\right)\end{aligned}$$

ve

$$\left[\left(\left({}^s\overline{X}\right)\left({}^s\overline{Y}\right)\right)^d\left({}^s\overline{X}\right)\right]\left({}^s\overline{Y}\right)\left[\left(\left({}^s\overline{X}\right)\left({}^s\overline{Y}\right)\right)^d\left({}^s\overline{X}\right)\right] = \left(\left({}^s\overline{X}\right)\left({}^s\overline{Y}\right)\right)^d\left({}^s\overline{X}\right)$$

eşitlikleri elde edilir. Sonuç olarak $A\left({}^{s}\overline{A}\right)$ matrisi $B\left({}^{s}\overline{B}\right)$ matrisine yakın-benzerdir.

Teorem 4.2.2.15. $A, B, X, Y \in \mathbb{H}^{n\times n}$ için A matrisi B matrisine yarı-benzer ise aşağıdaki önermeler doğrudur:

1. A^{2k+1} matrisi B^{2k+1} matrisine yarı-benzerdir,

2. A^{2k} matrisi B^{2k} matrisine yakın-benzerdir,

3. AA^{d} matrisi BB^{d} matrisine yakın-benzerdir,

4. A^{d} matrisi B^{d} matrisine yarı-benzerdir,

5. $A^{2}A^{d}$ matrisi $B^{2}B^{d}$ matrisine yarı-benzerdir.

İspat.

1. $YAA^{2k}X = YAXB^{2k} = B^{2k+1}$ ve benzer biçimde $XBB^{2k}Y = XBYA^{2k} = A^{2k+1}$ elde edilir. Sonuç olarak A^{2k+1} matrisi B^{2k+1} matrisine yarı-benzerdir.

2. $YA^{2k}\left(XY\right)^{d}X = B^{2k}Y\left(XY\right)^{d}X = B^{2k}YX\left(YX\right)^{d} = B^{2k}$. Ayrıca

$$\left(XY\right)^{d}XB^{2k}Y = \left(XY\right)^{d}XYA^{2k} = A^{2k} \text{ ve } Y = \left[\left(XY\right)^{d}X\right]^{-}$$

olduğundan A^{2k} matrisi B^{2k} matrisine yakın-benzerdir.

3. $A^{2}X = XB^{2}$, $\left(A^{d}\right)^{2}X = X\left(B^{d}\right)^{2}$, $A^{2}\left(A^{d}\right)^{2} = A^{2}A^{d}A^{d} = AA^{d}$ ve $B^{2}\left(B^{d}\right)^{2} = BB^{d}$ eşitlikleri mevcuttur. Bu durumda

$$AA^{d}X = A^{2}\left(A^{d}\right)^{2}X = A^{2}X\left(B^{d}\right)^{2} = XB^{2}\left(B^{d}\right)^{2} = XBB^{d}$$

olur. Bu durumda

$$\left(YX\right)^{d}Y\left(AA^{d}\right)X=\left(YX\right)^{d}\left(YX\right)BB^{d}=BB^{d}$$

$$X\left(BB^{d}\right)\left(YX\right)^{d}Y=AA^{d}X\left(YX\right)^{d}Y=AA^{d}\left(XY\right)^{d}\left(XY\right)=AA^{d}$$

ve

$$X^{-}=\left(YX\right)^{d}Y$$

olduğundan AA^d matrisi BB^d matrisine yakın-benzerdir.

4.
$$\begin{aligned}\left(YX\right)^{d}YA^{d}X\left(YX\right)^{d} &= Y\left(XY\right)^{d}A^{d}X\left(YX\right)^{d}\\ &= Y(XY)^{d}A(A^{d})^{2}X(YX)^{d}\\ &= (YAX)Y(A^{d})^{2}X(YX)^{d}\\ &= B(B^{d})^{2}YX(YX)^{d}\\ &= B(B^{d})^{2}\\ &= B^{d}\end{aligned}$$

bulunur. Benzer biçimde $X\left(YX\right)^{d}B^{d}\left(YX\right)^{d}Y=A^{d}$ elde edilir. Sonuç olarak A^d matrisi B^d matrisine yarı-benzerdir.

5.

$$YA^{2}A^{d}X=\left(YA\right)\left(AA^{d}X\right)=YAXBB^{d}=B^{2}B^{d}$$

ve

$$XB^2B^dY = XBB^dBY = AA^dXBY = A^2A^d$$

eşitlikleri elde edilir. Sonuç olarak A^2A^d matrisi B^2B^d matrisine yarı-benzerdir.

4.2.2.16. Sonuçlar

Benzerlik ve eşlenik-benzerlik bağıntıları $f(A) = \left(X^{-1}\right)^{\wedge} AX$ dönüşümünün özel halleridir. Buradaki $(\ )^{\wedge}$, $\mathbb{H}^{n\times n}$ üzerinde tanımlı üssel dönüşümdür ve bu dönüşüm $\left(A^{\wedge}\right)^{\wedge} = A,\quad (A+B)^{\wedge} = A^{\wedge} + B^{\wedge},\ (AB)^{\wedge} = A^{\wedge}B^{\wedge}$ eşitliklerini sağlamaktadır. Eğer $A^{\wedge} = A$ alınırsa $\mathbb{H}^{n\times n}$ üzerindeki benzerlik bağıntısı elde edilir. $A^{\wedge} = {}^{s}\overline{A},\ s = 1,2,3$ alınırsa $\mathbb{H}^{n\times n}$ üzerindeki eşlenik-benzerlik bağıntısı bulunur. Yarı-benzerlik ve yarı-eşlenik-benzerlik bağıntıları da benzerlik ve eşlenik-benzerlik bağıntıları ile yakından ilgilidir. Öyle ki A matrisi B matrisine yarı-benzer ise

$$B = f(A) = Y^{\wedge}AX,\ A = f^{-1}(B) = X^{\wedge}AY$$

eşitliğini sağlayan X ve Y mevcuttur ve burada $A^{\wedge} = A$ alınmıştır. A matrisi B matrisine yarı-eşlenik-benzer ise

$$B = f(A) = Y^{\wedge}AX,\ A = f^{-1}(B) = X^{\wedge}AY$$

eşitliğini sağlayan X ve Y mevcuttur ve burada $A^{\wedge} = \left({}^{s}\overline{A}\right)$ alınmıştır. Dahası A matrisi B matrisine benzer ise A matrisi B matrisine yarı-benzerdir. Yani yarı-benzerlik bağıntısı benzerlik bağıntısından daha zayıf bir bağıntıdır. Yakın-benzerlik ise benzerlik bağıntısından daha zayıf yarı-benzerlik bağıntısından daha güçlü bir bağıntıdır. Benzer biçimde yakın-eşlenik-benzerlik bağıntısı eşlenik-benzerlik bağıntısından daha zayıf yarı-eşlenik-benzerlik bağınıtısından daha güçlü bir bağıntıdır.

4.2.3. Komütatif kuaterniyon matrislerin reel gösterimleri

$A = A_0 + A_1 i + A_2 j + A_3 k \in \mathbb{H}^{m\times n}$ olsun. Burada $s = 0,1,2,3$ olmak üzere $A_s \in \mathbb{R}^{mxn}$ dir.

$$\phi_A(X) = A\left({}^1\overline{X}\right),\ \mu_A(X) = A\left({}^2\overline{X}\right) \text{ ve } \eta_A(X) = A\left({}^3\overline{X}\right)$$

biçiminde lineer izomorfizmalar tanımlansın. Bu izomorfizmaların $\{1, i, j, k\}$ tabanına karşılık gelen matrisleri sırasıyla

$$\phi_A = \begin{pmatrix} A_0 & A_1 & A_2 & A_3 \\ A_1 & -A_0 & A_3 & -A_2 \\ A_2 & A_3 & A_0 & A_1 \\ A_3 & -A_2 & A_1 & -A_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4m\times 4n},$$

$$\mu_A = \begin{pmatrix} A_0 & -A_1 & -A_2 & A_3 \\ A_1 & A_0 & -A_3 & -A_2 \\ A_2 & -A_3 & -A_0 & A_1 \\ A_3 & A_2 & -A_1 & -A_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4m\times 4n},$$

$$\eta_A = \begin{pmatrix} A_0 & A_1 & -A_2 & -A_3 \\ A_1 & -A_0 & -A_3 & A_2 \\ A_2 & A_3 & -A_0 & -A_1 \\ A_3 & -A_2 & -A_1 & A_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4m\times 4n}$$

biçimindedir.

Teorem 4.2.3.1. $A \in \mathbb{H}^{m\times n}$ olmak üzere ϕ_A, μ_A ve η_A matrisleri aşağıdaki özellikleri sağlar:

1. $A \in \mathbb{H}^{m\times n}$ olsun.

$$
{}^{1}\overline{P_t} = \begin{pmatrix} I_t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I_t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_t \end{pmatrix}, \quad {}^{2}\overline{P_t} = \begin{pmatrix} I_t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_t \end{pmatrix}, \quad {}^{3}\overline{P_t} = \begin{pmatrix} I_t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I_t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_t \end{pmatrix}
$$

$$
Q_t = \begin{pmatrix} 0 & -I_t & 0 & 0 \\ I_t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_t \\ 0 & 0 & I_t & 0 \end{pmatrix}, \quad R_t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & I_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_t \\ I_t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_t & 0 & 0 \end{pmatrix}, S_t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -I_t \\ 0 & 0 & I_t & 0 \\ 0 & -I_t & 0 & 0 \\ I_t & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.15}
$$

olmak üzere

$$
\left({}^{1}P_m\right)^{-1} \phi_A \left({}^{1}P_n\right) = \phi_{\left({}^{1}\overline{A}\right)}, \; Q_m^{-1}\phi_A Q_n = -\phi_A, \quad R_m^{-1}\phi_A R_n = \phi_A, \quad S_m^{-1}\phi_A S_n = -\phi_A,
$$

$$
\left({}^{2}\overline{P_m}\right)^{-1} \mu_A \left({}^{2}\overline{P_m}\right) = \phi_{\left({}^{2}\overline{A}\right)}, \; Q_m^{-1}\mu_A Q_n = \phi_A, \quad R_m^{-1}\mu_A R_n = -\phi_A, \quad S_m^{-1}\mu_A S_n = -\phi_A
$$

ve

$$
\left({}^{3}\overline{P_m}\right)^{-1} \eta_A \left({}^{3}\overline{P_m}\right) = \eta_{\left({}^{3}\overline{A}\right)}, \; Q_m^{-1}\eta_A Q_n = -\eta_A, \quad R_m^{-1}\eta_A R_n = -\eta_A, \quad S_m^{-1}\eta_A S_n = \eta_A
$$

eşitlikleri mevcuttur.

2. $A, B \in \mathbb{H}^{m\times n}$ ise $\phi_{A+B} = \phi_A + \phi_B$, $\mu_{A+B} = \mu_A + \mu_B$ ve $\eta_{A+B} = \eta_A + \eta_B$ dir,

3. $A \in \mathbb{H}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{H}^{n\times l}$, ise

$$
\phi_{AB} = \phi_A \left({}^{1}\overline{P_n}\right)\phi_B = \phi_A \phi_{\left({}^{1}\overline{B}\right)} \left({}^{1}\overline{P_l}\right), \; \mu_{AB} = \mu_A \left({}^{2}\overline{P_n}\right)\mu_B = \mu_A \mu_{\left({}^{2}\overline{B}\right)} \left({}^{2}\overline{P_l}\right)
$$

ve

$$\eta_{AB}=\eta_A\left({}^3\overline{P_n}\right)\eta_B=\eta_A\eta_{\left({}^3\overline{B}\right)}\left({}^3\overline{P_l}\right)$$

dir,

4. $A\in\mathbb{H}^{m\times m}$ olmak üzere A^{-1} mevcuttur ancak ve ancak $(\phi_A)^{-1}$, $(\mu_A)^{-1}$ ve $(\eta_A)^{-1}$ mevcuttur ve

$$\phi_A^{-1}=\left({}^1P_m\right)\phi_{A^{-1}}\left({}^1P_m\right),\quad \mu_A^{-1}=\left({}^2P_m\right)\mu_{A^{-1}}\left({}^2P_m\right)\ \text{ ve }\ \eta_A^{-1}=\left({}^3P_m\right)\eta_{A^{-1}}\left({}^3P_m\right)$$

dir.

İspat. Teoremin doğruluğu eşitliklerin her iki tarafının hesaplanmasıyla kolayca gösterilir.

4.2.4. Komütatif kuaterniyon matrislerinin bazı lineer denklemleri

Bu bölümde $s=1,2,3$ için

$$X-A\left({}^s\overline{X}\right)B=C$$

Kalman-Yakubovich- s -eşlenik ve

$$A\left({}^s\overline{X}\right)-XB=C$$

Sylvester- s -eşlenik denklemlerinin çözümleri ve bu çözümlerin sonuçları incelenecektir.

i. $X-A\left({}^1\overline{X}\right)B=C$ **denkleminin çözümü üzerine**

Bu başlık altında

$$X - A\left({}^{1}\overline{X}\right)B = C \tag{4.16}$$

denkleminin çözümü komütatif kuaterniyon matrislerinin reel gösterimleri yardımıyla yapılacaktır. Burada $A \in \mathbb{H}^{m\times m}$, $B \in \mathbb{H}^{n\times n}$ ve $C \in \mathbb{H}^{m\times n}$ dır.

Ayrıca (4.16) denkleminin reel temsili

$$Y - \phi_A Y \phi_B = \phi_C \tag{4.17}$$

biçimindedir. (4.16) denklemi

$$\phi_X - \phi_A \phi_X \phi_B = \phi_C \tag{4.18}$$

biçiminde de yazılabilir. Sonuç olarak (4.16) denkleminin bir çözümü X matrisi ise bu durumda (4.17) denkleminin çözümü $Y = \phi_X$ biçimindedir.

Teorem 4.2.4.1. $A \in \mathbb{H}^{m\times m}, B \in \mathbb{H}^{n\times n}$ ve $C \in \mathbb{H}^{m\times n}$ olsun. $Y - \phi_A Y \phi_B = \phi_C$ denkleminin çözümü $Y \in \mathbb{R}^{4m\times 4n}$ ise bu durumda $X - A\left({}^{1}\overline{X}\right)B = C$ denkleminin çözümü

$$X = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} I_m & iI_m & jI_m & kI_m \end{pmatrix}\left(Y - Q_m^{-1}YQ_n + R_m^{-1}YR_n - S_m^{-1}YS_n\right)\begin{pmatrix} I_n \\ iI_n \\ jI_n \\ kI_n \end{pmatrix} \tag{4.19}$$

biçimindedir.

İspat.

$$Y = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} & Y_{14} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} & Y_{24} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} & Y_{34} \\ Y_{41} & Y_{42} & Y_{43} & Y_{44} \end{pmatrix}, Y_{uv} \in \mathbb{R}^{m\times n},\ u,v = 1,2,3,4 \tag{4.20}$$

matrisi (4.17) denkleminin bir çözümü olsun. Bu durumda $Y=\phi_X$ ve

$$Q_m^{-1}\phi_X Q_n=-\phi_X\,,\quad R_m^{-1}\phi_X R_n=\phi_X\,,\quad S_m^{-1}\phi_X S_n=-\phi_X$$

olduğundan

$$\begin{aligned}&-Q_m^{-1}YQ_n-\phi_A\left(-Q_m^{-1}YQ_n\right)\phi_B=\phi_C\\&R_m^{-1}YR_n-\phi_A\left(R_m^{-1}YR_n\right)\phi_B=\phi_C\\&-S_m^{-1}YS_n-\phi_A\left(-S_m^{-1}YS_n\right)\phi_B=\phi_C.\end{aligned}\tag{4.21}$$

dır. Sonuç olarak Y matrisi (4.17) denkleminin bir çözümü ise $-Q_m^{-1}YQ_n$, $R_m^{-1}YR_n$ ve $-S_m^{-1}YS_n$ ifadeleri de (4.17) denkleminin bir çözümüdür. Ayrıca

$$Y'=\frac{1}{4}\left(Y-Q_m^{-1}\phi_A Q_n+R_m^{-1}\phi_A R_n-S_m^{-1}\phi_A S_n\right)\tag{4.22}$$

ifadesi de (4.17) denkleminin bir çözümüdür. En son ifade düzenlenir ise

$$Y'=\begin{pmatrix}Z_0 & Z_1 & Z_2 & Z_3\\ Z_1 & -Z_0 & Z_3 & -Z_2\\ Z_2 & Z_3 & Z_0 & Z_1\\ Z_3 & -Z_2 & Z_1 & -Z_0\end{pmatrix},\tag{4.23}$$

bulunur, öyleki

$$\begin{aligned}&Z_0=\frac{1}{4}\left(Y_{11}-Y_{22}+Y_{33}-Y_{44}\right),\ \ Z_1=\frac{1}{4}\left(Y_{12}+Y_{21}+Y_{34}+Y_{43}\right),\\&Z_2=\frac{1}{4}\left(Y_{13}-Y_{24}+Y_{31}-Y_{42}\right),\ \ Z_3=\frac{1}{4}\left(Y_{14}+Y_{23}+Y_{32}+Y_{41}\right).\end{aligned}\tag{4.24}$$

elde edilir. $\phi_X = Y'$ olduğundan (4.16) denkleminin çözümü

$$X = Z_1 + Z_2 i + Z_3 j + Z_4 k = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} I_m & iI_m & jI_m & kI_m \end{pmatrix} Y' \begin{pmatrix} I_n \\ iI_n \\ jI_n \\ kI_n \end{pmatrix} \tag{4.25}$$

biçiminde olur.

ii. $X - A\left({}^{2}\overline{X}\right)B = C$ **denkleminin çözümü üzerine**

$A \in \mathbb{H}^{m\times m}, B \in \mathbb{H}^{n\times n}$ ve $C \in \mathbb{H}^{m\times n}$ için

$$X - A\left({}^{2}\overline{X}\right)B = C \tag{4.26}$$

denkleminin reel temsili

$$Y - \mu_A Y \mu_B = \mu_C \tag{4.27}$$

biçimindedir. (4.26) denklemi

$$\mu_X - \mu_A \mu_X \mu_B = \mu_C \tag{4.28}$$

olarak da yazılabilir. Sonuç olarak (4.26) denkleminin bir çözümü X matrisi ise bu durumda (4.27) denkleminin çözümü $Y = \mu_X$ biçimindedir.

Teorem 4.2.4.2. $A \in \mathbb{H}^{m\times m}$, $B \in \mathbb{H}^{n\times n}$ ve $C \in \mathbb{H}^{m\times n}$ olmak üzere $Y - \mu_A Y \mu_B = \mu_C$ denkleminin bir çözümü $Y \in \mathbb{R}^{4m\times 4n}$ ise $X - A\left({}^{2}\overline{X}\right)B = C$ denkleminin çözümü

$$X = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} I_m & iI_m & jI_m & kI_m \end{pmatrix}\left(Y + Q_m^{-1}YQ_n - R_m^{-1}YR_n - S_m^{-1}YS_n\right)\begin{pmatrix} I_n \\ -iI_n \\ -jI_n \\ kI_n \end{pmatrix} \tag{4.29}$$

biçimindedir.

İspat. Teorem 4.2.4.1.'in ispatına benzer olarak yapılır.

iii. $X - A\left(\overline{{}^{3}X}\right)B = C$ **denkleminin çözümü üzerine**

$A \in \mathbb{H}^{m\times m}, B \in \mathbb{H}^{n\times n}$ ve $C \in \mathbb{H}^{m\times n}$ için

$$X - A\left(\overline{{}^{3}X}\right)B = C \tag{4.30}$$

denkleminin reel temsili

$$Y - \eta_A Y \eta_B = \eta_C \tag{4.31}$$

biçimindedir. (4.30) denklemi

$$\eta_X - \eta_A \eta_X \eta_B = \eta_C \tag{4.32}$$

biçiminde de yazılabilir. Sonuç olarak (4.30) denkleminin bir çözümü X matrisi ise bu durumda (4.31) denkleminin çözümü $Y = \eta_X$ biçimindedir.

Teorem 4.2.4.3. $A \in \mathbb{H}^{m\times m}, B \in \mathbb{H}^{n\times n}$ ve $C \in \mathbb{H}^{m\times n}$ olmak üzere $Y - \eta_A Y \eta_B = \eta_C$ denkleminin bir çözümü $Y \in \mathbb{R}^{4m\times 4n}$ ise $X - A\left(\overline{{}^{3}X}\right)B = C$ denkleminin çözümü

$$X = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} I_m & iI_m & jI_m & kI_m \end{pmatrix}\left(Y - Q_m^{-1}YQ_n - R_m^{-1}YR_n + S_m^{-1}YS_n\right)\begin{pmatrix} I_n \\ iI_n \\ -jI_n \\ -kI_n \end{pmatrix} \tag{4.33}$$

biçimindedir.

İspat. Teorem 4.2.4.1.'in ispatına benzer olarak yapılır..

iv. $A\left({}^{1}\overline{X}\right) - XB = C$ **denkleminin çözümü üzerine**

$A \in \mathbb{H}^{m\times m}$, $B \in \mathbb{H}^{n\times n}$ ve $C \in \mathbb{H}^{m\times n}$

$$A\left({}^{1}\overline{X}\right) - XB = C \tag{4.34}$$

denkleminin reel temsili

$$\phi_A Y - Y\phi_B = \phi_C \tag{4.35}$$

biçimindedir. (4.34) denklemi

$$\phi_A \phi_X\left({}^{1}P_n\right) - \phi_X\left({}^{1}P_n\right)\phi_B = \phi_C \tag{4.36}$$

olarak da yazılabilir. Sonuç olarak (4.34) denkleminin bir çözümü X ise bu durumda (4.35) denkleminin çözümü $Y = \phi_X\left({}^{1}P_n\right)$ biçimindedir.

Teorem 4.2.4.4. $A \in \mathbb{H}^{m\times m}$, $B \in \mathbb{H}^{n\times n}$ ve $C \in H^{m\times n}$ olsun. $\phi_A Y - Y\phi_B = \phi_C$ denkleminin çözümü $Y \in \mathbb{R}^{4m\times 4n}$ ise bu durumda $A\left({}^{1}\overline{X}\right) - XB = C$ denkleminin çözümü

$$X=\frac{1}{16}\left(I_m\ \ iI_m\ \ jI_m\ \ kI_m\right)\left(Y\left({}^1P_n\right)-Q_m^{-1}Y\left({}^1P_n\right)Q_n+R_m^{-1}Y\left({}^1P_n\right)R_n-S_m^{-1}Y\left({}^1P_n\right)S_n\right)\begin{pmatrix} I_n \\ iI_n \\ jI_n \\ kI_n \end{pmatrix} \quad (4.37)$$

biçimindedir.

İspat.

$$Y=\begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} & Y_{14} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} & Y_{24} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} & Y_{34} \\ Y_{41} & Y_{42} & Y_{43} & Y_{44} \end{pmatrix}, Y_{uv}\in\mathbb{R}^{m\times n}, u,v=1,2,3,4$$

matrisi (4.35) denkleminin bir çözümü olsun. Bu durumda

$$Q_m^{-1}\phi_X Q_n=-\phi_X\,,\ R_m^{-1}\phi_X R_n=\phi_X\,,\ S_m^{-1}\phi_X S_n=-\phi_X \text{ ve } Y=\phi_X\left({}^1P_n\right)$$

olduğundan

$$\phi_A\left(-Q_m^{-1}Y\left({}^1P_n\right)Q_n\right)\left({}^1P_n\right)-\left(-Q_m^{-1}Y\left({}^1P_n\right)Q_n\right)\left({}^1P_n\right)\phi_B=\phi_C$$

$$\phi_A\left(R_m^{-1}Y\left({}^1P_n\right)R_n\right)\left({}^1P_n\right)-\left(R_m^{-1}Y\left({}^1P_n\right)R_n\right)\left({}^1P_n\right)\phi_B=\phi_C \quad (4.38)$$

$$\phi_A\left(-S_m^{-1}Y\left({}^1P_n\right)S_n\right)\left({}^1P_n\right)-\left(-S_m^{-1}Y\left({}^1P_n\right)S_n\right)\left({}^1P_n\right)\phi_B=\phi_C.$$

dır. Sonuç olarak Y matrisi (4.35) denkleminin çözümü ise

$$\left(-Q_m^{-1}Y\left({}^1P_n\right)Q_n\right)\left({}^1P_n\right),\ \left(R_m^{-1}Y\left({}^1P_n\right)R_n\right)\left({}^1P_n\right) \text{ ve } \left(S_m^{-1}Y\left({}^1P_n\right)S_n\right)\left({}^1P_n\right)$$

matrisleri de (4.35) denkleminin bir çözümüdür. Ayrıca

$$Y' = \frac{1}{4}\left(Y - \left(Q_m^{-1}Y\left({}^{1}P_n\right)Q_n - R_m^{-1}Y\left({}^{1}P_n\right)R_n + S_m^{-1}Y\left({}^{1}P_n\right)S_n\right)\left({}^{1}P_n\right)\right) \quad (4.39)$$

ifadesi de (4.35) denkleminin bir çözümüdür. $\phi_X = Y\left({}^{1}P_n\right)$ olduğundan en son bulunan ifade sağdan $\left({}^{1}P_n\right)$ ile çarpılıp düzenlenirse

$$\phi_X = \begin{pmatrix} Z_0 & Z_1 & Z_2 & Z_3 \\ Z_1 & -Z_0 & Z_3 & -Z_2 \\ Z_2 & Z_3 & Z_0 & Z_1 \\ Z_3 & -Z_2 & Z_1 & -Z_0 \end{pmatrix},$$

matrisi elde edilir. Burada

$$\begin{gathered} Z_0 = \frac{1}{4}\left(Y_{11} + Y_{22} + Y_{33} + Y_{44}\right), \;\; Z_1 = \frac{1}{4}\left(-Y_{12} + Y_{21} - Y_{34} + Y_{43}\right), \\ Z_2 = \frac{1}{4}\left(Y_{13} + Y_{24} + Y_{31} + Y_{42}\right), \;\; Z_3 = \frac{1}{4}\left(-Y_{14} + Y_{23} - Y_{32} + Y_{41}\right). \end{gathered} \quad (4.40)$$

dır. Sonuç olarak

$$X = \frac{1}{16}\left(I_m \;\; iI_m \;\; jI_m \;\; kI_m\right)\left(Y\left({}^{1}P_n\right) - \left(Q_m^{-1}Y\left({}^{1}P_n\right)Q_n - R_m^{-1}Y\left({}^{1}P_n\right)R_n + S_m^{-1}Y\left({}^{1}P_n\right)S_n\right)\right)\begin{pmatrix} I_n \\ iI_n \\ jI_n \\ kI_n \end{pmatrix}$$

ifadesi (4.34) denkleminin bir çözümü olur.

v. $A\left({}^{2}\overline{X}\right) - XB = C$ denkleminin çözümü üzerine

$A \in \mathbb{H}^{m\times m}, B \in \mathbb{H}^{n\times n}$ ve $C \in \mathbb{H}^{m\times n}$ için

$$A\left({}^{2}\overline{X}\right) - XB = C \quad (4.41)$$

denkleminin reel temsili

$$\mu_A Y - Y\mu_B = \mu_C \tag{4.42}$$

biçimindedir. (4.41) denklemi

$$\mu_A \mu_X P_n - \mu_X P_n \mu_B = \mu_C \tag{4.43}$$

biçiminde de yazılabilir. Sonuç olarak (4.41) denkleminin bir çözümü X ise bu durumda (4.42) denkleminin çözümü $Y = \mu_X \left({}^2P_n \right)$ biçimindedir.

Teorem 4.2.4.5. $A \in \mathbb{H}^{m\times m}, B \in \mathbb{H}^{n\times n}$ ve $C \in \mathbb{H}^{m\times n}$ olsun. $\mu_A Y - Y\mu_B = \mu_C$ denkleminin çözümü $Y \in \mathbb{R}^{4m\times 4n}$ ise bu durumda $A\left({}^2\overline{X} \right) - XB = C$ denkleminin çözümü

$$X = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} I_m & iI_m & jI_m & kI_m \end{pmatrix}\left(Y\left({}^2P_n \right) + Q_m^{-1} Y\left({}^2P_n \right) Q_n - R_m^{-1} Y\left({}^2P_n \right) R_n - S_m^{-1} Y\left({}^2P_n \right) S_n \right)_n \begin{pmatrix} I_n \\ -iI_n \\ -jI_n \\ kI_n \end{pmatrix} \tag{4.44}$$

biçimindedir.

İspat. Teorem 4.2.4.4.'ün ispatına benzer olarak yapılır.

vi. $A\left({}^3\overline{X} \right) - XB = C$ **denkleminin çözümü üzerine**

$A \in \mathbb{H}^{m\times m}, B \in \mathbb{H}^{n\times n}$ ve $C \in \mathbb{H}^{m\times n}$ için

$$A\left({}^3\overline{X} \right) - XB = C \tag{4.45}$$

denkleminin reel temsili

$$\eta_A Y - Y\eta_B = \eta_C \tag{4.46}$$

biçimindedir. (4.45) denklemi

$$\eta_A \eta_X P_n - \eta_X P_n \eta_B = \eta_C \tag{4.47}$$

biçiminde de yazılabilir. Sonuç olarak olarak (4.45) denkleminin bir çözümü X ise bu durumda (4.46) denkleminin çözümü $Y = \eta_X\left({}^3P_n\right)$ biçimindedir.

Teorem 4.2.4.6. $A \in \mathbb{H}^{m\times m}, B \in \mathbb{H}^{n\times n}$ ve $C \in \mathbb{H}^{m\times n}$. olsun. $\eta_A Y - Y\eta_B = \eta_C$ denkleminin çözümü $Y \in \mathbb{R}^{4m\times 4n}$ ise bu durumda $A\left({}^3\overline{X}\right) - XB = C$ denkleminin çözümü

$$X = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} I_m & iI_m & jI_m & kI_m \end{pmatrix}\left(Y\left({}^3P_n\right) - Q_m^{-1}Y\left({}^3P_n\right)Q_n - R_m^{-1}Y\left({}^3P_n\right)R_n + S_m^{-1}Y\left({}^3P_n\right)S_n\right)\begin{pmatrix} I_n \\ iI_n \\ -jI_n \\ -kI_n \end{pmatrix} \tag{4.48}$$

dir.

İspat. Teorem 4.2.4.4.'ün ispatına benzer olarak yapılır.

Örnek 4.2.4.7. $X - \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & j \end{pmatrix}\left({}^1X\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2i - j & 1 + j \\ -1 + i + k & i + j \end{pmatrix}$ eşitliğini sağlayan $X \in \mathbb{H}^{2\times 2}$ matrisini bulalım.

Verilen denkleme karşılık gelen reel gösterim

$$Y-\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Y \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

biçimindedir. Bu reel matris denklemi çözülürse

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

elde edilir. $\phi_X = \frac{1}{4}\left(Y - Q_m^{-1}\phi_X Q_n + R_m^{-1}\phi_X R_n - S_m^{-1}\phi_X S_n\right)$ eşitliği kullanılırsa

$$\phi_X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

matrisi elde edilir. Buradan

$$X = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & i & 0 & j & 0 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 & i & 0 & j & 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ i & 0 \\ 0 & i \\ j & 0 \\ 0 & j \\ k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} i & 1+j \\ k & i+j \end{pmatrix}$$

çözümü elde edilir.

Örnek 4.2.4.8. $\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & j \end{pmatrix}\left({}^{1}X\right) - X\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2i+j & 2+j+k \\ 1-i-k & 1+i \end{pmatrix}$ eşitliğini sağlayan $X \in \mathbb{H}^{2\times 2}$ matrisini bulalım.

Verilen denkleme karşılık gelen reel gösterim

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Y - Y \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -2 & 0 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

biçimindedir. Bu reel matris denklemi çözülürse

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

elde edilir. $\phi_X = \frac{1}{4}\left(Y\left({}^{1}P_n\right) - \left(Q_m^{-1}Y\left({}^{1}P_n\right)Q_n - R_m^{-1}Y\left({}^{1}P_n\right)R_n + S_m^{-1}Y\left({}^{1}P_n\right)S_n\right)\right)$ eşitliğini kullanırsak

$$\phi_X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

matrisini elde ederiz. Buradan

$$X = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & i & 0 & j & 0 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 & i & 0 & j & 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ i & 0 \\ 0 & i \\ j & 0 \\ 0 & j \\ k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} i & 1+j \\ k & i+j \end{pmatrix}$$

çözümünü elde ederiz.

BÖLÜM 5. ELİPTİK KUATERNİYONLAR

Eliptik sayıların ve komütatif kuaterniyonların genelleştirilmiş formu eliptik kuaterniyonlardır [13]. Eliptik kuaterniyonlar eliptik sayılar cümlesi üzerinde 2-boyutlu, reel sayılar cümlesi üzerinde 4-boyutlu vektör uzayıdır [14].

Bu bölümde şimdiye kadar elde edilmiş tüm özellikler eliptik kuaterniyonlar ve onların matrisleri için genelleştirilmiştir.

5.1. Eliptik Kuaterniyonların Cebirsel Özellikleri

Eliptik kuaterniyonların cümlesi

$$\mathbb{H}_p = \left\{ a = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k : a_0,\, a_1,\, a_2,\, a_3 \in \mathbb{R} \right\} \tag{5.1}$$

biçiminde ifade edilir. Burada i, j, k kuaterniyonik birimleri arasında aşağıdaki eşitlikler mevcuttur:

$$i^2 = k^2 = \alpha,\ \ j^2 = 1,\ \ ij = ji = k,\ \ jk = kj = i,\ \ ki = ik = \alpha j,\ \alpha < 0. \tag{5.2}$$

Çarpım kurallarından $\mathbb{H}_p$ cümlesinin çarpma işlemine göre değişmeli olduğu görülmektedir[37].

$a = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k,\ b = b_0 + b_1 i + b_2 j + b_3 k \in \mathbb{H}_p$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\mathbb{H}_p$ cümlesi üzerinde toplama, çarpma ve skalarla çarpma işlemleri sırasıyla

$$a + b = \left(a_0 + b_0\right) + \left(a_1 + b_1\right) i + \left(a_2 + b_2\right) j + \left(a_3 + b_3\right) k$$

$$pq=\left(a_0b_0+\alpha a_1b_1+a_2b_2+\alpha a_3b_3\right)+\left(a_1b_0+a_0b_1+a_3b_2+a_2b_3\right)i$$
$$+\left(a_0b_2+a_2b_0+\alpha a_1b_3+\alpha a_3b_1\right)j+\left(a_3b_0+a_0b_3+a_1b_2+a_2b_1\right)k,$$

ve

$$\lambda a=\lambda\left(a_0+a_1i+a_2j+a_3k\right)=\lambda a_0+\lambda a_1i+\lambda a_2j+\lambda a_3k.$$

eşitlikleri ile tanımlanır [37].

$a=a_0+a_1i+a_2j+a_3k\in\mathbb{H}_p$ eliptik kuaterniyonu için üç tane eşleniği

$$\begin{aligned} {}^{1}\overline{a}&=a_0-a_1i+a_2j-a_3k,\\ {}^{2}\overline{a}&=a_0+a_1i-a_2j-a_3k,\\ {}^{3}\overline{a}&=a_0-a_1i-a_2j+a_3k \end{aligned} \tag{5.3}$$

olarak tanımlanır [37].

$a=a_0+a_1i+a_2j+a_3k\in\mathbb{H}_p$ eliptik kuaterniyonun normu

$$\|a\|=\sqrt[4]{\left|a\left({}^{1}\overline{a}\right)\left({}^{2}\overline{a}\right)\left({}^{3}\overline{a}\right)\right|}=\sqrt[4]{\left[\left(a_0+a_2\right)^2-\alpha\left(a_1+a_3\right)^2\right]\left[\left(a_0-a_2\right)^2-\alpha\left(a_1-a_3\right)^2\right]}$$

eşitliği ile tanımlanır [37].

$a=a_0+a_1i+a_2j+a_3k\in\mathbb{H}_p$ ve $\|a\|\neq 0$ olmak üzere a eliptik kuaterniyonunun çarpma işlemine göre tersi a^{-1} olmak üzere

$$a^{-1}=\frac{\left({}^{1}\overline{a}\right)\left({}^{2}\overline{a}\right)\left({}^{3}\overline{a}\right)}{\|a\|^4}$$

dir [37].

5.1.1. Eliptik kuaterniyonların temel matrisleri

$a = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k \in \mathbb{H}_p$ için $\varphi_a(x) = ax$ biçiminde $\varphi_a : \mathbb{H}_p \to \mathbb{H}_p$ bir dönüşüm tanımlansın. Bu dönüşüm lineerdir. φ lineer dönüşümünün $\{1, i, j, k\}$ tabanına karşılık gelen matrisi

$$\begin{aligned}
\varphi_a(1) &= (a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k) \\
\varphi_a(i) &= (a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k)\, i = \alpha a_1 + a_0 i + \alpha a_3 j + a_2 k \\
\varphi_a(j) &= (a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k)\, j = a_2 + a_3 i + a_0 j + a_1 k \\
\varphi_a(k) &= (a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k)\, k = \alpha a_3 + a_2 i + \alpha a_1 j + a_0 k
\end{aligned} \tag{5.4}$$

olmak üzere aşağıdaki gibidir:

$$\varphi(a) = \begin{pmatrix} a_0 & \alpha a_1 & a_2 & \alpha a_3 \\ a_1 & a_0 & a_3 & a_2 \\ a_2 & \alpha a_3 & a_0 & \alpha a_1 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix}. \tag{5.5}$$

Bu matrise $a \in \mathbb{H}_p$ nın temel matrisi denir [37].

$\mathbb{H}_p$ eliptik kuaterniyonlar cümlesi ile $\mathbb{R}^{4\times 1}$ matris cümlesi arasında bir cebir izomorfizmi kurulabilir. Bu izomorfizma

$$\tau : \mathbb{H}_p \to \mathbb{R}^{4\times 1}$$

$$a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k \to \tau\left(a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k\right) = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \tag{5.6}$$

kuralıyla tanımlanabilir Sonuç olarak

$$a = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k \cong \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \tag{5.7}$$

yazılabilir [37].

Bu tanımlanan izomorfizma yardımı ile iki eliptik kuaterniyon $a = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$ ve $b = b_0 + b_1 i + b_2 j + b_3 k$ nun çarpımını aşağıdaki gibi de ifade edilebilir:

$$ab = \begin{pmatrix} a_0 & \alpha a_1 & a_2 & \alpha a_3 \\ a_1 & a_0 & a_3 & a_2 \\ a_2 & \alpha a_3 & a_0 & \alpha a_1 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \varphi\left(a\right)b. \tag{5.8}$$

Tanımlanan φ fonksiyonunu için

$$\varphi\left(ab\right) = \varphi\left(a\right)\varphi\left(b\right)$$

$$\varphi\left(a+b\right) = \varphi\left(a\right) + \varphi\left(b\right).$$

eşitlikleri doğrudur. Dolayısıyla φ bir cebir izomorfizmdir. Ayrıca,

$$\varphi(1)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=I_4;\quad \varphi(i)=\begin{pmatrix}0&\alpha&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&\alpha\\0&0&1&0\end{pmatrix}=E_1;$$

$$\varphi(j)=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}=E_2;\quad \varphi(k)=\begin{pmatrix}0&0&0&\alpha\\0&0&1&0\\0&\alpha&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}=E_3$$

olduğundan

$$\begin{gathered}E_1E_1=\alpha I_4,\ E_2E_2=I_4,\ E_3E_3=\alpha I_4\\ E_1E_2=E_2E_1=E_3,\ E_2E_3=E_3E_2=E_1,\ E_1E_3=E_3E_1=\alpha E_2\end{gathered}\tag{5.9}$$

eşitlikleri mevcuttur. Dolayısıyla E_1,E_2,E_3 matrisleri ile i,j,k elemanları birbirlerine izomorftur [37].

Teorem 5.1.1.1. $a,b\in\mathbb{H}_p$ olmak üzere φ lineer izomorfizminin aşağıdaki özellikleri mevcuttur [37]:

1. $\varphi(ab)=\varphi(a)\varphi(b)$,

2. $\varphi(\varphi(a)b)=\varphi(a)\varphi(b)$,

3. $a=b\Leftrightarrow\varphi(a)=\varphi(b)$,

4. $\varphi(a+b)=\varphi(a)+\varphi(b)$,

5. $\varphi(\lambda a)=\lambda\varphi(a),\ \lambda\in\mathbb{R}$,

6. $iz\left(\varphi\left(a\right)\right)=a+{}^{1}\overline{a}+{}^{2}\overline{a}+{}^{3}\overline{a},$

7. $\left\|a\right\|^{4}=\left|\det\left(\varphi\left(a\right)\right)\right|.$

Teorem 5.1.1.2. $a=a_0+a_1i+a_2j+a_3k\in\mathbb{H}_p$ olmak üzere

$$P\,diag\left(a,\ {}^{1}a,\ {}^{2}a,\ {}^{3}a\right)P^{-1}=\varphi\left(a\right)$$

olacak biçimde

$$P=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\ \frac{i}{\alpha}&-\frac{i}{\alpha}&-\frac{i}{\alpha}&\frac{i}{\alpha}\\ j&j&-j&-j\\ \frac{k}{\alpha}&-\frac{k}{\alpha}&-\frac{k}{\alpha}&\frac{k}{\alpha}\end{pmatrix}\quad\text{ve}\quad P^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&i&j&k\\ 1&-i&j&-k\\ 1&-i&-j&k\\ 1&i&-j&-k\end{pmatrix}$$

matrisleri mevcuttur.

Teoremin doğruluğu eşitliğin her iki tarafının hesaplanmasıyla kolayca gösterilir. $P\,diag\left(a,\ {}^{1}a,\ {}^{2}a,\ {}^{3}a\right)P^{-1}=\varphi\left(a\right)$ eşitliğine eliptik kuaterniyonların evrensel benzerlik eşitliği denir. Bu eşitlik yardımı ile aşağıdaki sonuçlar söylenebilir.

1. $\mathbb{H}_p$ cümlesi

$$\mathbb{H}'_p=\left\{\begin{pmatrix}a_0&\alpha a_1&a_2&\alpha a_3\\ a_1&a_0&a_3&a_2\\ a_2&\alpha a_3&a_0&\alpha a_1\\ a_3&a_2&a_1&a_0\end{pmatrix}:a_0,a_1,a_2,a_3\in\mathbb{R}\right\}$$

cümlesine izomoftur. Bu iki cümle arasındaki cebir izomorfizmi

$$\varphi : \mathbb{H}_p \to \mathbb{H}'_p$$

$$a = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k \to \varphi(a) = \begin{pmatrix} a_0 & \alpha a_1 & a_2 & \alpha a_3 \\ a_1 & a_0 & a_3 & a_2 \\ a_2 & \alpha a_3 & a_0 & \alpha a_1 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix}$$

biçimindedir.

2. Her $a = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k \in \mathbb{H}_p$ eliptik kuaterniyonu

$$\varphi(a) = \begin{pmatrix} a_0 & \alpha a_1 & a_2 & \alpha a_3 \\ a_1 & a_0 & a_3 & a_2 \\ a_2 & \alpha a_3 & a_0 & \alpha a_1 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix}$$

matrisi ile temsil edilebilir.

3. $\mathbb{H}'_p$ cümlesinin her bir elemanı $\mathbb{H}_p$ cümlesi üstünde tek bir biçimde köşegenleştirilebilir.

Tanım 5.1.1.3. a ve b eliptik kuaterniyonları $s.\ (s = 1,2,3)$ eşleniğe göre eşlenik-benzerdir ancak ve ancak $a = \left(\overline{{}^{s}q}\right) b\, q^{-1}$ olacak biçimde $q\ (\|q\| \neq 0)$ eliptik kuaterniyonu mevcuttur. a ve b, $s.$ eşleniğe göre eşlenik-benzer ise bu $a \overset{c_s}{\sim} b$ biçiminde gösterilir. Açıktır ki $\overset{c_s}{\sim}$ bağıntısı eliptik kuaterniyonlar cümlesi üzerinde bir denklik bağıntısıdır.

İki eliptik kuaterniyon birbirine eşlenik-benzer ise bunların normları aynıdır.

Teorem 5.1.1.4. $a = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k \in \mathbb{H}_p$ olmak üzere

1. $\|a\|=0$ ise $\varphi(a)$ matrisi singüler matristir ve $\varphi(a)$ matrisinin genelleştirilmiş tersi

$$\varphi^{-}(a)=\frac{1}{4\left(a_0^2-\alpha a_1^2\right)}\varphi\left({}^{1}\overline{a}\right)$$

dir.

2. $\|a\|\neq 0$ ise $\varphi(a)$ matrisi regüler matristir ve

$$\varphi^{-1}(a)=\varphi\left(a^{-1}\right)$$

dir.

İspat. Teorem 4.1.1.5.'in ispatına benzer biçimde yapılabilir.

Teorem 5.1.1.5. $a,b,x\in\mathbb{H}_p$ ve $a=a_0+a_1i+a_2j+a_3k\in\mathbb{H}_p$ olmak üzere $ax=b$ denklemini sağlayan sıfırdan farklı $x\in\mathbb{H}_p$ çözümü mevcut olsun. Bu durumda

1. $\|a\|\neq 0$ ve $b\neq 0$ ise $x=a^{-1}b$ dir.

2. $\|a\|=0$ ve $a\neq 0$ ise $a_0+a_2=0,\ a_1+a_3=0$ ya da $a_0-a_2=0, a_1-a_3=0$ eşitliklerinin doğru olması gerekir. $a_0+a_2=0,\ a_1+a_3=0$ eşitliği sağlandığında

$$x=\frac{1}{4\left(a_0^2-\alpha a_1^2\right)}\left({}^{1}\overline{a}\right)b+(1+j)q$$

dır. $a_0-a_2=0,\ a_1-a_3=0$ eşitliği sağlandığında ise

$$x=\frac{1}{4\left(a_0^2-\alpha a_1^2\right)}\left({}^{1}\overline{a}\right)b+(1-j)q$$

dır. Burada $q \in \mathbb{H}_p$ keyfidir.

İspat. Teorem 4.1.1.6.'in ispatına benzer biçimde yapılabilir.

Tanım 5.1.1.6. $x, y, a, b \in \mathbb{H}_p$ olmak üzere

$$xay = b \text{ ve } ybx = a$$

olacak biçimde $x, y \in \mathbb{H}_p$ matrisleri varsa a, b ye yarı-benzerdir denir. Bu durum $a \approx b$ biçiminde gösterilir. $\approx$ bağıntısı $\mathbb{H}_p$ üzerinde bir denklik bağıntısıdır.

Teorem 5.1.1.7. $x, y, a, b \in \mathbb{H}_p$ olmak üzere $a \approx b$ olsun. Bu durumda

$$xay = b,\ ybx = a,\ \|a\| \neq 0,\ \|b\| \neq 0$$

denklemlerini sağlayan x ve y mevcuttur ve

$$x = q_1, \quad y = a^{-1} q_1^{-1} b$$

ya da

$$x = b q_2^{-1} a^{-1}, \quad y = q_2$$

dır. Burada $q_1, q_2 \in \mathbb{H}_p$ keyfidir ve $\|q_1\|, \|q_2\| \neq 0$ dır.

İspat. Teorem 4.1.1.8'in ispatına benzer biçimde yapılabilir.

Tanım 5.1.1.8. $x, y, a, b \in \mathbb{H}_p$ olmak üzere

$$\left({}^{s}\overline{x}\right)ay=b \quad \text{ve} \quad \left({}^{s}\overline{y}\right)bx=a,\ s=1,2,3$$

olacak biçimde $x,y\in\mathbb{H}_p$ matrisleri varsa a,b ye s. eşleniğe göre yarı-eşlenik-benzerdir, denir. Bu durum $a\overset{c_s}{\approx}b$ biçiminde gösterilir. $\overset{c_s}{\approx}$ bağıntısı $\mathbb{H}_p$ üzerinde bir denklik bağıntısıdır.

Teorem 5.1.1.9. $x,y,a,b\in\mathbb{H}_p$ olmak üzere $a\overset{c_s}{\approx}b$ olsun. Bu durumda

$$\left({}^{s}\overline{x}\right)ay=b,\ \left({}^{s}\overline{y}\right)bx=a,\ \|a\|\neq 0,\ \ \|b\|\neq 0,\ \ s=1,2,3$$

denklemlerini sağlayan x ve y mevcuttur ve

$$x=\left({}^{s}\overline{b}\right)q_2^{-1}\left({}^{s}\overline{a}\right)^{-1},\ \ y=q_2$$

ya da

$$x=q_1,\ \ y=\left({}^{s}\overline{a}\right)\left({}^{s}\overline{q_1}\right)^{-1}\left({}^{s}\overline{b}\right)^{-1}$$

dır. Burada $q_1,q_2\in\mathbb{H}_p$ keyfidir ve $\|q_1\|,\|q_2\|\neq 0$ dır.

İspat. Teorem 4.1.1.10.'in ispatına benzer biçimde yapılabilir.

5.2. Eliptik Kuaterniyon Değerli Matrisler

5.2.1. Eliptik kuaterniyon değerli matrislerin temel özellikleri

Elemanları eliptik kuaterniyon olan $m\times n$ tipindeki matrislerin cümlesi $\mathbb{H}_p^{m\times n}$ ile gösterilir. Bu cümlede $A=(a_{ij}),\ B=(b_{ij})\in\mathbb{H}_p^{m\times n},\ C=(c_{jk})\in\mathbb{H}_p^{n\times l}$ ve $\lambda\in\mathbb{R}$ için toplama, skalarla çarpma ve çarpma işlemleri sırasıyla

$$A+B=(a_{ij})+(b_{ij})=(a_{ij}+b_{ij})\in\mathbb{H}_p^{m\times n},$$

$$\lambda A=\lambda(a_{ij})=(\lambda a_{ij})\in\mathbb{H}_p^{m\times n}$$

ve

$$AC=\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}c_{jk}\right)\in\mathbb{H}_p^{m\times l}$$

eşitlikleri ile tanımlanır.

$A=(a_{ij})\in\mathbb{H}_p^{m\times n}$ için üç tane eşlenik mevcuttur. Bunlar

$${}^{1}\overline{A}=\left({}^{1}\overline{a_{ij}}\right)\in\mathbb{H}_p^{m\times n},\ {}^{2}\overline{A}=\left({}^{2}\overline{a_{ij}}\right)\in\mathbb{H}_p^{m\times n}\ \text{ ve }\ {}^{3}\overline{A}=\left({}^{3}\overline{a_{ij}}\right)\in\mathbb{H}_p^{m\times n}$$

eşitlikleriyle tanımlanır.

A matrisinin transpozu $A^T\in\mathbb{H}_p^{m\times n}$ biçiminde gösterilir. $A^{*_s}=\left({}^{s}\overline{A}\right)^T\in\mathbb{H}_p^{m\times n},\ s=1,2,3,$ matrisine ise A matrisinin $s.$ inci eşleniğe göre eşlenik transpozu denir.

Teorem 5.2.1.1. A ve B matrisleri boyutları uygun eliptik matrisler olmak üzere aşağıdaki eşitlikler doğrudur:

1. $\left({}^{s}\overline{A}\right)^T={}^{s}\overline{\left(A^T\right)},$

2. $\left(AB\right)^{*_s} = B^{*_s} A^{*_s}$,

3. $\left(AB\right)^{T} = B^{T} A^{T}$,

4. ${}^{s}\overline{\left(AB\right)} = \left({}^{s}\overline{A}\right)\left({}^{s}\overline{B}\right)$,

5. A^{-1} ve B^{-1} mevcut ise $\left(AB\right)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$,

6. A^{-1} mevcut ise $\left(A^{\dagger_s}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{\dagger_s}$,

7. $\left({}^{s}\overline{A}\right)^{-1} = {}^{s}\overline{\left(A^{-1}\right)}$.

İspat. Teorem 4.2.1.1.'in ispatına benzer biçimde ispat yapılabilir.

Teorem 5.2.1.2. $A, B \in \mathbb{H}_p^{n\times n}$ için eğer $AB = I_n$ ise $BA = I_n$ dir.

İspat. Teorem 4.2.1.2.'nin ispatına benzer biçimde ispat yapılabilir.

Tanım 5.2.1.3. $A = A_1 + jA_2 \in \mathbb{H}_p^{n\times n}$ olmak üzere

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_2 & A_1 \end{pmatrix} \tag{5.10}$$

matrisine A matrisinin adjoint matrisi denir ve $\eta_p\left(A\right)$ ile gösterilir.

Teorem 5.2.1.4. $A, B \in \mathbb{H}_p^{n\times n}$ olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlikler doğrudur:

1. $\eta_p(I_n) = I_{2n}$,

2. $\eta_p(A+B) = \eta_p(A) + \eta_p(B)$,

3. $\eta_p(AB) = \eta_p(A)\eta_p(B)$,

4. A^{-1} mevcut ise $\eta_p(A^{-1}) = (\eta_p(A))^{-1}$,

5. $\eta_p(A^{*_1}) = (\eta_p(A))^{*}$, fakat genelde

$$\eta_p(A^{*_2}) \neq (\eta_p(A))^{*},\ \eta_p(A^{*_3}) \neq (\eta_p(A))^{*},$$

dır. Burada $(\eta(A))^{*}$, $\eta(A)$ kompleks matrisinin eşlenik transpozudur.

6. $\det(\eta_p(AB)) = \det(\eta_p(A))\det(\eta_p(B))$, ve $\det(\eta(A^{-1})) = (\det \eta(A))^{-1}$.

İspat. Teorem 4.2.1.4.'nin ispatına benzer biçimde ispat yapılabilir.

Tanım 5.2.1.5. $A \in \mathbb{H}_p^{n\times n}$, $x \in \mathbb{H}_p^{n\times 1}$ ve $\lambda \in \mathbb{H}_p$ olmak üzere $Ax = \lambda x$ eşitliğini sağlayan sıfırdan farklı bir x vektörü varsa λ ya A matrisinin özdeğeri denir. x vektörüne ise A matrisinin λ özdeğerine karşılık gelen özvektörü denir. A matrisinin özdeğerlerinin cümlesi

$$\xi_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{H}_p : Ax = \lambda x\ ,\ \exists x \neq 0\}. \tag{5.11}$$

biçiminde gösterilir.

Teorem 5.2.1.6. $A \in \mathbb{H}_p^{n\times n}$ matrisinin $2n$ tane eliptik sayı özdeğeri vardır.

İspat Teorem 4.2.1.6.'nin ispatına benzer biçimde ispat yapılabilir.

Teorem 5.2.1.7. $A \in \mathbb{H}_p^{n\times n}$ olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir:

1. A^{-1} matrisi mevcuttur,

2. $Ax = 0$ denklemin bir tek çözümü vardır,

3. $\det(\eta(A)) \neq 0$ dır veya $\eta(A)^{-1}$ mevcuttur,

4. A matrisi sıfır özdeğerine sahip değildir.

İspat Teorem 4.2.1.7.'nin ispatına benzer biçimde ispat yapılabilir.

5.2.2. Eliptik kuaterniyon matrislerinin konbenzerliği

$A, B \in \mathbb{H}_p^{n\times n}$ olmak üzere $P^{-1}AP = B$ olacak biçimde $P \in \mathbb{H}_p^{n\times n}$ mevcut ise A matrisi B matrisine benzerdir denir ve $A \sim B$ biçiminde gösterilir.

Açıktır ki $\sim$ bağıntısı $\mathbb{H}_p^{n\times n}$ üzerinde bir denklik bağıntısıdır.

$A, B \in \mathbb{H}_p^{n\times n}$ olmak üzere A, B ye $s.$ eşleniğe göre eşlenik-benzerdir ancak ve ancak $\left({}^{s}\overline{P}\right)AP^{-1} = B$ eşitliğini sağlayan $P \in \mathbb{H}_p^{n\times n}$ regüler matrisi mevcuttur. A matrisi B matrisine $s.$ eşleniğe göre eşlenik-benzer ise bu $A \overset{c_s}{\simeq} B$ biçiminde gösterilir.

Ayrıca, $\overset{c_s}{\simeq}$ bağıntısı $\mathbb{H}_p^{n\times n}$ üzerinde bir denklik bağıntısıdır.

Tanım 5.2.2.1. $A \in \mathbb{H}_p^{n\times n}, \lambda \in \mathbb{H}_p$ olmak üzere $A\left({}^{s}\overline{x}\right) = x\lambda,\ (s = 1,2,3)$ eşitliğini sağlayansıfırdan farklı bir $x \in \mathbb{H}_p^{n\times 1}$ mevcut ise bu durumda λ ya A matrisinin $s.$ eşleniğine göre eşlenik-özdeğeri denir. x vektörüne ise A matrisinin λ eşlenik-özdeğerine karşılık gelen eşlenik-özvektörü denir. A matrisinin eşlenik-özdeğerlerinin cümlesi

$$\overline{{}^{s}\xi_p} = \left\{\lambda \in \mathbb{H}_p : A\left(\overline{{}^{s}x}\right) = x\lambda,\ \exists x \neq 0\right\} \qquad (5.12)$$

biçiminde gösterilir

Teorem 5.2.2.2. $A, B \in \mathbb{H}_p^{n\times n}$, olmak üzere $A \overset{c_s}{\sim} B$ ise A ve B matrisler aynı eşlenik-özdeğerlere sahiptir.

İspat. $A \overset{c_s}{\sim} B$, olsun. Bu durumda $B = \left(\overline{{}^{s}P}\right)AP^{-1}$ olacak biçimde $P \in \mathbb{H}_p^{n\times n}$ regüler matrisi mevcuttur. $\lambda \in \mathbb{H}_p$, A matrisnin eşlenik-özdeğeri olsun. Bu durumda $A\left(\overline{{}^{s}x}\right) = x\lambda,\ x \neq 0$ dır. $y = P\left(\overline{{}^{s}x}\right)$ olmak üzere

$$By = \left(\overline{{}^{s}P}\right)AP^{-1}y = \left(\overline{{}^{s}P}\right)APP^{-1}\left(\overline{{}^{s}x}\right) = \left(\overline{{}^{s}P}\right)A\left(\overline{{}^{s}x}\right) = \left(\overline{{}^{s}P}\right)x\lambda = \left(\overline{{}^{s}y}\right)\lambda$$

dır. Sonuç olarak A ve B matrisler aynı eşlenik-özdeğerlere sahiptir.

Teorem 5.2.2.3. $A \in \mathbb{H}_p^{n\times n}$ için λ, A matrisinin eşlenik-özdeğeri ise $0 \neq \beta \in \mathbb{H}_p$, $\left(\overline{{}^{s}\beta}\right)\lambda\beta^{-1}$ da A matrisinin eşlenik-özdeğeridir.

İspat. $A\left(\overline{{}^{s}x}\right) = x\lambda$, ise $A\left(\overline{{}^{s}x}\right)\beta^{-1} = x\left(\overline{{}^{s}\beta}\right)^{-1}\left(\overline{{}^{s}\beta}\right)\lambda\beta^{-1}$. dir.

Tanım 5.2.2.4. $A \in \mathbb{H}_p^{n\times n}$ ve $B \in \mathbb{H}_p^{n\times n}$ olmak üzere

$$YAX = B, \quad XBY = A$$

olacak biçimde $X, Y \in \mathbb{H}_p^{n\times n}$ matrisleri varsa A matrisi B matrisine yarı-benzerdir denir.

Tanım 5.2.2.5. $A \in \mathbb{H}_p^{n\times n}$ ve $B \in \mathbb{H}_p^{n\times n}$ olmak üzere

$$\left({}^{s}\overline{Y}\right)AX = B, \quad \left({}^{s}\overline{X}\right)BY = A$$

olacak biçimde $X, Y \in \mathbb{H}_p^{n\times n}$ matrisleri varsa A matrisi B matrisine s. eşleniğe göre yarı-eşlenik-benzerdir denir.

Tanım 5.2.2.6. $A \in \mathbb{H}_p^{n\times n}$ ve $B \in \mathbb{H}_p^{n\times n}$ olmak üzere

$$X^{-}AX = B, \quad XBX^{-} = A, \; XX^{-}X = X$$

olacak biçimde $X, X^{-} \in \mathbb{H}_p^{n\times n}$ matrisleri varsa A matrisi B matrisine yakın-benzerdir denir.

Tanım 5.2.2.7. $A \in \mathbb{H}_p^{n\times n}$, $B \in \mathbb{H}_p^{n\times n}$ olmak üzere

$$\left({}^{s}\overline{X^{-}}\right)AX = B, \quad \left({}^{s}\overline{X}\right)BX^{-} = A, \; XX^{-}X = X$$

olacak biçimde $X, X^{-} \in \mathbb{H}_p^{n\times n}$ matrisleri varsa A matrisi B matrisine s. eşleniğe göre yakın-eşlenik-benzerdir denir.

Tanım 5.2.2.8. $A \in \mathbb{H}_p^{n\times n}$ için aşağıdaki şartları sağlayan $X \in \mathbb{H}_p^{n\times n}$ matrisi varsa bu durumda X matrisine A matrisinin Drazin tersi denir ve $X = (A)^{d}$ ile gösterilir.

i. $A^{k+1}X = A^{k}$, **ii.** $XAX = X$, **iii.** $AX = XA$, $k \geq 0$.

Burada $A^{k+1}X = A^k$ eşitliğini sağlayan en küçük k doğal sayısına A matrisinin indeksi denir ve $ind(A)$ ile gösterilir.

Tanım 5.2.2.9. $A \in \mathbb{H}_p^{n\times n}$ olmak üzere $AXA = A$ eşitliğini sağlayan $X \in \mathbb{H}_p^{n\times n}$ matrisi varsa X matrisine A matrisinin genelleştirilmiş tersi denir ve A^- ile gösterilir.

Teorem 5.2.2.10. $\mathbb{H}_p^{n\times n}$ cümlesinde $(XY)^d$ ve $(YX)^d$ mevcut ise aşağıdaki önermeler doğrudur:

1. $(XY)^d X = X(YX)^d$,

2. $(XY)^d$ idempotent $\Leftrightarrow$ $Y(XY)^d = \left[(XY)^d X\right]^-$.

İspat. Teorem 4.2.2.11.'nin ispatına benzer biçimde ispat yapılabilir.

Teorem 5.2.2.11. $A, B, X, Y \in \mathbb{H}_p^{n\times n}$ için $(XY)^d$, $(YX)^d$ mevcut ve A matrisi B matrisine yarı-benzer olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlikler doğrudur:

1. $A^{2k}X = X\,B^{2k}$, $\quad B^{2k}X = X\,A^{2k}$, $\quad k = 1,2,3,\ldots,$

2. $(XY)^k A(XY)^k = A$, $\quad k = 1,2,3,\ldots,$

3. $(XY)^d A(XY)^d = A$,

4. $(XY)(XY)^d A = A = A(XY)(XY)^d$.

İspat. Teorem 4.2.2.12.'nin ispatına benzer biçimde ispat yapılabilir.

Teorem 5.2.2.12. $A,B,X,Y\in\mathbb{H}_p^{n\times n}$ için $\left(\left({}^{s}\overline{X}\right)\left({}^{s}\overline{Y}\right)\right)^{d}$, $\left(\left({}^{s}\overline{Y}\right)\left({}^{s}\overline{X}\right)\right)^{d}$ mevcut ve A matrisi B matrisine yarı-eşlenik-benzer olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlikler doğrudur:

1. $$\left(\left({}^{s}\overline{X}\right)\left({}^{s}\overline{Y}\right)\right)^{k} A\left(\left({}^{s}\overline{X}\right)\left({}^{s}\overline{Y}\right)\right)^{k} = A$$
$$\left(\left({}^{s}\overline{Y}\right)\left({}^{s}\overline{X}\right)\right)^{k} B\left(\left({}^{s}\overline{Y}\right)\left({}^{s}\overline{X}\right)\right)^{k} = B,\quad s=1,2,3,...,$$

2. $$\left(A\left({}^{s}\overline{A}\right)\right)^{k}\left({}^{s}\overline{X}\right)=\left({}^{s}\overline{X}\right)\left(B\left({}^{s}\overline{B}\right)\right)^{k},\quad \left({}^{s}\overline{Y}\right)\left(A\left({}^{s}\overline{A}\right)\right)^{k}=\left(B\left({}^{s}\overline{B}\right)\right)^{k}\left({}^{s}\overline{Y}\right),$$

3. $$A(XY)(XY)^{d} = A = \left(\left({}^{s}\overline{X}\right)\left({}^{s}\overline{Y}\right)\right)\left(\left({}^{s}\overline{X}\right)\left({}^{s}\overline{Y}\right)\right)^{d} A,$$
$$B(YX)(YX)^{d} = B = \left(\left({}^{s}\overline{Y}\right)\left({}^{s}\overline{X}\right)\right)\left(\left({}^{s}\overline{Y}\right)\left({}^{s}\overline{X}\right)\right)^{d} B \quad .$$

İspat. Teorem 4.2.2.13.'nin ispatına benzer biçimde ispat yapılabilir.

Teorem 5.2.2.13. $A,B,X,Y\in\mathbb{H}_p^{n\times n}$ olsun. A matrisi B matrisine yarı-eşlenik-benzer ise $A\left({}^{s}\overline{A}\right)$ matrisi $B\left({}^{s}\overline{B}\right)$ matrisine yakın-benzerdir.

İspat. Teorem 4.2.2.14.'nin ispatına benzer biçimde ispat yapılabilir.

Teorem 5.2.2.14. $A,B,X,Y\in\mathbb{H}_p^{n\times n}$ için A matrisi B matrisine yarı-benzer ise aşağıdaki önermeler doğrudur:

1. A^{2k+1} matrisi B^{2k+1} matrisine yarı-benzerdir,

2. A^{2k} matrisi B^{2k} matrisine yakın-benzerdir,

3. AA^{d} matrisi BB^{d} matrisine yakın benzerdir,

4. A^d matrisi B^d matrisine yarı-benzerdir,

5. A^2A^d matrisi B^2B^d matrisine yarı-benzerdir.

İspat. Teorem 4.2.2.15.’nin ispatına benzer biçimde ispat yapılabilir.

5.2.2.15. Sonuçlar

Benzerlik ve eşlenik-benzerlik bağıntıları $f(A)=\left(X^{-1}\right)^{\wedge} AX$ dönüşümünün özel halleridir. Buradaki $(\ )^{\wedge}$ $\mathbb{H}^{n\times n}$ üzerinde tanımlı üssel dönüşümdür ve bu dönüşüm $\left(A^{\wedge}\right)^{\wedge}=A,\quad (A+B)^{\wedge}=A^{\wedge}+B^{\wedge},\ (AB)^{\wedge}=A^{\wedge}B^{\wedge}$ özelliklerini sağlamaktadır. Eğer $A^{\wedge}=A$ alınırsa $\mathbb{H}_p^{n\times n}$ üzerindeki benzerlik bağıntısı elde edilir. $A^{\wedge}={}^{s}\overline{A}$ alır isek $\mathbb{H}_p^{n\times n}$ üzerindeki eşlenik-benzerlik bağıntısını bulunur. Yarı-benzerlik ve yarı-eşlenik-benzerlik bağıntılarıda benzerlik ve eşlenik-benzerlik bağınıtıları ile yakından ilgilidir. Öyleki A matrisi B matrisine yarı-benzer ise

$$B=f(A)=Y^{\wedge}AX,\ A=f^{-1}(B)=X^{\wedge}AY$$

eşitliğini sağlayan X ve Y mevcuttur ve burada $A^{\wedge}=A$ alınmıştır. A matrisi B matrisine yarı-eşlenik-benzer ise

$$B=f(A)=Y^{\wedge}AX,\ A=f^{-1}(B)=X^{\wedge}AY$$

eşitliğini sağlayan X ve Y matrisleri mevcuttur ve burada $A^{\wedge}=\left({}^{s}\overline{A}\right)$ alınmıştır. Dahası A matrisi B matrisine benzer ise A matrisi B matrisine yarı-benzerdir. Yani yarı-benzerlik bağıntısı benzerlik bağıntısından daha zayıf bir bağıntıdır. Yakın-benzerlik ise benzerlik bağıntısından daha zayıf yarı-benzerlik bağıntısından daha güçlü bir bağıntıdır. Benzer biçimde yakın-eşlenik-benzerlik bağıntısı eşlenik-benzerlik bağıntısından daha zayıf yarı-eşlenik-benzerlik bağınıtısından daha güçlü bir bağıntıdır.

5.2.3. Eliptik kuaterniyon matrislerin reel gösterimleri

$A = A_0 + A_1 i + A_2 j + A_3 k \in \mathbb{H}_p^{m\times n}$ olsun. Burada $A_0, A_1, A_2, A_3 \in \mathbb{R}^{mxn}$

$$\phi_A(X) = A\left({}^1\overline{X}\right),\ \mu_A(X) = A\left({}^2\overline{X}\right) \text{ ve } \eta_A(X) = A\left({}^3\overline{X}\right)$$

biçiminde lineer izomorfizmalar tanımlansın. Bu izomorfizmaların $\{1, i, j, k\}$ tabanına karşılık gelen matrisleri sırasıyla

$$\phi_A = \begin{pmatrix} A_0 & -\alpha A_1 & A_2 & -\alpha A_3 \\ A_1 & -A_0 & A_3 & -A_2 \\ A_2 & -\alpha A_3 & A_0 & -\alpha A_1 \\ A_3 & -A_2 & A_1 & -A_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4m\times 4n},$$

$$\mu_A = \begin{pmatrix} A_0 & \alpha A_1 & -A_2 & -\alpha A_3 \\ A_1 & A_0 & -A_3 & -A_2 \\ A_2 & \alpha A_3 & -A_0 & -\alpha A_1 \\ A_3 & A_2 & -A_1 & -A_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4m\times 4n},$$

$$\eta_A = \begin{pmatrix} A_0 & -\alpha A_1 & -A_2 & \alpha A_3 \\ A_1 & -A_0 & -A_3 & A_2 \\ A_2 & -\alpha A_3 & -A_0 & \alpha A_1 \\ A_3 & -A_2 & -A_1 & A_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4m\times 4n}$$

biçimindedir.

Teorem 5.2.3.1. $A \in \mathbb{H}_p^{m\times n}$ olmak üzere ϕ_A, μ_A ve η_A matrisleri aşağıdaki özellikleri sağlar:

1. $A \in \mathbb{H}_p^{m\times n}$ olsun.

$$ {}^{1}P_t = \begin{pmatrix} I_t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I_t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_t \end{pmatrix}, {}^{2}P_t = \begin{pmatrix} I_t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_t \end{pmatrix}, {}^{3}P_t = \begin{pmatrix} I_t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I_t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_t \end{pmatrix} $$

$$ Q_t = \begin{pmatrix} 0 & \alpha I_t & 0 & 0 \\ I_t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha I_t \\ 0 & 0 & I_t & 0 \end{pmatrix}, R_t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & I_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_t \\ I_t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_t & 0 & 0 \end{pmatrix}, S_t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha I_t \\ 0 & 0 & I_t & 0 \\ 0 & \alpha I_t & 0 & 0 \\ I_t & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.13} $$

olmak üzere

$$ \left({}^{1}P_m\right)^{-1} \phi_A \left({}^{1}P_n\right) = \phi_{{}^{1}A}, \; Q_m^{-1}\phi_A Q_n = -\phi_A, \quad R_m^{-1}\phi_A R_n = \phi_A, \quad S_m^{-1}\phi_A S_n = -\phi_A, $$

$$ \left({}^{2}P_m\right)^{-1} \mu_A \left({}^{2}P_m\right) = \mu_{{}^{2}A}, \; Q_m^{-1}\mu_A Q_n = \mu_A, \quad R_m^{-1}\mu_A R_n = -\mu_A, \quad S_m^{-1}\mu_A S_n = -\mu_A $$

ve

$$ \left({}^{3}P_m\right)^{-1} \eta_A \left({}^{3}P_m\right) = \eta_{{}^{3}A}, \; Q_m^{-1}\eta_A Q_n = -\eta_A, \quad R_m^{-1}\eta_A R_n = -\eta_A, \quad S_m^{-1}\eta_A S_n = \eta_A $$

eşitlikleri mevcuttur,

2. $A, B \in \mathbb{H}_p^{m\times n}$ ise $\phi_{A+B} = \phi_A + \phi_B$, $\mu_{A+B} = \mu_A + \mu_B$ ve $\eta_{A+B} = \eta_A + \eta_B$ dir,

3. $A \in \mathbb{H}_p^{m\times n}$, $B \in \mathbb{H}_p^{n\times l}$, ise

$$ \phi_{AB} = \phi_A\left({}^{1}P_n\right)\phi_B = \phi_A \phi_{\left({}^{1}B\right)}\left({}^{1}P_l\right), \; \mu_{AB} = \mu_A\left({}^{2}P_n\right)\mu_B = \mu_A \mu_{\left({}^{2}B\right)}\left({}^{2}P_l\right) $$

ve

$$ \eta_{AB} = \eta_A\left({}^{3}P_n\right)\eta_B = \eta_A \eta_{\left({}^{3}B\right)}\left({}^{3}P_l\right) $$

dir,

4. $A \in \mathbb{H}_p^{m\times m}$ olmak üzere A^{-1} mevcuttur ancak ve ancak $(\phi_A)^{-1}$, $(\mu_A)^{-1}$ve $(\eta_A)^{-1}$ mevcuttur ve

$$\phi_A^{-1} = \left({}^1P_m\right)\phi_{A^{-1}}\left({}^1P_m\right),\ \mu_A^{-1} = \left({}^2P_m\right)\mu_{A^{-1}}\left({}^2P_m\right) \text{ ve } \eta_A^{-1} = \left({}^3P_m\right)\eta_{A^{-1}}\left({}^3P_m\right)$$

dir.

5.2.4. Eliptik kuaterniyon matrislerinin bazı lineer denklemleri

Bu bölümde

$$X - A\left({}^s\overline{X}\right)B = C,\ s = 1,2,3,$$

Kalman-Yakubovich-s-eşlenik ve

$$A\left({}^s\overline{X}\right) - XB = C$$

Sylvester-s-eşlenik denklemlerinin çözümleri ve bu çözümlerin sonuçları incelenecektir.

i. $X - A\left({}^1\overline{X}\right)B = C$ **denkleminin çözümü üzerine**

$A \in \mathbb{H}_p^{m\times m}, B \in \mathbb{H}_p^{n\times n}$ ve $C \in \mathbb{H}_p^{m\times n}$ için

$$X - A\left({}^1\overline{X}\right)B = C \tag{5.14}$$

denkleminin reel temsili

$$Y-\phi_A Y\phi_B=\phi_C \tag{5.15}$$

biçimindedir. (5.14) denklemi

$$\phi_X-\phi_A\phi_X\phi_B=\phi_C \tag{5.16}$$

biçiminde de yazılabilir. Sonuç olarak olarak (5.14) denkleminin bir çözümü X matrisi ise bu durumda (5.15) denkleminin çözümü $Y=\phi_X$ biçimindedir.

Teorem 5.2.4.1. $A\in\mathbb{H}_p^{m\times m}$, $B\in\mathbb{H}_p^{n\times n}$ ve $C\in\mathbb{H}^{m\times n}$. olsun. $Y-\phi_A Y\phi_B=\phi_C$ denkleminin çözümü $Y\in\mathbb{R}^{4m\times 4n}$ ise bu durumda $X-A\left({}^{1}\overline{X}\right)B=C$ denkleminin çözümü

$$X=\frac{1}{8-8\alpha}\begin{pmatrix}I_m & iI_m & jI_m & kI_m\end{pmatrix}\left(Y-Q_m^{-1}YQ_n+R_m^{-1}YR_n-S_m^{-1}YS_n\right)\begin{pmatrix}I_m\\ iI_m\\ jI_m\\ kI_m\end{pmatrix} \tag{5.17}$$

biçimindedir.

İspat.

$$Y=\begin{pmatrix}Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} & Y_{14}\\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} & Y_{24}\\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} & Y_{34}\\ Y_{41} & Y_{42} & Y_{43} & Y_{44}\end{pmatrix},\ Y_{uv}\in\mathbb{R}^{m\times n},u,v=1,2,3,4 \tag{5.18}$$

matrisi (5.15) denkleminin bir çözümü olsun. Bu durumda $Y=\phi_X$ ve $Q_m^{-1}\phi_X Q_n=-Y,\ R_m^{-1}\phi_X R_n=Y,\ S_m^{-1}\phi_X S_n=-Y$ olduğundan

$$-Q_m^{-1}YQ_n-\phi_A\left(-Q_m^{-1}YQ_n\right)\phi_B=\phi_C$$

$$R_m^{-1}YR_n-\phi_A\left(R_m^{-1}YR_n\right)\phi_B=\phi_C \tag{5.19}$$

$$-S_m^{-1}YS_n-\phi_A\left(-S_m^{-1}YS_n\right)\phi_B=\phi_C.$$

dır. Sonuç olarak Y matrisi (5.15) denkleminin bir çözümü ise $-Q_m^{-1}YQ_n$, $R_m^{-1}YR_n$ ve $S_m^{-1}YS_n$ ifadeleri de (5.15) denkleminin bir çözümüdür. Ayrıca

$$Y'=\frac{1}{4}\left(Y-Q_m^{-1}\phi_A Q_n+R_m^{-1}\phi_A R_n-S_m^{-1}\phi_A S_n\right) \tag{5.20}$$

ifadesi de (5.15) denkleminin bir çözümüdür. Son ifade düzenlenir ise

$$Y'=\begin{pmatrix} Z_0 & -\alpha Z_1 & Z_2 & -\alpha Z_3 \\ Z_1 & -Z_0 & Z_3 & -Z_2 \\ Z_2 & -\alpha Z_3 & Z_0 & -\alpha Z_1 \\ Z_3 & -Z_2 & Z_1 & -Z_0 \end{pmatrix}, \tag{5.21}$$

matrisi elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} Z_1&=\frac{1}{4}\left(Y_{11}-Y_{22}+Y_{33}-Y_{44}\right),\ Z_2=\frac{1}{4}\left(-\frac{Y_{12}}{\alpha}+Y_{21}-\frac{Y_{34}}{\alpha}+Y_{43}\right), \\ Z_3&=\frac{1}{4}\left(Y_{13}-Y_{24}+Y_{31}-Y_{42}\right),\ Z_4=\frac{1}{4}\left(-\frac{Y_{14}}{\alpha}+Y_{23}-\frac{Y_{32}}{\alpha}+Y_{41}\right). \end{aligned} \tag{5.22}$$

dir. $\phi_X=Y$ olduğundan (5.14) denkleminin çözümü

$$X=Z_1+Z_2 i+Z_3 j+Z_4 k=\frac{1}{2-2\alpha}\left(I_m \quad iI_m \quad jI_m \quad kI_m\right)Y'\begin{pmatrix} I_m \\ iI_m \\ jI_m \\ kI_m \end{pmatrix} \tag{5.23}$$

eşitliği ile elde edilir.

ii. $X - A\left({}^{2}\overline{X}\right)B = C$ **denkleminin çözümü üzerine**

$A \in \mathbb{H}_p^{m\times m}, B \in \mathbb{H}_p^{n\times n}$ ve $C \in \mathbb{H}_p^{m\times n}$ için

$$X - A\left({}^{2}\overline{X}\right)B = C \tag{5.24}$$

denkleminin reel temsili

$$Y - \mu_A Y \mu_B = \mu_C \tag{5.25}$$

biçimindedir. (5.24) denklemi

$$\mu_X - \mu_A \mu_X \mu_B = \mu_C \tag{5.26}$$

biçiminde de yazılabilir. Sonuç olarak (5.24) denkleminin bir çözümü X ise bu durumda (5.25) denkleminin çözümü $Y = \mu_X$ biçimindedir.

Teorem 5.2.4.2. $A \in \mathbb{H}_p^{m\times m}$, $B \in \mathbb{H}_p^{n\times n}$ ve $C \in \mathbb{H}_p^{m\times n}$ olmak üzere $Y - \mu_A Y \mu_B = \mu_C$ denkleminin bir çözümü $Y \in \mathbb{R}^{4m\times 4n}$ ise $X - A\left({}^{2}X\right)B = C$ denkleminin çözümü

$$X = \frac{1}{8-8\alpha}\begin{pmatrix} I_m & iI_m & jI_m & kI_m \end{pmatrix}\left(Y + Q_m^{-1}YQ_n - R_m^{-1}YR_n - S_m^{-1}YS_n\right)\begin{pmatrix} I_m \\ -iI_m \\ -jI_m \\ kI_m \end{pmatrix} \tag{5.27}$$

biçimindedir.

İspat. İspat Teorem 5.2.4.1.’in ispatına benzer olarak yapılır..

iii. $X - A\left({}^{3}\overline{X}\right)B = C$ **denkleminin çözümü üzerine**

$A \in \mathbb{H}_p^{m\times m}, B \in \mathbb{H}_p^{n\times n}$ ve $C \in \mathbb{H}_p^{m\times n}$ için

$$X - A\left({}^{3}\overline{X}\right)B = C \tag{5.28}$$

denkleminin reel temsili

$$Y - \eta_A Y \eta_B = \eta_C \tag{5.29}$$

biçimindedir. (5.28) denklemi

$$\eta_X - \eta_A \eta_X \eta_B = \eta_C \tag{5.30}$$

biçiminde de yazılabilir. Sonuç olarak (5.28) denkleminin bir çözümü X ise bu durumda (5.29) denkleminin çözümü $Y = \eta_X$ biçimindedir.

Teorem 5.2.4.3. $A \in \mathbb{H}_p^{m\times m}$, $B \in \mathbb{H}_p^{n\times n}$ ve $C \in \mathbb{H}_p^{m\times n}$. olmak üzere $Y - \eta_A Y \eta_B = \eta_C$ denkleminin bir çözümü $Y \in \mathbb{R}^{4m\times 4n}$ ise $X - A\left({}^{3}\overline{X}\right)B = C$ denkleminin çözümü

$$X = \frac{1}{8-8\alpha}\begin{pmatrix} I_m & iI_m & jI_m & kI_m \end{pmatrix}\left(Y - Q_m^{-1}YQ_n - R_m^{-1}YR_n + S_m^{-1}YS_n\right)\begin{pmatrix} I_m \\ iI_m \\ -jI_m \\ -kI_m \end{pmatrix} \tag{5.31}$$

biçimindedir.

İspat. İspat Teorem 5.2.4.1.'nin ispatına benzer olarak yapılır.

iv. $A\left({}^{1}\overline{X}\right) - XB = C$ **denkleminin çözümü üzerine**

$A\in \mathbb{H}_p^{m\times m}, B\in \mathbb{H}_p^{n\times n}$ ve $C\in \mathbb{H}_p^{m\times n}$ için

$$A\left({}^{1}\overline{X}\right)-XB=C \tag{5.32}$$

denkleminin reel temsili

$$\phi_A Y - Y\phi_B = \phi_C \tag{5.33}$$

biçimindedir. (5.32) denklemini

$$\phi_A \phi_X P_n - \phi_X P_n \phi_B = \phi_C \tag{5.34}$$

biçiminde de yazılabilir. Sonuç olarak (5.32) denkleminin bir çözümü X ise bu durumda (5.33) denkleminin çözümü $Y=\phi_X P_n$ biçimindedir.

Teorem 5.2.4.4. $A\in \mathbb{H}_p^{m\times m}, B\in \mathbb{H}_p^{n\times n}$ ve $C\in \mathbb{H}_p^{m\times n}$. olsun. $\phi_A Y - Y\phi_B = \phi_C$ denkleminin çözümü $Y\in \mathbb{R}^{4m\times 4n}$ ise bu durumda $A\left({}^{1}\overline{X}\right)-XB=C$ denkleminin çözümü

$$X=\frac{1}{8-8\alpha}\left(I_m \;\; iI_m \;\; jI_m \;\; kI_m\right)\left(Y\left({}^{1}P_n\right)-Q_m^{-1}Y\left({}^{1}P_n\right)Q_n+R_m^{-1}Y\left({}^{1}P_n\right)R_n-S_m^{-1}Y\left({}^{1}P_n\right)S_n\right)\begin{pmatrix} I_n \\ iI_n \\ jI_n \\ kI_n \end{pmatrix} \tag{5.35}$$

biçimindedir.

İspat.

$$Y=\begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} & Y_{14} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} & Y_{24} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} & Y_{34} \\ Y_{41} & Y_{42} & Y_{43} & Y_{44} \end{pmatrix}, Y_{uv}\in \mathbb{R}^{m\times n}, u,v=1,2,3,4$$

matrisi (5.33) denkleminin bir çözümü olsun. Bu durumda $Y = \phi_X P_n$ ve

$$Q_m^{-1}\phi_X Q_n = -\phi_X \,,\; R_m^{-1}\phi_X R_n = \phi_X \,,\; S_m^{-1}\phi_X S_n = -\phi_X \text{ ve } Y = \phi_X P_n$$

olduğundan

$$\phi_A\left(-Q_m^{-1}YP_nQ_n\right)P_n - \left(-Q_m^{-1}YP_nQ_n\right)P_n\phi_B = \phi_C$$

$$\phi_A\left(R_m^{-1}YP_nR_n\right)P_n - \left(R_m^{-1}YP_nR_n\right)P_n\phi_B = \phi_C \tag{5.36}$$

$$\phi_A\left(-S_m^{-1}YP_nS_n\right)P_n - \left(-S_m^{-1}YP_nS_n\right)P_n\phi_B = \phi_C .$$

dır. Sonuç olarak Y matrisi (5.33) denkleminin çözümü ise $\left(-Q_m^{-1}YP_nQ_n\right)P_n$, $\left(R_m^{-1}YP_nR_n\right)P_n$ ve $-\left(S_m^{-1}YP_nS_n\right)P_n$ matrisleri de (5.33) denkleminin bir çözümüdür. Ayrıca

$$Y' = \frac{1}{4}\left(Y - \left(-Q_m^{-1}YP_nQ_n + R_m^{-1}YP_nR_n - S_m^{-1}YP_nS_n\right)P_n\right) \tag{5.37}$$

ifadesi de (5.33) denkleminin bir çözümüdür. $\phi_X = YP_n$ olduğundan son ifade sağdan P_n ile çarpılıp düzenlenirse

$$\phi_X = \begin{pmatrix} Z_0 & -\alpha Z_1 & Z_2 & -\alpha Z_3 \\ Z_1 & -Z_0 & Z_3 & -Z_2 \\ Z_2 & -\alpha Z_3 & Z_0 & -\alpha Z_1 \\ Z_3 & -Z_2 & Z_1 & -Z_0 \end{pmatrix},$$

matrisi elde edilir. Burada

$$Z_0 = \frac{1}{4}\left(Y_{11} + Y_{22} + Y_{33} + Y_{44}\right),\ \ Z_1 = \frac{1}{4}\left(\frac{Y_{12}}{\alpha} + Y_{21} + \frac{Y_{34}}{\alpha} + Y_{43}\right),$$
$$Z_2 = \frac{1}{4}\left(Y_{13} + Y_{24} + Y_{31} + Y_{42}\right),\ \ Z_3 = \frac{1}{4}\left(\frac{Y_{14}}{\alpha} + Y_{23} + \frac{Y_{32}}{\alpha} + Y_{41}\right). \tag{5.38}$$

dır. Sonuç olarak

$$X = \frac{1}{8-8\alpha}\begin{pmatrix} I_m & iI_m & jI_m & kI_m \end{pmatrix}\left(Y\left({}^1P_n\right) - Q_m^{-1}Y\left({}^1P_n\right)Q_n + R_m^{-1}Y\left({}^1P_n\right)R_n - S_m^{-1}Y\left({}^1P_n\right)S_n\right)\begin{pmatrix} I_n \\ iI_n \\ jI_n \\ kI_n \end{pmatrix}$$

ifadesi (5.32) denkleminin bir çözümü olur.

v. $A\left({}^2\overline{X}\right) - XB = C$ denkleminin çözümü üzerine

$A \in \mathbb{H}_p^{m\times m}, B \in \mathbb{H}_p^{n\times n}$ ve $C \in \mathbb{H}_p^{m\times n}$ için

$$A\left({}^2\overline{X}\right) - XB = C \tag{5.39}$$

denkleminin reel temsili

$$\mu_A Y - Y\mu_B = \mu_C \tag{5.40}$$

biçimindedir. (5.39) denklemi

$$\mu_A \mu_X P_n - \mu_X P_n \mu_B = \mu_C \tag{5.41}$$

biçiminde de yazılabilir. Sonuç olarak (5.39) denkleminin bir çözümü X ise bu durumda (5.40) denkleminin çözümü $Y = \mu_X P_n$ biçimindedir.

Teorem 5.2.4.5. $A \in \mathbb{H}_p^{m\times m}, B \in \mathbb{H}_p^{n\times n}$ ve $C \in \mathbb{H}_p^{m\times n}$. olsun. $\mu_A Y - Y\mu_B = \mu_C$ denkleminin çözümü $Y \in \mathbb{R}^{4m\times 4n}$ ise bu durumda $A\left({}^2\overline{X}\right) - XB = C$ denkleminin çözümü

$$X = \frac{1}{8-8\alpha}\begin{pmatrix} I_m & iI_m & jI_m & kI_m \end{pmatrix}\left(Y\left({}^2P_n\right) + Q_m^{-1}Y\left({}^2P_n\right)Q_n - R_m^{-1}Y\left({}^2P_n\right)R_n - S_m^{-1}Y\left({}^2P_n\right)S_n\right)_n \begin{pmatrix} I_n \\ -iI_n \\ -jI_n \\ kI_n \end{pmatrix} \quad (5.42)$$

biçimindedir.

İspat. İspat Teorem 5.2.4.4.'nin ispatına benzer olarak yapılır.

vi. $A\left({}^3\overline{X}\right) - XB = C$ **denkleminin çözümü üzerine**

$A \in \mathbb{H}_p^{m\times m}, B \in \mathbb{H}_p^{n\times n}$ ve $C \in \mathbb{H}_p^{m\times n}$ için

$$A\left({}^3\overline{X}\right) - XB = C \quad (5.43)$$

denkleminin reel temsili

$$\eta_A Y - Y\eta_B = \eta_C \quad (5.44)$$

biçimindedir. (5.43) denklemi

$$\eta_A \eta_X P_n - \eta_X P_n \eta_B = \eta_C \quad (5.45)$$

biçiminde de yazılabilir. Sonuç olarak (5.43) denkleminin bir çözümü X ise bu durumda (5.44) denkleminin çözümü $Y = \eta_X P_n$ biçimindedir.

Teorem 5.2.4.6. $A \in \mathbb{H}_p^{m\times m}, B \in \mathbb{H}_p^{n\times n}$ ve $C \in \mathbb{H}_p^{m\times n}$. olsun. $\varphi_A Y - Y\varphi_B = \varphi_C$ denkleminin çözümü $Y \in \mathbb{R}^{4m\times 4n}$ ise bu durumda $A\left({}^{3}\overline{X}\right) - XB = C$ denkleminin çözümü

$$X = \frac{1}{8-8\alpha}\left(I_m \;\; iI_m \;\; jI_m \;\; kI_m\right)\left(Y\left({}^{3}P_n\right) - Q_m^{-1}Y\left({}^{3}P_n\right)Q_n - R_m^{-1}Y\left({}^{3}P_n\right)R_n + S_m^{-1}Y\left({}^{3}P_n\right)S_n\right)\begin{pmatrix} I_n \\ iI_n \\ -jI_n \\ -kI_n \end{pmatrix} \quad (5.46)$$

dir.

İspat. İspat Teorem 5.2.4.4.'nin ispatına benzer olarak yapılır.

Örnek 5.2.4.7. $X - \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & j \end{pmatrix}\left({}^{1}\overline{X}\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2i-j & 1+j \\ -1+i+k & i+j \end{pmatrix}$ eşitliğini sağlayan $X \in \mathbb{H}_p^{2\times 2}$ matrisini bulalım.

Verilen denkleme karşılık gelen reel gösterim

$$Y-\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Y \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2\alpha & 0 & \alpha & 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & -\alpha & -\alpha & 0 & 1 & -\alpha & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -\alpha & -1 \\ 1 & 1 & -\alpha & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ \alpha & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2\alpha & 0 \\ 0 & 1 & -\alpha & 0 & \alpha & 0 & -\alpha & -\alpha \\ 0 & 0 & -\alpha & -1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -\alpha & 0 \end{pmatrix}$$

biçimindedir. Bu reel matris denklemi çözülürse

$$Y=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -\alpha & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha & 0 & 1 & -\alpha & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\alpha & 0 \\ 0 & 1 & -\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

elde edilir. $\phi_X = \frac{1}{4}\left(Y - Q_m^{-1}\phi_X Q_n + R_m^{-1}\phi_X R_n - S_m^{-1}\phi_X S_n\right)$ eşitliğini kullanılırsa

$$\phi_X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\alpha & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha & 0 & 1 & -\alpha & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\alpha & 0 \\ 0 & 1 & -\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

matrisi elde edilir. Buradan

$$X = \frac{1}{2-2\alpha}\begin{pmatrix} 1 & 0 & i & 0 & j & 0 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 & i & 0 & j & 0 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -\alpha & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha & 0 & 1 & -\alpha & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\alpha & 0 \\ 0 & 1 & -\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ i & 0 \\ 0 & i \\ j & 0 \\ 0 & j \\ k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} i & 1+j \\ k & i+j \end{pmatrix}$$

çözümü elde edilir.

Örnek 5.2.4.8. $\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & j \end{pmatrix}\left({}^{1}\overline{X}\right) - X\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2i+j & 2+j+k \\ 1-i-k & 1+i \end{pmatrix}$ eşitliğini sağlayan $X \in \mathbb{H}_p^{2\times 2}$ matrisinin bulalım.

Verilen denkleme karşılık gelen reel gösterim

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Y - Y \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1-\alpha & 2\alpha & 0 & -\alpha & 1 & 0 & -\alpha \\ -\alpha & 1 & \alpha & -\alpha & 0 & 0 & \alpha & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -1+\alpha & 0 & 1 & \alpha & -1 \\ -1 & 1 & \alpha & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha & 1 & 0 & -\alpha & 0 & 1-\alpha & 2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & -\alpha & 1 & \alpha & -\alpha \\ 0 & 1 & \alpha & -1 & -2 & 0 & 0 & -1+\alpha \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & \alpha & -1 \end{pmatrix}$$

biçimindedir. Bu reel matris denklemi çözülürse

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \alpha & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & 1 & \alpha & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

elde edilir. $\phi_X = \frac{1}{4}\left(YP_n - \left(Q_m^{-1}YP_nQ_n - R_m^{-1}YP_nR_n + S_m^{-1}YP_nS_n\right)\right)$ eşitliğini kullanılırsa

$$\phi_X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\alpha & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha & 0 & 1 & -\alpha & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\alpha & 0 \\ 0 & 1 & -\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

matrisi elde edilir. Buradan

$$X = \frac{1}{2-2\alpha}\begin{pmatrix} 1 & 0 & i & 0 & j & 0 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 & i & 0 & j & 0 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -\alpha & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha & 0 & 1 & -\alpha & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\alpha & 0 \\ 0 & 1 & -\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ i & 0 \\ 0 & i \\ j & 0 \\ 0 & j \\ k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} i & 1+j \\ k & i+j \end{pmatrix}$$

çözümü elde edilir.

KAYNAKLAR

[1] Hamilton, W. R. Lectures on quaternions. Hodges and Smith, Dublin, 1853.

[2] Wolf, L. A. Similarity of matrices in which the elements are real quaternions. Bull. Amer. Math. Soc. 42, 737–743, 1936.

[3] Brenner, J. L. Matrices of quaternions. Pasific Journal of Mathematics. 1, 329-335, 1951.

[4] Weigmann, N. A. Some theorems on matrices with real quaternion elements. Canad. J. Math., 7, 191-201, 1955.

[5] Mehta, M. L. Determinants of quaternion matrices. J. Math. Phys. Sci., 8, 559–570, 1974.

[6] Zhang, F. Quaternions and matrices of quaternions. Linear Algebra and its Applications, 251, 21-57, 1997.

[7] Baker, A. Right eigenvalues for quaternionic matrices: A topological approach. Linear Algebra and its Applications, 286, 303-309, 1999.

[8] Huang, L., So, W. On left eigenvalues of a quaternionic matrix. Linear Algebra and its Applications, 323, 105-116, 2001.

[9] Jiang, T. S., Wei, M. S. On a solution of the quaternion matrix equation $X - A\widetilde{X}B = C$ and its Application, Acta Math. Sin., 21, 483-490, 2005.

[10] Wang, Q. W., Zhang, H. S., Yu, S. W. On solutions to the quaternion matrix equation $AXB + CYD = E$. Electron. J. Linear Algebra, 17, 343–358, 2008.

[11] Jiang, T. S., Ling, S. On a solution of the quaternion matrix equation $A\widetilde{X} - XB = C$ and its applications. Adv. Appl. Clifford Algebras, 23, 689–699, 2013.

[12] Segre, C. The real representations of complex elements and extension to bicomplex. Systems. Math. Ann., 40, 413, 1892.

[13] Catoni, F., Cannata, R., Zampetti, P. An introduction to commutative quaternions. Adv. Appl. Clifford Algebras, 16, 1–28, 2006.

[14] Harkin, A., Harkin, J. Geometry of generalized complex numbers. Mathematics Magazine, 77(2), 118–129, 2004.

[15] Scorza-Dragoni, G. The analytic functions of a bicomplex variable. Memorie Accademia d'Italia 5, 597, 1934.

[16] Morin, U. Bicomplex algebra. Memorie Accademia d'Italia 6, 1241, 1935.

[17] Pei, S. C., Chang, J. H., Ding, J. J. Commutative reduced biquaternions and their fourier transform for signal and image processing applications. IEEE Transactions on Signal Processing, 52(7), 2012-2031, 2004.

[18] Catoni, F., Cannata, R., Catoni, V., Zampetti, P. N-dimensional geometries generated by hypercomplex numbers. Adv. Appl. Clifford Algebras, 15 (1), 1-26, 2005.

[19] Isokawa, T., Nishimura, H., Matsui, N. Commutative quaternion and multistate hopfield neural networks, In Proc. Int. Joint Conf. Neural Netw., 1281–1286, 2010.

[20] Kosal, H. H., Tosun, M. Commutative quaternion matrices. Adv. Appl. Clifford Algebras, 24(3), 769-779, 2014.

[21] Sasane, S. M., Sasane, A. A friendly approach to complex analysis. Word Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore, 2014.

[22] Tian, Y. Universal similarity factorication equalities over real Clifford algebras. Adv. Appl. Clifford Algebras, 8(2), 365-402, 1998.

[23] Liitkepohl. H. Handbook of matrices. John Wiley and Sons Ltd. England, 1996.

[24] Jiang, T., Wei, M. On solutions of the matrix equations $X - AXB = C$ and $X - A\overline{X}B = C.$ Linear Algebra and its Applications, 367, 225-233, 2003.

[25] Horn, R. A., Johnson, C. R. Matrix analysis. Cambridge University Press, UK, 1985.

[26] Hartwig, R. E., Putcha, M. S. Semisimilarity for matrices over a division ring. Linear Algebra and its Applications, 39, 125-132, 1981.

[27] Bevis, J. H., Hall, F. J. Pseudo-consimilarity and semi-consimilarity of complex matrices. Linear Algebra and its Applications, 90, 73-80, 1987.

[28] Barnett, S., Storey, C. Matrix methods in stability theory. Nelson, London, 1970.

[29] Barnett, S. Matrices in control theory with applications to linear programming, Van Nostrand Reinhold, New York, 1971.

[30] Aliev, F. A., Larin, V. B. Optimization of linear control systems: analytical methods and computational algorithm. Gordon and Breach, 1998.

[31] Enright, W. H. Improving the efficiency of matrix operations in the numerical solutionof stiff ordinary differential equations. ACM Trans. Math. Softw., 4, 127–136, 1978.

[32] Calvetti, D., Reichel, L. Application of ADI iterative methods to the restoration of noisy images. SIAM J. Matrix Anal. Appl., 17, 165–186, 1996.

[33] Golub, G. H., Van, C. F. Loan. Matrix computations. Johns Hopkins University Press, Baltimore, third edition, 1996.

[34] Jiang, T., Wei, M. On solutions of the matrix equations $X - AXB = C$ and $X - A\overline{X}B = C$. Linear Algebra and its Applications, 367, 225-223, 2003.

[35] Clifford, W. K. Mathematical Papers (ed. R. Tucker), Chelsea Pub. Co., Bronx, NY, 1968.

[36] Study, E. Geometrie der dynamen, Leipzig, 1903.

[37] Catoni, F., Boccaletti, D., Cannata, R., Catoni, V., Nichelatti, E., Zampetti, P. The mathematics of minkowski space-time with an introduction to commutative hypercomplex numbers. Birkhauser Verlag AG, Berlin, 2008.

[38] Cline, R. E. An application of representations for the generalized inverse of a Matrix. MRC Technical Report 592, 1965.

[39] Kula, L., Yaylı, Y. Split quaternions and rotations in semi Euclidean space $\mathbb{E}_2^4$. J. Korean Math. Soc., 44 (6), 1313-1327, 2007.

ÖZGEÇMİŞ

Hidayet Hüda KÖSAL, 13.01.1987 tarihinde Ankara'nın Altındağ ilçesinde doğdu. İlk ve orta öğrenimini Ankara'da tamamladı. 2005 yılında Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünde başladığı lisans eğitimini 2009 yılında tamamladı. Aynı yıl Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Geometri Anabilim Dalında başladığı yüksek lisans eğitimini 2011 yılında tamamladı. 2011 yılında Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Geometri Anabilimde dalında doktora eğitimine, aynı üniversitenin matematik bölümüne ise Araştırma görevlisi olarak göreve atandı. Evli olan Hidayet Hüda KÖSAL halen Sakarya Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde Araştırma Görevlisi olarak görevini sürdürmektedir