

Mühendisler İçin

SONLU ELEMENLAR

Metodunun Temelleri

B. NATH

Çeviren

Doç. Dr. Durmuş GÜNAY

Sakarya Üniversitesi
Mühendislik Fakültesi
Öğretim Üyesi

Mühendisler İçin

SONLU ELEMENLAR

Metodunun Temelleri

B. NATH

Çeviren

Doç. Dr. Durmuş GÜNAY

Sakarya Üniversitesi
Mühendislik Fakültesi
Öğretim Üyesi

ÖNSÖZ

Sonlu eleman metodunda son yıllarda çok büyük gelişme kaydedilmiştir. Esası itibariyle basit olan bu zarif (elegant) ve güçlü metot, bilim adamlarına ve mühendislere tamamen yeni bir alan açmıştır. Çok yakın geçmişte zor ve kompleks olarak bilinen problemler bu metotla daha kolay çözülebilmektedir. Bu metot henüz gelişim sürecindedir. Bilimsel kapsamındaki ve mühendislik çözümlemesindeki yeniliği bakımından araştırmaya açık potansiyelle doludur.

Ne var ki, belki kimi bakımlardan kaçınılmaz olarak, sonlu eleman metodu şimdiye kadar lisans sonrası araştırma ve öğretimi sınırları içinde kalmıştır. Bununla çoğu ders kitaplarının ileri düzeyde bir matematik kapasitesi gerektirmesi birleşince, konu nerede ise mistik bir karmaşıklığa bürünmekte, bu durum orta düzeyde bir matematik bilgisine sahip olanların basit bir sayısal çözümleme metodunu bile kavramasını engellemektedir.

Bu kitapta metodun esaslarını, matris cebirinin temellerine ve bilgisayar programlamaya aşına olanlar için, olabildiğince basit ifadelerle sunmaya çalıştım. Metodun felsefesi ve uygulama tarzı (modus operandi) 1. Bölümde ana hatlarıyla verildi. Mühendislik ve diğer kimi bilim dallarındaki lisans öğrencilerinin karşılaştıkları basit girişler üzerinde dikkati yoğunlaştırarak, 2. Bölümde tanımları, 3. Bölümde problemlerin formüle edilmesini ve 4. Bölümde sınır şartlarını izah ettim. Deneyimler, genellikle yeni başlayanların tümel direngenlik matrisinin (overall stiffness matrix) anlaşılmasını çok zor bulduklarını göstermektedir. Bu nedenle 3. Bölümde bu işlemi kimi ayrıntılarıyla birlikte açıkladım. Yeni başlayanların karşılaşmaları muhtemel bir başka güçlük "sınır şartları" konusu ve "rijit cisim" yer değiştirmesi kavramlarıdır. Bunları basitçe açıklamak için 4. Bölümde basit bir çubuğu örnek verdim. Umarım bu yerinde bir seçim olmuştur. 2. Bölümden 4. Bölüme kadar geliştirilen metodu göstermek için 5. Bölüme birkaç basit giriş probleminin çözümünü yerleştirdim.

6. Bölümü rijit bağlı, 7. Bölümü mafsallı çerçevelerin çözümüne ayırdım. Böyle yapıların analizinde uygun transformasyon matrisleri (dönüşüm matrisleri) ve bunların rolü açıklanarak ayrıntılı olarak çözülen bir örnekle çözüm metodu gösterilmiştir.

Mühendislik, fen bilimleri ya da benzeri bilim dallarının ikinci yarısındaki öğrencilerin 1. Bölümden 7. Bölüme kadar olan konuları kavramakta zorluk çekmeyecekleri kanısındayım.

8. Bölüm lineer elastisite teorisine girişi kapsıyor. Sonlu elemanların dirençlilik (stiffness) ve diğer özelliklerinden hesaplanan genel bağıntılar 9. Bölümde çıkarılmıştır. Bu bölümde elemanın varsayılan "yerdeğiştirme fonksiyonu" nun seçimi için yakınsaklık ve diğer kriterlerin basitliklerini de özellikle vurgulayarak izah ettim. Ayrıca bir sonlu elemanın birincil matrisleri adını verdiğim $[c]$, $[M]$ ve $[N]$ matrisleriyle (çünkü elemanların bütün özellikleri bu matrislerle hesaplanabilmektedir) karakterize edildiğine değindim.

Kabukların ve plakların düz sonlu elemanlarla çözümü 10. Bölümde anlatıldı. Burada bu elemanların birincil matrisleri yeni başlayanlara boyut bakımından çok zor görünmekle birlikte, basit elemanlarla kıyaslandığında otomatik işlemlerinin ek bir zorluk göstermediğine değindim. Bu nedenle lisans öğrencilerinin son yılında basit düz plak problemlerini çözmek için bu elemanları kullanmakta yüreklendirilmeleri gerektiği kanısındayım. Bu amaçla ayrıntılı olarak çözülmüş benzer bir örneği bu bölüme yerleştirdim.

11. Bölüm, düzlem elastisite problemlerinin sonlu eleman çözümü ile ilgilidir. Bu bölümde verilen ayrıntılı olarak çözülmüş bir örnek parçalara ayırma problemleri için özellikle seçilmiştir. Verilen örnek, uygulamadaki bu tip problemlerin çoğunda olduğu gibi, belirlenen sınır şartlarına göre değişiklik gösterir. 12. Bölüm basit üç-boyutlu elemanlar kullanarak üç-boyutlu elastisite problemlerinin çözümü üzerine kısa bir açıklamayı kapsamaktadır.

Elasto-dinamik problemlerinin çözümü mühendislik çözümlemesinin önemli bir kısmını oluşturur. Bu problemlerin çözüm yöntemi kesim 13.1 de verilmiştir. Kesim 13.2 de anlatılan alan denklemlerinin çözümü, çeşitli bilimsel ve teknik disiplinlerde oldukça önemli bir yere sahiptir. Bu denklemlerden seçilen birkaçını sonlu elemanlarla çözmek için basit "elastik anoloji" metodunu kullandım. Bu yaklaşımın başlıca avantajı çözüm şemasının bir analog yapının veya elastik problemin şemasına özdeş olmasıdır. Bu problemler için genel varyasyon yaklaşımının tipik bir örneği Ek-2 de verilmiştir. 14. Bölümde, yapıların kritik yüklerinin basit ve elegan bir biçimde sonlu elemanlar kullanarak hesaplanması gösterilmiştir.

15. Bölümün ana konusu sonlu elemanların bilgisayar programlaması üzerinedir.

10. Bölümden 14. Bölüme kadar lisans sonrası öğretim düzeyi esas alınmıştır. Bununla birlikte lisans öğrencileri de bu bölümden önemli ölçüde yararlanabilirler.

9. Bölümden 15. Bölüme kadar yazılışında bana yardımcı olan kardeşim Mr. P. Nath'a, sayısız değerli önerileri ve yüreklendirmeleri için borcum sonsuzdur.

Bu kitabı yazmaktan çok mutluyum. Bununla birlikte, şunu itiraf etmek zorundayım ki, belli bir bilgiye sahip olmakla o bilgiyi basitçe ve kısaca ifade edebilmek arasındaki farkı her zamankinden daha çok takdir ediyorum.

Queen Mary College,
University of London

B.N.

ÇEVİRENİN ÖNSÖZÜ

1960 lardan sonra, mühendislik ve bilimsel alanlarda kullanılmaya başlayan sonlu elemanlar metodu, özellikle bilgisayarların imkanlarının hızla genişlemesi ve kullanımının yaygınlaşmasının paralelinde, çok büyük gelişmeler kaydetmiştir.

Yazarın önsözünde değindiği, yalnız lisans sonrası öğrencilerinin değil, mühendislik eğitimi yapan kırsans öğrencilerinin de bu metodu öğrenmeleri gerekliliği; kitabın yazıldığı yıllardan günümüze kadar metodun hemen her mühendislik alanında çok geniş kullanım imkanı bulmuş olması sonucu, bugün mühendis adaylarının bu metodu tanımaları zorunluluk haline gelmiş bulunmaktadır.

Bu kitap, mukavemet ve temel bir matris cebiri bilgisine dayalı olarak, sonlu elemanlar metodunu esasları itibariyle anlatmak amacıyla yazılmış bir giriş kitabı niteliğindedir.

Kimi üniversitelerde okutulan sonlu elemanlar derslerinde, öğrencilere verilen ders notları dışında, bu konuda, dilimizde, özgün ve çeviri bir kitap —bildiğim kadarıyla— bulunmamaktadır. Bu nedenle, kitabın bu alandaki eksikliği gidermede önemli bir işlevi olacağı kanısındayım.

D. GÜNAY

Eylül 1990, Adapazarı

İÇİNDEKİLER

1 GİRİŞ

1.1 Genelleme 1.2 Sonlu eleman metodu 1.3 Niçin sonlu elemanlar

2 DİRENGENLİK KAVRAMI: KİRİŞ ELEMAN

2.1 Varsayımlar 2.2 Yay sabiti 2.3 Serbestlik derecesi 2.4 Uç ve düğüm vektörleri 2.5 Eleman direngenlik matrisi 2.6 Direngenlik katsayılarının çıkarımı 2.7 Notasyon

3 TÜMEL DİRENGENLİK MATRİSİNİN TOPLANMASI

3.1 Uygunluk ve denge şartları 3.2 Eleman alt matrisleri 3.3 Bir kirişin tümel direngenlik matrisinin toplanması 3.4 Tümel direngenlik matrisinin toplanması için genel basit bir yöntem 3.5 $S(i, j, k)$ üzerine ek açıklamalar

4 SINIR ŞARTLARI

4.1 Rijit cisim yerdeğiştirmesi 4.2 Sınır şartları 4.3 Cismi elemanlara ayırmak için ipuçları

5 ÇÖZÜLMÜŞ KİRİŞ PROBLEMLERİ

5.1 İki ucu sabitlenmiş üniform bir kiriş 5.2 Düzgün yaylı yük taşıyan üniform ankastre bir kiriş 5.3 Birkaç örnek

6 RİJİT-BAĞLI ÇERÇEVE

6.1 Genelleme 6.2 Transformasyon matrisi kavramı 6.3 Düzlem transformasyon matrisinin çıkarımı 6.4 Bir düzlem elemanın "genel" direngenlik matrisi 6.5 Bir düzlem çerçeve elemanın genel alt matrisleri 6.6 Rijit bağlı uzay çerçeveler 6.7 İç kuvvetlerin hesabı 6.8 Bir örnek 6.9 Eğri eksenli kirişler

7 MAFSAL-BAĞLI ÇERÇEVE

7.1 Genelleme 7.2 Düzlem çerçevelerin hesaplanması 7.3 Uzay çerçevelerin hesaplanması 7.4 Uzuvlardaki iç kuvvetler 7.5 Bir örnek

8 LİNEER ELASTİSİTENİN TEMELLERİ	74													
8.1 Yerdeğiştirmeler ve zorlanmalar	8.2 Isıl zorlanmalar	8.3 İlk zorlanma												
8.4 Gerilme zorlanma bağıntıları	8.5 Düzlem zorlanma	8.6 Düzlem gerilme												
8.7 Denge denklemleri	8.8 Uygunluk şartları	8.9 Sınır şartları	8.10 Asal gerilmeler	8.11 Lamé denklemleri										
9 GENEL ELEMAN KAREKTERİSTİKLERİ	93													
9.1 Birim yerdeğiştirme teoremi	9.2 Eleman direngenlik karakteristikleri													
9.3 Yaylı dış kuvvetler	9.4 Kütle kuvvetleri	9.5 Yerdeğiştirme fonksiyonu— çözümün hassasiyeti	9.6 Cismin bölünmesi	9.7 Birkaç örnek	9.8 Denklemlerin özeti ve gözlemler									
10 PLAK VE KABUK YAPILAR	111													
10.1 Genelleme	10.2 Gerilme-zorlanma bağıntısı	10.3 Dikdörtgen "plak" eleman	10.4 Üçgen "plak" eleman	10.5 Eşdeğer kuvvet vektörü	10.6 Bir örnek	10.7 Ortotropik plaklar	10.8 "Gerilmiş" veya "basılmış" plağın çözümlenmesi	10.9 Kabukların analizi, katlı çatılar vb.	10.10 Plak kiriş sistemleri	10.11 Gözlemler				
11 DÜZLEM PROBLEMLERİN ÇÖZÜMLENMESİ	141													
11.1 Üçgen eleman	11.2 Dikdörtgen eleman	11.3 Dörtgen eleman	11.4 Dönüşüm matrisi	11.5 Bir örnek	11.6 Transvers izotropi									
12 ÜÇ-BOYUTLU GERİLME ANALİZİ	164													
12.2 Dörtüzlü eleman	12.1 Dikdörtgen prizma eleman	12.3 Sonuçlar												
13 ELASTO-DİNAMİK VE ALAN PROBLEMLERİ	171													
13.1 Elasto-dinamik problemler	13.1.1 Eleman "kütle" matrisi	13.1.2 Sönümsüz zorlanmış titreşim	13.1.3 Zorlanmış frekanslar	13.1.4 Sönümlü zorlanmış titreşim	13.2 "Alan" denklemleri	13.2.1 Poisson denklemi	13.2.2 Poisson denkleminin çözümü için bir "elastik analogi"	13.2.3 Poisson denkleminin çözümü	13.2.4 Sınır şartlarının uygulanması	13.2.5 Poisson denkleminin çözümüne bir örnek	13.2.6 Gerilmelerin hesabı	13.2.7 Laplace denklemi	13.2.8 Dalga denklemi	13.2.9 Dalga denkleminin çözümüne bir örnek

14 STABİLİTE PROBLEMLERİ 205

14.1 Genelleme 14.2 Kuvvet-yerdeğiştirme bağıntısı 14.3 Çubuk elemanların geometrik direngenlik matrisi 14.4 Mafsalsal-bağlı çerçevelerde uygulama 14.5 Kiriş elemanların geometrik direngenlik matrisi 14.6 Plaklarda uygulama 14.7 Eksenel veya düzlem içi kuvvetlerin etkisinde bulunan yapıların transvers titreşimi

15 HESAPLAMA 221

15.1 Genelleme 15.2 $[K_i]$ yi iyileştirme yöntemleri 15.3 Bir matrisin dolaylı olarak tersinin alınması 15.4 $[K]$ nın bir dikdörtgen matris gibi çözümü

EKLER

- 1 SI birimlerinin F.P.S. birimlerine dönüşümü, 213
- 2 Varyasyon prensibinden "alan" elemanların özelliklerinin çıkarılması, 232
- 3 Üçgen alan üzerinde integrasyon, 234

1 GİRİŞ

1.1 GENELLEME

Bilim adamları ve mühendisler alışılmış analitik metotlarla çözümü çok zor hatta imkansız fiziksel problemlerle sık sık karşılaşır. Örneğin bir dış kuvvet takımı etkisinde üç boyutlu bir elastik cisim düşünelim. Bu kuvvetlere cismin "kesin" tepkisini hesaplamak için deformasyonlar cinsinden yazılmış denklemlerin bir "kapalı form" çözümünü aramak zorundayız. Bununla birlikte genellikle kompleks geometrik şekilli uygulama problemlerinin böyle bir çözümünü elde etmek aşırı ölçüde zor ve çoğunlukla imkansızdır. Bu tip problemler mühendislik ve diğer bilim dallarında çok sık ortaya çıkmaktadır. Böyle bir problemle karşılaşan çözümleyici doğal olarak "sayısal" adı verilen çözüme başvuracaktır. Başka metotlarla çözülemeyen problemlerin çözümünde kullanılabilen çok sayıda sayısal yol vardır. Sonlu eleman metodu bunlardan biridir. Sonlu eleman metodu yeni bir çözüm yöntemi olup kendisini diğerlerine üstün kılan seçkin özelliklere sahiptir.

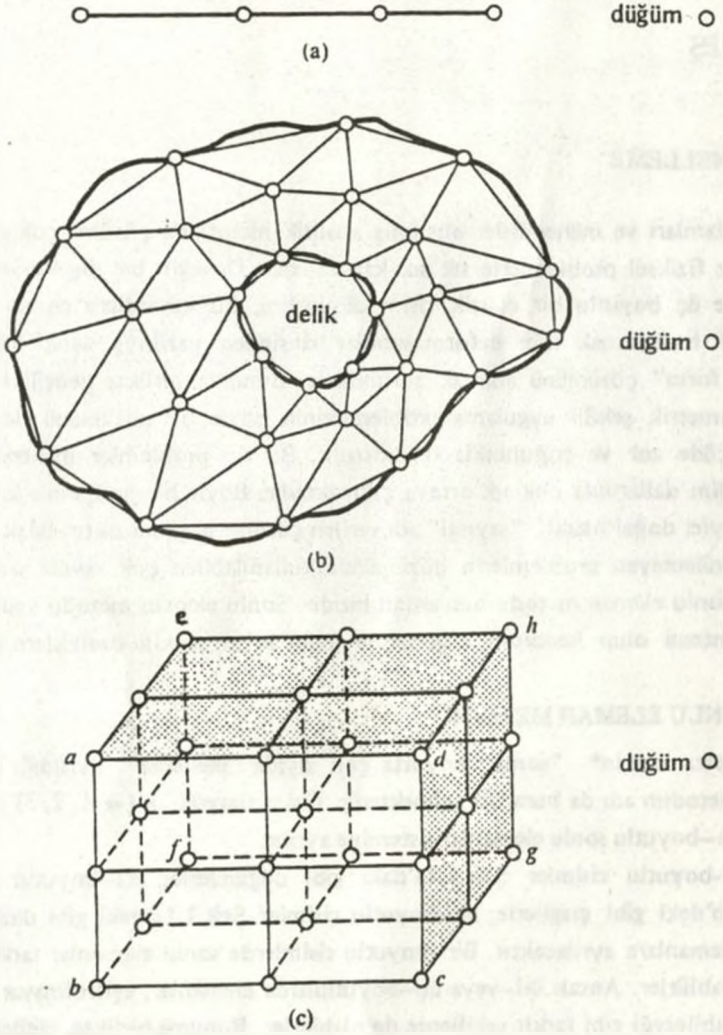
1.2 SONLU ELEMAN METODU

Bu metotta cismin* "sonlu" boyutta çok sayıda "elemana" ayrıldığı tasavvur edilir. Metodun adı da buradan gelmektedir. Cisim uzayda n ($= 1, 2, 3$) boyuta sahipe, n -boyutlu sonlu elemanlar sistemine ayrılır.

Bir-boyutlu cisimler Şek.1.1a'daki gibi düğümlerle; iki-boyutlu cisimler Şek.1.1b'deki gibi çizgilerle; üç-boyutlu cisimler Şek.1.1c'deki gibi düzlemlerle sonlu elemanlara ayrılacaktır. Bir-boyutlu cisimlerde sonlu elemanlar farklı uzunlukta olabilirler. Ancak iki-veya üç-boyutlularda elemanlar, eşit olmayan boyutlarda olabileceği gibi farklı şekillerde de olabilirler. Bununla birlikte, bütün durumlarda cismi temsil eden sonlu elemanlar Şek.1.1a, b ve c'de görüldüğü gibi düğümlerle bağlanacaktır. Sonuçta cisim, sonlu elemanlar ve onları birbirine bağlayan düğümlerden oluşan bir sistemle yer değiştirmiş olacaktır.

Sonlu elemanların düğümlerle bağlanış durumu Şek.1.2'deki gösterimde en iyi şekilde anlaşılmaktadır. Burada düzgün, birim kalınlıklı biri-üçgen diğeri dikdörtgen iki düzlem sonlu eleman vardır.

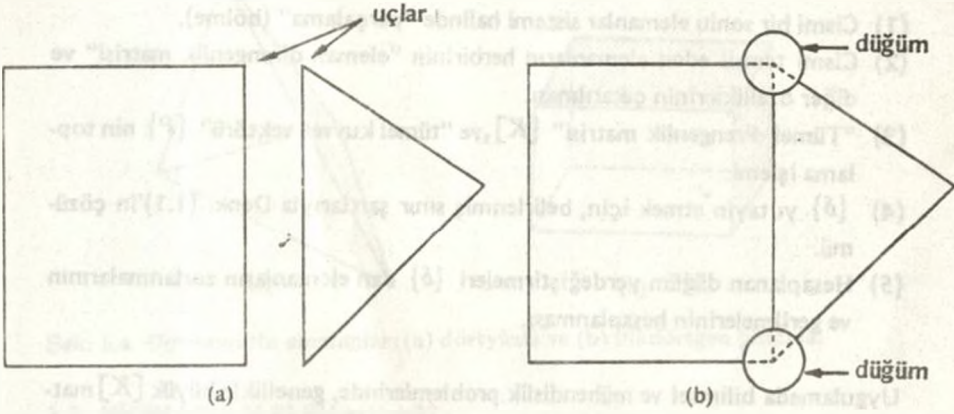
*Genel olarak, "cisim" terimi; yapı, sürekli ortam veya problemin bölgesi anlamında kullanılmaktadır.



Şek.1.1 (a) Üç doğrusal sonlu elemana ayrılmış bir boyutlu bir cisim. (b) Üçgen elemanlar sistemi haline getirilmiş iki boyutlu delikli bir cisim. (c) a, b, c, d, e, f, g, h şeklinde 8 özdeş dikdörtgen prizma elemana ayrılmış üç boyutlu bir cisim.

Şek.1.2a'da elemanlar ayrı ayrı , birbirine bağlanmamış biçimde gösterilmiştir. Düğümleri Şek.1.2b'deki gibi komşu sonlu elemanları uçlarından* birbirine bağlayan ve onları birarada tutan "somun-civata" bağlantısı gibi düşünebiliriz. Öyleki düğümler kaldırıldığında elemanlar birbirinden ayrılırlar.

* Sonlu elemanın "uçları", elemanın Şek.1.2'deki gibi düğümlere bağlandığı köşeler veya son noktalar halinde tanımlanmıştır.



Şek.1.2 (a) Birim üniform kalınlıklı iki düzlem sonlu eleman . (b) (a)'daki sonlu elemanların düğümlerle bağlantısı.

Düğüm kaldırıldığında elemanlar birbirinden ayrılacağından komşu sonlu elemanlar arasında fiziksel süreklilik yoktur.

Metodun çözümlenmesinde bundan sonraki adım, cisim temsil eden elemanların herbirinin "eleman direngenlik matrisi"ni (element stiffness matrix) tanımlamaktır. Daha sonra eleman direngenlik matrisleri, "parçalara ayrılmış cismin tamamına ait "tümel direngenlik matrisi"ni (overall stiffness matrix) oluşturmak üzere toplanır. Bu toplamada, cismin sonlu eleman modelindeki bütün düğümlerde kuvvetlerin dengesi ve yerdeğiştirmelerin sürekliliği sağlanır. Buradan şu matris denkleminde ulaşılır.

$$[K]\{\delta\} = \{P\} \quad (1.1)$$

$[K]$, cismin tümel direngenlik matrisini tanımlar. Tümel kuvvet vektörü $\{P\}$, bütün düğümlere uygulanan dış kuvvetleri; $\{\delta\}$ ise, bütün düğümlerin yerdeğiştirmelerini göstermektedir. Bu kitapta $[]$ işareti kare (veya dikdörtgen) matrisleri, $\{ \}$ işareti vektörü gösterecektir.

Denk.(1.1) incelenirse, $[K]$ nitelik bakımından, parçalara ayrılmış cisimde birim yerdeğiştirme oluşturacak kuvveti ifade eder. Buradan cismin sonlu eleman modelini bir yaya eşdeğer olarak düşünürsek cismin "direngenliği" $[K]$ 'nın "yay sabitine" karşılık olacağı açıktır. Dolayısıyla sonlu eleman metodu, esas itibarıyla, cismin "direngenlik" açısından analizinin yapıldığı bir metottür. Direngenlik kavramı kesim 2.2'de anlatılacaktır.

Cisme etkiyen belirli bir dış kuvvetler ve belirli bir sınır şartları takımı için, Denk.(1.1)'den yegane çözüm olarak düğüm yerdeğiştirmeleri $\{\delta\}$ bulunur. Yerdeğiştirmelerden de, gerilmeler ve zorlanmalar hesaplanabilir.

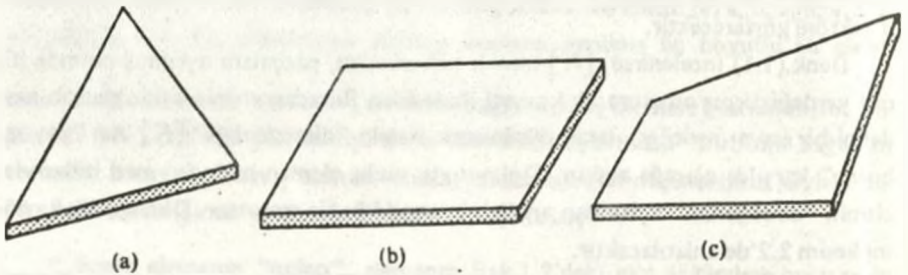
Özetlenirse, verilen bir problemin sonlu eleman metodu ile çözmek için sırası ile aşağıdaki işlemlerin uygulanması gerekir:

- (1) Cismi bir sonlu elemanlar sistemi halinde "parçalama" (bölme).
- (2) Cismi temsil eden elemanların herbirinin "eleman direngenlik matrisi" ve diğer özelliklerinin çıkarılması.
- (3) "Tümel direngenlik matrisi" $[K]$, ve "tümel kuvvet vektörü" $\{P\}$ nin toplama işlemi.
- (4) $\{\delta\}$ yı tayin etmek için, belirlenmiş sınır şartlarıyla Denk. (1.1)'in çözümü.
- (5) Hesaplanan düğüm yerdeğiştirmeleri $\{\delta\}$ dan elemanların zorlanmalarının ve gerilmelerinin hesaplanması.

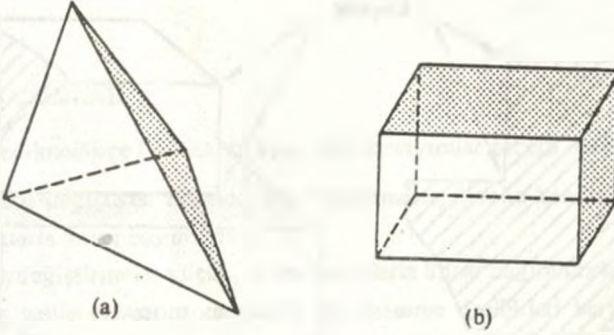
Uygulamada bilimsel ve mühendislik problemlerinde, genellikle, büyük $[K]$ matrisleri doğar. Bu yüzden, Denk. (1.1)'i çözmek için bilgisayar kullanılması kaçınılmaz hale gelir. Yukarıdaki işlemleri otomatik hale getirmek için basit programlar yazılabilir. Gerçekten sonlu eleman metodu, otomatik hesaplama ile birleştirilerek, çözümü çok zor hatta olanaksız karmaşık fiziksel problemleri hassas olarak çözmekte çok etkin ve zarif bir araç oluşturur.

ELEMAN BİÇİMİNİN SEÇİMİ

Şek.1.3 ve 1.4, tipik bazı eleman biçimlerini göstermektedir. Verilen bir cismin nasıl bölüneceğinin (elemanlara ayırma) belirlenmesinde cismin geometrisi, özellikle iç ve dış sınırlarının biçimi (Şek.1.1b'deki deliğin çevresi tipik bir iç sınırdır), geniş ölçüde yol gösterici olacaktır. İki-boyutlu cisimlerde, elemanın biçimi, cismin biçimine bağlı olarak bulunur. Eğri ve düzgün olmayan sınırlarda, üçgen ve dörtgen elemanlar, dikdörtgen elemanlardan daha elverişlidir. Üç boyutlu cisimlerde, dört yüzlü (üçgen pirizma), dikdörtgen pirizmadan daha elverişlidir (Şek. 1.4). Cismin şekline bağlı olarak, uygulamada karışık bölme yapma belli bir eleman kullanmaktan daha uygun olabilir. Şek. 1.5 bir düzlem cismi temsil eden böyle bir kombinasyonu göstermektedir.



Şek. 1.3 İki-boyutlu (düzlem) elemanlar: (a) üçgen, (b) dikdörtgen ve (c) dörtgen

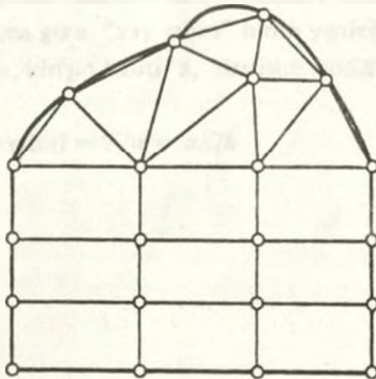


Şek. 1.4 Üç-boyutlu elemanlar: (a) dörtyüzlü ve (b) dikdörtgen prizma.

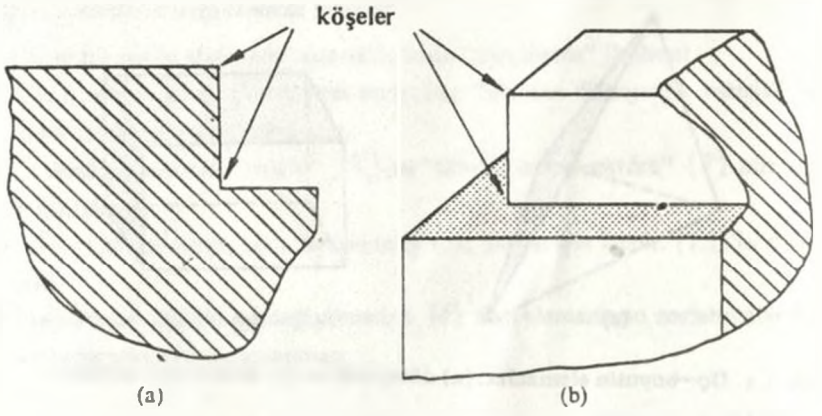
1.3 NİÇİN SONLU ELEMANLAR?

Diğer sayısal metotlar özellikle sonlu farklar metodu daha eski ve güvenilir olduğu halde, sonlu eleman metodu kullanımı neden tercih edilmelidir? Sonlu eleman metodunu diğer metotlara üstün kılan başlıca hususlar şunlardır:

- (1) Sonlu elemanlar, boyutları ve şekillerinin esnekliği nedeniyle, verilen bir cisim temsil edebilir, hatta karmaşık şekilli bir cisimde daha güvenilir olabilir.
- (2) Çok bağlantılı bölgeler (yani bir veya çok delikli cisimler) veya köşeleri olan bölgeler (Şek. 1.6) zorluk çekilmeksizin incelenebilir.
- (3) Değişik malzeme ve/ya geometrik özellikleri bulunan problemler ek bir zorluk göstermez. Geometri ve malzeme non-lineeriteleri, kalıtsal olsa bile (örneğin zamana bağlı) malzeme özellikleri, kolaylıkla gözönüne alınabilir.
- (4) Sebep-sonuç bağıntılarına ait problemler tümel direngenlik matrisi ile birbirine bağlanan genelleştirilmiş "kuvvetler" ve "yerdeğiştirmeler" cinsinden formüle edilebilir. Sonlu eleman metodunun bu özelliği problemin



Şek. 1.5 Üçgen ve dikdörtgen elemanlara bölünmüş bir düzlemsel cisim.



Şek. 1.6 Köşeler (a) iki boyutlu cisimde ve (b) üç boyutlu cisimde.

anlaşılmasını ve çözülmesini hem mümkün kılar hem de basitleştirir.

(5) Sınır şartları kolayca uygulanır.

(6) Sonlu eleman metodunun çok yönlülük ve esnekliği karmaşık yapılarda, sürekli ortam, alan ve diğer problemlerde sebep sonuç ilişkilerini hesaplamak için çok etkin bir şekilde kullanılabilir. Analitik ve deneysel metotlardan daha hassas sonuç verir.

Yukarıdaki 1, 3, 5 ve özellikle 2. şıkkın sonlu farklar işlemi önemli ölçüde zorluk gösterir.



2 DİRENGENLİK KAVRAMI: KİRİŞ ELEMAN

2.1 VARSAYIMLAR

Tersi ifade edilmedikçe bu kitapta aşağıdaki varsayımlar geçerli olacaktır.

- (1) Şekil değiştiren cisimde, yerdeğiştirmeler, Hooke kanunu uyarınca, kuvvetlerle lineer bağımlıdır.
- (2) Yerdeğiştirmeler küçük, ve zorlanmalarla lineer bağımlıdır.
- (3) Bir sonlu elemanın geometrik ve malzeme özellikleri heryerinde sabittir.

(1) varsayımına uymayan cisimlere "malzeme bakımından lineer olmayan" (non-linear) cisimler denir. Bu tür davranış, non-linear elastik ve plastik veya viskoelastik malzemelerde görülür.

(2) varsayımına uyan cisimlere "geometrik olarak lineer" cisimler denir. Ancak, yerdeğiştirmeler, cismin geometrisinde hesaba katılır ölçüde bir değişiklik oluşturacak kadar büyük ise, "geometrik non-linear" tarzda davranıyor demektir. Geometrik non-linearite Bölüm 14 de anlatılacaktır.

(3) varsayımı, cismin malzeme ve/ya geometrik özelliklerinin noktadan noktaya değişmesi halinde, herbir eleman için bu özelliklerin ortalama değerlerinin o elemanın heryerinde sabit kaldığının varsayılacağını ifade etmektedir. Böylece, cismi temsil eden elemanların herbiri farklı fakat özellikleri sabit olacaktır. Bu özelliklerin değişimi sürekli fonksiyonlarla ifade edilebiliyorsa bu varsayım, genelde, kaldırılır (Bkz. kesim 9.8b).

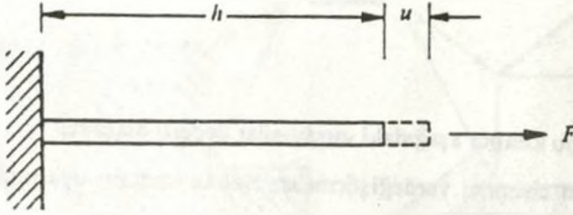
2.2 YAY SABİTİ

Okuyucular, çeşitli teknik disiplinlerde "yay sabiti" terimiyle sık sık karşılaşmış olabilirler. Bu kavram sonlu eleman metodunun temelidir. Bölüm 1'de değinildiği gibi, metod esası bakımdan bir "direngenlik" metodudur.

Şek. 2.1'deki prizmatik üniform kirişe aksenal F kuvveti etkidiğinde, elastik uzaması u olsun. Tanıma göre, "yay sabiti" birim yerdeğiştirme oluşturmak için gerekli kuvvettir. Burada, kirişin kesiti a , elastisite modülü E ile gösterilirse, o takdirde,

$$\text{yay sabiti} = F/u = aE/h$$

olacaktır.



Şek. 2.1 Eksenel bir kuvvet etkisindeki, üniform prizmatik kiriş.

(1) varsayımından dolayı kesim 2.1, aE/h büyüklüğü belli bir kiriş için daima sabit kalır. Aynı şekilde kirişin serbest ucuna, herbiri kendine özgü yerdeğiştirmeler doğuran moment, kesme kuvveti ve benzer kuvvetler ayrı ayrı uygulanabilir. Herbir duruma karşı gelen "yay sabiti" kuvvet/yerdeğiştirme oranı şeklinde hesaplanabilir.

"Yay sabiti" terimi yerine daha uygun bulduğumuz, "direngenlik" (stiffness) terimini kullanacağız. Böylece Denk. (2.1)'deki yay sabiti kirişin "eksenel direngenliği" olacaktır. Benzer şekilde, "eğilme direngenliği", "burulma direngenliği" olacaktır.

2.3 SERBESTLİK DERECEŚİ

Şek.2.2a'daki kirişin, Şek. 2.2b'de gösterilen sonlu elemanlara bölünmesini düşünelim. Burada, kitabın bundan sonraki kısmındaki gibi, daire içine alınmış sayılar, "düğüm numaralarını"; kare içine alınmış sayılar, "eleman numaralarını" göstermektedir. Buna ek olarak, herbir elemanın uçları a, b harfleriyle gösterilmiştir (uygunluk olsun diye, uçlar, harf yerine sayılarla tanımlanabilir).

Şimdi, bu kiriş bir dış kuvvet takımı etkisinde bulunsun (kuvvetler şekilde gösterilmemiştir). Bu dış kuvvetler, üç tür iç (reaksiyon) kuvvet yani, eksenel kuvvet F , kesme kuvveti Q ve eğilme momenti M 'i doğuracaktır. Yerdeğiştirmeler sırasıyla u , v ve θ olsun. Bundan sonra; bir elemanı, diyelim 2 numaralı elemanı, izole ederek, Şek.2.2c'de gösterildiği gibi bu elemanın uçlarındaki iç kuvvetleri gösterebiliriz.

Notasyon. Şek. 2.2c'deki birinci indis elemanın ucunu, ikincisi o ucun ait olduğu elemanı tanımlıyor. Örneğin F_{a2} , iki numaralı elemanın a ucundaki eksenel iç kuvvettir. Benzer şekilde θ_{bi} , i nolu elemanın b ucundaki dönmeyi gösteriyor.

Şek. 2.2b'deki elemanlarda, herbir uçta, üç tür kuvvet ve bunlara karşı gelen yerdeğiştirmeler meydana gelmektedir. Bu nedenle bu kirişin herbir elemanı* üç serbestlik derecelidir. Bu sonlu elemanın serbestlik derecesi, uçlarının herbirinde

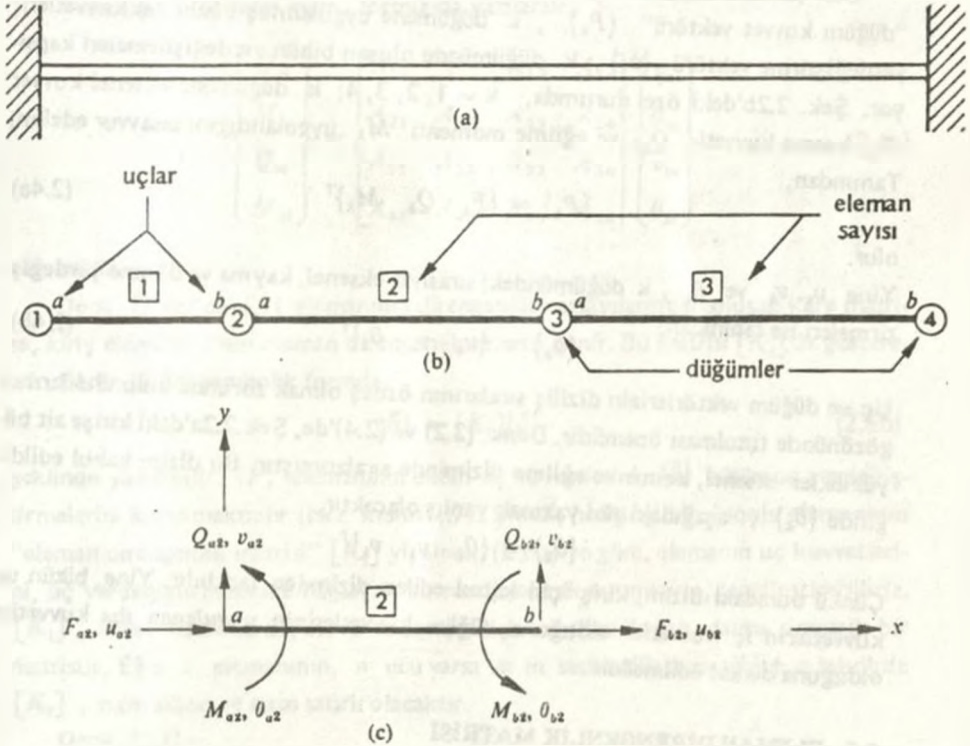
* Daha açık söylenirse, serbestlik derecesi uçlara (veya düğümlere) aittir. Bir sonlu elemanın m serbestlik dereceli olduğunu söylediğimizde, gerçekte onun uçlarının (veya düğümlerinin) m serbestlik dereceli olduğunu söylemiş oluruz.

oluşan kuvvet sayısı ve bunun sonucu olarak yerdeğiştirmelerin sayısı şeklinde tanımlanacaktır.

2.4 UÇ VE DÜĞÜM VEKTÖRLERİ

Bir sonlu elemanın uç vektörleri, onun uçlarına aittir. i nolu sonlu elemanın uçları a, b, c, \dots , ise, o takdirde elemanın "uç kuvvet vektörleri", $\{P_{a1}\}, \{P_{b1}\}, \{P_{c1}\} \dots$; şeklinde tanımlanacaktır. Örneğin $\{P_{a1}\}$, i elemanının a ucundaki bütün iç kuvvetleri kapsar; benzer olarak $\{P_{b1}\}$, i nin b ucundakileri kapsar, v.b. Şek. 2.2c'deki özel durumda, eleman a ve b uçlarına sahip ve $i = 2$ dir. Sonuç olarak, elemanın "uç kuvvet vektörleri"

$$\{P_{a2}\} = \begin{Bmatrix} F_{a2} \\ Q_{a2} \\ M_{a2} \end{Bmatrix} = \{F_{a2} \quad Q_{a2} \quad M_{a2}\}^T \quad (2.2a)$$



Şek. 2.2 (a) Her iki ucu sabitlenmiş bir kiriş. (b) (a)'nın sonlu eleman metodu. (c) 2 elemanının uçlarındaki kuvvetler ve yerdeğiştirmeler (oklar pozitif yönleri göstermektedir).

$$\text{ve} \quad \{P_{b2}\} = \{F_{b2} \quad Q_{b2} \quad M_{b2}\}^T \quad (2.2b)$$

dır.

Notasyon. $\{ \}^T$ Sembolü, "transpoze edilmiş" bir vektörü (satırlar sütunlar yerine yazılmış) tanımlıyor. Yerden tasarruf etmek için, uzun vektörleri, genellikle bu şekilde transpoze edilmiş formda yazacağız.

Uçları a, b, c, ..., olan i sonlu elemanın uç yerdeğiştirme vektörleri $\{\delta_{ai}\}$, $\{\delta_{bi}\}$, $\{\delta_{ci}\}$... şeklinde tanımlanacaktır. Örneğin, $\{\delta_{ai}\}$, i elemanının a ucunda oluşan bütün yerdeğiştirmeleri kapsıyor. Benzer şekilde $\{\delta_{bi}\}$, i elemanının b ucundaki yerdeğiştirmeleri kapsamaktadır ve v.b. Şek. 2.2c'deki özel durumda

$$\{\delta_{a2}\} = \{u_{a2} \quad v_{a2} \quad \theta_{a2}\}^T \quad (2.3a)$$

$$\{\delta_{b2}\} = \{u_{b2} \quad v_{b2} \quad \theta_{b2}\}^T \quad (2.3b)$$

yazabiliriz.

Öte yandan, düğüm vektörleri bölünmüş cismin düğümlerine aittir. Böylece "düğüm kuvvet vektörü" $\{P_k\}$, k düğümüne uygulanmış bütün dış kuvvetleri; yerdeğiştirme vektörü $\{\delta_k\}$, k düğümünde oluşan bütün yerdeğiştirmeleri kapsıyor. Şek. 2.2b'deki özel durumda, $k = 1, 2, 3, 4$; k düğümüne aksenal kuvvet F_k , kesme kuvveti Q_k ve eğilme momenti M_k uygulandığını tasavvur edelim. Tanımdan,

$$\{P_k\} = \{F_k \quad Q_k \quad M_k\}^T \quad (2.4a)$$

olur.

Yine u_k , v_k ve θ_k , k düğümündeki sırasıyla aksenal, kayma ve dönme yerdeğiştirmeleri ise tanımdan,

$$\{\delta_k\} = \{u_k \quad v_k \quad \theta_k\}^T \quad (2.4b)$$

Uç ve düğüm vektörlerinin diziliş sıralarının özdeş olmak zorunda bulduklarının gözönünde tutulması önemlidir. Denk. (2.2) ve (2.4)'de, Şek.2.2a'daki kirişe ait büyüklükler aksenal, kesme ve eğilme diziminde sıralanmıştır. Bu dizim kabul edildiğinde $\{\delta_k\}$ 'yi aşağıdaki gibi yazmak yanlış olacaktır.

$$\{\delta_k\} = \{\theta_k \quad u_k \quad v_k\}^T$$

Çünkü buradaki dizim, giriş için kabul edilen dizimden farklıdır. Yine, bütün uç kuvvetlerin iç kuvvetler olduğuna, düğüm kuvvetlerinin uygulanan dış kuvvetler olduğuna dikkat edilmelidir.

2.5 ELEMAN DİRENGENLİK MATRİSİ

(1) varsayımına göre (kesim 2.1), kuvvetler yerdeğiştirmelerle lineer bağımlıdır. Bu lineer oluşun çok önemli bir sonucu "süperpozisyon prensibi" dir. Bu prensibi kullanarak birkaç "sebebin" aynı andaki toplam "etki" si, herbir sebebin ayrı ayrı etkilerinin toplamıdır, şeklinde ifade edilebilir. Şimdi, i numaralı üniform bir giriş

elemanı düşünelim ve serbestlik derecesi Şek. 2.2c'de gösterilen kirişle aynı olsun. Bu prensibi kullanarak, i kiriş elemanı için, uç yerdeğiştirmeleri sebep, ve kuvvetleri sonuç olarak ele alıp, aşağıdaki kuvvet–yerdeğiştirme bağıntılarını yazabiliriz.

$$Q_{ai} = A_{11}v_{ai} + A_{12}\theta_{ai} + A_{13}v_{bi} + A_{14}\theta_{bi} \quad (2.5a)$$

$$M_{ai} = A_{21}v_{ai} + A_{22}\theta_{ai} + A_{23}v_{bi} + A_{24}\theta_{bi} \quad (2.5b)$$

$$Q_{bi} = A_{31}v_{ai} + A_{32}\theta_{ai} + A_{33}v_{bi} + A_{34}\theta_{bi} \quad (2.5c)$$

$$M_{bi} = A_{41}v_{ai} + A_{42}\theta_{ai} + A_{43}v_{bi} + A_{44}\theta_{bi} \quad (2.5d)$$

Buradaki A_{11}, A_{12} vb., i elemanın "direngenlik katsayıları"dır. Denk. (2.5)'e aksel yerdeğiştirmeler ve aksel kuvvetler dahil edilmemişlerdir. Çünkü varsayılan geometrik lineerlik (kesim 2.1) nedeniyle, Denk. (2.5)'deki kesme direngenlikleri, aksel kuvvetlerden etkilenmezler. Aksel ve burulma direngenlikleri biraz sonra görüleceği üzere, bağımsız olarak çıkarılacaktır.

Yukarıdaki eşitlikler matris formunda yazılarak,

$$\begin{Bmatrix} Q_{ai} \\ M_{ai} \\ Q_{bi} \\ M_{bi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_{ai} \\ \theta_{ai} \\ v_{bi} \\ \theta_{bi} \end{Bmatrix} \quad (2.6a)$$

elde edilir.

Denk. (2.6a)'daki, i elemanın direngenlik katsayılarından oluşan kare matris, kiriş elemanı i 'nin eleman direngenlik matrisi denir. Bu matrisi $[K_i]$ ile göstererek, Denk. (2.6a) sembolik formda,

$$\{P\} = [K_i]\{\delta\} \quad (2.6b)$$

şeklinde yazılabilir. $\{P\}$ elemanın bütün uç kuvvetlerini, $\{\delta\}$ bütün uç yerdeğiştirmelerini kapsamaktadır (bkz. kesim 2.7). Şimdi, herhangi bir i sonlu elemanın "eleman direngenlik matrisi" $[K_i]$ yi, Denk. (2.6b)'ye göre, elemanın uç kuvvetlerini, uç yerdeğiştirmelerine bağlayan bir matris olarak tanımlayıp, genelleştirebiliriz. $[K_i]$, lineer sistemlerde, sebep ve sonuç ilişkilerinden doğan, daima simetrik bir matristir. Eğer i elemanın, n ucu varsa ve m serbestlik dereceli ise, o takdirde $[K_i]$, $n \times m$ sütun ve $n \times m$ satırlı olacaktır.

Denk. (2.1)

$$F = (\text{eksel direngenlik}) u$$

şeklinde yazılıp, Denk. (2.6b) ile karşılaştırılırsa, her iki denklemin tanımladığı direngenlik kavramının, aynı fiziksel yoruma ulaştığı açıktır. Ancak üstteki denklem, bir tek kuvvetle ilgili olduğu halde, Denk. (2.6b) direngenliğin çeşitli kuvvetlerle bağlantısını matris formunda göstermektedir.

2.6 DİRENGENLİK KATSAYILARININ ÇIKARIMI

Kiriş elemanının direngenlik katsayıları A_{11} , A_{12} vb. yapı mekaniğinin elemanter yaklaşımlarından kolaylıkla çıkarılabilir (Sonlu elemanların direngenlik ve diğer özelliklerinin türetimine ait genel bir metot Bölüm 9'da verilecektir).

Örneğin, Denk. (2.5a)'da $v_{a1} = 1$ ve diğer bütün yerdeğiştirmeler sıfır ise, kesim 2.2'deki tanımdan, direngenlik katsayısı A_{11} ,

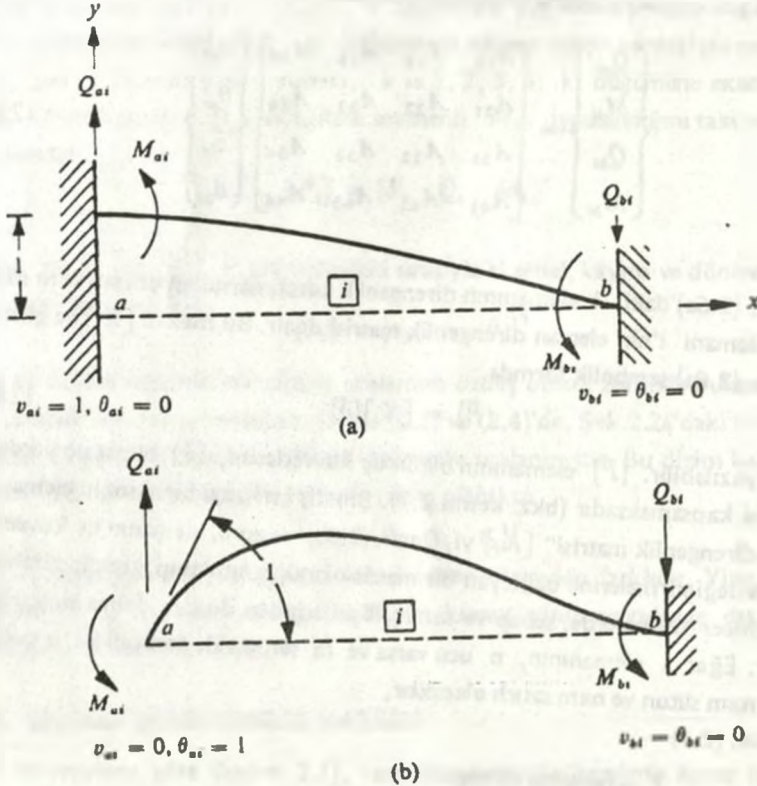
$$A_{11} = Q_{a1}$$

şeklinde elde edilecektir.

Başka bir deyişle, direngenlik katsayısı A_{11} , i elemanı aşağıdaki yerdeğiştirmeleri verecek biçimde zorlandığında, a ucunda meydana gelen kesme kuvvetine eşittir.

$$v_{a1} = 1, v_{b1} = \theta_{a1} = \theta_{b1} = 0.$$

Şek. 2.3a, üstteki yerdeğiştirmelere uymaya zorlanmış bir kiriş elemanının davranışını göstermektedir. Eğim-çökme metodundan, elemanın bu davranışında,



Şek. 2.3

$$A_{11} = Q_{a_i} = 12E_i I_i / h_i^3$$

olduğu kolayca gösterilebilir. Burada E_i , I_i , h_i sırasıyla, elemanın elastisite modülü, kesitin ikinci momenti, ve elemanın uzunluğudur.

$$\text{Benzer şekilde, } v_{a_i} = v_{b_i} = \theta_{b_i} = 0 \quad \theta_{a_i} = 1$$

olduğunda, eleman Şek. 2.3b'de gösterildiği gibi davranır. Denk. (2.5a)

$$A_{12} = Q_{a_i}$$

verir. A_{12} , eleman üstteki yerdeğiştirmelere zorlandığında a ucunda doğan kesme kuvvetine eşittir. Eğim-çökme metodundan,

$$A_{12} = 6E_i I_i / h_i^2$$

elde edilir. Denk. (2.6a)'daki bütün katsayıları hesaplamak için bu işleme devam edileceği açıktır.

EKSENEL DİRENGENLİK

Baştafta, açıklanıp kabul edilen lineerlik dolayısıyla, bu direngenlikler kendilerinin ait olduğu yerdeğiştirmelerden başkasına etki etmemeleri dolayısıyla bağımsız olarak türetilebilirler. s_{11} , s_{12} , s_{21} ve s_{22} , i elemanının eksenel direngenlik katsayıları olsun. Bundan sonra Denk. (2.5)'de olduğu gibi, süperpozisyon prensibini kullanarak,

$$F_{a_i} = s_{11}u_{a_i} + s_{12}u_{b_i} \quad (2.7a)$$

ve

$$F_{b_i} = s_{21}u_{a_i} + s_{22}u_{b_i} \quad (2.7b)$$

yazılabilir. Örneğin $u_{b_i} = 1$ ve $u_{a_i} = 0$ (Şek. 2.4) yazılarak, Denk. (2.7a)'dan

$$s_{12} = F_{a_i}$$

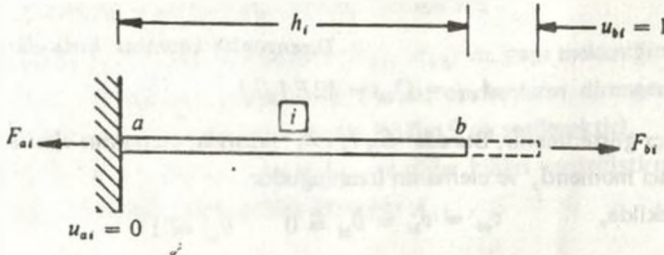
elde edilir. Denk. (2.1)'i kullanarak ve Şek. 2.2c'deki okların pozitif yönleri gösterdiğine dikkat ederek,

$$s_{11} = s_{22} = -s_{12} = -s_{21} = a_i E_i / h_i$$

olduğu gösterilebilir. Burada a_i , kirişin kesitidir.

BURULMA DİRENGENLİĞİ

Şek. 2.2c'ye, burulma momentleri formunda dördüncü bir serbestlik derecesini dahil edip, yerdeğiştirmeleri, Şek. 2.5 ve 2.6'da gösterelim. Burulma momentleri T_{a_i} ve T_{b_i} ve bunlara karşı gelen yerdeğiştirmeler (burulma açıları) ϕ_{a_i} ve ϕ_{b_i} , eleman eksenine dik düzlemlerde bulunur. Burulma momentleri, eksenel kuvvetler gibi



Şek. 2.4

kendi yerdeğiştirmelerinden başka yerdeğiştirmeleri etkilemezler (kesim 2.1, varsayım 2 nedeniyle). Önceki yazılışlarda olduğu gibi

$$T_{ai} = l_{11}\phi_{ai} + l_{12}\phi_{bi}$$

ve

$$T_{bi} = l_{21}\phi_{ai} + l_{22}\phi_{bi}$$

yazılabilir. Burada, l_{11} , l_{12} vb. "burulma direngenlik katsayıları" dır. Şek. 2.5'deki gibi $\phi_{ai} = 0$ ve $\phi_{bi} = 1$ alarak, üstteki birinci denklemde

$$l_{12} = T_{ai}$$

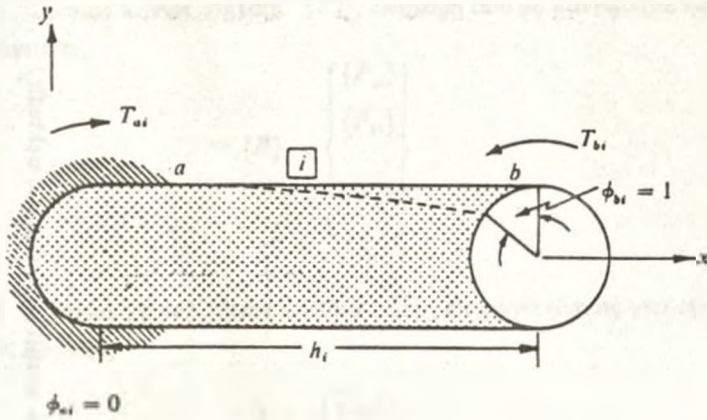
elde edilir. Bu eşitlik, eleman yukarıdaki yerdeğiştirmelere zorlandığında l_{12} nin a ucunda doğan burulma momentine eşit olduğunu göstermektedir. Üstteki yerdeğiştirmeleri sağlayan burulma momenti T_{ai} nin bu değeri eleman teorisi bulunabilir. Okuyucu,

$$l_{11} = l_{22} = -l_{12} = -l_{21} = G_i J_i / h_i$$

$$\begin{bmatrix} T_{ai} \\ F_{ai} \\ Q_{ai} \\ M_{ai} \\ T_{bi} \\ F_{bi} \\ Q_{bi} \\ M_{bi} \end{bmatrix} = \frac{E_i}{h_i^3} \begin{bmatrix} \beta_i h_i^2 & 0 & 0 & 0 & -\beta_i h_i^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_i h_i^2 & 0 & 0 & 0 & -a_i h_i^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12I_i & 6I_i h_i & 0 & 0 & -12I_i & 6I_i h_i \\ 0 & 0 & 6I_i h_i & 4I_i h_i^2 & 0 & 0 & -6I_i h_i & 2I_i h_i^2 \\ -\beta_i h_i^2 & 0 & 0 & 0 & \beta_i h_i^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_i h_i^2 & 0 & 0 & 0 & a_i h_i^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12I_i & -6I_i h_i & 0 & 0 & 12I_i & -6I_i h_i \\ 0 & 0 & 6I_i h_i & 2I_i h_i^2 & 0 & 0 & -6I_i h_i & 4I_i h_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{ai} \\ u_{ai} \\ v_{ai} \\ \theta_{ai} \\ \phi_{bi} \\ u_{bi} \\ v_{bi} \\ \theta_{bi} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

$$\beta_i = G_i J_i / E_i$$

burada, G_i , i elemanının rijitlik modülü, J_i elemanın kesit şekline bağlı, "burulma direngenlik faktörü" adı verilen bir büyüklüktür. Dairesel kesitlerde J_i ye



Şek. 2.5

"alanın polar ikinci momenti" adı da verilir.

Çeşitli direngenlikler hesaplandıktan sonra, Denk. (2.8)'deki matrisde (zamanla kesikli çizgiler kaldırılacak) yerine yazacağız. Tanımdan (kesim 2.7), bu denklemin sol ve sağ tarafındaki vektörler sırasıyla $\{P\}$ ve $\{\delta\}$ dır. Denk. (2.6b)'den, Denk. (2.8)'deki kare matrisin, gerçekte, üniform kiriş elemanı i nin $[K_i]$ matrisi olduğu sonucuna ulaşılır. i elemanı Şek. 2.6'daki gibi 4 serbestlik derecelidir.

Verilen bir problemi, sonlu elemanlarla çözümlmek için, başlangıçta, cismin bölündüğü bütün elemanların $[K_i]$ leri hesaplanacaktır. Ve sonra, bunlar gelecek bölümde anlatılacak yöntemlerle cismin "tümel direngenlik matrisi" adı verilen matrisi elde etmek üzere toplanacaktır.

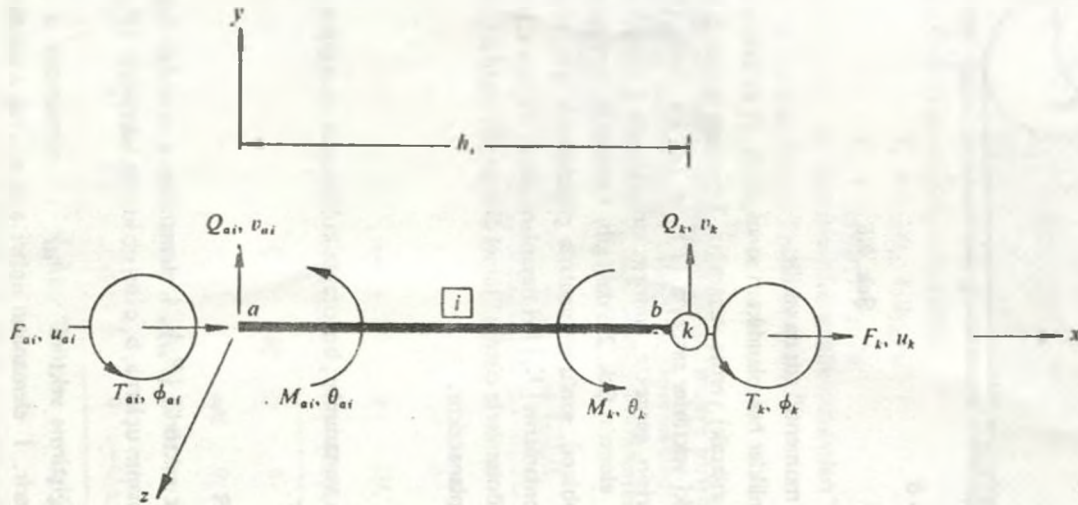
2.7 NOTASYON

Aşağıdaki notasyon ve tanımlar, bu kitapta kullanılacak olan bütün sonlu elemanlar için geçerli olacaktır.

"UÇ" VEKTÖRLER

(1) "Uç kuvvet vektörü" $\{P_{ai}\}$, i elemanının a ucundaki bütün iç kuvvetleri kapsamaktadır. Elemanın uçları a, b, c ise; uç kuvvet vektörleri $\{P_{ai}\}, \{P_{bi}\}, \{P_{ci}\}$ olacaktır.

(2) "Uç yerdeğiştirme vektörü" $\{\delta_{ai}\}$, i elemanının a ucundaki bütün yerdeğiştirmeleri içerir. i elemanının uçları $a, b, c \dots$ ise, o takdirde, uç yerdeğiştirme vektörleri $\{\delta_{ai}\}, \{\delta_{bi}\}, \{\delta_{ci}\} \dots$ olacaktır.



Şek. 2.6 4—serbestlik—dereceli bir kiriş elemanında, kuvvetler ve yerdeğişirmeler, (oklar pozitif yönleri göstermektedir.)

"ELEMEN" VEKTÖRLERİ

(1) "Eleman kuvvet vektörü" $\{P\}$, elemanın tüm uç kuvvetlerini kapsamaktadır; dolayısıyla,

$$\{P\} = \begin{Bmatrix} \{P_{a1}\} \\ \{P_{b1}\} \\ \vdots \\ \vdots \end{Bmatrix}$$

olur.

(2) "Eleman yerdeğiştirme vektörü" $\{\delta\}$, elemanın tüm uç yerdeğiştirmelerini içerir. Böylece,

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} \{\delta_{a1}\} \\ \{\delta_{b1}\} \\ \vdots \\ \vdots \end{Bmatrix}$$

olur.

"DÜĞÜM" VEKTÖRLERİ

(1) "Düğüm kuvvet vektörü" $\{P_k\}$, k düğümüne uygulanan bütün dış kuvvetleri kapsar.

(2) "Düğüm yerdeğiştirme vektörü" $\{\delta_k\}$, k düğümünün bütün yerdeğiştirmelerini kapsar.

"TÜMEL" VEKTÖRLER

(1) "Tümel kuvvet vektörü" $\{P\}$, parçalara ayrılan cismin bütün düğümlerine uygulanan düğüm vektörlerini içerir. Eğer parçalara ayrılmış cismin N düğümü varsa, o takdirde

$$\{P\} = \begin{Bmatrix} \{P_1\} \\ \{P_2\} \\ \vdots \\ \vdots \\ \{P_N\} \end{Bmatrix}$$

olur.

(2) "Tümel yerdeğiştirme vektörü" $\{\delta\}$, parçalara ayrılmış cismin bütün düğüm yerdeğiştirmelerini içerir. Böylece,

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} \{\delta_1\} \\ \{\delta_2\} \\ \vdots \\ \vdots \\ \{\delta_N\} \end{Bmatrix}$$

olur.

3 TÜMEL DİRENGENLİK MATRİSİNİN TOPLANMASI

Herbir elemanın $[K_i]$ leri hesaplandıktan sonraki adım, parçalara ayrılmış cismin "tümel direngenlik matrisi" denilen matrisi oluşturmak için bu $[K_i]$ leri toplamaktır. Toplama işlemi, parçalara ayrılmış cismin bütün düğümlerinde denge ve uygunluk şartlarının yerine gelmesi sağlanarak yapılır. Bu bölümde toplama işlemine ait bazı tipik örnekler verilecektir.

3.1 UYGUNLUK VE DENGE ŞARTLARI

Şekil değiştiren cisimdeki yerdeğiştirmelerin "uygunluğu" yani sürekliliği, elasto-mekanığın temel bir şartıdır. Yerdeğiştirme uygunluğu, kesim 8.8 de elastisite açısından, kesim 8.9 da da bu uygunluğun sonuçları sonlu eleman açısından ayrıntılı olarak tartışılacaktır. Tümel direngenlik matrisinin toplanması için burada sadece düğümlerdeki yerdeğiştirmelerin sürekliliğinin sağlanması gerekecektir.

Düğüm uygunluğuna bir örnek olarak, Şek. 2.2b deki parçalara ayrılmış kirişi ele alalım. Sürekliliğin sağlanması için, 1 elemanının b ucunun yerdeğiştirmelerinin, 2 elemanının a ucunun yerdeğiştirmelerine eşit olması zorunludur. Bu yerdeğiştirmelerin herbirisi, karşılıklı olarak, bu uçların bağlandığı 2 düğümünün yerdeğiştirmelerine eşit olmak zorundadır. Yani,

$$u_2 = u_{b1} = u_{a2}$$

$$v_2 = v_{b1} = v_{a2}$$

ve

$$\theta_2 = \theta_{b1} = \theta_{a2}$$

veya bunları kesim 2.7 deki matris notasyonu ile yazarak

$$\{\delta_2\} = \{\delta_{b1}\} = \{\delta_{a2}\} \quad (3.1a)$$

benzer biçimde bu kiriş için

$$\{\delta_1\} = \{\delta_{a1}\} \quad (3.1b)$$

$$\{\delta_3\} = \{\delta_{a3}\} = \{\delta_{b2}\} \quad (3.1c)$$

ve

$$\{\delta_4\} = \{\delta_{b3}\} \quad (3.1d)$$

Bu denklemlerin ifade ettiği şartlar, kuvvet uygulandığında, parçalara ayrılmış kirişin yerdeğiştirmelerinin sürekliliğini sağlayacaktır.

Yüklenen yapıda veya denge halindeki sürekli ortamda, düğümlere uygulanan dış kuvvetler, bu düğümlerdeki reaksiyonlara eşit olmak zorundadır. Kesim 2.7 deki gösterimi izleyerek, örneğin 2 düğüme (Şek. 2.2b) uygulanacak dış kuvvet $\{P_2\}$

olacaktır. Denge şartından, $\{P_2\}$, 2 düğümüne bağlanmış uçlarda oluşan reaksiyonlara eşit olmak zorundadır. Yani,

$$\{P_2\} = \{P_{b1}\} + \{P_{a2}\}$$

dır. Benzer şekilde bu giriş için,

$$\{P_1\} = \{P_{a1}\}$$

$$\{P_3\} = \{P_{a3}\} + \{P_{b2}\}$$

ve

$$\{P_4\} = \{P_{b3}\}$$

dır.

Yukarıdaki dört denklemi aşağıda matris formunda yazacağız:

$$\begin{Bmatrix} \{P_1\} \\ \{P_2\} \\ \{P_3\} \\ \{P_4\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{P_{a1}\} \\ \{P_{b1}\} \\ \{P_{a2}\} \\ \{P_{b2}\} \\ \{P_{a3}\} \\ \{P_{b3}\} \end{Bmatrix} \quad (3.2)$$

Burada, dış kuvvetlerin yalnız düğümlere etkiğini varsaydık. Bunun sonucu olarak sonlu elemanlara ayrılmış cisimde, herbir noktasal dış yükün bulunduğu yere bir düğüm konulmalıdır. Ancak, eşdeğer kuvvet vektörleri kullanıldığında (bkz. kesim 5.2, 9.3 ve 9.7) böyle olması gerekmez.

3.2 ELEMAN ALT MATRİSLERİ

Toplama işlemi, özellikle bilgisayar kullanılarak yapıldığında, cismi temsil eden sonlu elemanların $[K_i]$ leri "eleman alt matrisleri" adı verdiğimiz matrislere ayrılarak önemli ölçüde basitleştirilir. Bu işlem uç-uç'a kuralıyla yapılacaktır. Öyle ki, i elemanının n ucu var ise, bu takdirde elemanın $[K_i]$ si, eşit boyutlu n^2 tane kare alt matrise bölünecektir. i elemanının eleman alt matrisleri $S(i, J, K)^*$ lar ile tanımlanacaktır. Burada J ve K , $J = 1, 2, \dots, n$ ve $K = 1, 2, \dots, n$ değerlerini alırlar. Elemanın serbestlik derecesi m ise $S(i, J, K)$ 'nin herbirinin $m \times m$ boyutunda bir kare matrisi olduğu kolayca ispatlanabilir. Bir örnek** olarak Şek. 2.6 daki giriş elemanının eleman alt matrislerini ele alalım. Bu elemanın $[K_i]$ si Denk. (2.8) ile tanımlanmıştır. Şimdi bu matrisi şekildedeki gibi kesikli çizgilerle parçalara ayırırsak o takdirde, eşit boyutlu dört kare alt matrisi ayrılacağı açıktır. Elemanın iki ucu olduğundan J ve K , $J = 1, 2$ ve $K = 1, 2$ değerlerini alır. Sonuç olarak bu elemanın alt matrisleri,

* $S(i, J, K)$ gösterimi, S_{iJK} nin yerine seçilmiştir.

** Başka bir örnek için kesim 3.5 e bakınız.

$S(i, 1, 1)$, $S(i, 1, 2)$, $S(i, 2, 1)$ and $S(i, 2, 2)$

$[K_i]$ yi bu alt matrisler cinsinden

$$[K_i] = \begin{bmatrix} S(i, 1, 1) & S(i, 1, 2) \\ S(i, 2, 1) & S(i, 2, 2) \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

şeklinde yazabiliriz. Denk. (3.3) ile Denk. (2.8) in iki-boyutlu düzeniyle karşılaştırıldığında Şek. 2.6 daki eleman için tanımdan,

$$S(i, 1, 1) = E_i \begin{bmatrix} \beta_j/h_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_j/h_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12I_j/h_i^3 & 6I_j/h_i^2 \\ 0 & 0 & 6I_j/h_i^2 & 4I_j/h_i \end{bmatrix} \quad (3.4a)$$

$$S(i, 1, 2) = E_i \begin{bmatrix} -\beta_j/h_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_j/h_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12I_j/h_i^3 & 6I_j/h_i^2 \\ 0 & 0 & -6I_j/h_i^2 & 2I_j/h_i \end{bmatrix} \quad (3.4b)$$

$$S(i, 2, 2) = E_i \begin{bmatrix} \beta_j/h_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_j/h_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12I_j/h_i^3 & -6I_j/h_i^2 \\ 0 & 0 & -6I_j/h_i^2 & 4I_j/h_i \end{bmatrix} \quad (3.4c)$$

$[K_i]$ nin simetrisi nedeniyle, $S(i, 1, 2)$ ve $S(i, 2, 1)$ birbirinin transpozesidir. Buradan Denk.(2.8), yukarıdaki $S(i, J, K)$ lar cinsinden şöyle yazılabilir.

$$\begin{Bmatrix} \{P_{a1}\} \\ \{P_{b1}\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S(i, 1, 1) & S(i, 1, 2) \\ S(i, 2, 1) & S(i, 2, 2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\delta_{a1}\} \\ \{\delta_{b1}\} \end{Bmatrix} \quad (3.5)$$

3.3 BİR KİRİŞİN TUMEL DİRENGENLİK MATRİSİNİN TOPLANMASI

Şek.2.2b'deki elemanın $S(i, J, K)$ ları Denk.(3.4) de burulmaya ait satır ve sütunlar silinerek açık olarak elde edilebilir. Ve sonra, Denk.(3.5) de $i = 1$ yazarak, 1 elemanı için (Şek.2.2b), sembolik kuvvet-yerdeğiştirme bağıntısının

$$\begin{Bmatrix} \{P_{a1}\} \\ \{P_{b1}\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S(1, 1, 1) & S(1, 1, 2) \\ S(1, 2, 1) & S(1, 2, 2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\delta_{a1}\} \\ \{\delta_{b1}\} \end{Bmatrix}$$

olduğu görülür.

veya Denk. (3.1a) ve (3.1b) yi kullanarak

$$\begin{Bmatrix} \{P_{a1}\} \\ \{P_{b1}\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S(1, 1, 1) & S(1, 1, 2) \\ S(1, 2, 1) & S(1, 2, 2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\delta_1\} \\ \{\delta_2\} \end{Bmatrix} \quad (3.6a)$$

elde edilir. Benzer şekilde 2 ve 3 elemanları için

$$\begin{Bmatrix} \{P_{a2}\} \\ \{P_{b2}\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S(2, 1, 1) & S(2, 1, 2) \\ S(2, 2, 1) & S(2, 2, 2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\delta_2\} \\ \{\delta_3\} \end{Bmatrix} \quad (3.6b)$$

$$\begin{Bmatrix} \{P_{a3}\} \\ \{P_{b3}\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S(3, 1, 1) & S(3, 1, 2) \\ S(3, 2, 1) & S(3, 2, 2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\delta_3\} \\ \{\delta_4\} \end{Bmatrix} \quad (3.6c)$$

olduğu gösterilebilir. Üstteki denklemleri aşağıdaki şekilde matris formunda yazabiliriz.

$$\begin{Bmatrix} \{P_{a1}\} \\ \{P_{b1}\} \\ \{P_{a2}\} \\ \{P_{b2}\} \\ \{P_{a3}\} \\ \{P_{b3}\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S(1, 1, 1) & S(1, 1, 2) & 0 & 0 \\ S(1, 2, 1) & S(1, 2, 2) & 0 & 0 \\ 0 & S(2, 1, 1) & S(2, 1, 2) & 0 \\ 0 & S(2, 2, 1) & S(2, 2, 2) & 0 \\ 0 & 0 & S(3, 1, 1) & S(3, 1, 2) \\ 0 & 0 & S(3, 2, 1) & S(3, 2, 2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\delta_1\} \\ \{\delta_2\} \\ \{\delta_3\} \\ \{\delta_4\} \end{Bmatrix} \quad (3.7)$$

O halde, Denk. (3.2) ve (3.7) den şu sonuç elde edilir.

$$\begin{Bmatrix} \{P_1\} \\ \{P_2\} \\ \{P_3\} \\ \{P_4\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} S(1, 1, 1) & S(1, 1, 2) & 0 & 0 \\ S(1, 2, 1) & S(1, 2, 2) & 0 & 0 \\ 0 & S(2, 1, 1) & S(2, 1, 2) & 0 \\ 0 & S(2, 2, 1) & S(2, 2, 2) & 0 \\ 0 & 0 & S(3, 1, 1) & S(3, 1, 2) \\ 0 & 0 & S(3, 2, 1) & S(3, 2, 2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\delta_1\} \\ \{\delta_2\} \\ \{\delta_3\} \\ \{\delta_4\} \end{Bmatrix} \quad (3.8)$$

Kesim 2.7 de, bu denklemin sol tarafındaki vektörler, tümel kuvvet vektörü, sağ taraftaki vektörler tümel yerdeğiştirme vektörü olarak tanımlanmıştır. Yukarıdaki denklem, Şek. 2.2b deki giriş için yazılmıştır. Bu denklemi sembolik formda,

$$\{P\} = [K]\{\delta\} \quad (3.9)$$

yazabiliriz.

Denk. (3.8) deki çarpma işlemi yapıldığında

$$[K] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ S(1, 1, 1) & S(1, 1, 2) & 0 & 0 \\ 2 & S(1, 2, 1) & S(1, 2, 2) & 0 \\ & & + S(2, 1, 1) & \\ 3 & 0 & S(2, 2, 1) & S(2, 2, 2) & S(3, 1, 2) \\ & & & + S(3, 1, 1) & \\ 4 & 0 & 0 & S(3, 2, 1) & S(3, 2, 2) \end{bmatrix} \quad (3.9a)$$

olduğu görülür. Denk. (3.9a) daki $[K]$, Şek. 2.2a daki kirişin "tümel direngenlik matrisi" olarak tanımlanacaktır. Burada $[K]$, $S(i, J, K)$ lar cinsindedir. Bunlar yerine Denk. (3.4) lerdeki ifadeleri yazılırsa, kirişin bölündüğü elemanların malzeme ve geometrik özellikleri cinsinden $[K]$ elde edilmiş olur. Bir karşılaştırma yapılırsa Denk. (2.6b) nin, uç kuvvetler ile uç yerdeğiştirmeler cinsinden i kiriş elemanının kuvvet–yerdeğiştirme bağlantısını ifade ettiği, Denk (3.9) un ise parçalara bölünmüş kirişin düğüm kuvvetleri ile düğüm yerdeğiştirmeleri arasındaki kuvvet-yerdeğiştirme bağıntısının ifade ettiği görülür. Genelleştirilirse, bütün sonlu eleman problemlerinde $[K_i]$ ile $[K]$ arasındaki bu farkın gözönünde bulundurulması önemlidir.

Parçalara bölünmüş kirişin toplam N düğümü varsa ve serbestlik derecesi 3 ise (Şek. 2.2c deki gibi) o takdirde,

$$\{P\} = \{F_1 Q_1 M_1 \quad F_2 Q_2 M_2 \cdots F_N Q_N M_N\}^T \quad (3.10)$$

$$\{\delta\} = \{u_1 v_1 \theta_1 \quad u_2 v_2 \theta_2 \cdots u_N v_N \theta_N\}^T \quad (3.11)$$

Dış kuvvet vektörü $\{P\}$ belirlendiğinde, Denk. (3.9) dan düğüm yerdeğiştirmeleri $\{\delta\}$ çözülebilir. Bundan sonra iç kuvvetler (momentler, kesme kuvvetleri, vb.) hesaplanabilir. Ancak, Denk. (3.9) u çözmeye girişmeden önce, belirlenen sınır şartlarını hesaba katarak $[K]$ yı değiştirmek zorundayız. Çünkü, ancak o takdirde denklemin çözümü olacaktır. Ve bu, denklemin biricik çözümüdür. Bu özellik bundan sonraki bölümde tartışılacaktır.

Genelleştirilirse, bir sonlu eleman problemini çözerken ilk iş, elemanlara ayrılmış cismin, düğüm kuvvet–yerdeğiştirme bağıntısını; Denk. (3.9) a benzer şekilde bir denklem cinsinden ifade etmek olacaktır. Burada $[K]$, cismin tamamının "tümel direngenlik matrisi" ni tanımlamaktadır. Belirlenen sınır şartlarını dahil ettikten ve $\{P\}$ yi belirledikten sonra, bu denklemden düğüm yerdeğiştirmeleri $\{\delta\}$ çözülebilir. Bu yerdeğiştirmelerden cismin gerilme ve zorlanmaları hesaplanabilir.

Karşıtlık teoreminden tahmin edebileceğimiz gibi $[K]$ daima simetrik bir kare matris olarak bulunacaktır. Ayrıca, elemanlara ayrılmış cismin toplam N düğümü

varsa, ve serbestlik derecesi m ise, bu durumda $[K]$ nin, $n \times m$ satırı ve $n \times m$ sütunu olacağı kolayca ispatlanabilir.

Herhangi bir elemanın $[K_i]$ sı, 0 elemanın malzeme ve geometrik özellikleri cinsinden olduğundan (örneğin, Denk.(2.8), malzeme özellikleri değişen problemlerin sonlu eleman çözümünde cisim farklı özellikli elemanlara ayrılmış olacaktır. Dolayısıyla böyle problemler ek bir zorluk getirmezler. Bu, sonlu eleman çözümleme metodunun çok önemli bir özelliğidir.

3.4 TUMEL DİRENGELİK MATRİSİNİN TOPLANMASI İÇİN GENEL BASİT BİR YÖNTEM

Kesim 3.3 de verilen toplama işlemi (assembly procedure), yol gösterici olmakla birlikte karmaşık problemlerin çözümünde, özellikle cisim, 2 veya 3 boyutlu olduğunda elverişli değildir. Bunun nedeni, böyle cisimlerde Denk. (3.2) ye benzer bir denklemin türetiminin sıkıcı ve çoğunlukla gereksiz bir çaba halini almasıdır. Çoğu kez, tümel direngelik matrisi bilgisayar ile otomatik olarak toplanır. Bu yüzden kolaylıkla bilgisayar programı yapılan basit, etkin ve genel bir yöntemin bulunması önemlidir. Bu kesimde böyle bir yöntem verilecektir. Bu yöntem, cismin yapısı ne kadar karmaşık olursa olsun, eleman sayısı ne kadar olursa olsun, bir cismin $[K]$ matrisinin toplanmasını sadece bir kontrolla mümkün kılacaktır.

Bu yöntemde parçalara bölünmüş cismin herbir elemanının uçlarının birbirine "komşu" olduklarını tasavvur edeceğiz. Daha özel bir söyleyişle cisim $i = 1, 2, 3 \dots$ elemana bölünmüşse bu durumda, i nin bütün uçlarının "komşu" olduğu tasavvur edilecek, bununla birlikte i nin uçları i ye ait olmayan herhangi bir uca da komşu olmayacaktır. Bu takdirde, $[K]$ matrisi $S(i, J, K)$ cinsinden aşağıdaki basit kurallar izlenerek toplanabilir.

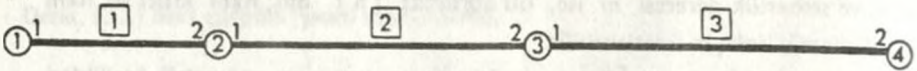
(1) Eğer J ucu L düğümüne, K ucu M düğümüne bağlı; J ve K nin her ikisi i elemanına ait ise, ve ayrıca J, K ya komşu ise; $S(i, J, K)$ alt matrisi $[K]$ nin, L satırı ve M sütununda ortaya çıkacaktır.

(2) Eğer i elemanının J ucu L düğümüne bağlı ise, ve ayrıca J kendi kendine komşu ise $S(i, J, J)$ alt matrisi, $[K]$ nin L satırı ve L sütununda ortaya çıkacaktır.

$[K]$ nin simetrik olması nedeniyle, yalnız bir simetrik yarısının toplanmasının yeterli olduğuna dikkat edilmelidir. $[K]$ nin açık formu $S(i, J, K)$ ların değerlerinin yerlerine yazılmasıyla elde edilecektir. Şimdi, yukarıdaki kurallar aşağıda örneklerle gösterilecektir.

ÖRNEK 1

Şek. 2.2a daki kirişi ele alalım; bu kirişin parçalanmış modeli Şek. 3.1 de yeniden çizilmiştir. Burada kolaylık olsun diye, uçlar harflerle değil rakamlarla tanımlanmıştır.



Şek. 3.1 Şek. 2.2a daki kirişin sonlu eleman modeli.

1 elemanını dikkate alarak, 1. kuralı izleyerek, 1 ucu 2 ucuna komşu olduğunda, $S(1, 1, 2)$, $[K]$ nın 1. satır ve 2. sütununda ortaya çıkacaktır (bkz. Denk. (3.9) a). Çünkü, bu durumda $i = 1, J = 1, K = 2, L = 1$ ve $M = 2$ dir. Yine 2. kurala göre, 1 ucu kendi kendisine komşu olduğunda, $S(1, 1, 1)$, 1. satır ve 1. sütunda ortaya çıkar. Çünkü $i = 1, J = 1$ ve $L = 1$ dir.

Benzer şekilde, 2 ucu 1 ucuna komşu olduğunda; $i = 1, J = 2, K = 1, L = 2$ ve $M = 1$ dir. Sonuçta $S(1, 2, 1)$, 2. satır ve 1. sütunda ortaya çıkar. Ve yine 2 ucu kendi kendine komşu olduğunda; $i = 1, J = 2$ ve $L = 2$, ve sonuç olarak $S(1, 2, 2)$, 2. satır ve 2. sütunda ortaya çıkar.

Varsayıma göre, 1 elemanının ucu başka herhangi bir uca komşu değildir. Bu nedenle, 1 elemanının $[K]$ ya başka iştiraki yoktur. Bu işlem 2 ve 3 elemanları için tekrarlandığında Denk. (3.9a) daki $[K]$ matrisi elde edilir.

ÖRNEK 2

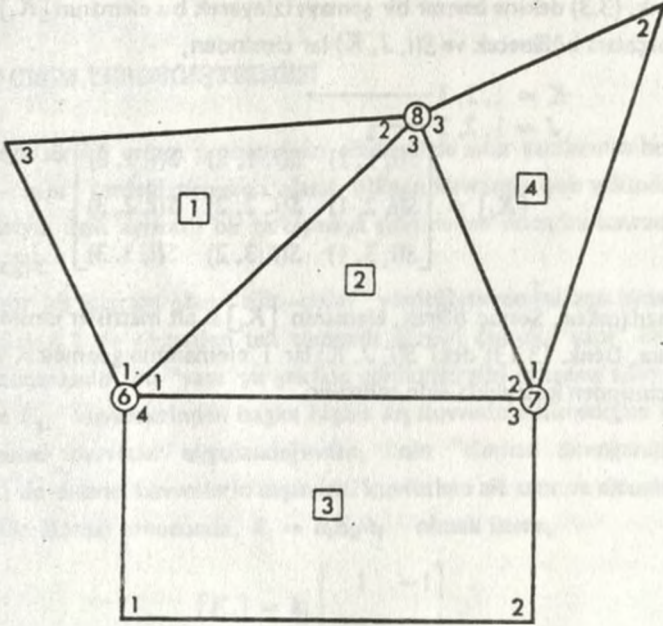
Şimdi, Şek.3.2 de gösterilen elemanların bileşimini ele alalım. 2. kurala göre 1. elemanın 1 ucu kendisine komşu olduğunda $i = 1, J = 1$ ve $L = 6$; sonuçta $S(1, 1, 1)$, 6. satır ve 6. sütunda ortaya çıkar (bkz. Denk. (3.12));

2. elemanın 1 ucu kendisine komşuysa, $i = 2, J = 1$ ve $L = 6$; sonuç olarak $S(2, 1, 1)$, 6. satır ve 6. sütunda ortaya çıkar;

3. elemanın 4 ucu kendisine komşu olduğunda, $i = 3, J = 4$ ve $L = 6$; dir; sonuç olarak $S(3, 4, 4)$, 6. satır ve 6. sütunda ortaya çıkar.

Bu kuralları kullanarak, Şek.3.2 deki durumu incelemek okuyucuya terkedilmiştir.

$$[K] = \begin{bmatrix} 6 & 7 & 8 \\ S(1, 1, 1) & S(2, 1, 2) & S(1, 1, 2) \\ + S(2, 1, 1) & + S(3, 4, 3) & + S(2, 1, 3) \\ + S(3, 4, 4) & & \\ S(2, 2, 1) & S(2, 2, 2) & S(2, 2, 3) \\ + S(3, 3, 4) & + S(3, 3, 3) & + S(4, 1, 3) \\ & + S(4, 1, 1) & \\ S(1, 2, 1) & S(2, 3, 2) & S(1, 2, 2) \\ + S(2, 3, 1) & + S(4, 3, 1) & + S(2, 3, 3) \\ & & + S(4, 3, 3) \end{bmatrix} \quad (3.12)$$



Şek. 3.2 Üçgen ve dikdörtgen elemanların tipik bir kombinasyonu

Bu kesimde, $S(i, J, K)$ kavramıyla birlikte verilen yöntem, basit olmakla birlikte, bilgisayara kolaylıkla programlanabilen oldukça tatmin edici bir toplama işlemidir. Bu işlemi Bölüm 15 de kullanacağız. Okuyucu başlangıçta bunu biraz karışık ve oldukça mekanik bir yöntem bulabilir. Ancak, birkaç uygulama yapıldığında bu ortadan kalkacaktır.

3.5 $S(i, J, K)$ LAR HAKKINDA EK AÇIKLAMALAR

Bu kesimde, bölümün en önemli konusu "eleman alt matrisleri" $S(i, J, K)$ ları daha ayrıntılı olarak inceliyeceğiz. Konuyu açıklığa kavuşturmak için Şek.11.1 deki üçgen elemanın $S(i, J, K)$ larını ele alacağız. Bu alt matris kavramı; bir, iki, üç boyutlu sonlu elemanların alt matris kavramıyla aynı şeydir.

Burada, elemanın serbestlik derecesi 2 dir. Dolayısıyla elemanın $S(i, J, K)$ larının herbiri 2×2 lik bir matristir. Eleman üç uca sahip olduğunda $[K_i]$, toplam $3^2 = 9$ alt matris içerecektir. Aynı zamanda J ve K ; $J=1, 2, 3$ ve $K = 1, 2, 3$, şeklinde değişir (bkz. kesim 3.2).

Böylece Denk. (3.3) deki bir şemayı izleyerek bu elemanın $[K_i]$ si uç-uca kuralıyla parçalara bölünecek ve $S(i, J, K)$ lar cinsinden,

$$\begin{array}{l}
 K = 1, 2, 3 \text{ —————} \\
 J = 1, 2, 3 \text{ —————} \\
 [K_i] = \begin{bmatrix} S(i, 1, 1) & S(i, 1, 2) & S(i, 1, 3) \\ S(i, 2, 1) & S(i, 2, 2) & S(i, 2, 3) \\ S(i, 3, 1) & S(i, 3, 2) & S(i, 3, 3) \end{bmatrix} \quad (3.13)
 \end{array}$$

şeklinde yazılacaktır. Sonuç olarak, elemanın $[K_i]$ si alt matrisler cinsinden bulunduktan sonra, Denk. (3.13) deki $S(i, J, K)$ lar i elemanının geometrik ve malzeme özellikleri cinsinden kolaylıkla elde edilebilir.

4 SINIR ŞARTLARI

4.1 RİJİT CİSİM YERDEĞİŞTİRMESİ

Bir yapı veya sürekli ortam probleminin çözümünde sınır şartlarının hesaba katılması "rijit-cisim" yerdeğıştirmeleri olarak bilinen kavramla çok yakından ilgilidir. Sınır şartlarıyla ilgili ayrıntılı bir tartışmaya girişmeden önce, bu kavramı açıklığa kavuşturacağız.

Biraz zor bir kavram olan "rijit-cisim" yerdeğıştirmesini açıklamanın en basit yolu Şek.4.1 de gösterilen tek elemanlı düzgün çubuk "yapı" ile bağlantılı olarak ele alınmasıdır. Bu "yapı"ya şekilde görüldüğü gibi, eksenel olarak uygulanmış F_n ve F_k kuvvetlerinden başka hiçbir dış kuvvetin etkemediğini varsayalım. Yalnız eksenel kuvvetler uygulandığından, i 'nin "eleman direngenlik matrisi" Denk. (2.8) de eksenel kuvvetlerin dışındaki kuvvetlere ait satır ve sütunlar silinerek elde edilebilir. Bunun sonucunda, $k_i = a_i E_i / h_i$ olmak üzere,

$$[K_i] = k_i \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

dır. Burada i elemanı aynı zamanda, tüm "yapı" olduğunda, $[K_i]$ de elemanın tümel direngenlik matrisidir. Buna ek olarak, burada,

$$\{P\} = \begin{Bmatrix} -F_n \\ F_k \end{Bmatrix} \quad \text{ve} \quad \{\delta\} = \begin{Bmatrix} u_n \\ u_k \end{Bmatrix}$$

dır. Sonuç olarak, bu yapı için Denk. (3.9)

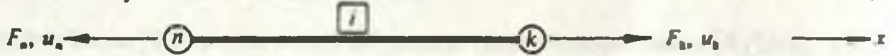
$$k_i \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_n \\ u_k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -F_n \\ F_k \end{Bmatrix} \quad (4.1)$$

haline gelir.

Şimdi aşağıdaki durumları ele alalım:

$$(1) F_k > F_n$$

Newton'un birinci kanununa göre, dengeyi bozan $(F_k - F_n)$ kuvveti çubuğu düzgün ivmeli harekete zorlayacaktır. Çubuğun harekete $t = 0$ anında başladığını tasavvur edelim. Engelleyici kuvvetlerin bulunmaması halinde, $(t_2 - t_1)$ zaman aralığında, burada, $t_2 > t_1 > 0$ çubuk üzerindeki bütün noktaların x boyunca aynı yerdeğıştirmeyi yapacakları açıktır. Sonuçta, çubukta herhangi bir elastik zorlanma (strain) veya gerilme (stress) doğmayacaktır. Yapı ve sürekli ortam mekaniğinde, cisimde, zorlanma veya gerilmenin doğmadığı bu tip yerdeğıştirme "rijit-cisim yerdeğıştirmesi" olarak adlandırılır.



Şek.4.1 Tek—eleman çubuk "yapı" u_n ve u_k , sırasıyla n ve k düğümlerindeki yerdeğiştirmeler.

Burada "rijit" teriminin anlamı, "elastik" teriminin tersi anlamındadır. Genel olarak, elastik zorlanma ve gerilmelerin bulunmadığı, öteleme, dönme veya karışık yerdeğiştirme yapan bir cismin "rijit cisim" yerdeğiştirmesi yaptığı söylenir.

Engelleyici etkiler mevcut değilse, u_n ve u_k , Şek.4.1'deki çubuğun düğümlerinin rijit cisim yerdeğiştirmeleridir. Burada, çubuk üzerindeki bütün noktalar x boyunca aynı rijit cisim yerdeğiştirmesine sahip olduklarında $u_n = u_k$ olur. Şimdi Denk.(4.1)'den u_n veya u_k yı tayin edip edemeyeceğimizi araştıralım. Varsayım 2 (kesim 2.1)'ye göre, Denk.(2.8) ve bunun sonucu olarak Denk. (4.1) yalnız küçük yerdeğiştirmeler için geçerlidir. Bu yüzden, u_n ve u_k yı "küçük" olarak niteliyim. Denk.(4.1)'den u_n veya u_k nın çözülemeyeceği hemen kolayca görülebilir. Çünkü bu denklem çözüm vermez. Bu çubuğun tümel direngenlik matrisi,

$$k_1 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

nin matematiksel olarak "tekil" oluşundan (bu, matrisin tersinin mevcut olmayışı anlamına gelmektedir) doğmaktadır. Sonuç olarak, Denk.(4.1) belirsizdir. Buradan bir yapının rijit cisim yerdeğiştirmesi, genelde yapılarda görülebileceği gibi, onun tümel direngenlik matrisinin tekil oluşunun bir sonucudur.

$$(2) F_k = F_n$$

Şimdi, çubuk dengede ve $(u_k + u_n)$ miktarında uzar. Üstteki (1) durumundan farklı olarak, şimdi u_n ve u_k , çubuktaki elastik gerilme ve zorlanmalardan doğan elastik yerdeğiştirmelerdir. Ancak bu durum, tümel direngenlik matrisinin tekillikini ortadan kaldırmaz ve hala biz Denk.(4.1)'den u_n ve u_k yı çözemeyiz. Öyleyse bu, direngenlik matrisinin tekil olması, cisim rijit cisim yerdeğiştirmesi yapmaya götürmeyeceğine bir örnektir.

Böylece, yukarıdaki durumlardan şu sonuç çıkarılabilir: Bir cismin rijit—cisim yerdeğiştirmesi, cismin tümel direngenlik matrisinin tekillikinin sonucudur, buna rağmen bu tekillik, daima rijit cisim yerdeğiştirmesine yol açmayabilir.

4.2 SINIR ŞARTLARI

Tümel direngenlik matrisinin tekil olmasının nedeni ve Denk.(4.1)'in çözülememesi, u_n ve u_k nın ölçülebileceği bir "referans" noktasının belirlenmemiş olmasına

dayandırılabilir. Böyle bir referansın sağlanması zorunluluğu vardır, çünkü yerdeğiştirmeler bağıl büyüklüklere bağlıdır. Ve tüm bağıl büyüklükler gibi, "belirlenmiş" veya "atanmış" yerdeğiştirmeye sahip bir referansa göre ölçüldüklerinde anlam kazanırlar.

O halde u_n veya u_k için bir referans değer, diyelim sıfır, kabul edelim. Özel olarak $u_n = 0$ olsun. Bu şart uygulamada, n düğümü Şek.4.2'de gösterildiği gibi, rijit bir mesnete bağlandığında gerçekleşir. F_n ve F_k nın büyüklükleri eşit olup ve Denk.(4.1)'den, elastik yerdeğiştirme u_k

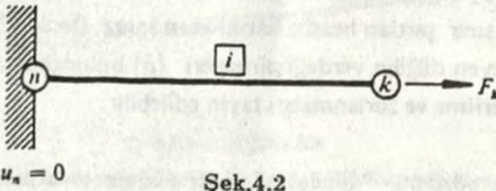
$$u_k = F_u/k_i$$

şeklinde elde edilir. Kabul edilen $u_n = 0$ şartı Şek.4.2'deki yapının "sınır şartı" dır. Böylece, elasto—mekanikte sınır şartları; cismin belli bir parçasında veya parçalarındaki yerdeğiştirmelerde* yapılan kısıtlardır. Bu kısıtlar, genelde, cismin rijit cisim yerdeğiştirmesine engel olur ve uygulanan dış kuvvetleri taşımasını sağlar.

Açıkçası, sınır şartları cismin çeşitli kısımlarındaki elastik yerdeğiştirmelerin ölçülebileceği bir referans sağlar. Belirlenen sınır şartları, $[K]$, ile birleştirildiğinde, cismin tümel direngenlik matrisi $[K]$, tekillikten kurtulur. Ve dış kuvvetler $\{P\}$, belirlendikten sonra Denk.(3.9)'dan yerdeğiştirmeler $\{\delta\}$ bulunabilir. Tersine belirlenen sınır şartları sağlanamazsa kesim 4.1'deki 1 ve 2 durumlarında olduğu gibi $[K]$ tekil ve Denk. (3.9) belirsiz olur.

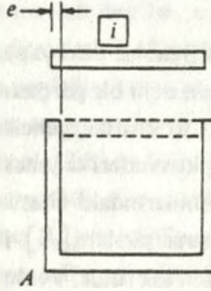
Bir kural olarak, verilen bir yapı veya sürekli ortam probleminin ya "doğal" ya da "yapay" sınır şartları vardır. Örneğin, Şek.5.1a'daki iki ucu tespit edilmiş kiriş problemini ele alalım. Kirişin iki ucu da sabitlenmiş olduğundan uçlarda düşey yerdeğiştirme ve açılma dönme yerdeğiştirmeleri sıfırdır ve gerçekte bunlar problemin sınır şartlarıdır. Bu şartlar bu yapının $[K]$ matrisini tekillikten kurtarmak için uydurulmuş veya kabul edilmiş sınır şartları değil özgül sınır şartlarıdır. Bu nedenle, bu şartlara "doğal" sınır şartları adı verilir.

Şimdi de Şek. 4.3'deki U biçimli prizmatik kiriş yapıyı ele alalım. i parçası (bu parça başlangıçta e miktarı kadar fazla uzunluktadır), kesikli çizgilerle gösterildiği gibi U nun açık ucundan içe doğru zorlanmaktadır.



* Kimi zaman, kesim 11.5'deki gibi, sınır şartları gerilmelerin bileşikleri cinsinden de belirlenebilir. Bunlar buraya alınmamıştır. Bu bileşkeleer, genelde, tümel direngenlik matrisinin özelliklerini etkilemezler.

Sonuçta, O-biçimli (i parçası ve U biçimli yapıdan oluşan) yapıda gerilmeler meydana gelir. Bu yapının sonlu elemanlarla çözümlemesinde tümel direngenlik matrisi $[K]$ yı toplayarak başlayalım. Ancak yapı herhangi bir mesnetle bağlanmamış olduğundan herhangi bir "doğal" sınır şartı da yoktur (bu, bir dış kuvvet etkideğinde, yapının rijit bir cisim gibi yerdeğiştireceği gerçeğinden anlaşılır). Bu yüzden bu yapının $[K]$ matrisi özgül olarak "tekil"dir. Tekil olmaktan çıkarmak için, herhangi bir düğümde "yapay" referans yerdeğiştirme almak zorundayız. Örneğin, A daki düğümün bütün yerdeğiştirmelerinin, keyfi olarak, sıfır olduğunu kabul edebiliriz.



Şek.4.3

Sonra, Denk. (3.9)'a benzer bir denklem elde edilir. Bu denklemden yerdeğiştirmeler, bunlardan da gerilmeler hesaplanabilir*. O halde bu, "yapay" sınır şartlarına bir örnektir. Uçuş halindeki bir uçak buna benzer bir örnek oluşturur. Eğer uçağın tümünü elastik bir yapı olarak düşünürsek, doğal sınır şartları bulunmadığından, tümel direngenlik matrisini tekil-olmayan (non-singular) yapmak için doğal sınır şartları empoze etmek zorunluluğu vardır.

Uygulamada karşılaşılan, çoğu yapı ve sürekli ortam problemleri doğal sınır şartlarına sahiplerdir. Bu yüzden onları, bundan sonra kısaca "sınır şartları" olarak adlandıracağız.

Denk. (3.9), dış düğüm kuvvetlerini düğüm yerdeğiştirmelerine bağladığından, sınır şartlarının yalnız bu şartların belirlendiği düğümlerde sağlanması gereklidir. Bu şartların Denk. (3.9)'a dahil edilmesi işlemi kesim 5.1 de tartışılacaktır.

Belirlenen bütün sınır şartları hesaba katıldıktan sonra, Denk. (3.9)'dan, verilen bir $\{P\}$ ile, bilinmeyen düğüm yerdeğiştirmeleri $\{\delta\}$ bulunabilir. Bu yerdeğiştirmelerden de cismin gerilme ve zorlanmaları tayin edilebilir.

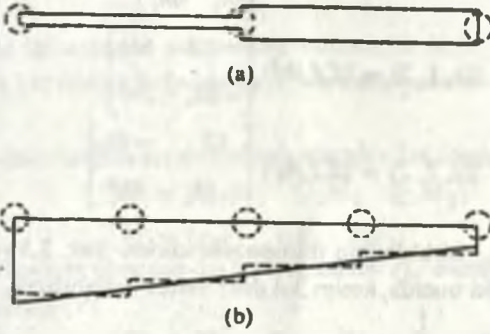
*Bu özel problemin çözümü, "dönüşüm" matrislerinin anlatılmasını gerektirir; bkz. Bölüm 6.

4.3 CİSMİ ELEMANLARA AYIRMAK İÇİN İPUÇLARI

Verilen bir problemde, tümel direngenlik matrisinin boyutu ve çözümünün hassasiyet derecesi, geniş ölçüde, cismin sonlu elemanlar sistemi haline getiriliş tarzıyla belirlenir. Bu hususta, çözümleyicinin önemli ölçüde mahareti ve deneyimi gerekmektedir. Bölme yöntemi ve mantığı kesim 9.5 ve 9.6 da anlatılacaktır. Şimdilik aşağıda, yeni başlayanlar için birkaç genel ipucu verilmiştir. Bunlar, başlıca, kiriş-tipi yapılara uygulanabilir.

Düğümün konulacağı yerler, genellikle şunlardır:

- (1) Her mesnete veya yerdeğiştirmenin belirlendiği noktaya. Örneğin, Şek. 5.1b de, 1 ve 3 düğümleri.
- (2) Konsantre (tekil) dış kuvvetin uygulandığı her bir noktaya. Örneğin, Şek. 5.1b de, 2. düğüm (eğer "eşdeğer kuvvet vektörleri" kullanılmışsa bu gerekli değildir. Bkz. kesim 9.3 ve 9.7).
- (3) İki veya daha fazla elemanın birleştiği birleşme noktasına. Örneğin, Şek. 6.5b de, 2. düğüm.
- (4) Direngenliğin ani değiştiği her noktaya. Şek.4.4a daki gibi. Direngenlik Şek. 4.4b deki gibi sürekli değişiyorsa, yeterli sayıda düğüm konulmalıdır. Çünkü, düğüm sayısı arttıkça*, sonuçlar kesin değerlerine yaklaşır. Eğri yapılarda da buna benzer bir durum vardır. Buna ait bir örnek kesim 6.9 da verilecektir.



○ Önerilen düğümler

Şek. 4.4 (a) Ani direngenlik değişimi. (b) Sürekli direngenlik değişimi.

* Eğer ET'nin değişimi sürekli bir fonksiyonla ifade edilebiliyorsa, kesim 9.8b de anlatılan yöntem kullanılarak daha iyi sonuçlar elde edilebilir.

5 ÇÖZÜLMÜŞ KİRİŞ PROBLEMLERİ

Önceki bölümlerde geliştirilen sonlu eleman çözüm metodundaki önemli noktaları göstermek için bu bölümde birkaç kiriş yapı çözümlemesi verilmiştir. Burada problemin boyut veya karmaşıklığından çok çözüm metodu üzerinde durulmuştur. Pratik problemlerdeki tümel direngenlik matrisleri genellikle büyük boyutlu olduğundan, el ile işlem yapmak yorucu ve çoğunlukla imkansızdır. Bu nedenle, Bölüm 15 de göreceğimiz gibi, bu geniş hacimli problemleri tamamen otomatik olarak çözmek için bilgisayar kapasitesi sağlanabildiği takdirde basit bilgisayar programları yazılabilir.

5.1 İKİ UCU SABİTLENMİŞ UNIFORM BİR KİRİŞ

Başlangıç olarak, Şek. 5.1a daki problemi ele alalım. Kirişin sonlu elemanlara bölünmesi Şek. 5.1b de gösterilmiştir. Bölüm 3 deki gibi sonlu eleman modelinde, uç notasyonlarında, kolaylık olsun diye; a, b yerine sırasıyla 1, 2 alınmıştır. Burulma ve aksel kuvvetler yoktur, ve serbestlik derecesi 2 dir. Bu nedenle, bu kirişin elemanlarının $S(i, J, K)$ ları Denk. (3.4)'lerden aksel ve burulma terimleri çıkartılarak elde edilebilir. Böylece,

$$S(i, 1, 1) = (E_i I_i / h_i^3) \begin{bmatrix} 12 & 6h_i \\ 6h_i & 4h_i^2 \end{bmatrix} \quad (5.1a)$$

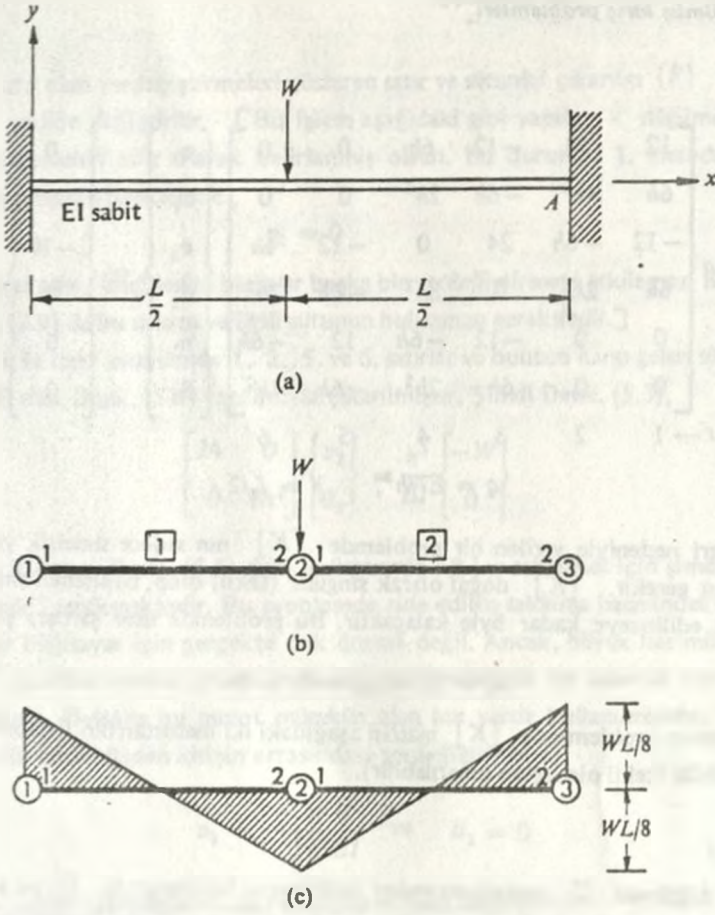
$$S(i, 1, 2) = (E_i I_i / h_i^3) \begin{bmatrix} -12 & 6h_i \\ -6h_i & 2h_i^2 \end{bmatrix} \quad (5.1b)$$

$$S(i, 2, 2) = (E_i I_i / h_i^3) \begin{bmatrix} 12 & -6h_i \\ -6h_i & 4h_i^2 \end{bmatrix} \quad (5.1c)$$

$S(i, 1, 2)$ ve $S(i, 2, 1)$ birbirlerinin transpozeleridirler. Şek. 5.1b deki modele ait tümel direngenlik matrisi burada, kesim 3.4 deki metot kullanılarak,

$$[K] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} S(1, 1, 1) & S(1, 1, 2) & 0 \\ S(1, 2, 1) & S(1, 2, 2) + S(2, 1, 1) & S(2, 1, 2) \\ 0 & S(2, 2, 1) & S(2, 2, 2) \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (5.2)$$

şeklinde elde edilir.



Şek. 5.1 (a) İki ucundan sabitlenmiş üniform bir kiriş. (b), (a)'nın iki elemanlı bir modeli. (c), (b) modeli kullanılarak (a)'da hesaplanan momentler.

Burada toplam düğüm sayısı 3 olduğundan $N=3$ ve Denk. (3.10) ve (3.11)

$$\{P\} = \{Q_1 M_1 \quad Q_2 M_2 \quad Q_3 M_3\}^T$$

$$\{\delta\} = \{v_1 \theta_1 \quad v_2 \theta_2 \quad v_3 \theta_3\}^T$$

haline gelir. Yine sıfır olmayan dış kuvvet sadece Q_2 olduğundan ve burada $-W$ 'ya eşit olduğundan ve $\{P\}$

$$\{P\} = \{0 \quad 0 \quad -W \quad 0 \quad 0 \quad 0\}^T$$

halini alır. Herbir eleman için, elemanın $S(i, J, K)$ ları Denk. (5.1)'den hesaplanıp Denk. (5.2)'de yerine yazılmıştır. Sonuç $[K]$ matrisi, $\{P\}$ ve $\{\delta\}$ ile birlikte Denk. (3.9)'da yerine konulmuş ve buradan Denk. (5.3) çıkarılmıştır. Denk. (5.3) deki $[K]$ nın satır ve sütunları kolay izlenebilir diye numaralandırılmıştır.

satırlar

$$\begin{array}{c}
 \downarrow \\
 1 \\
 2 \\
 3 \\
 4 \\
 5 \\
 6 \\
 \text{sütunlar} \rightarrow
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \\
 \\
 \\
 q \\
 \\
 \\
 \rightarrow 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 12 & 6h & -12 & 6h & 0 & 0 \\
 6h & 4h^2 & -6h & 2h^2 & 0 & 0 \\
 -12 & -6h & 24 & 0 & -12 & 6h \\
 6h & 2h^2 & 0 & 8h^2 & -6h & 2h^2 \\
 0 & 0 & -12 & -6h & 12 & -6h \\
 0 & 0 & 6h & 2h^2 & -6h & 4h^2
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 v_1 \\
 \theta_1 \\
 v_2 \\
 \theta_2 \\
 v_3 \\
 \theta_3
 \end{Bmatrix}
 =
 \begin{Bmatrix}
 0 \\
 0 \\
 -W \\
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{Bmatrix}
 \quad (5.3)$$

$$q = EI/h^3, \quad h = L/2$$

Simetri nedeniyle verilen bir problemde $[K]$ nın sadece simetrik yarısının toplanması gerekir. $[K]$ doğal olarak singüler (tekil) olup, belirlenen sınır şartları dahil edilinceye kadar öyle kalacaktır. Bu problemde sınır şartları şöyledir.

$$v_1 = \theta_1 = v_3 = \theta_3 = 0 \quad (5.4)$$

Sonlu eleman probleminde $[K]$ matrisi aşağıdaki iki metottan biri ile non-singüler yapılabilir (tekil olmaktan çıkarılabilir).

METOT 1

Eğer bir düğümde \bar{U} yerdeğiştirmeleri belirlenirse, bu durumda, \bar{U} ya ait satırdaki diyagonal terim 1 ile değiştirilir, diyagonal terim dışındaki terimler sıfıra eşitlenir. Ve $\{P\}$ de \bar{U} ya karşı gelen kuvvet satırında kuvvet terimi yerine \bar{U} değeri konur.

Eğer $[K]$ nın Denk. (5.3) deki q gibi bir skalar çarpanı varsa bu durumda \bar{U} ya ait diyagonal terim 1 ile değil $1/q$ ile değiştirilmelidir.

Denk. (5.4) de $v_1 = 0$ şartını ele alalım. Yukarıdaki metodu uygulayarak bu şart, (a) Denk. (5.3) ün 1. satırındaki diyagonal terim $1/q$ ile, ve bu satırdaki diyagonal terim dışındaki terimler sıfır ile değiştirildiğinde; (b) $\{P\}$ nin 1. satırı sıfır ile değiştirildiğinde sağlanmış olacaktır. Çünkü $\bar{U} = v_1 = 0$ dir (bu durumda $\{P\}$ nin 1. satırı zaten sıfırdır).

Denk. (5.4) deki bütün yerdeğiştirmeler için bu işlem tekrarlanarak Denk. (5.3) değiştirildiğinde non-singüler hale gelir ve bu durumda v_2 ve θ_2 yi yegane çözümler olarak elde edebiliriz. Bununla birlikte bu metot aşağıda anlatılan 2. metotta $[K]$ nın bilgisayarda saklanmasında yalnız dört "sözcük" gerekliken burada 36 sözcüğün saklanması gerektiğinden boşuna zaman harcanmasına yol açar. Bu yüzden 1. metot yalnız, sıfır olmayan belirli yerdeğiştirmelere ait satırlar için kullanılmalıdır.

METOT 2

$[K]$ dan sıfır olan yerdeğiştirmeleri gösteren satır ve sütunlar çıkarılıp $\{P\}$, $[K]$ ya uygun şekilde değiştirilir. [Bu işlem aşağıdaki gibi yapılır: k düğümündeki yerdeğiştirmeleri sıfır olarak belirlenmiş olsun. Bu durumda 1. metoda göre v_k satırını gösteren denklemde ,

$$v_k = 0$$

dır. Sağ taraf sıfır olduğundan bu satır başka bir yerdeğiştirmeyi etkilemez. Bu yüzden Denk. (3.9) da bu satırın ve ilgili sütunun bulunması gereksizdir.]

Şek. 5.1a daki problemde 1., 2., 5. ve 6. satırlar ve bunlara karşı gelen sütunlar Denk. (5.3) den, Denk. (5.4) yardımıyla çıkarılmıştır. Şimdi Denk. (5.3),

$$\begin{bmatrix} 24 & 0 \\ 0 & 8h^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \frac{h^3}{EI} \begin{Bmatrix} -W \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.5)$$

halini alır. Kısacası, Denk. (5.5) deki indirgenmiş $[K]$ yı saklamak için şimdi sadece 4 "sözcük" gerekmektedir. Bu problemde elde edilen saklama hacmindeki tasarruf orta bir bilgisayar için gerçekte çok önemli değil. Ancak, büyük hacimli problemlerde, özellikle sürekli ortam mekaniği problemlerinde bu tasarruf daha çok önem kazanır. Öyleyse bu metot mümkün olan her yerde kullanılmalıdır. Denk. (5.5) in el ile çözümünden girişin ortasındaki yerdeğiştirmeler,

$$v_2 = -\frac{WL^3}{192EI} \quad \text{ve} \quad \theta_2 = 0$$

olarak elde edilir. Gerçekten bunlar sonuçların kesin değerleridir.

Şimdide Şek. 5.1a daki problemi, A ucunun başlangıç dönmesi $-\theta'$ olarak verilmesi hali için , çözelim. Bu durumda sınır şartları

$$v_1 = \theta_1 = v_3 = 0 \quad \text{ve} \quad \theta_3 = -\theta'$$

dır. 1. metoda göre, 6. satırdaki diyagonal terim (h^3/EI) ile, diyagonal dışındaki terimler sıfır ile değiştirilir. $\{P\}$ nin 6. satırı da $-\theta'$ ile değiştirilir. Bundan sonra 2. metodu izleyerek v_1 , θ_1 ve v_3 ün satırları ve bunlara karşı gelen sütunlar $[K]$ matrisinden silinip, böylece Denk. (5.3) küçülerek,

$$\begin{bmatrix} 24 & 0 & 6h \\ 0 & 8h^2 & 2h^2 \\ 0 & 0 & h^3/EI \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \frac{h^3}{EI} \begin{Bmatrix} -W \\ 0 \\ -\theta' \end{Bmatrix}$$

şeklini alır. Yukarıdaki eşitliğin el ile çözümünden,

$$v_2 = \left(\frac{L\theta'}{8} - \frac{WL^3}{192EI} \right) \quad \text{ve} \quad \theta_2 = \frac{\theta'}{4}$$

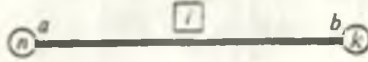
elde edilir. Bu basit örnek 1. metodu kullanarak, belirlenen yerdeğiştirmelerin sıfır olmaması durumundaki işlemi göstermektedir.

İÇ KUVVETLERİN HESABI

Düğüm yerdeğiştirmeleri hesaplandıktan sonra yapıyı temsil eden her bir elemandaki iç kuvvetler aşağıdaki gibi bulunabilir:

Kesim 3.1 de gördüğümüz gibi bir uçtaki yerdeğiştirmeler, ucun bağlandığı düğümlerdeki yerdeğiştirmelere eşit olmak zorundadır. Bunun sonucu olarak Şek. 5.2 deki durumda

$$\{\delta_n\} = \{\delta_n\} \quad \text{ve} \quad \{\delta_{bi}\} = \{\delta_k\}$$



Şek. 5.2 Uniform bir giriş elemanı

Kesim 2.7 deki notasyonu kullanarak,

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} \{\delta_{ni}\} \\ \{\delta_{bi}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\delta_n\} \\ \{\delta_k\} \end{Bmatrix}$$

Denk. (2.6b) ve yukarıdaki denklemden, i elemanındaki $\{P\}$ iç kuvvetleri,

$$\{P\} = [K_i] \begin{Bmatrix} \{\delta_n\} \\ \{\delta_k\} \end{Bmatrix}$$

eşitliğinden elde edilebilir. Düğüm yerdeğiştirmeleri $\{\delta_n\}$ ve $\{\delta_k\}$ daha önce hesaplanmıştı.

Bir örnek olarak, Şek. 5.1b deki bir elemanın $i=1$ iç kuvvetlerini hesaplayalım. Sınır şartları Denk. (5.4) deki sınır şartları olsun. Eksenal ve burulma büyüklükleri bulunmadığından $n=1$ ve $k=2$ alarak,

$$\begin{Bmatrix} \{\delta_1\} \\ \{\delta_2\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{WL^3}{192EI} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

elde edilir. Bu elemanın direngenlik matrisi

$$[K_i] = \begin{bmatrix} S(1, 1, 1) & S(1, 1, 2) \\ S(1, 2, 1) & S(1, 2, 2) \end{bmatrix}$$

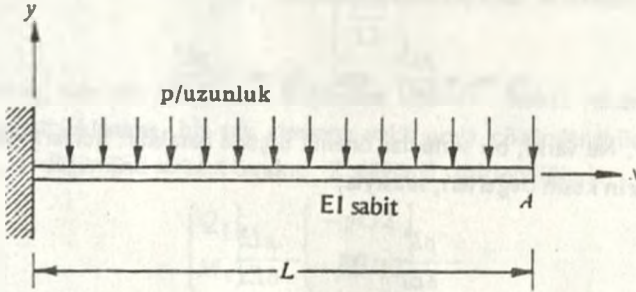
dir. Burada $S(1, J, K)$ lar Denk. (5.1) lerde $i=1$ elde edilmişlerdir. Şimdi, Denk. (5.6) dan iç kuvvetler kolayca hesaplanabilir. Şek. 5.1c bu yolla bulunmuş girişin

iç momentlerini göstermektedir. Uygulamada iç kuvvetlerin hesabı, diğer hesaplamalarda olduğu gibi bilgisayara bırakılır.

Şek. 5.1a'daki basit problemde eğilme momentinin kiriş boyunca değişimine ait ön bilgi yardımıyla yalnız birtek "iç" düğümdeki, yani 2 düğümündeki, iç momentler hesaplanarak kirişin eğilme momenti diyagramı çizilmiştir. Açıkçası iç kuvvetlerin değişimi tahmin edilemediğinde, böyle birkaç iç düğüm konulmalıdır.

5.2 DÜZGÜN YAYILI YÜK TAŞIYAN ÜNİFORM ANKASTRE KİRİŞ

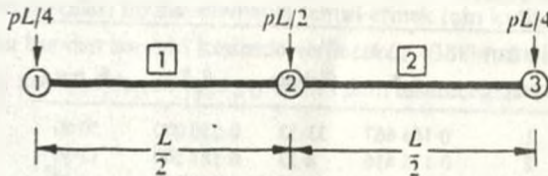
Şek. 5.1a'daki $-W$ gibi bir nokta yükü olarak $\{P\}$ ye dahil edilebilir. Çünkü tanımdan, $\{P\}$ nin bütün bileşenleri, uygulanan tekil dış yüklerdir. Şimdi soru şudur: Şek. 5.3a'da gösterildiği gibi, bir yayılı yükü $\{P\}$ ye nasıl dahil edebiliriz.



(a)



(b)



(c)

Şek. 5.3 (a) Düzgün yayılı p yükünü taşıyan bir üniform ankastre kiriş. (b) (a) ya tek elemanla yaklaşım. (c) (a) ya iki elemanla yaklaşım.

Bu ankastre girişe önce bir tek elemanla yaklaşalım, tamamiyle tahmini olarak üzerine etkiyen toplam yükün yarısının, Şek. 5.3b de gösterildiği gibi herbir uçtaki düğümlere tekil düşey bir yük gibi etkiğini varsayalım. Kesim 5.1 deki 2. metodu izleyerek, bu durumda Denk.(3.9) un aşağıdaki formu alacağı kolayca gösterilebilir.

$$\begin{bmatrix} 12 & -6L \\ -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \frac{L^3}{EI} \begin{Bmatrix} -\frac{pL}{2} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.7)$$

Denk. (5.7) yi çözerek A daki yerdeğiştirmelerin,

$$v_2 = -\frac{pL^4}{6EI} \quad \text{and} \quad \theta_2 = -\frac{pL^3}{4EI}$$

olduğu bulunur. Ne varki, bu sonuçlar önemli ölçüde hatalıdır. Bunlara karşı gelen yerdeğiştirmelerin kesin değerleri, sırasıyla,

$$-\frac{pL^4}{8EI} \quad \text{ve} \quad -\frac{pL^3}{6EI}$$

dır. Şek. 5.3c deki gibi 2 eleman kullanıldığında, Tablo 5.1 de görüldüğü üzere hassasiyet artmaktadır. Görülmüştür ki, sonuçlar, giriş temsil eden elemanların sayısı artırdıkça gerçek değerlerine yaklaşmaktadır.

Hassas bir çözümleme için yayılı yük taşıyan yapıların çok sayıda elemanlara bölünmesi gerektiğinden ve dolayısıyla $[K]$ nin boyutu önemli ölçüde artacağından bu, istenilen bir durum değildir.

Tablo 5.1 A'da yerdeğiştirmelerin yakınsaması
(Şek. 5.3a)

Eleman sayısı	v_A^*	% hata	θ_A^\dagger	% hata
1	0.166 667	33.33	0.250 000	50.00
2	0.135 416	8.33	0.187 500	12.50
3	0.129 629	3.70	0.175 923	6.40
5	0.126 667	1.34	0.170 000	2.00
10	0.125 417	0.33	0.167 000	0.20

$$\text{Çarpan} = -\frac{pL^4}{EI}; \quad \dagger \text{ Çarpan} = -\frac{pL^3}{EI}$$

Şimdi, Şek. 5.3a daki girişe, Şek. 5.3b deki gibi bir tek elemanla yaklaşıldığında kesin sonuçlar elde etmek için $\{P\}$ yi nasıl değiştirebileceğimizi araştıralım. Yük vektörünü bilinmeyen olarak ele alıp A nin kesin yerdeğiştirmelerini, Denk. (5.7) de yazarak,

$$\begin{bmatrix} 12 & -6L \\ -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{pL^4}{8EI} \\ \frac{pL^3}{6EI} \end{Bmatrix} = \frac{L^3}{EI} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ M_2 \end{Bmatrix}$$

elde edilir, ve bunun çözümü

$$\begin{Bmatrix} Q_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{pL}{2} \\ \frac{pL^2}{12} \end{Bmatrix}$$

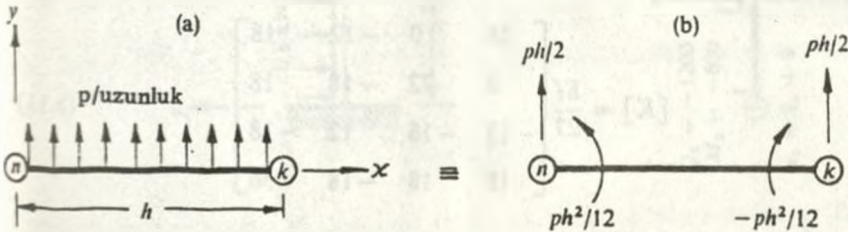
verir. Bu sonuç, ankastre kirişin, 2 düğümüne $-pL/2$ nokta yükünün yanısıra $pL^2/12$ momenti eklenirse, bir tek elemanlı yaklaşımla çözümlenebileceğini göstermektedir. 1 düğümünü serbest bırakıp, 2 düğümü sabitlendiğinde,

$$\begin{Bmatrix} Q_1 \\ M_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -pL/2 \\ -pL^2/12 \end{Bmatrix}$$

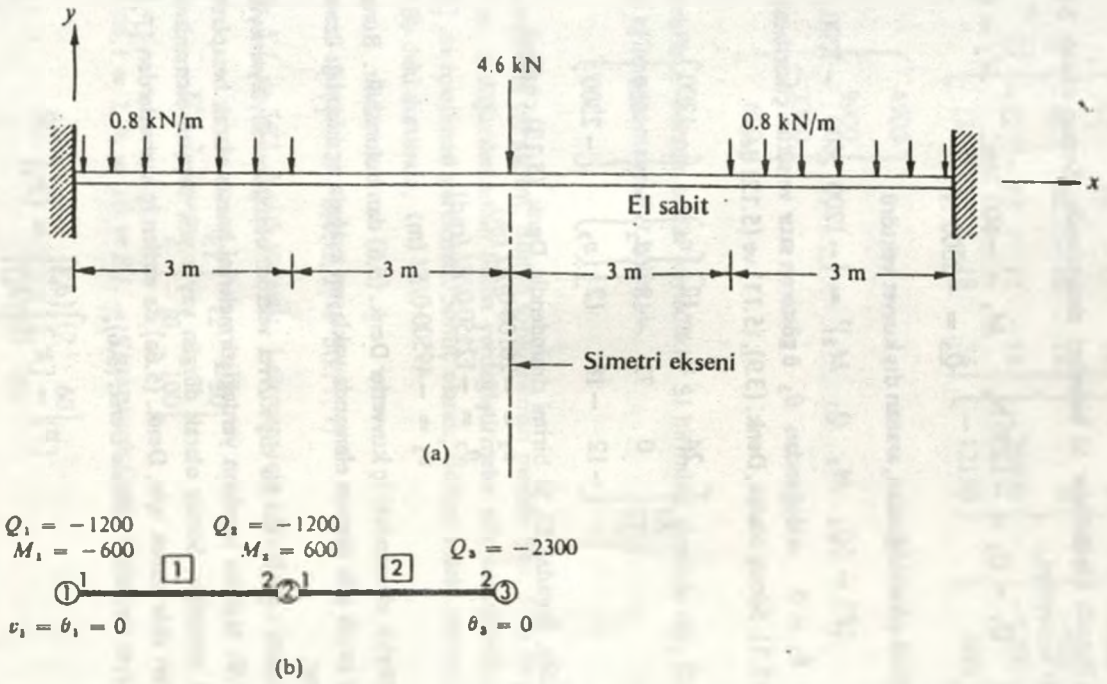
olduğu görülür. Şek. 5.4a daki iki serbestlik dereceli eleman için, "eşdeğer kuvvet vektörü" adı verilen $\{P_e\}$ ile tanımlayabiliriz.

$$\{P_e\} = \begin{Bmatrix} Q_n \\ M_n \\ Q_k \\ M_k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} ph/2 \\ ph^2/12 \\ ph/2 \\ -ph^2/12 \end{Bmatrix} \quad (5.8)$$

Şek. 5.4b $\{P_e\}$ nin tanımını göstermektedir. Açıkçası, $\{P_e\}$; üniform yayılı yükleri taşıyan parçaları bir tek elemanla temsil etmek için kullanılabilir. $\{P_e\}$ tipik bir uygulaması bundan sonraki kesimde verilecektir. Bölüm 9 da herhangi bir sonlu elemanın $\{P_e\}$ sini hesaplamak için genel bir işlem türeteceğiz.



Şek. 5.4 (a) Düzgün yayılı yük taşıyan bir kiriş elemanı. (b) (a) için $\{P_e\}$ nin şekille tanımı.



Şek. 5.5 (a) Çeşitli yükler taşıyan üniform bir kiriş. (b) (a) nın simetrik yarısının sonlu eleman modeli.

$$\{P_e\} = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ M_1 \\ Q_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1200 \\ -600 \\ -1200 \\ 600 \end{Bmatrix}$$

olur. Burada büyüklükler SI birimleri cinsindedir. Sonuç olarak Şek. 5.5b deki düğüm kuvvetleri,

$$Q_1 = Q_2 = -1200 \text{ N}, \quad M_1 = -600 \text{ Nm}, \quad M_2 = 600 \text{ Nm} \\ Q_3 = -2300 \text{ N}$$

1 düğümü çıkarıldığından, aranan dış kuvvet vektörü

$$\{P\} = \{Q_2 \ M_2 \ Q_3 \ M_3\}^T = \{-1200 \ 600 \ -2300 \ 0\}^T \quad (5.12)$$

olur. $\theta_3 = 0$ olduğundan θ_3 ü gösteren satır ve sütun çıkarılacaktır (metot 2, kesim 5.1). Sonuç olarak, Denk. (3.9), (5.11) ve (5.12) den

$$\frac{EI}{27} \begin{bmatrix} 24 & 0 & -12 \\ 0 & 72 & -18 \\ -12 & -18 & 12 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1200 \\ 600 \\ -2300 \end{Bmatrix} \quad (5.13)$$

elde edilir. Burada; EI, SI birimi cinsindedir. Denk. (5.13) çözümü

$$v_2 = -26100 \cdot 0/EI \text{ (m)}$$

$$\theta_2 = -12150 \cdot 0/EI \text{ (rad)}$$

$$v_3 = -49500 \cdot 0/EI \text{ (m)}$$

verir. Herbir elemandaki iç kuvvetler Denk. (5.6) dan bulunabilir. Bununla birlikte, düzgün yayılı yük taşıyan elemanda yaklaşım aşağıda açıklandığı üzere biraz farklı olacaktır.

Aslında $\{P_e\}$ nin bir dış kuvvet vektörü olduğunu söyleyemeyiz. O, düzgün yayılı yük taşıyan yapıların yerdeğiştirmelerini hassas olarak hesaplamamıza yarayan bir unsurdur. Sonuç olarak düzgün yayılı yük taşıyan elemanlarda gerçek iç kuvvetleri elde etmek için, Denk. (5.6a) da verilen iç kuvvetlerden $\{P_e\}$ çıkarılmaktadır. Böyle elemanlar halinde Denk. (5.6),

$$\{P\} = [K_i] \begin{Bmatrix} \{\delta_n\} \\ \{\delta_k\} \end{Bmatrix} - \{P_e\} \quad (5.14)$$

haline gelir. Bir örnek olarak, Şek. 5.5b deki 1 elemanını ele alalım $n = 1, k = 2$ $i = 1, i$ Denk. (5.14) de yerine yazıp, Denk. (5.9) daki $[K_i]$ yı

kullanarak, bu elemandaki gerçek iç kuvvetlerin ,

$$\begin{Bmatrix} Q_{a1} \\ M_{a1} \\ Q_{b1} \\ M_{b1} \end{Bmatrix} = [K_1] \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} - \{P_e\}$$

$$= \frac{1}{27} \begin{bmatrix} 12 & 18 & -12 & 18 \\ 18 & 36 & -18 & 18 \\ -12 & -18 & 12 & -18 \\ 18 & 18 & -18 & 36 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -26100 \\ -12150 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -1200 \\ -600 \\ -1200 \\ 600 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} 4700 \\ 9900 \\ -2300 \\ 600 \end{Bmatrix}$$

olduğunu gösterebiliriz. Burada bütün büyüklükler SI birimleri cinsindedir. Örneğin, 1 ucundaki eğilme momenti 9.9 kNm, vb.

ÖRNEK 2

Şek. 5.6a daki problemi ele alalım. Bunun sonlu eleman modeli Şek. 5.6b de gösterilmiştir. 1 ve 3 düğümlerindeki bütün yerdeğiştirmeler sıfır olduğundan bu düğümlerin $[K]$ da içerilmesi gerekmez. Sonuç olarak, Bölüm 3 deki metodu izleyerek, Şek. 5.6b deki durumda,

$$[K] = 2 \begin{matrix} 2 \\ S(1, 2, 2) + S(2, 1, 1) \end{matrix}$$

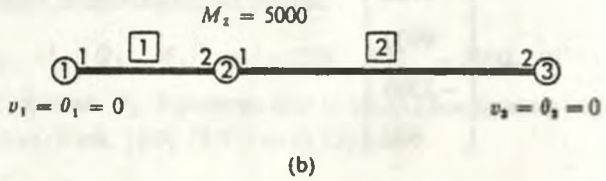
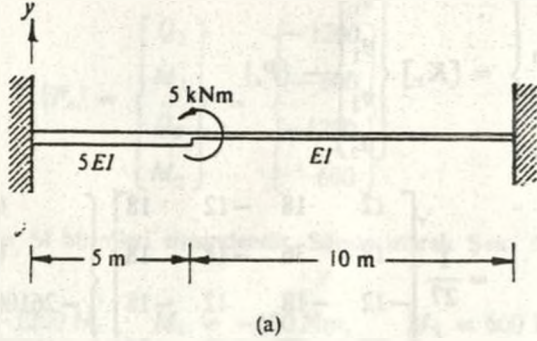
Denk. (5.1c) de $E_i I_i = 5EI$ $h_i = 5$ yazarak, 1 elemanı için olduğunu gösterebiliriz.

$$S(1, 2, 2) = \frac{EI}{25} \begin{bmatrix} 12 & -30 \\ -30 & 100 \end{bmatrix}$$

olur. Benzer tarzda, $i = 2$, $h_i = 10$ ve $E_i I_i = EI$ yazılarak Denk. (5.1a)

$$S(2, 1, 1) = \frac{EI}{1000} \begin{bmatrix} 12 & 60 \\ 60 & 400 \end{bmatrix}$$

verir.



Şek. 5.6 (a) Bir moment etkisinde, üniform olmayan kiriş. (b) (a) nın sonlu elemanlar modeli.

$$[K] = \frac{EI}{1000} \begin{bmatrix} 492 & -1140 \\ -1140 & 4400 \end{bmatrix}$$

sonuç olarak,

bu problemde dış kuvvet sadece, $M_2 = 5 \text{ kNm}$, ve dolayısıyla,

$$\{P\} = \{0 \quad 5000\}^T$$

sonuçta, Denk. (3.9)

$$EI \begin{bmatrix} 0.492 & -1.140 \\ -1.140 & 4.400 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 5000 \end{Bmatrix} \quad (5.15)$$

olur. Denk. (5.15) i çözerek,

$$v_2 = 6.587/EI \text{ (m)}$$

$$\theta_2 = 2.843/EI \text{ (rad)}$$

İç kuvvetler Denk. (5.6) dan bulunabilir.

Yukarıdaki her iki örnekte, sonlu eleman sonuçlarının kesin sonuçlarla çakıştığı söylenebilir. Kiriş yapılarda genellikle, bu beklenen bir sonuçtur.

6 RİJİT-BAGLI ÇERÇEVE

6.1 GENELLEME

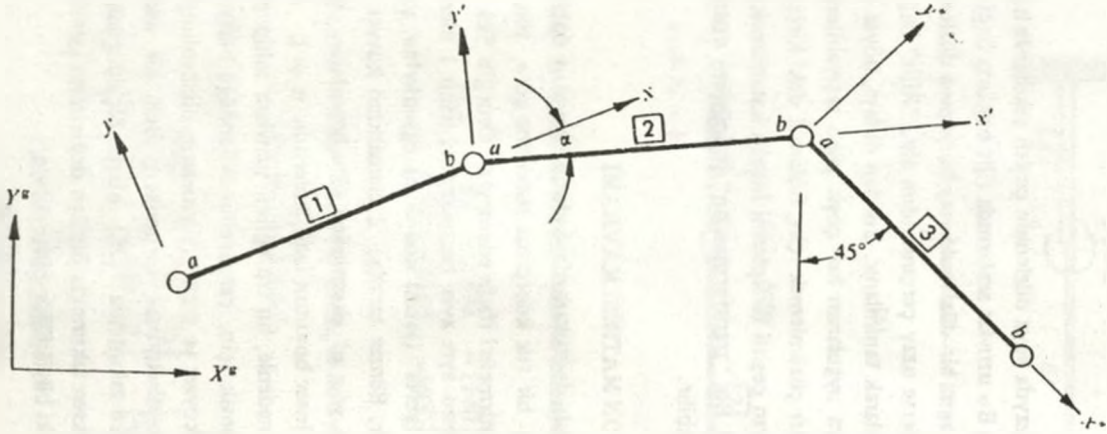
Bir rijit bağlı çerçeve; uzayda veya düzlemde çeşitli şekillerde bağlanmış çok sayıda kiriş uzuvdan oluşur. Bu uzuvlar aralarında rijit bağlarla bağlanmışlardır. Böyle bir çerçevenin uzuvları aynı bir düzlemde ise, bu yapıya düzlem çerçeve; uzayda çeşitli yönlerde dizilmişlerse uzay çerçeve adını alır. "Rijit" bağ, moment ve kuvvetleri taşıyabilen bağ olarak tanımlanır. Bundan dolayı, böyle çerçeveler bağlantı yerlerine veya uzuvlara uygulanan her çeşit yükü taşıyabilecek şekilde dizayn edilmişlerdir. Bu yapıları çözümlmek için, Bölüm 2 deki kiriş elemanı yine kullanılabilir. Ancak uzuvların çeşitli tertiplerini hesaba katabilmek için $S(i, J, K)$ ların değiştirilmesi gerekir. Bu, "transformasyon" (dönüşüm) matrisi denilen matrisi kullanarak kolayca yapılabilir.

6.2 TRANSFORMASYON MATRİSİ KAVRAMI

Çerçeve uzuvlarının farklı doğrultularda bulunmalarından dolayı, önceki bölümlerde yaptığımız tarzda, bir tek koordinat sistemine göre, tüm elemanları göstererek kuvvet ve yerdeğiştirmeleri ifade edemeyiz. Örneğin Şek. 6.1 deki elemanları ele alalım. Her eleman ayrı ayrı hesaplanacağından 1 elemanın kuvvet ve yerdeğiştirmeleri onun "yerel" (local) koordinat eksenlerine, yani $y \text{ a } x$ eksenlerine göre hesaplanabilir. Benzer tarzda, 2 elemanın kuvvet ve yerdeğiştirmeleri onun yerel eksenleri $y' \text{ a } x'$ eksenlerine göre hesaplanır. İki yerel koordinat sisteminde herhangi bir lineer boyutun izdüşümlerinin $\alpha \neq 0$ olduğu sürece, eşit olmayacağı açıktır. Bu nedenle, bu tip eğimli uzuvlara sahip problemlerin ortak bir formülasyonunu yapmak için, çerçevenin bölündüğü bütün sonlu elemanlara uygulanabilen ve bütün kuvvet ve yerdeğiştirmelerin ölçülebildiği "genel" (global) denilen koordinat sistemini kurmak zorundayız. Belli bir vektörel büyüklüğün, i elemanın yerel eksen takımında $\{B_i\}$ olarak ölçüldüğünü varsayalım. Yine, aynı büyüklüğün genel eksen takımında ölçülen değerinin $\{B^g\}$ olduğunu kabul edelim. Bu takdirde, bu iki büyüklüğün birbirleriyle,

$$\{B^g\} = [T_i]\{B_i\}$$

şeklinde bağlı olacağı açıktır. $[T_i]$ matrisine i elemanın "transformasyon" matrisi adı verilir. Çünkü o yerel eksenlerdeki büyüklüğü, genel eksen büyüklüğüne dönüştürür. $[T_i]$ görüldüğü gibi, yerel eksenlerin genel eksenlere göre doğrultusuna bağlıdır. Dolayısıyla, Şek. 6.1 de $[T_2]$, yerel $y' \text{ a } x'$ eksenlerinde ölçülen herhangi



Şek.6.1 Birkaç eğimli eş-düzlemli giriş elemanı; yax , $y'ax'$ ve $y''ax''$, sırasıyla 1,2 ve 3 elemanlarının "yerel" eksenleridir.

bir vektörel büyüklüğü (kuvvetler, yerdeğiştirmeler vb.) genel eksenler $Y^a X^a$ deki değerine dönüştürülecektir.

Bu kitabın bundan sonraki kısmında üst indis, ilgili büyüklüğün genel eksenlere ait olduğu anlamına gelecektir. Örneğin, u_i^a ve v_i^a sırasıyla X^a ve Y^a boyunca k düğümündeki yerdeğiştirmeleri göstermektedir.

6.3 DÜZLEM TRANSFORMASYON MATRİSİNİN ÇIKARIMI

Bir düzlem çerçeveye ait ve Şek. 2.2b deki gibi 3 serbestlik dereceli Şek. 6.2 deki i elemanını ele alalım (burulma kuvvetleri daha çok ilgili oldukları uzay çerçeve bağlamında düşünülecektir). Genel üst indis g nin genel eksenlerdeki büyüklükleri gösterdiğini hatırlayarak, a ucundaki yatay ve düşey kuvvetlerin net genel bileşenleri sırasıyla,

$$F_{ai}^g = F_{ai} \cos \alpha_i - Q_{ai} \sin \alpha_i$$

$$Q_{ai}^g = F_{ai} \sin \alpha_i + Q_{ai} \cos \alpha_i$$

olur. Genel olarak, sadece iç alt indisli büyüklükler yerel y a x eksenlerinde ölçülmüş büyüklükleri gösterir. Elemanın a ucunun genel eksenlerin orijini ile çakıştığını hayal ederek, α_i nin daima $+X^g$ den saat ibrelerinin ters yönünde ölçüldüğüne de dikkat edilmelidir. Örneğin Şek. 6.1 de 3 elemanında $\alpha_3 = 315^\circ$ dir.

Benzer tarzda, okuyucu, b ucu için

$$F_{bi}^g = F_{bi} \cos \alpha_i - Q_{bi} \sin \alpha_i$$

$$Q_{bi}^g = F_{bi} \sin \alpha_i + Q_{bi} \cos \alpha_i$$

olduğunu ispatlayabilir. Bu durumda, momentler ve dönmeler hem yerel hem de genel sistemde aynıdır.

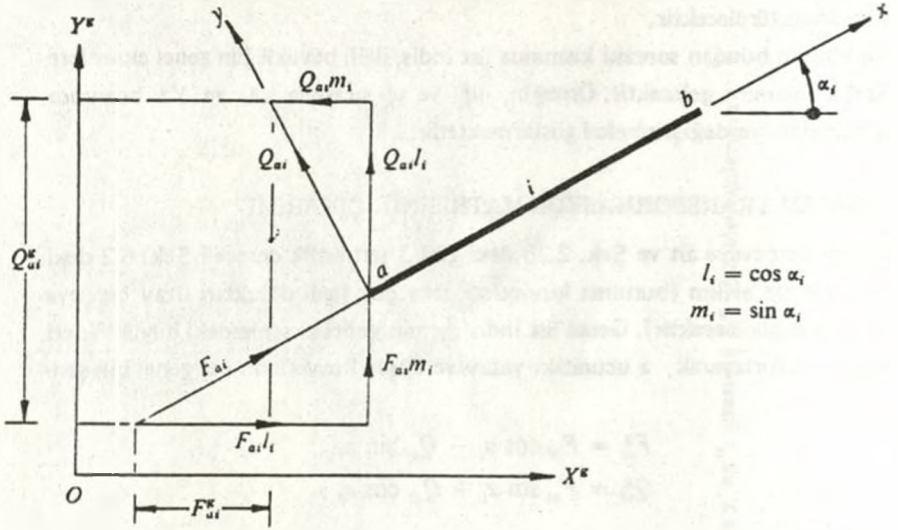
$$M_{ai}^g = M_{ai}$$

$$M_{bi}^g = M_{bi}$$

yazabiliriz. Yukarıdaki eşitlikleri aşağıdaki gibi matris formuna koyalım:

$$\begin{bmatrix} F_{ai}^g \\ Q_{ai}^g \\ M_{ai}^g \\ F_{bi}^g \\ Q_{bi}^g \\ M_{bi}^g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_i & -m_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_i & l_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_i & -m_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_i & l_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{ai} \\ Q_{ai} \\ M_{ai} \\ F_{bi} \\ Q_{bi} \\ M_{bi} \end{bmatrix} = [T_i] \begin{bmatrix} F_{ai} \\ Q_{ai} \\ M_{ai} \\ F_{bi} \\ Q_{bi} \\ M_{bi} \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

Açıkçası Denk. (6.1) deki kare matris yerel koordinatlardaki kuvvetleri genel koordinatlardaki kuvvetlere bağlar. Son kesimdeki tanımdan bu matris i elemanının



Şek. 6.2 Yerel ve genel sistemlerde lineer uç yükler

aranan transformasyon matrisi $[T_i]$ dir (Zamanla kesikli çizgiler kaldırılacak). Belli bir eleman için $[T_i]$ nin mertebesi elemanın $[K_i]$ sının mertebesine eşittir. Transformasyon matrisinin önemli bir özelliği, transpozusunun tersine eşit olmasıdır. Yani,

$$[T_i]^T = [T_i^{-1}] \quad (6.2)$$

Sonuç olarak matris cebirinde $[T_i]$ nin bir "ortogonal" transformasyon gösterdiği söylenir. Benzer bir işlemle,

$$\begin{Bmatrix} u_{ai}^* \\ v_{ai}^* \\ \theta_{ai}^* \\ u_{bi}^* \\ v_{bi}^* \\ \theta_{bi}^* \end{Bmatrix} = [T_i] \begin{Bmatrix} u_{ai} \\ v_{ai} \\ \theta_{ai} \\ u_{bi} \\ v_{bi} \\ \theta_{bi} \end{Bmatrix} \quad (6.3)$$

olduğunu gösterebiliriz. Denk. (6.3) ün solundaki vektör genel eksenlere göre elemanın uç yerdeğiştirmelerini göstermektedir. Sağdaki vektör, elemanın yerel eksenlerde karşı gelen yerdeğiştirmelerini göstermektedir. Denk. (6.1) ve (6.3) elema-

nın kuvvet ve yerdeğiştirmelerinin, beklendiği gibi, aynı matrisle dönüştürüldüğünü göstermektedir.

6.4 BİR DÜZLEM ELEMANIN "GENEL" DİRENGENLİK MATRİSİ

Tanıma göre, i elemanın $[K_i]$ matrisi yerel eksenlere göredir. Şimdi, kesim 6.3 deki elemanın $[K_i]$ sinin genel eksenlere nasıl dönüştürüleceğini tayin edelim.

Denk. (6.3) ün her iki tarafını $[T_i^{-1}]$ ile soldan çarparak ve Denk. (6.2) yi kullanarak Denk. (6.3) ü şöyle yazabiliriz.

$$\begin{Bmatrix} u_{ai} \\ v_{ai} \\ \theta_{ai} \\ u_{bi} \\ v_{bi} \\ \theta_{bi} \end{Bmatrix} = [T_i]^T \begin{Bmatrix} u_{ai}^e \\ v_{ai}^e \\ \theta_{ai}^e \\ u_{bi}^e \\ v_{bi}^e \\ \theta_{bi}^e \end{Bmatrix} \quad (6.4)$$

burulma büyüklüğünü dışarda bıraktığımızdan eleman direngenlik matrisi $[K_i]$, Denk. (2.8) de burulma momenti ve burulma yerdeğiştirmelerine ait satır ve sütunlar silinerek elde edilebilir. O takdirde Denk. (2.8),

$$\begin{Bmatrix} F_{ai} \\ Q_{ai} \\ M_{ai} \\ F_{bi} \\ Q_{bi} \\ M_{bi} \end{Bmatrix} = [K_i] \begin{Bmatrix} u_{ai} \\ v_{ai} \\ \theta_{ai} \\ u_{bi} \\ v_{bi} \\ \theta_{bi} \end{Bmatrix} \quad (6.5)$$

şeklinde yazılır. Burada $[K_i]$, 6×6 lık bir matristir. Denk. (6.5) in her iki tarafı $[T_i]$ ile soldan çarpılarak,

$$[T_i] \begin{Bmatrix} F_{ai} \\ Q_{ai} \\ M_{ai} \\ F_{bi} \\ Q_{bi} \\ M_{bi} \end{Bmatrix} = [T_i K_i] \begin{Bmatrix} u_{ai} \\ v_{ai} \\ \theta_{ai} \\ u_{bi} \\ v_{bi} \\ \theta_{bi} \end{Bmatrix} \quad (6.6)$$

elde edilir. Denk. (6.1) ve (6.4) ile Denk. (6.6) da uygun değişiklikleri yaparak,

$$\begin{Bmatrix} F_{ai}^e \\ Q_{ai}^e \\ M_{ai}^e \\ F_{bi}^e \\ Q_{bi}^e \\ M_{bi}^e \end{Bmatrix} = [T_i K_i T_i^T] \begin{Bmatrix} u_{ai}^e \\ v_{ai}^e \\ \theta_{ai}^e \\ u_{bi}^e \\ v_{bi}^e \\ \theta_{bi}^e \end{Bmatrix} \quad (6.7)$$

şeklinde yazılabilir. Denk. (6.7) deki $[T_i K_i T_i^T]$ matris çarpımı i elemanının genel uç kuvvetleri ile genel yerdeğiştirmeleri arasındaki bağıntıyı kurar.

$$[K_i^*] = [T_i K_i T_i^T]$$

Bu matrise i elemanının "dönüştürülmüş" (transform edilmiş) veya "genel" dirençlik matrisi adı verilir. Tersine, $[K_i]$ i elemanının yerel eksenlerde ölçülmüş uç kuvvetleriyle uç yerdeğiştirmeleri arasındaki bağıntıyı kurar. Beklendiği üzere çarpım işleminden $[K_i^*]$ nin daima simetrik bir kare matrisi olarak elde edileceği açıktır.

6.5 BİR DÜZLEM ÇERÇEVE ELEMANIN GENEL ALT MATRİSLERİ

Düzlem çerçevelerde, önceki bölümlerdeki doğru eksenli kirişlerde olduğu gibi, problemin çözülüş adımları eleman dirençlik matrislerini alt matrislere ayırarak önemli ölçüde basitleştirilebilir. $[t_i]$, $[T_i]$

$$[T_i] = \begin{bmatrix} t_i & 0 \\ 0 & t_i \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

şeklinde* bir alt matrisi olsun. Burada 0 'lar boş (sıfır) matrislerdir. Denk. (6.1) ile (6.8) karşılaştırılarak

$$[t_i] = \begin{bmatrix} l_i & -m_i & 0 \\ m_i & l_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

elde edilir. Denk. (6.8) den $[T_i]$ yi, Denk. (3.3) den $[K_i]$ yi alarak tanımdan,

$$\begin{aligned} [K_i^*] = [T_i K_i T_i^T] &= \begin{bmatrix} t_i & 0 \\ 0 & t_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S(i, 1, 1) & S(i, 1, 2) \\ S(i, 2, 1) & S(i, 2, 2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_i^T & 0 \\ 0 & t_i^T \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} S^*(i, 1, 1) & S^*(i, 1, 2) \\ S^*(i, 2, 1) & S^*(i, 2, 2) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.10)$$

elde edilir.

* t_i ve 0 lar Denk. (6.1) i kesikli çizgiler boyunca $[T_i]$ yi parçalayarak oluşturulmuştur.

Çarpma işlemi sonucu Denk. (6.10) dan,

$$S^e(i, J, K) = (t_i \cdot S(i, J, K) \cdot t_j^T), \quad J = 1, 2, \quad K = 1, 2 \quad (6.11)$$

olduğu ispatlanabilir. Denk. (6.10) ve (3.3) karşılaştırıldığında, yapının tamamının tümel direngenlik matrisi $[K^e]$ nin de Bölüm 3 deki yöntemle toplanabileceği görülür. Bununla birlikte, Bölüm 3 de yaptığımız $S(i, J, K)$ ları toplama yerine burada $S^e(i, J, K)$ lar toplanacaktır. Açığıdır ki, uygulanan düğüm dış kuvvetleri ve meydana gelen düğüm yerdeğiştirmeleri de genel eksenlerde olmak zorundadır. Buna göre, çerçeve toplam N düğümle temsil edilmişse $\{P^e\}$ ve $\{\delta^e\}$ aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\{P^e\} = \{F_1^e \ Q_1^e \ M_1^e \ F_2^e \ Q_2^e \ M_2^e \ \dots \ F_N^e \ Q_N^e \ M_N^e\}^T \quad (6.12)$$

$$\{\delta^e\} = \{u_1^e \ v_1^e \ \theta_1^e \ u_2^e \ v_2^e \ \theta_2^e \ \dots \ u_N^e \ v_N^e \ \theta_N^e\}^T \quad (6.13)$$

Burada, F_i^e ve Q_i^e düğümüne uygulanan dış kuvvetlerin sırasıyla X^e ve Y^e eksenlerindeki bileşenleridir. M_i^e , k düğümüne uygulanan dış momenttir (düzlem çerçevelerde $M_i^e = M_k$) olduğuna dikkat edilmelidir. O halde, rijit bağlı bir düzlem çerçevede ve genelde çerçeve yapılarında, Denk. (3.9) aşağıdaki formu alacaktır.

$$\{P^e\} = [K^e]\{\delta^e\} \quad (6.14)$$

Denk. (6.14) de belirlenen sınır şartları dahil ettikten sonra, genel düğüm yerdeğiştirmeleri $\{\delta^e\}$ çözülebilir. Yukarıdaki formüllerin tipik bir uygulaması, kesim 6.8 de verilecektir.

6.6 RIJİT-BAĞLI UZAY ÇERÇEVELER

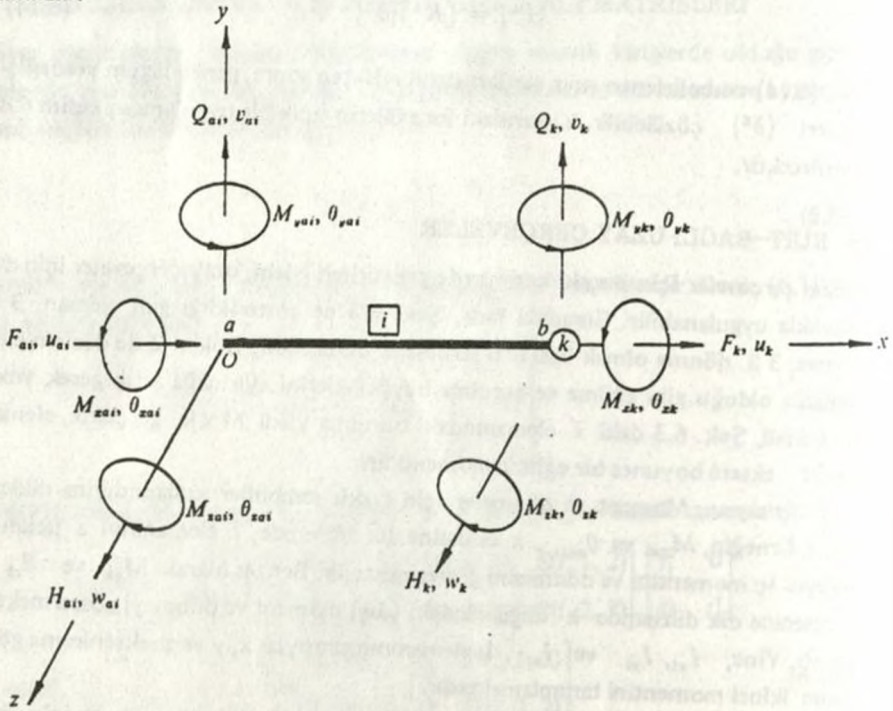
Düzlem çerçeveler için önceki kesimlerde geliştirilen işlem, uzay çerçeveler için de kolaylıkla uygulanabilir. Buradaki fark, Şek. 6.3 de gösterildiği gibi eleman, 3 ü öteleme, 3 ü dönme olmak üzere 6 serbestlik derecelidir. Bölüm 2 de düzlem elemanlarda olduğu gibi eğilme ve burulma büyüklüklerini ayırmağa artık gerek yoktur. Çünkü, Şek. 6.3 deki i elemanındaki burulma yükü $M \times k$, gerçekte, elemanın Oz eksenini boyunca bir eğilme momentidir.

[*Notasyon:* Moment ve dönmeler için farklı semboller kullanıldığına dikkat ediniz. Örneğin, M_{xai} ve θ_{xai} , x eksenine dik düzlemde, i elemanının a ucunun sırasıyla iç momentini ve dönmesini göstermektedir. Benzer olarak M_{zai} ve θ_{zai} z eksenine dik düzlemde k düğümündeki (dış) moment ve dönmeyi göstermektedir, vb. Yine, I_{xi} , I_{yi} ve I_{zi} , i elemanının sırasıyla x , y ve z eksenlerine göre alanın ikinci momentini tanımlamaktadır.]

Uzay çerçevelerde, kuvvet ve yerdeğiştirme vektörlerini, düzenlemek için öteleme ve dönme büyüklüklerini ayrı ayrı fakat kendi aralarında gruplama daha uygun olur. O halde, Şek. 6.3 deki elemanın Denk. (2.8) deki karşılığı,

$$\begin{Bmatrix} F_{ai} \\ Q_{ai} \\ H_{ai} \\ M_{xai} \\ M_{yai} \\ M_{zai} \\ F_{bi} \\ Q_{bi} \\ H_{bi} \\ M_{xbi} \\ M_{ybi} \\ M_{zbi} \end{Bmatrix} = [K_i] \begin{Bmatrix} u_{ai} \\ v_{ai} \\ w_{ai} \\ \theta_{xai} \\ \theta_{yai} \\ \theta_{zai} \\ u_{bi} \\ v_{bi} \\ w_{bi} \\ \theta_{xbi} \\ \theta_{ybi} \\ \theta_{zbi} \end{Bmatrix} \quad (6.15)$$

halini alır.



Şek. 6.3 Bir uzay çerçeve elemanı; yerel koordinatlar x y z 'e göre kuvvetler ve yerdeğiştirmeler.

Şek. 6.3 de gösterildiği gibi i nin yerel koordinatlara göre yazılan eleman direngelik matrisi $[K_i]$, 12×12 lik bir matristir. Kesim 3.3 e göre $S(i, J, K)$ larının her biri 6×6 boyutunda ve $J = 1, 2$ ve $K = 1, 2$ dir. $[K_i]$ nin dolayısıyla $S(i, J, K)$ ların katsayıları çeşitli kuvvetlerin ve yerdeğiştirmelerin, yönlerini gözönüne alarak Bölüm 2 deki metotla hesaplanabilir. Okuyucu,

$$S(i, 1, 1) = E_i \begin{bmatrix} a_i/h_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12I_{xi}/h_i^3 & 0 & 0 & 0 & 6I_{xi}/h_i^2 \\ 0 & 0 & 12I_{yi}/h_i^3 & 0 & -6I_{yi}/h_i^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_i/h_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6I_{yi}/h_i^2 & 0 & 4I_{yi}/h_i & 0 \\ 0 & 6I_{xi}/h_i^2 & 0 & 0 & 0 & 4I_{xi}/h_i \end{bmatrix} \quad (6.16a)$$

$$S(i, 1, 2) = E_i \begin{bmatrix} -a_i/h_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12I_{xi}/h_i^3 & 0 & 0 & 0 & 6I_{xi}/h_i^2 \\ 0 & 0 & -12I_{yi}/h_i^3 & 0 & -6I_{yi}/h_i^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta_i/h_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6I_{yi}/h_i^2 & 0 & 2I_{yi}/h_i & 0 \\ 0 & -6I_{xi}/h_i^2 & 0 & 0 & 0 & 2I_{xi}/h_i \end{bmatrix} \quad (6.16b)$$

olduğunu ispatedebilir. Genel olarak, $S(i, 1, 2)$ ve $S(i, 2, 1)$ birbirinin transpozesidirler. Yine, $S(i, 2, 2)$ altmatrisi, Denk. (6.6a) daki noktalı çizgi üzerinde bulunan terimleri, β_i/h_i hariç, işaretleri değiştirildiğinde, $S(i, 1, 1)$ 'e eşit hale gelir. Bu noktalı çizginin başkaca bir önemi yoktur.

Şek. 6.3 deki elemanın alt matrisi $[t_i]$ nin,

$$[t_i] = \begin{bmatrix} x^e x & x^e y & x^e z & 0 & 0 & 0 \\ y^e x & y^e y & y^e z & 0 & 0 & 0 \\ z^e x & z^e y & z^e z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x^e x & x^e y & x^e z \\ 0 & 0 & 0 & y^e x & y^e y & y^e z \\ 0 & 0 & 0 & z^e x & z^e y & z^e z \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

olduğu ispatlanabilir. Burada, örneğın, $x^e x$, X^e eksenini ile x eksenini arasındaki açının kosinüsünü, benzer şekilde $z^e y$, Z^e eksenini ile y eksenini arasındaki açının

kosinüsünü göstermektedir.

Düzlem çerçevelerdeki gibi, $[t_i]$; burada da, "yerel" uç kuvvetler ve yerdeğiştirmeleri bunların "genel" eşdeğerlerine dönüştürür. Örneğin böylece, a ucundaki, yerel ve genel iç kuvvetler arasındaki bağıntı,

$$\begin{Bmatrix} F_{ai}^e \\ Q_{ai}^e \\ H_{ai}^e \\ M_{xai}^e \\ M_{yai}^e \\ M_{zai}^e \end{Bmatrix} = [t_i] \begin{Bmatrix} F_{ai} \\ Q_{ai} \\ H_{ai} \\ M_{xai} \\ M_{yai} \\ M_{zai} \end{Bmatrix} \quad (6.18)$$

şeklinde dir. Denk. (6.17) ve (6.18), öteleme ve dönme kuvvetlerinin birbirinden bağımsız olarak dönüştürülebileceklerini göstermektedir. Bu durumun yerdeğiştirmeler halinde de geçerli olduğu açıktır. Transformasyon matrisi:

$$[T_i] = \begin{bmatrix} t_i & 0 \\ 0 & t_i \end{bmatrix}$$

Burada, (12 x 12) lik bir matristir ve aynı zamanda ortogonal olup, Denk. (6.2) yi sağlar.

Verilen bir problemin çözümünde, önce Denk. (6.11), (6.16) ve (6.17) den her bir elemanın $S^e(i, J, K)$ ları hesaplanır. Daha sonra bunlar, $[K^e]$ oluşturmak üzere, Bölüm 3 deki metotlarla toplanır ve sonunda, problem Denk. (6.14) ile çözülecektir. Bu denklemin vektörleri, şöyledir:

$$\{P^e\} = \{F_1^e \ Q_1^e \ H_1^e \ M_{x1}^e \ M_{y1}^e \ M_{z1}^e \ \cdots \ F_N^e \ Q_N^e \ H_N^e \ M_{xN}^e \ M_{yN}^e \ M_{zN}^e\}^T \quad (6.19)$$

ve

$$\{\delta^e\} = \{u_1^e \ v_1^e \ w_1^e \ \theta_{x1}^e \ \theta_{y1}^e \ \theta_{z1}^e \ \cdots \ u_N^e \ v_N^e \ w_N^e \ \theta_{xN}^e \ \theta_{yN}^e \ \theta_{zN}^e\}^T \quad (6.20)$$

Burada N, çerçevedeki toplam düğüm sayısıdır. Düğüm kuvvetleri ve yerdeğiştirmeler Şek. 6.3 de tanımlanmıştır.

6.7 İÇ KUVVETLERİN HESABI

Düğüm yerdeğiştirmeleri $\{\delta^e\}$ hesaplandıktan sonra, her bir elemanın iç kuvvetleri aşağıdaki gibi hesaplanacaktır. Örnek olarak, i elemanının a ve b ucunun sırası ile, n ve k düğümlerine bağlanmış olduğunu düşünelim. Ve sonra uygunluğu sağlamak için (kesim 3.1), a ve b uçlarındaki yerdeğiştirmeler sırasıyla n ve k düğümlerindeki yerdeğiştirmelere eşit olmak zorundadırlar. Yani,

$$\begin{Bmatrix} u_{ai}^e \\ v_{ai}^e \\ \theta_{ai}^e \\ u_{bi}^e \\ v_{bi}^e \\ \theta_{bi}^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_n^e \\ v_n^e \\ \theta_n^e \\ u_k^e \\ v_k^e \\ \theta_k^e \end{Bmatrix} \quad (6.21)$$

dır. Burada sağdaki vektör, n ve k düğümünde hesaplanan genel düğüm yerdeğiştirmelerini kapsamaktadır. Denk. (6.4), (6.5) ve (6.21) den aşağıdaki denklemin, i elemanın yerel eksenlerdeki iç kuvvetlerini vereceğini göstermek kolay bir iştir.

$$\begin{Bmatrix} F_{ai} \\ Q_{ai} \\ M_{ai} \\ F_{bi} \\ Q_{bi} \\ M_{bi} \end{Bmatrix} = [K_i T_i^T] \begin{Bmatrix} u_n^e \\ v_n^e \\ \theta_n^e \\ u_k^e \\ v_k^e \\ \theta_k^e \end{Bmatrix} \quad (6.22)$$

Benzer bir denklem uzay çerçeveler için kolayca çıkarılabilir.

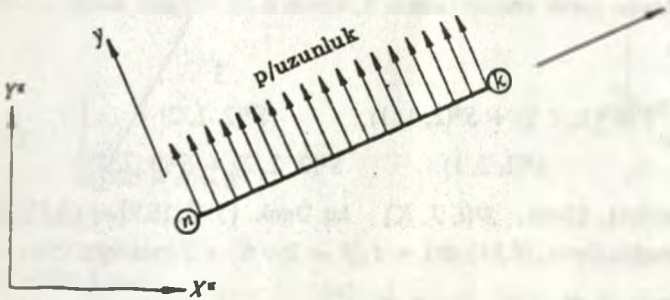
DÜZGÜN YAYILI YÜKLER

Bir çerçeve yapının i elemanı düzgün yayılı yük taşıyorsa, $\{P_e^e\}$ ile göstereceğimiz "genel eşdeğer kuvvet vektörü" nün,,

$$\{P_e^e\} = [T_i] \{P_e\} \quad (6.23)$$

şeklinde elde edileceği kolayca gösterilebilir.

Örneğin, Şek. 6.4 de gösterilen düzlem çerçeve elemanı düşünelim,



Şek 6.4 p düzgün yayılı yükünü taşıyan rijit bağlı bir düzlem çerçeve elemanı.

Elemanın $\{P_e\}$ si,

$$\{P_e\} = \begin{Bmatrix} F_n \\ Q_n \\ M_n \\ F_k \\ Q_k \\ M_k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ ph_i/2 \\ ph_i^2/12 \\ 0 \\ ph_i/2 \\ -ph_i^2/12 \end{Bmatrix} \quad (6.24)$$

dır. Denk. (6.24), yerel eksenel kuvvetler F_n ve F_k yı Denk. (5.8) e dahil ederek elde edilmiştir. Burada, bunların herikisi de sıfırdır. Çünkü p , n ve k düğümlerinde eksenel kuvvet doğurmaz. O halde, Denk. (6.1) ile tanımlanmış $[T_i]$ yi kullanarak Denk. (6.23) ve (6.24) den, düzlem çerçeve elemanı için $\{P_e^g\}$ hesaplanabilir.

Denk. (6.24) e benzer bir ifade uzay çerçeve elemanları için de kolaylıkla çıkarılabilir.

6.8 BİR ÖRNEK

Bu bölümde geliştirilen metoda tipik bir örnek olarak; şimdi Şek. 6.5a daki rijit-bağlı düzlem çerçeve problemini çözelim. Çerçevenin sonlu elemanlara bölünmesi Şek. 6.5b de gösterilmiştir. Uzun detayları aşağıdaki gibidir:

Uzuv , i	a_i (m ²)	h_i (m)	I_i (m ⁴)	α_i (°)
1	0.108	4.5	0.00110	60
2	0.108	4.0	0.00110	0
3	0.090	3.0	0.00061	90

Bütün uzuvlar için : $E = 20 \text{ GN/m}^2$

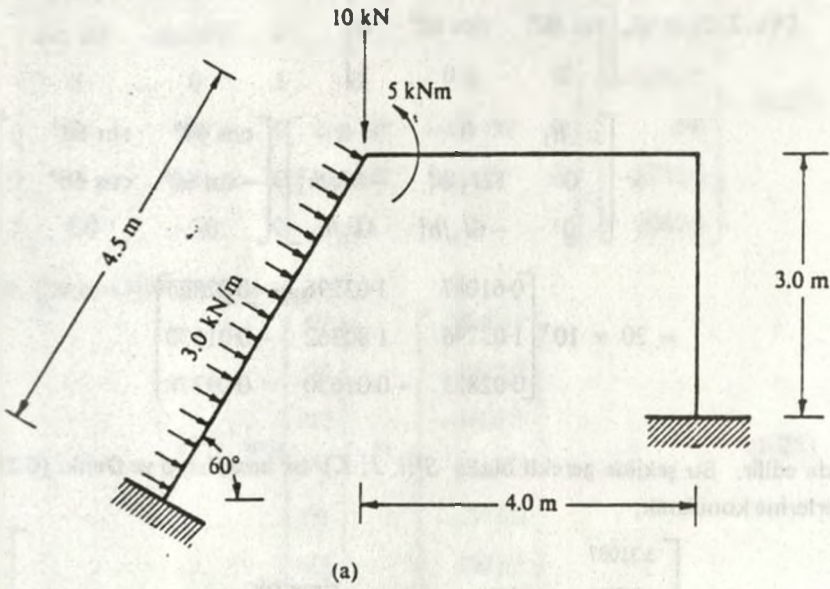
1 ve 4 düğümlerinde bütün yerdeğiştirmeler sıfır olduğundan, bunların $[K^*]$ matrisinde yer almasına gerek yoktur (metot 2, kesim 5.1). O halde kesim 3.4 deki metodu izleyerek,

$$[K^*] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} S^*(1, 2, 2) + S^*(2, 1, 1) & S^*(2, 1, 2) \\ S^*(2, 2, 1) & S^*(2, 2, 2) + S^*(3, 2, 2) \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (6.25)$$

olduğunu gösterebiliriz. Şimdi, $S^*(i, J, K)$ lar Denk. (3.4), (6.9) ve (6.11) den hesaplanabilir. Örneğin Denk. (6.11) de $i = 1, J = 2$ ve $K = 2$ yazarak,

$$S^*(1, 2, 2) = (t_1 \cdot S(1, 2, 2) \cdot t_1^T)$$

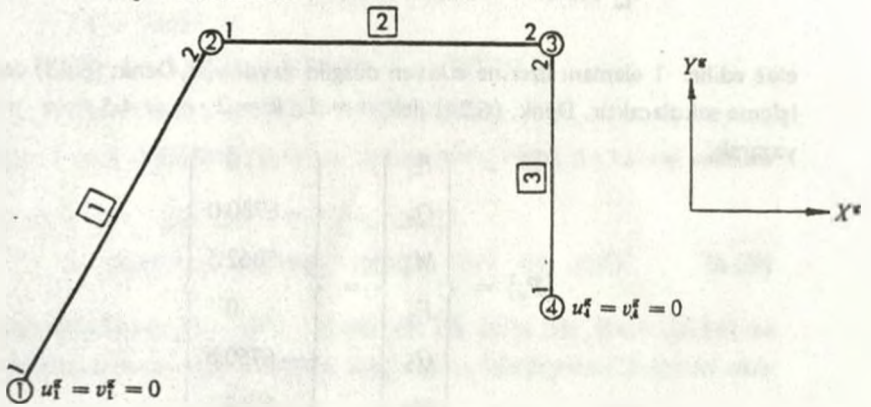
elde ederiz, veya 1 elemanın değerlerini, bu denklemde yazarak ve Denk. (3.4c) de burulmayı ihmal ederek,



$$F_1^* = 5845.7 \text{ N}$$

$$Q_1^* = -13375.0 \text{ N}$$

$$M_1^* = 10062.5 \text{ Nm}$$



$$F_1 = 5845.7 \text{ N}$$

$$Q_1 = -3375.0 \text{ N}$$

$$M_1 = -5062.5 \text{ Nm}$$

Şek. 6.5 (a) Rijit bağlı bir düzlem çerçeve. (b) (a) nın bir sonlu eleman modeli.

$$\begin{aligned}
S^*(1, 2, 2) &= E_1 \begin{bmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ & 0 \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&\times \begin{bmatrix} a_1/h_1 & 0 & 0 \\ 0 & 12I_1/h_1^3 & -6I_1/h_1^2 \\ 0 & -6I_1/h_1^2 & 4I_1/h_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 60^\circ & \sin 60^\circ & 0 \\ -\sin 60^\circ & \cos 60^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= 20 \times 10^7 \begin{bmatrix} 0.61087 & 1.03296 & 0.02823 \\ 1.03296 & 1.80362 & -0.01630 \\ 0.02823 & -0.01630 & 0.09778 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu şekilde gerekli bütün $S^*(i, J, K)$ lar hesaplanıp ve Denk. (6.25) de yerlerine konularak,

$$[K^*] = 20 \times 10^7 \begin{bmatrix} 3.31087 & & & & & \\ 1.03296 & 1.82424 & & & & \\ 0.02823 & 0.02495 & 0.20778 & & & \\ -2.70000 & 0.00000 & 0.00000 & 2.72667 & & \\ 0.00000 & -0.02062 & -0.04125 & 0.00000 & 3.02062 & \\ 0.00000 & 0.04125 & 0.05500 & 0.04000 & -0.04125 & 0.19000 \end{bmatrix} \quad (6.26)$$

elde edilir. 1 elemanı üzerine etkileyen düzgün yayılı yük, Denk. (6.23) ve (6.24) de işleme sokulacaktır. Denk. (6.24) de $n = 1$, $k = 2$, $h_1 = 4.5$ ve $p = -3000$ yazarak,

$$\{P_e\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ Q_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ Q_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -6750.0 \\ -5062.5 \\ 0 \\ -6750.0 \\ 5062.5 \end{Bmatrix}$$

elde edilir. Burada büyüklükler, SI birimleri cinsindedir. Ve sonra bu $\{P_e\}$ ve $[T_i]$ ($[T_i]$, Denk. (6.1) de tanımlanmıştır, Denk. (6.23) yerine yazılarak,

$$\{P_2^e\} = \begin{bmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin 60^\circ & \cos 60^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \cdot 0 \\ -6750 \cdot 0 \\ -5062 \cdot 5 \\ 0 \cdot 0 \\ -6750 \cdot 0 \\ 5062 \cdot 5 \end{Bmatrix} \quad (6.27)$$

elde edilir. Çarpma işlemi yapılarak,

$$\{P_2^e\} = \begin{Bmatrix} F_1^e \\ Q_1^e \\ M_1^e \\ F_2^e \\ Q_2^e \\ M_2^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5845 \cdot 7 \\ -3375 \cdot 0 \\ -5062 \cdot 5 \\ 5845 \cdot 7 \\ -3375 \cdot 0 \\ 5062 \cdot 5 \end{Bmatrix} \quad (6.28)$$

elde edilir. Denk. (6.28) ve Şek. 6.5a'dan toplam düğüm yükleri aşağıdaki gibi olur.

$$F_1^e = 5845 \cdot 7 \text{ N}$$

$$Q_1^e = -3375 \cdot 0 \text{ N}$$

$$M_1^e = -5062 \cdot 5 \text{ Nm}$$

$$F_2^e = 5845 \cdot 7 \text{ N}$$

$$Q_2^e = -3375 \cdot 0 - 10000 \cdot 0 = -13375 \cdot 0 \text{ N}$$

$$M_2^e = 5062 \cdot 5 + 5000 \cdot 0 = 10062 \cdot 5 \text{ Nm}$$

Bununla birlikte 1 ve 4 düğümleri $[K^e]$ de kapsamadığından, dış kuvvet vektörü şudur:

$$\{P^e\} = \{F_1^e \quad Q_1^e \quad M_1^e \quad F_2^e \quad Q_2^e \quad M_2^e\}^T \\ = \{5845 \cdot 7 \quad -13375 \cdot 0 \quad 10062 \cdot 5 \quad 0 \cdot 0 \quad 0 \cdot 0 \quad 0 \cdot 0\}^T \quad (6.29)$$

Düğüm yerdeğiştirmelerini $\{\delta^e\}$ Denk. (6.26) ve (6.29), Denk. (6.14) de yerine yazıp bilgisayarda yapılan çözümde aşağıdaki yerdeğiştirme değerleri elde edilir.

Düğüm k	u_k^e (m)	v_k^e (m)	θ_k^e (rad)
2	0-001278	-0-000760	0-000201
3	0-001268	-0-000005	-0-000161

Şimdi herbir eleman içindeki iç kuvvetler Denk. (6.22) den hesaplanabilir. Örneğin, 1 elemanını düşünelim $n = 1$ ve $k = 2$ koyarak ve 1 düğümündeki bütün yerdeğiştirmelerin sıfır olduğuna dikkat ederek, bu denklemden,

$$\begin{Bmatrix} F_{a1} \\ Q_{a1} \\ M_{a1} \\ F_{b1} \\ Q_{b1} \\ M_{b1} \end{Bmatrix} = [K_1][T_1]^T \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.001278 \\ -0.000760 \\ 0.000201 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 8986.1 \\ 5620.6 \\ 11661.0 \\ -8986.1 \\ -5620.6 \\ 13631.6 \end{Bmatrix}$$

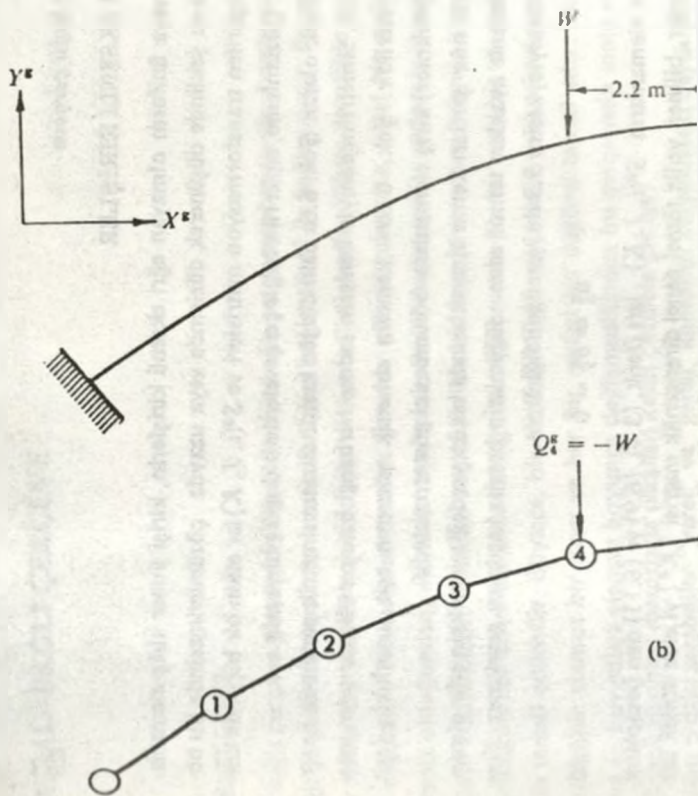
elde ederiz. Burada bütün büyüklükler SI birimleri cinsindedir. (Şek.6.5b deki 1 ve 2 rakamlarının sırasıyla a ve b uçlarını gösterdiğine dikkat edilmelidir). Bununla birlikte $\{P_i^e\}$ 1 elemanı üzerine etkileyen düzgün yayılı yükü göstermek için kullanıldığında, üste hesaplanan iç kuvvetler; Denk. (5.14) ü kullanarak düzeltilmelidir. Böylece, 1 elemanındaki gerçek iç kuvvetler,

$$\begin{Bmatrix} F_{a1} \\ Q_{a1} \\ M_{a1} \\ F_{b1} \\ Q_{b1} \\ M_{b1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 8986.1 - 0 \\ 5620.6 + 6750.0 \\ 11661.0 + 5062.5 \\ -8986.1 - 0 \\ -5620.6 + 6750.0 \\ 13631.6 - 5062.5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 8986.1 \\ 12370.6 \\ 16723.5 \\ -8986.1 \\ 1129.4 \\ 8569.1 \end{Bmatrix}$$

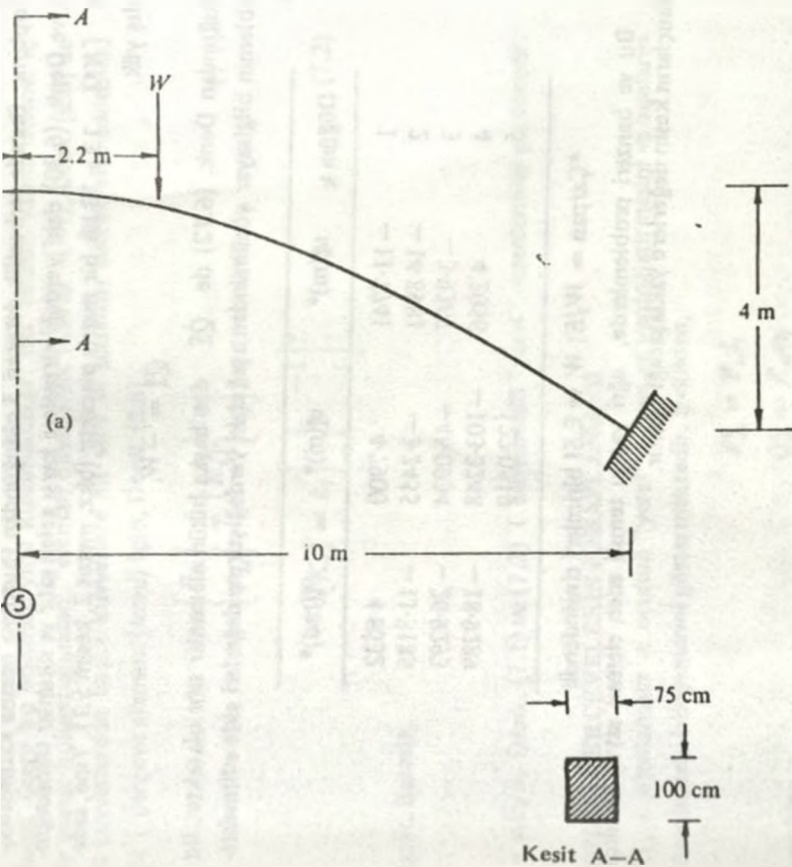
dir. Şek. 6.5 deki çerçeve için elde edilen iç kuvvetler aşağıdadır (bütün büyüklükler SI birimleri cinsindedir).

Eleman i	F_{ai}	Q_{ai}	M_{ai}	F_{bi}	Q_{bi}	M_{bi}
1	8986.1	12370.6	16723.5	-8986.1	1129.4	8569.1
2	5471.2	-2782.6	-3569.1	-5471.2	2782.6	-7561.2
3	2782.6	5471.2	8852.2	-2782.6	-5471.2	7561.2

Kabul ettiğimiz işaret düzenine göre, i elemanındaki eksenel kuvvet F_{ai} negatif ve F_{bi} pozitif iken çekmedir. Eksenel kuvvet basma ise bu işaretler üstekinin tersi olacaktır. Bu yüzden, 1 elemanındaki eksenel (iç) kuvvet basmadır, ve büyüklüğü 8986.1 N dur. Bu problemde sonlu eleman çözümünün, kesin çözümle çakıştığı kanıtlanabilir.



Şek. 6.6 (a) Bir üniform simetrik, parabolik yay.



(b) (a) nin tekil edilmiş sonlu eleman modeli

6.9 EĞRİ EKSENLİ KİRİŞLER

Üniform veya üniform olmayan eğri eksenli kirişlerin, kirişi lineer kiriş elemanlarının toplamı şeklinde düşünerek düzlemde veya uzayda çözümlenmesinde bu bölümde geliştirilen transformasyon matrisleri ve $S^*(i, J, K)$ lar etkin bir biçimde kullanılabilir. Çözümleme, tıpkı rijit bağlı çerçevelerde olduğu gibi yapılır.

Bir örnek olarak Şek. 6.6a daki düzgün kesitli düzlem simetrik parabolik kemeri ele alalım. Simetri nedeniyle kemerin sadece herhangi bir simetrik yarısının incelenmesi yeterlidir. Şek. 6.6b kemerin simetrik yarısının eşit uzunluklu (eşit olmaları gerekmez) kiriş elemanlara bölünmesini göstermektedir.

Burada sınır şartları kemerin ayaklarında bütün yerdeğiştirmelerin sıfır olmasıdır. Bu nedenle ayakları temsil eden düğümlerin hesaba katılması gerekmez. Yine simetri nedeniyle, kesim 5.3 de işaret edildiği üzere,

$$u_3^i = \theta_3^i = 0 \quad (6.30)$$

dır. Bütün elemanların $S^*(i, J, K)$ ları Denk. (3.4), (6.9) ve (6.11) den hesaplanır. Sonra bunlar, bilinen yolla tümel genel direngenlik matrisi $[K^*]$ yi elde etmek üzere toplanır. Burada serbestlik derecesi 3 olduğundan (burulma hesaba katılmamıştır), ve Denk. (6.30) daki yerdeğiştirmelere karşı gelen satır ve sütunlar silineceğinden $[K^*]$, 13×13 lük bir matris olacaktır (bkz. metod 2, kesim 5.1). Yine, sadece dış yük,

$$Q_1^i = -W.$$

olduğundan Denk. (6.12) de Q_1^i den başka bütün elemanlar sıfır olacaktır. Bu problemin bilgisayar çözümünden aşağıdaki yerdeğiştirme değerleri elde edilmektedir:

Düğüm k	$u_1^i(m)^*$	$u_2^i(m)^*$	$\theta_1^i(\text{rad})^*$
1	-11.7741	4.7900	4.6532
2	-14.8981	-3.3455	-11.3185
3	-3.9367	-46.0934	-26.9293
4	4.2056	-103.3248	-18.9289
5		-122.0519	

*Çarpan = W/E ; W ve E , SI birimleri cinsindedir.

Bu ve benzeri problemlerde, eğri yapıyı temsil eden eleman sayısı arttıkça sonuçların kesin değerlere yaklaşacağı açıktır.

7 MAFSAL-BAGLI ÇERÇEVE

7.1 GENELLEME

Mafsalsal bağılı çerçeve geometri itibari ile rijit bağılı çerçeveye benzerdir. Ancak mafsalsal bağılı çerçevenin elemanları mafsallar (pim bağlantıları) ile bağlanmıştır. Bu çerçeveler nokta dış yükleri taşımak için dizayn edilmişlerdir. Yükler genellikle mafsallara uygulanır, elemanların üzerine genelde yük uygulanmaz. İdeal bir mafsalsal sürtünmesiz olduğundan, moment taşıyamaz. Bu nedenle uzuvlar sadece iç aksel kuvvetlerin etkisindedir. Bundan başka verilen bir uzuvda meydana gelen iç kuvvetin büyüklüğü uzuv boyunca sabit kaldığından çerçevenin her bir uzvu bir tek sonlu elemanla temsil edilebilir. Böylece, bir mafsalsal - bağılı çerçevenin sonlu eleman modelinde her bir eleman bir uzvu ve her bir mafsalsal bir düğümü temsil eder. Yine, elemanın iç kuvvetleri eleman boyunca değişmediğinden bu çerçevenin sonlu eleman çözümü alışılmış metotlarla ulaşılan kesin çözümle çakışır.

Bölüm 6 daki semboller "yerel" ve "genel" koordinat sistemindeki büyüklükleri tanımlamak üzere bu bölümde yine kullanılacaktır. Her eleman yalnız aksel iç kuvvete maruz bulunduğu için, "eleman direngenlik matrisi" $[K_i]$, Denk. (2.8) de aksel kuvvetlerden başka kuvvetlere ait satır ve sütunları silerek elde edilebilir. Böylece i çerçeve elemanı (uzvu) için, Denk. (2.8),

$$\begin{Bmatrix} F_{a1} \\ F_{b1} \end{Bmatrix} = [K_i] \begin{Bmatrix} u_{a1} \\ u_{b1} \end{Bmatrix} \quad (7.1)$$

$$[K_i] = k_i \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.2)$$

haline gelir. Burada,

ve $k_i = a_i E_i / h_i$. Denk. (7.1) ve (7.2) i elemanının "yerel" eksenlerinde yazılmıştır.

7.2 DÜZLEM ÇERÇEVELERİN HESAPLANMASI

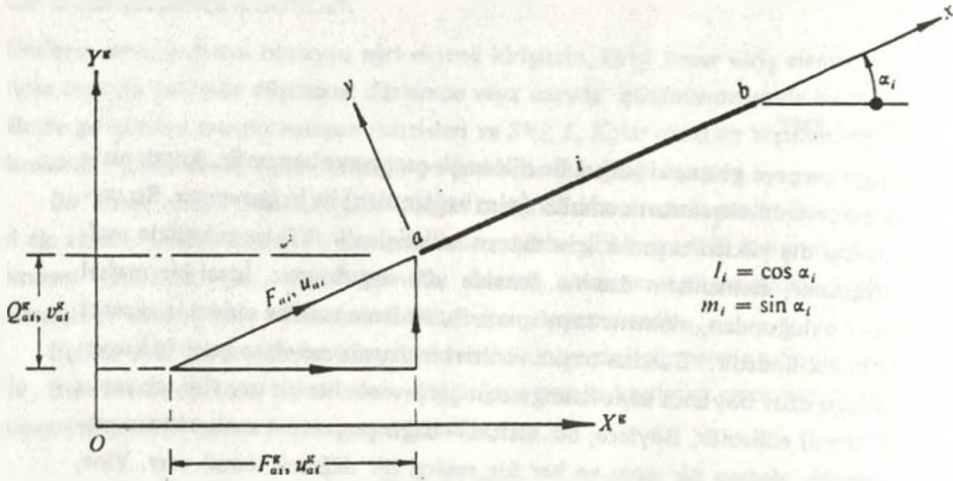
Şek. 7.1, i elemanının a ucunun "yerel" kuvvet ve yerdeğiştirmesini ve bunların genel eksenlerdeki bileşenlerini göstermektedir. Şekilden,

$$F_{a1}^x = F_{a1} l_i$$

$$Q_{a1}^x = F_{a1} m_i$$

olduğu açıktır.

* Açıkta k_i , bu durumda, $S(i, 1, 1) = S(i, 2, 2) = -S(i, 1, 2) = -S(i, 2, 1) = k_i$ dir.



Şek. 7.1 Mafsalsal-bağlı düzlem çerçeve elemanı.

b ucu için, benzer şekilde,

$$F_{bi}^x = F_{bi} l_i$$

$$Q_{bi}^x = F_{bi} m_i$$

dır. Burada, Bölüm 6 daki gibi g üst indisi taşıyan semboller ilgili büyüklüklerin genel eksenlere ait olduğunu göstermektedir. Alt indisi semboller ise elemanın yerel eksenlerine ait büyüklükleri göstermektedir. Yukarıdaki dört denklemi matris formunda yazarak:

$$\begin{Bmatrix} F_{ai}^x \\ Q_{ai}^x \\ F_{bi}^x \\ Q_{bi}^x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l_i & 0 \\ m_i & 0 \\ 0 & l_i \\ 0 & m_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{ai} \\ F_{bi} \end{Bmatrix} \quad (7.3)$$

Denk. (7.3) deki dikdörtgen matris, yerel kuvvetlerle genel kuvvetleri birbirine bağlar. Dolayısıyla kesim 6.2 deki tanımdan,

$$[T_i] = \begin{bmatrix} l_i & 0 \\ m_i & 0 \\ 0 & l_i \\ 0 & m_i \end{bmatrix} \quad (7.4)$$

dır. Bu bir transformasyon matrisidir. Şek. 7.1 den yerel yerdeğiştirmelerin, genel yerdeğiştirmelere aşağıdaki şekilde $[T_i]$ matrisi ile bağlanacağı açıktır.

$$\begin{Bmatrix} u_{ai}^e \\ v_{ai}^e \\ u_{bi}^e \\ v_{bi}^e \end{Bmatrix} = [T_i] \begin{Bmatrix} u_{ai} \\ u_{bi} \end{Bmatrix} \quad (7.5)$$

$l_i^2 + m_i^2 = 1$, olduğundan, çarpma işlemi yapıldığında,

$$[T_i^T T_i] = [I] \quad (7.6)$$

olduğu görölür. Burada $[I]$, 2×2 lik bir birim matristir.

Denk. (7.1) in her iki tarafını $[T_i]$ ile soldan çarparak,

$$[T_i] \begin{Bmatrix} F_{ai} \\ F_{bi} \end{Bmatrix} = [T_i K_i] \begin{Bmatrix} u_{ai} \\ u_{bi} \end{Bmatrix} \quad (7.7)$$

elde edilir. Denk. (7.7) nin sol tarafını Denk. (7.3) ün sağ tarafıyla aynı olduğu ağktır. Dolayısıyla,

$$\begin{Bmatrix} F_{ai}^e \\ Q_{ai}^e \\ F_{bi}^e \\ Q_{bi}^e \end{Bmatrix} = [T_i K_i] \begin{Bmatrix} u_{ai} \\ u_{bi} \end{Bmatrix} \quad (7.8)$$

dır. Ayrıca, Denk. (7.5) in her iki tarafını $[T_i^T]$ ile soldan çarparak ve Denk.(7.6) yı kullanarak sonuçta,

$$\begin{Bmatrix} u_{ai} \\ u_{bi} \end{Bmatrix} = [T_i^T] \begin{Bmatrix} u_{ai}^e \\ v_{ai}^e \\ u_{bi}^e \\ v_{bi}^e \end{Bmatrix} \quad (7.9)$$

elde edilir. Denk. (7.8) ve (7.9) arasında $\begin{Bmatrix} u_{ai} \\ u_{bi} \end{Bmatrix}$ yi yok ederek,

$$\begin{Bmatrix} F_{ai}^e \\ Q_{ai}^e \\ F_{bi}^e \\ Q_{bi}^e \end{Bmatrix} = [T_i K_i T_i^T] \begin{Bmatrix} u_{ai}^e \\ v_{ai}^e \\ u_{bi}^e \\ v_{bi}^e \end{Bmatrix} \quad (7.10)$$

ulaşılır. Denk. (7.10) da, Denk. (6.7) deki gibi, matris aşağıdaki şekil alır.

$$[K_i] = [T_i K_i T_i^T] \quad (7.11)$$

$[K_i^*]$; genel uç kuvvetlerle, genel uç yerdeğiştirmeleri birbirine bağlar. Bu nedenle, i nin "genel" eleman direngenlik matrisidir. Denk. (7.2), (7.4) ve (7.11) den,

$$\begin{aligned}
 [K_i^*] &= k_i \begin{bmatrix} l_i & 0 \\ m_i & 0 \\ 0 & l_i \\ 0 & m_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_i & m_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_i & m_i \end{bmatrix} \\
 &= k_i \begin{bmatrix} l_i^2 & l_i m_i & -l_i^2 & -l_i m_i \\ l_i m_i & m_i^2 & -l_i m_i & -m_i^2 \\ -l_i^2 & -l_i m_i & l_i^2 & l_i m_i \\ -l_i m_i & -m_i^2 & l_i m_i & m_i^2 \end{bmatrix} \quad (7.12)
 \end{aligned}$$

beklendiği üzere karşılıklı teoremden $[K_i^*]$ nin simetrik bir matris olduğunu görebiliriz. Bölüm 3 deki işlemi izleyerek, $[K_i^*]$ yi, $S^*(i, J, K)$ alt matrislerine ayırıp, Denk. (7.12) ye bakarak alt matrisleri kolayca yazabiliriz.

$$\begin{aligned}
 S^*(i, 1, 1) &= S^*(i, 2, 2) = -S^*(i, 1, 2) = -S^*(i, 2, 1) \\
 &= k_i \begin{bmatrix} l_i^2 & l_i m_i \\ l_i m_i & m_i^2 \end{bmatrix} \quad (7.13)
 \end{aligned}$$

Tüm çerçeve için, genel tümel direngenlik matrisi $[K^*]$, Bölüm 3 deki metotla, her bir elemanın $S^*(i, J, K)$ larını toplayarak oluşturulacaktır. O takdirde, problem belirlenmiş sınır şartları altında, Denk. (6.14) ün çözümüne dönüşür. $\{P^*\}$ ve $\{\delta^*\}$ nin açık ifadeleri aşağıdaki gibidir.

$$\{P^*\} = \{F_1^* Q_1^* \ F_2^* Q_2^* \ \dots \ F_N^* Q_N^*\}^T \quad (7.14)$$

$$\{\delta^*\} = \{u_1^* v_1^* \ u_2^* v_2^* \ \dots \ u_N^* v_N^*\}^T \quad (7.15)$$

Burada N çerçevedeki toplam düğüm (mafsal) sayısıdır.

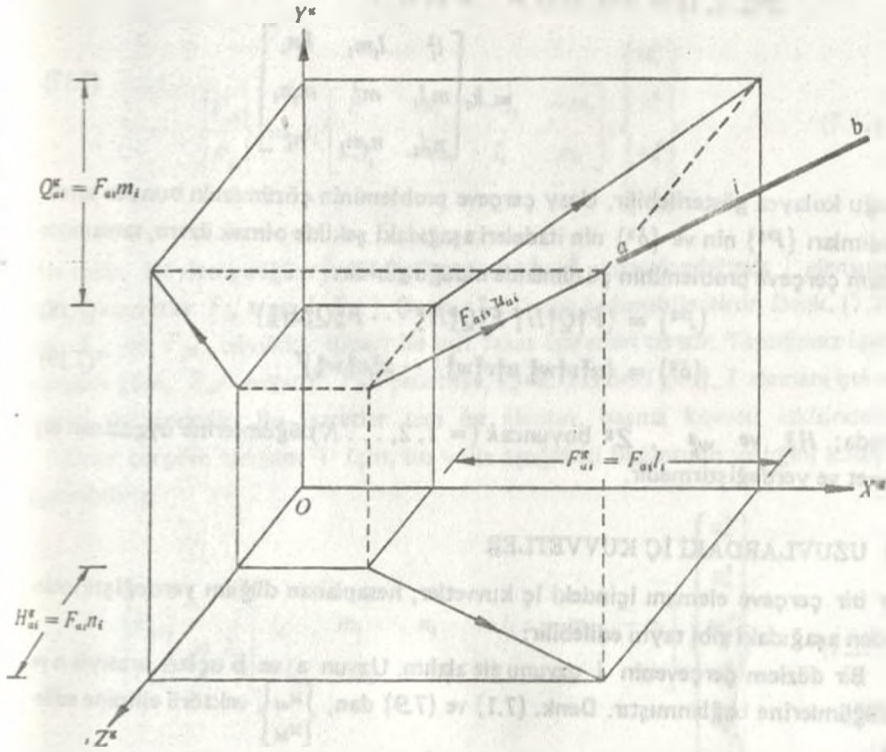
7.3 UZAY ÇERÇEVELERİN HESAPLANMASI

Şek. 7.2, genel bir uzay çerçeve elemanının a ucunun yerel kuvvet ve yerdeğiştirmesini ve bunların genel eksenlerdeki bileşenlerini göstermektedir. Bu durumda, açıktır ki,

$$F_{ai}^* = F_{ai} l_i$$

$$Q_{ai}^* = F_{ai} m_i$$

$$H_{ai}^* = F_{ai} n_i$$



Şek 7.2 Mafsallı bir uzay çerçeve elemanı (l_i , m_i ve n_i i nin genel eksenlere göre doğrultma kosinüsleridir).

Benzer şekilde b ucu için kesim 7.2 deki gibi,

$$[T_i] = \begin{bmatrix} l_i & 0 & 0 \\ m_i & 0 & 0 \\ n_i & 0 & 0 \\ 0 & l_i & 0 \\ 0 & m_i & 0 \\ 0 & n_i & 0 \end{bmatrix} \quad (7.16)$$

olduğunu gösterebiliriz. $l_i^2 + m_i^2 + n_i^2 = 1$ olduğundan, Denk. (7.16) daki $[T_i]$, Denk. (7.6) yı sağlar. Şimdi, Denk.(7.2), (7.11) ve (7.16) dan bir uzay çerçeve elemanı için :

$$\begin{aligned}
 S^{\alpha}(i, 1, 1) &= S^{\alpha}(i, 2, 2) = -S^{\alpha}(i, 1, 2) = -S^{\alpha}(i, 2, 1) \\
 &= k_i \begin{bmatrix} l_i^2 & l_i m_i & l_i n_i \\ m_i l_i & m_i^2 & m_i n_i \\ n_i l_i & n_i m_i & n_i^2 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \quad (7.17)$$

olduğu kolayca gösterilebilir. Uzay çerçeve probleminin çözümünün bundan sonraki adımları $\{P^{\alpha}\}$ nin ve $\{\delta^{\alpha}\}$ nin ifadeleri aşağıdaki şekilde olmak üzere, tamamiyle düzlem çerçeve probleminin çözümünde olduğu gibidir.

$$\{P^{\alpha}\} = \{F_1^{\alpha} Q_1^{\alpha} H_1^{\alpha} \quad F_2^{\alpha} Q_2^{\alpha} H_2^{\alpha} \quad \dots \quad F_N^{\alpha} Q_N^{\alpha} H_N^{\alpha}\}^T \quad (7.18)$$

$$\{\delta^{\alpha}\} = \{u_1^{\alpha} v_1^{\alpha} w_1^{\alpha} \quad u_2^{\alpha} v_2^{\alpha} w_2^{\alpha} \quad \dots \quad u_N^{\alpha} v_N^{\alpha} w_N^{\alpha}\}^T \quad (7.19)$$

Burada; H_k^{α} ve w_k^{α} , Z^{α} boyunca $k (= 1, 2, \dots, N)$ düğümlerine uygulanan dış kuvvet ve yerdeğiştirme.

7.4 UZUVLARDAKİ İÇ KUVVETLER

Her bir çerçeve elemanı içindeki iç kuvvetler, hesaplanan düğüm yerdeğiştirmelerinden aşağıdaki gibi tayin edilebilir:

Bir düzlem çerçevenin i uzvunu ele alalım. Uzun a ve b uçları sırasıyla n ve k düğümlerine bağlanmıştır. Denk. (7.1) ve (7.9) dan, $\begin{Bmatrix} u_{ni} \\ u_{ki} \end{Bmatrix}$ vektörü elimine ederek,

$$\begin{Bmatrix} F_{ai} \\ F_{bi} \end{Bmatrix} = [K_i T_i^T] \begin{Bmatrix} u_n^{\alpha} \\ v_n^{\alpha} \\ u_k^{\alpha} \\ v_k^{\alpha} \end{Bmatrix} \quad (7.20)$$

elde edilir. Şimdi, uygunluğu sağlamak için a ve b uçlarındaki yerdeğiştirmeler, sırasıyla n ve k düğümlerindeki yerdeğiştirmelere eşit olmak zorundadır. Denk. (7.20) yi aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\begin{Bmatrix} F_{ai} \\ F_{bi} \end{Bmatrix} = [K_i T_i^T] \begin{Bmatrix} u_n^{\alpha} \\ v_n^{\alpha} \\ u_k^{\alpha} \\ v_k^{\alpha} \end{Bmatrix} \quad (7.21)$$

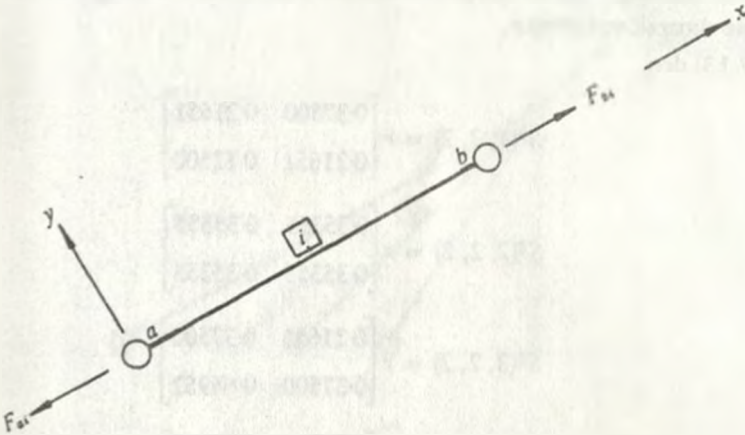
Veya $[K_i]$ ve $[T_i]$ nin Denk. (7.2) ve (7.4) deki değerleri yerine yazıp, çarpma işlemini yaparak,

$$\begin{Bmatrix} F_{ai} \\ F_{bi} \end{Bmatrix} = k_i \begin{bmatrix} l_i & m_i & -l_i & -m_i \\ -l_i & -m_i & l_i & m_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_n^e \\ v_n^e \\ u_k^e \\ v_k^e \end{Bmatrix} \quad (7.22)$$

elde edilir. Böylece, düğüm yerdeğiştirmeleri u_n^e, v_n^e , hesaplandığında i elemanın-
daki iç kuvvetler F_{ai} veya (F_{bi}), Denk. (7.22) den bulunabilecektir. Denk. (7.22)
den F_{ai} ve F_{bi} büyüklük itibari ile eşit fakat işaretleri terstir. Yaptığımız işaret
kabulüne göre, F_{ai} negatif F_{bi} pozitifse, (şek. 7.3 deki gibi), i elemanı çekme
kuvveti etkisindedir. Bu işaretler ters ise eleman, basma kuvveti etkisindedir.

Uzay çerçeve elemanı i için, bu yolla aşağıdaki bağıntının varlığını kolayca
gösterebiliriz.

$$\begin{Bmatrix} F_{ai} \\ F_{bi} \end{Bmatrix} = k_i \begin{bmatrix} l_i & m_i & n_i & -l_i & -m_i & -n_i \\ -l_i & -m_i & -n_i & l_i & m_i & n_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_n^e \\ v_n^e \\ w_n^e \\ u_k^e \\ v_k^e \\ w_k^e \end{Bmatrix} \quad (7.23)$$



şek. 7.3 Çekme etkisinde bir çerçeve uzvu.

7.5 BİR ÖRNEK

Bu bölümde geliştirilen metotla, Şek. 7.4a daki basit düzlem çerçeve problemini çözelim. Bu çerçevede verilen bütün uzuvların kesiti a , elastisite modülü E dir. Çerçevenin sonlu eleman modeli Şek. 7.4b de gösterilmiştir. Uzun detayları şöyledir:

uzuv , i	α_i ($^\circ$)	uzunluk (h_i)
1	30	$2H$
2	45	$H\sqrt{2}$
3	60	$2H/\sqrt{3}$
4	90	H

Kesim 3.4 deki yöntemi izleyerek, çerçevenin tümel direngenlik matrisi toplanır. 1, 2, 3 ve 4 düğümlerinde bütün yerdeğiştirmeler sıfır olduğundan, çerçevenin sınır şartları şunlardır:

$$u_1^e = v_1^e = u_2^e = v_2^e = u_3^e = v_3^e = u_4^e = v_4^e = 0 \quad (7.24)$$

Sonuç olarak kesim 5.1 deki yöntemi kullanarak, bu yerdeğiştirmelere ait satır ve sütunlar, $[K^e]$ matrisinde dikkate alınmayacaktır. Bu problem için Denk. (6.14) ün aşağıdaki şekle geldiği ispatlanabilir.

$$[S^e(1, 2, 2) + S^e(2, 2, 2) + S^e(3, 2, 2) + S^e(4, 2, 2)] \begin{Bmatrix} u_2^e \\ v_2^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ W \end{Bmatrix} \quad (7.25)$$

Denk. (7.25) in sağındaki vektör çerçeveye etkiyen yegane dış kuvvet $Q_2^e = W$ olması gözönüne alınarak yazılmıştır.

Denk. (7.13) den,

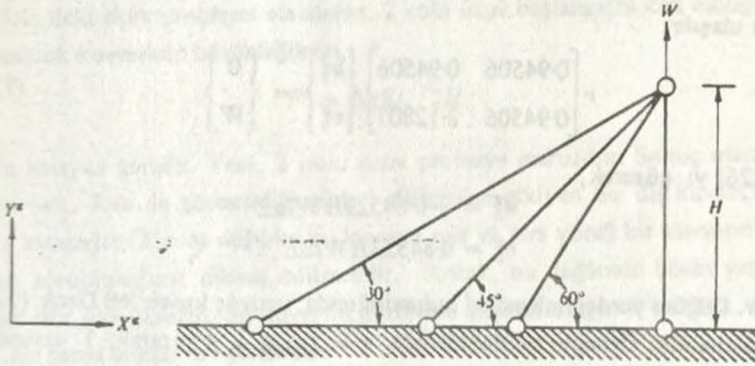
$$S^e(1, 2, 2) = r \begin{bmatrix} 0.37500 & 0.21651 \\ 0.21651 & 0.12500 \end{bmatrix}$$

$$S^e(2, 2, 2) = r \begin{bmatrix} 0.35355 & 0.35355 \\ 0.35355 & 0.35355 \end{bmatrix}$$

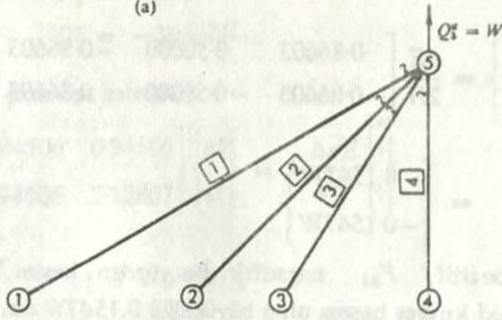
$$S^e(3, 2, 2) = r \begin{bmatrix} 0.21651 & 0.37500 \\ 0.37500 & 0.64952 \end{bmatrix}$$

$$S^e(4, 2, 2) = r \begin{bmatrix} 0.00000 & 0.00000 \\ 0.00000 & 1.00000 \end{bmatrix}$$

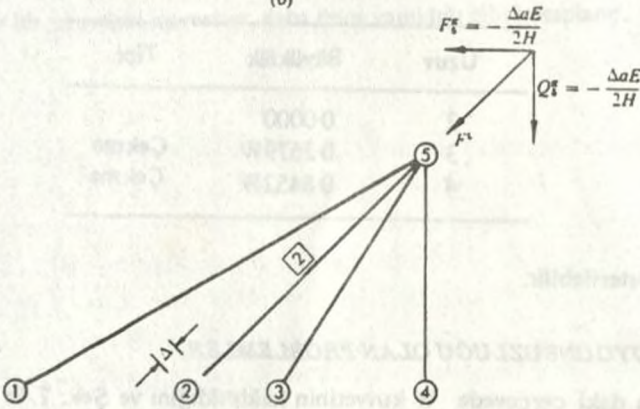
olduğu gösterilebilir.



(a)



(b)



(c)

Şek. 7.4 (a) Mafsal-bağlı düzlem çerçeve; bütün elemanlar aynı a keasına ve aynı E elastisite modülüne sahiptir. (b) (a) nın sonlu eleman modeli. (c) 2 elemanı Δ kadar kısa olduğundan uygunluk yoktur.

Burada, $r = aE/H$ dir. $S^u(i, J, K)$ ların, Denk. (7.25) de yerine yerleştirilmesiyle şu sonuca ulaşılr:

$$r \begin{bmatrix} 0.94506 & 0.94506 \\ 0.94506 & 2.12807 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3^u \\ v_3^u \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ W \end{Bmatrix} \quad (7.26)$$

Denk. (7.26) yı çözerek,

$$u_3^u = -0.84523HW/aE$$

$$v_3^u = 0.84523HW/aE$$

elde edilir. Dügüm yerdeğıştirmeleri bulunduğunda, uzuv iç kuvvetleri Denk. (7.22) den hesaplanabilir. Örneğın bu denklemde, $n = 1$, $k = 5$ yazarak, 1 uzvundaki iç kuvvetler bulunabilir:

$$\begin{Bmatrix} F_{a1} \\ F_{b1} \end{Bmatrix} = \frac{aE}{2H} \begin{bmatrix} 0.86603 & 0.50000 & -0.86603 & -0.50000 \\ -0.86603 & -0.50000 & 0.86603 & 0.50000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^u \\ v_1^u \\ u_5^u \\ v_5^u \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} 0.1547W \\ -0.1547W \end{Bmatrix}$$

F_{a1} pozitif, F_{b1} negatiftir. Bu yüzden, kesim 7.4 deki kabulümüze göre, 1 uzvundaki kuvvet basma olup büyüklüğü 0.1547W dir. Çerçevenin diğér elemanlarındaki kuvvetlerin,

Uzuv	Büyükük	Tipi
2	0.0000	
3	0.2679W	Çekme
4	0.8452W	Çekme

olduğu gösterilebilir.

BOYUT UYGUNSUZLUĞU OLAN PROBLEMLER

Şek. 7.4a daki çerçevde W kuvvetinin kaldırıldığını ve Şek. 7.4c deki 2 elemanın, başlangıçta Δ kadar kısa olduğunu varsayalım. Şimdi uzuv 2 ve 5 mafsal-ları (düğümleri) arasındaki konuma zorlanırsa, o takdirde, çerçeveye uygulanan dış kuvvet bulunmasa bile, iç kuvvetler doğacaktır. Bu tip, uzvun/uzuvların boyutu tam boyundan kısa veya uzun olan çerçeve problemleri "uygunsuz boyut" problemleri olarak adlandırılır.

Sonlu eleman metodunda böyle problemler, uygun düğümlere dış kuvvet olarak uygulanan uygunsuzluk kuvvetleri yardımıyla hesaplanır.

Şek. 7.4c deki tipik problemi ele alalım. 2 nolu uzuv başlangıçta kısa olduğundan uygunsuzluk kuvvetinin büyüklüğünün,

$$F^1 = \Delta\alpha E / \sqrt{2}H$$

olduğu kolayca görülür. Yani, 2 nolu uzuv çekmeye maruzdur. Sonuç olarak, bu kuvveti Şek. 7.4c de gösterildiği gibi, 5 düğümüne etkileyen bir dış kuvvet olarak hesaba katacağız (2 nolu düğümüne bu kuvvete eşit ve ters yönlü bir kuvvetin uygulanması zorunluluğuna dikkat edilmelidir. Ancak, bu düğümde bütün yerdeğiş-tirmeler sıfır olduğundan, bu kuvvetin gözönüne alınmasına gerek yoktur). Açıkta ki F^1 nin genel bileşenleri şunlardır:

$$F_x^1 = -\Delta\alpha E / 2H$$

$$Q_y^1 = -\Delta\alpha E / 2H$$

Sonuç olarak, Denk. (7.26) şimdi şu hale gelir:

$$\begin{bmatrix} 0.94506 & 0.94506 \\ 0.94506 & 2.12807 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3^1 \\ v_3^1 \end{Bmatrix} = -\frac{\Delta\alpha E}{2H} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Bu denklemi çözerek,

$$u_3^1 = -0.5291\Delta$$

$$v_3^1 = 0.0000$$

elde edilir. Her bir uzuvdaki kuvvetler, daha önce yapıldığı gibi hesaplanır.

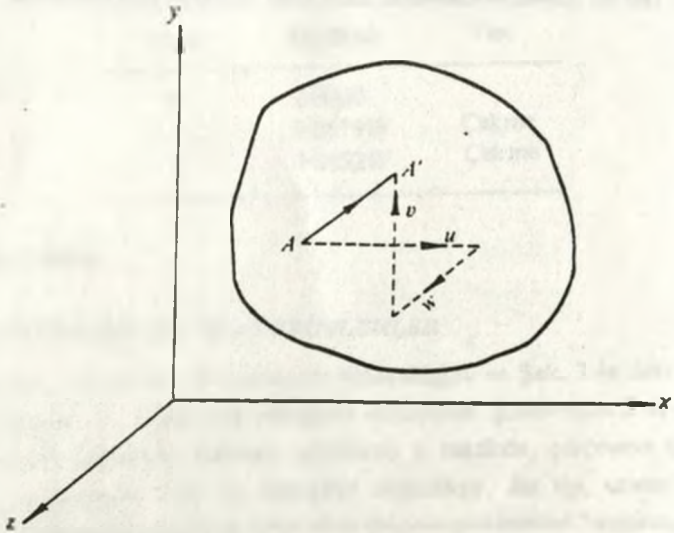


8 LİNEER ELASTİSİTENİN TEMELLERİ

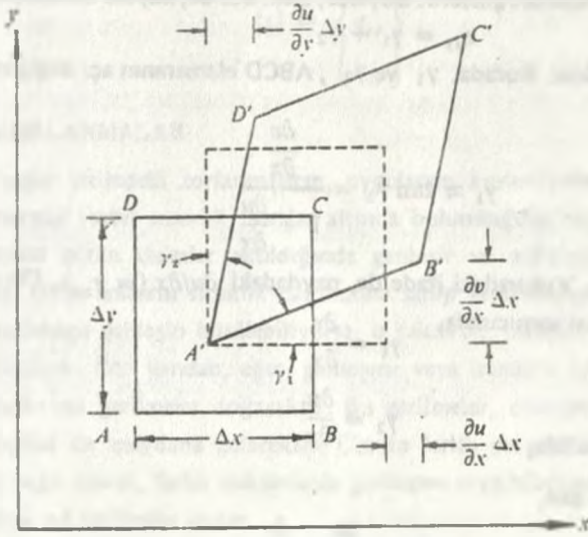
Bölüm 2 de, kiriş elemanın dirençlik matrisi çıkarılırken, yeni başlayanlara aşına olduğu eleman yapı mekaniği çerçevesinde kalmaya özen gösterilmiştir. Gelecek bölümde, virtüel iş prensibine dayanan, herhangi bir sonlu elemanın dirençlik ve diğer karakteristiklerinin çıkarılabildiği genel bir işlem sunacağız. Bazı temel elastisite bilgilerinin bu işlemin anlaşılmasını ve uygulanmasını kolaylaştıracığı için şimdi, sonlu elemanlarla genel bağlamda, ilgili olan sözkonusu bilgileri lineer elastisite yönünden tartışacağız.

8.1 YERDEĞİŞTİRMELER VE ZORLANMALAR

Kesim 2.1 deki 1 ve 2 varsayımlarını sağlayan ve rijit cisim yerdeğıştirmeleri engellenmiş bir elastik cisme, bir veya daha çok kuvvet etkidiğinde cisim şekil değıştirir ve içindeki her bir nokta, yeni bir konuma ulaşır. Şek. 8.1 de tipik bir partikülün cisim şekil değıştirmeden önceki ve şekil değıştirdikten sonraki konumu sırasıyla, A ve A' olsun. A daki toplam yerdeğıştirmenin AA' olduğu açıktır. Bunun x, y, z eksenlerindeki bileşenleri sırasıyla u, v ve w dir. Yerdeğıştirmeler, noktadan noktaya değıştiğinden u, v ve w tamamen konumun fonksiyonlarıdır.



Şek. 8.1 Üç boyutta yerdeğıştirme bileşenleri.



Şek. 8.2 Bir düzlem elemanın şekil değiştirmeleri.

Cismin toplam deformasyonu, "normal" ve "kayma" zorlanmalarının toplamı olarak ifade edilir. Şek. 8.2 de gösterilen ABCD diferansiyel elemanı düşünelim. Eleman, iki boyutlu şekil değiştirmemiş bir cisimden alınmıştır. Cisim bir kuvvet sisteminin etkisinde bulunduğu anda, şekil değiştirmiş biçimi A'B'C'D' olsun. AB kenarının artışının x eksenindeki izdüşümünün,

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Delta x$$

olduğu açıktır. e_{xx} ile gösterilen x doğrultusundaki "normal" zorlanma tanımından, yukarıdaki artış miktarının, AB nin x eksenindeki izdüşümü Δx e oranı şeklinde tanımlanır. Yani; $e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}$ dir. [Notasyon: Alt indisin birincisi doğrultuyu, ikinci indis düzlemi tanımlamaktadır. Böylece, örneğin, e_{xy} , x eksen doğrultusunda ve normali y eksenini olan düzlemde bulunmaktadır. Bu indisler gerilmelerde de kullanılır.] Aynı şekilde, diğer normal zorlanmalar e_{yy} ve e_{zz} sırasıyla y ve z eksen doğrultusunda olur. Benzer yolla ilgili yerdeğiştirmeler cinsinden ifade edilebilir. Üç-boyutlu durumda,

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{ve} \quad e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (8.1)$$

olur. Normal zorlanmalar, cismin biçiminde hiçbir değişiklik olmaksızın, hacmindeki değişimlerle ilgilidir. Gerçekten "kübik genişleme" veya kısaca "genişleme" adı verilen ($e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}$) toplamının cismin hacimsel zorlanmasının temsil ettiği gösterilebilir.

Öte yandan, kayma zorlanmaları, cismin hacminde herhangi bir değişiklik olmaksızın, açısal çarpılmaları gösterir. Böylece, Şek. 8.2 de, kayma zorlanması e_{xy} ;

$$e_{xy} = \gamma_1 + \gamma_2$$

şeklinde tanımlanacaktır. Burada, γ_1 ve γ_2 , ABCD elemanınin açı değişimleridir. Aşağıdaki bağıntı,

$$\gamma_1 \approx \tan \gamma_1 = \frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{1 + \frac{\partial u}{\partial x}}$$

kolayca gösterilebilir. Yukarıdaki ifade de, paydadaki $\partial u / \partial x (= e_{xx})$, 1'in yanında ihmal edilebilir. Bunun sonucunda,

$$\gamma_1 = \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\gamma_2 = \frac{\partial u}{\partial y}$$

yazılabilir. Benzer şekilde,

ve sonra Denk. (8.2) den,

$$e_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (8.3a)$$

elde edilir. Bu tarzda öteki kayma zorlanmaları e_{yz} ve e_{zx} in,

$$e_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (8.3b)$$

$$e_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \quad (8.3c)$$

olduğu kolayca ispatlanabilir. Kimi zaman, kayma zorlanmaları Denk. (8.3) lerin sağ tarafları 1/2 ile çarpılarak ifade edilir. Bu, özellikle çözümlerde tansörler kullanıldığında yararlı olur.

Bu altı elastik zorlanma bileşenini matris formunda

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ e_{zz} \\ e_{xy} \\ e_{yz} \\ e_{zx} \end{Bmatrix} \quad (8.4)$$

şeklinde ifade edeceğiz. Denk. (8.4) deki elastik zorlanma vektörünün $\{\epsilon\}$ in üç boyutlu bir cisme ait olduğu açıktır. Öte yandan, düzlem problemlerde (kesim 8.5 ve 8.6) deformasyonlar yalnız x-y düzleminde meydana geliyorsa, o takdirde,

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ e_{xy} \end{Bmatrix} \quad (8.4a)$$

8.2 ISIL ZORLANMALAR

Şimdiye kadar cisimdeki zorlanmaların, uygulanan kuvvetlerden doğduğunu ve cismin izotermal (sabit sıcaklık) şartlar altında bulunduğunu varsaymıştık. Oysa, hemen hemen bütün cisimler ısıtıldığında genişir ve soğutulduğunda büzülür. Bu nedenle, cisim üniform sıcaklık dağılımına sahip ve herhangi bir kısıt bulunmaksızın serbestçe genişip büzülebiliyorsa, o takdirde, cisimde yalnız ısı zorlanmalar doğacaktır. Öte yandan, eğer, genişleme veya büzülme engellenirse, o takdirde, cisimde ısıl gerilmeler doğacaktır. Bu gerilmeler, cisimde sıcaklık dağılımı üniform değilse de meydana gelecektir. Cismin farklı parçalarında yerel sıcaklık değişimine bağlı olarak, farklı miktarlarda genişleme veya büzülme oluşur ve bunun sonucu olarak ısıl gerilmeler doğar.

Çünkü, bir dış kuvvet sistemi etkisinde bir cismin sıcaklığı yükseltilir veya düşürülürse, cisimde elastik zorlanmalar $\{\epsilon\}$ nin yanısıra ısıl zorlanmalar da $\{e_i\}$ da doğacaktır. Cisimdeki toplam zorlanma, $\{e_i\}$ ve $\{\epsilon\}$ nin cebirsel toplamı olarak ifade edilebilir. Eğer cisim "termal olarak izotropik" ise yani, cismin genişleme katsayısı vb. ısıl özellikleri bütün doğrultularda aynı ise, ısıl zorlanmalar, çarpılma olmaksızın, hacim değişikliği doğurur. Başka bir deyişle, termal olarak izotropik cisim, kayma ısıl zorlanmaları taşıyamaz ve dolayısıyla yalnız normal (genişleme) ısıl zorlanmalar etkisindedir. Biz, malzemelerin, daima termal olarak izotropik ve homojen olduğunu kabul ediyoruz.

Normal ısıl zorlanmalar, sıcaklık değişimi T olduğunda, cismin küçük bir h boyutunun αTh kadar değiştiğini gözönünde tutarak, kolayca hesaplanabilir. Burada α , cismin boyuna genişleme katsayısıdır. αT nin normal ısıl zorlanma olduğu açıktır. Bu işlemi üç koordinat ekseninde uygulayarak ve kayma ısıl zorlanmaların sıfır olduğunu hatırdta tutarak, termal izotropi dolayısıyla,

$$\{e_i\} = \begin{Bmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ e_{zz} \\ e_{xy} \\ e_{yz} \\ e_{zx} \end{Bmatrix} = \alpha T \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (8.5)$$

elde edilir. Burada sıcaklık artıyorsa T pozitifdir.

8.3 İLKEL ZORLANMA

Dış kuvvetler (ısı kuvvetlerde dahil olmak üzere) uygulanmadan önce cisimde mevcut olan zorlanmalar "ilkel zorlanmalar" olarak tanımlanır. Çerçeve'deki "boyut uygunsuzluğu" (kesim 7.5) ilkel zorlanmaya basit bir örnektir.

İlkel zorlanmalara sahip bir cisme dış kuvvetler etkidiğinde, cisimde ısı zorlanmaları yoksa, gerilmeleri doğuracak zorlanma şudur:

$$\{e\} = \{c\} - \{e_i\}$$

Burada, $\{e_i\}$ ilkel zorlanmanın bütün bileşenlerini kapsar. $\{e_i\}$ nin üç boyutlu genel ifadesi,

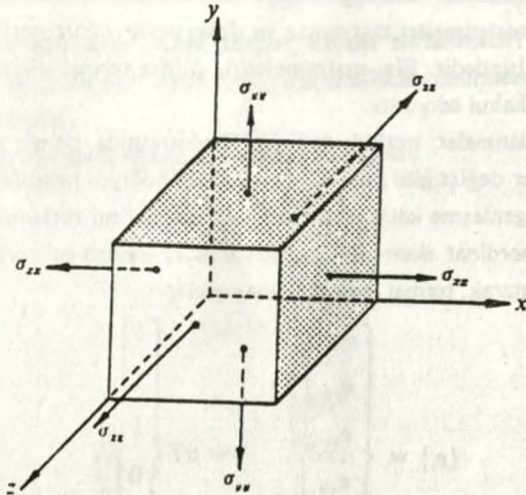
$$\{e_i\} = \{e_{ixx} \ e_{iyy} \ e_{izz} \ e_{ixy} \ e_{iyz} \ e_{izz}\}^T \quad (8.6)$$

dır. Burada, e_{ixx} , e_{iyy} vb. ilkel zorlanmanın kartezyen bileşenleridir. Hem ilkel hem de ısı zorlanma mevcut ise, gerilmeleri meydana getirecek zorlanma şudur:

$$\{e\} = \{c\} - \{e_i\} - \{e_s\} \quad (8.7)$$

8.4 GERİLME-ZORLANMA BAĞINTILARI

Tersi ifade edilmedikçe, cismin malzemesinin, lineer elastik, izotropik ve homojen olduğunu kabul edeceğiz. Öyleki, cismin elastik özellikleri, birbirinden bağımsız iki sabit, elastisite modülü E ve poisson oranı ν ile tamamen belirlenir. Şimdilik, ilkel ve ısı zorlanmalarının mevcut olmadığını kabul ederek, Şek.8.3 deki kübü ele alalım. Kübün her bir kenarı gerilmemiş durumda birim boydadır.



Şek. 8.3 Birim boyutlu kübe uygulanan gerilmeler.

x doğrultusunda uzama dolayısıyla normal zorlanma e_{xx} , Hooke kanununa göre,

$$e_{xx} = \frac{1}{E} (\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy} - \nu\sigma_{zz}) \quad (8.8a)$$

olduğu açıktır. Burada σ_{jj} ($j = x, y, z$) doğrultusunda normal gerilmedir. Benzer şekilde,

$$e_{yy} = \frac{1}{E} (\sigma_{yy} - \nu\sigma_{zz} - \nu\sigma_{xx}) \quad (8.8b)$$

$$e_{zz} = \frac{1}{E} (\sigma_{zz} - \nu\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}) \quad (8.8c)$$

kayma zorlanmaları karşılıklı olarak birbirinden bağımsızdır. Kayma gerilmeleriyle,

$$e_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} \quad (8.9a)$$

$$e_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz} \quad (8.9b)$$

$$e_{zx} = \frac{1}{G} \tau_{zx} \quad (8.9c)$$

şeklinde bağlıdır. Burada, τ_{xy} , τ_{yz} ve τ_{zx} kayma gerilmeleridir. G cismin malzemesinin rijitlik modülü olup,

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (8.10)$$

şeklinde verilmiştir. Yukarıdaki 6 zorlanma bileşeni ifadeleri matris formunda yazılabilir:

$$\begin{bmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ e_{zz} \\ e_{xy} \\ e_{yz} \\ e_{zx} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1 + \nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1 + \nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1 + \nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix}$$

Ters alma işleminden sonra bu denklemi aşağıdaki formda yazabiliriz.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2G & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2G & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ e_{zz} \\ e_{xy} \\ e_{yz} \\ e_{zx} \end{Bmatrix} \quad (8.11)$$

Burada λ , iyi-bilinen "Lame sabiti" dir. Ve

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$$

şeklinde verilmiştir. Denk. (8.11) üç boyutta Hooke kanununu ifade etmektedir. Bunu kompakt sembolik formda şöyle yazacağız:

$$\{\sigma\} = [d]\{\epsilon\} \quad (8.12)$$

Burada $[d]$ "elastisite matrisi" dir. Denk. (8.11) üç-boyutlu hal için yazılmıştır. $\{\epsilon\}$, Denk. (8.4) de verilmiştir. Ve

$$\{\sigma\} = \{\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{zz} \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx}\}^T \quad (8.13)$$

şeklinindedir. Isıl ve ilkel zorlanmalar da mevcut ise, $\{\epsilon\}$ in Denk. (8.7) deki $\{e\}$ ile değiştirilmesi gerekir. O takdirde, Denk. (8.12)

$$\{\sigma\} = [d]\{\epsilon\} - [d]\{e_i\} - [d]\{e_i\}$$

haline gelir.

$$\text{yazarak,} \quad \{\sigma\}_i = [d]\{e_i\} \quad (8.14)$$

$$\text{elde edilir.} \quad \{\sigma\} = [d]\{\epsilon\} - \{\sigma\}_i - [d]\{e_i\} \quad (8.15)$$

Denk. (8.15) üç-boyutlu, izotropik ve homojen bir cismin genel gerilme-zorlanma bağıntısıdır. Denk. (8.5), (8.11) ve (8.14) de üç-boyutlu termal olarak izotropik cisim için, termal (ısı) gerilme vektörünün

$$\{\sigma\}_i = \frac{E\alpha T}{(1 - 2\nu)} (1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0)^T$$

olduğunu gösterebiliriz. Elastisitedeki problemlerin büyük bir bölümü esas itibariyle iki-boyutlu olarak incelenebilir. Koordinat eksenlerinden birine dik düzlemlerde özdeş deformasyonlar meydana geliyorsa bu eksen dikkate alınmayabilir. Bu sonuç, çözümün matematik ifadesini önemli ölçüde basitleştirir. Bu problemler ya "düzlem zorlanma" veya "düzlem gerilme" tipidir.

8.5 DÜZLEM ZORLANMA

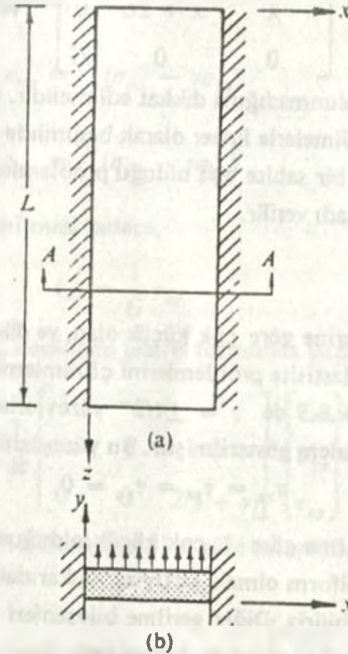
Şek. 8.4a daki uzun ve üniform kalası ele alalım. Kalas, bütün yüzeyinde düzgün yayılı düşey yük taşımaktadır. Şek. 8.4b de görüldüğü gibiz = 0 ve z = L uçlarından yeteri kadar uzakta A—A kesitini ele alalım. Kalas üniform olarak yüklendiği için, A—A kesitinde z doğrultusundaki yerdeğişirmeler ihmal edilecektir. Bundan başka A—A kesiti uçlardan yeteri kadar uzakta olduğundan, kalasdaki deformasyonların, z ekseninden bağımsız olduğu varsayılabilir. Dolayısıyla, A—A kesitindeki deformasyonlar, paralel kesitlerdeki deformasyonlara özdeştir. Sonuç olarak, A—A ve paralel kesitler için,

$$\frac{\partial}{\partial z} = w = 0 \quad (8.16a)$$

olduğu kabul edilebilir. Ve sonuç olarak,

$$e_{xx} = e_{yz} = e_{zx} = 0 \quad (8.16b)$$

Bu denklemler A—A daki gerilme durumunun z eksenini gözönüne alınmaksızın belirlenebileceğini göstermektedir. Böylece problem, gerilme dağılımının esas itibarıyla üç-boyutlu olduğu uçlara yakın kesitler hariç, A—A kesitine paralel bütün



Şek. 8.4 (a) Tüm yüzeyinde düzgün yayılı düşey yük bulunan üniform kalınlıklı uzun bir kalas. (b) A—A kesiti.

kesitlerde yerdeğiştirme ve gerilme durumunun aynı olduğu iki boyutlu bir probleme dönüşür.

Denk. (8.16a) ve (8.16b) sağlanıyorsa, cismin "düzlem zorlanma" durumunda olduğu söylenir. Uzun ağırlık barajları, sürekli temeller ve uzun rulmanlı yataklar, vb. düzlem zorlanmanın bilinen örnekleridir.

Denk. (8.8c) de $e_{zz} = 0$ olması dolayısıyla,

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad (8.17)$$

olduğu görülür. Açıkırtki, σ_{zz} z eksenine doğrultusunda, uzamayı engellemek için gerekli olan normal gerilmedir.

Düzlem zorlanma bünye denklemi, Denk. (8.16b) de verilen sıfır olan zorlanmalara ait satır ve sütunları Denk. (8.15) de silmek suretiyle elde edilebilir. Sonuçta, Denk. (8.4a) da verilen $\{\epsilon\}$ u kullanılarak,

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [d]\{\epsilon\} - \{\sigma\}_1 - [d] \begin{Bmatrix} e_{1,xx} \\ e_{1,yy} \\ e_{1,xy} \end{Bmatrix} \quad (8.18)$$

elde edilir. Burada, $[d] = \begin{bmatrix} \lambda + 2G & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2G & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix}$ ve $\{\sigma\}_1 = \frac{E\alpha T}{(1 - 2\nu)} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$

Denk.(8.18) de σ_{zz} in bulunmadığına dikkat edilmelidir. Çünkü σ_{zz} , Denk.(8.17) uyarınca, diğer normal gerilmelerle lineer olarak bağımlıdır.

e_{zz} in sıfır olmayan bir sabite eşit olduğu problemlere "genelleştirilmiş" düzlem zorlanma problemleri adı verilir.

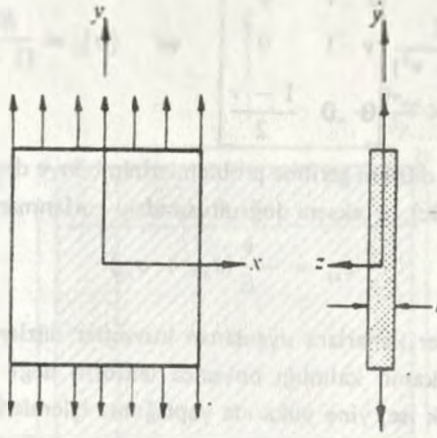
8.6 DÜZLEM GERİLME

Boyutlarından biri diğerlerine göre çok küçük olan, ve düzlem kuvvetlerin* etkisinde bulunan bir cisme ait elastisite problemlerini çözümlmek için, "düzlem gerilme" metodu kullanılabilir. Şek.8.5 de $z = \pm t/2$ yüzeylerinde uygulanan kuvvetlerin bulunmadığı tipik bir problem gösterilmiştir. Bu yüzeylerde,

$$\sigma_{zz} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$$

dır. Cismin diğer boyutlarına göre t , çok küçük olduğundan, kenarlara uygulanan kuvvetler t boyunca üniform olmak şartıyla, yukarıdaki şartın, cismin kesitinde geçerli olduğunu varsayabiliriz. Diğer gerilme bileşenleri σ_{xx} , σ_{yy} ve τ_{xy} nin t boyunca değişmediğini kabul etmekle, hassasiyette önemli bir kayıp sözkonusu değildir.

* Düzlem içi kuvvet, ince bir cismin düzlemi üzerinde uzanan kuvvettir.



Şek. 8.5 Tipik bir düzlem gerilme problemi

Böylece problem, z ekseninin hesaba katılmadığı iki-boyutlu bir problem haline gelir.

Denk.(8.8) de $\sigma_{zz} = 0$ yazarak,

$$e_{xx} = \frac{1}{E} (\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy})$$

$$e_{yy} = \frac{1}{E} (\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx})$$

burada, sıfır olmayan kayma gerilmesi sadece,

$$e_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}$$

dır (Denk.(8.9a)). Şimdi bu üç denklemleri matris formunda yazacağız.

$$\begin{Bmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ e_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$$

Bu denklemi tersine çevirerek ve Denk.(8.15) e göre ısı ve ilkel zorlanmaları dahil ederek,

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [d] \{ \epsilon \} - \{ \sigma \}_i - [d] \begin{Bmatrix} e_{ixx} \\ e_{iyy} \\ e_{ixy} \end{Bmatrix} \quad (8.19)$$

elde edilir. Burada $\{\epsilon\}$, Denk.(8.4a) ile tanımlanmıştır.

$$[d] = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \{\sigma\}_i = \frac{E\alpha T}{(1-\nu)} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Sonuçta, Denk.(8.19), düzlem gerilme problemlerinin bünye denklemidir. $\sigma_{zz} = 0$, olduğundan, Denk.(8.8c), z eksenini doğrultusundaki zorlanmanın,

$$\epsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad (8.20)$$

olduğunu gösterir. Eğer kenarlara uygulanan kuvvetler düzlem gerilme analizinin gerektirdiği üzere, plakanın kalınlığı boyunca üniform değil fakat, orta düzlem $z = 0$ a göre simetrik ise, yine yukarıda yaptığımız işlemleri uygulayacağız. Ancak, gerilme ve zorlanmaların kalınlık boyunca ortalama değerlerini alacağız. Böyle bir problemin "genelleştirilmiş" düzlem gerilme problemi olduğu söylenir.

8.7 DENGİ DENKLEMLERİ

Şek. 8.6 daki iki-boyutlu elemanı ele alalım. Eleman birim kalınlıklı bir cisimden çıkarılmıştır. Gösterilen iç gerilmeler, cismin geri kalan kısmının bu eleman üzerindeki etkisini temsil etmektedir. Bu gerilmelerin yanısıra, genelde elemana etkiyebilecek, "kütle" ve "atalet" kuvvetleri denilen kuvvetleri de düşünmek zorundayız.

Çekim ve merkezkaç kuvvetleri cismin maruz kalabileceği "kütle" kuvvetlerinin tipik örnekleridir. X , Y ve Z ile sırasıyla x, y ve z eksenleri doğrultusundaki kütle kuvveti "ivmelerini" tanımlayarak, bu elemanda,

$$\begin{aligned} \text{x doğrultusundaki kütle kuvveti} & \quad x = \rho X \Delta x \Delta y \\ \text{ve} & \\ \text{y doğrultusundaki kütle kuvveti} & \quad y = \rho Y \Delta x \Delta y \end{aligned}$$

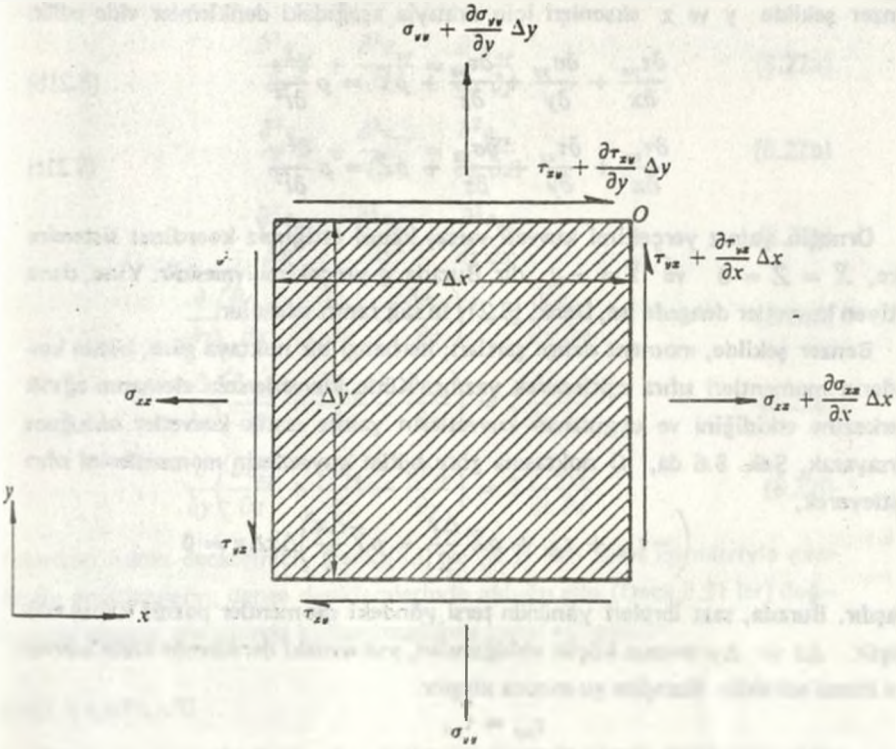
olur. Burada, ρ cismin yoğunluğunu göstermektedir.

Öte yandan, atalet kuvvetleri, yalnız, cismin elastik titreşimlere maruz kaldığında, doğar. Bu durumda, cismin parçacıkları, bir titreşim hareketine zorlanmaktadır, ve Newton'un ikinci kanununa göre, Şek. 8.6 daki durumda,

$$\text{x doğrultusundaki atalet kuvveti} \quad x = -\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Delta x \Delta y$$

olduğu açıktır. Benzer ifade y eksenini için de yazılabilir. Yukarıdaki negatif işaret atalet kuvvetlerinin tepkisel niteliğini ifade etmektedir. Burada t zamanı göstermektedir.

Şek. 8.6 daki elemanın dengede olması için, herhangi bir doğrultudaki kuvvet-



Şek. 8.6 İki boyutlu diferansiyel bir elemanda gerilmeler.

lerinin vektörel toplamı sıfır olmak zorundadır. Keyfi bir noktaya göre, kuvvetlerin momentleri toplamı da sıfır olmak zorundadır. Bundan dolayı x doğrultusundaki gerilmelerin oluşturduğu kuvvetlerin (kütle ve atalet kuvvetleri de dahil olmak üzere) toplamı,

$$\left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \rho X - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) \Delta x \Delta y = 0$$

olur. Denklemi $\Delta x \Delta y$, ye bölerek,

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \rho X = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

elde edilir. Bu yolla, üç-boyutlu cisim için, yukarıdaki denklemler şu hale gelir.

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \rho X = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (8.21a)$$

Benzer şekilde y ve z eksenleri için sırasıyla aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \rho \bar{Y} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (8.21b)$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho \bar{Z} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (8.21c)$$

Örneğin yalnız yerçekimi kuvveti varsa, kabul ettiğimiz koordinat sistemine göre, $\bar{X} = \bar{Z} = 0$ ve $\bar{Y} = -g$ dir. Burada g yerçekimi ivmesidir. Yine, cisme etkiyen kuvvetler dengede ise, Denk. (8.21) in sağ tarafı sıfır olur.

Benzer şekilde, moment denge şartları; herhangi bir noktaya göre, bütün kuvvetlerin momentleri sıfıra eşitlenerek yazılır. Kütle kuvvetlerinin elemanın ağırlık merkezine etkidiğini ve uygulanan kuvvetlerin yalnız statik kuvvetler olduğunu varsayarak, Şek. 8.6 da, O noktasına göre bütün kuvvetlerin momentlerini sıfıra eşitleyerek,

$$\left(-\tau_{xy} + \tau_{yx} + \rho \bar{X} \frac{\Delta y}{2} - \rho \bar{Y} \frac{\Delta x}{2} \right) \Delta x \Delta y = 0$$

ulaşılır. Burada, saat ibreleri yönünün tersi yöndeki momentler pozitif kabul edilmiştir. Δx ve Δy sonsuz küçük olduğundan, yukarıdaki denklemde kütle kuvvetleri ihmal edilebilir. Buradan şu sonuca ulaşılır.

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

Bu şekilde,

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} \quad \text{ve} \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}$$

olduğu gösterilebilir. Bu gerilmelerin herbiri karşı gelen zorlanmalarla lineer olarak (Denk. 8.9) bağımlıdır. Benzer bağıntılar zorlanmalarda da yazılabilir. Yani,

$$e_{xy} = e_{yx}, \quad e_{yz} = e_{zy} \quad \text{ve} \quad e_{zx} = e_{xz}$$

8.8 UYGUNLUK ŞARTLARI

Denk.(8.1) ve (8.3), eğer cismin bir noktasındaki yerdeğiştirme biliniyorsa o noktadaki 6 zorlanma bileşeninin u , v ve w nın türevlerinden kolaylıkla elde edilebileceğini göstermektedir. 6 zorlanma bileşeninin yerdeğiştirme bileşenleri cinsinden ifade edilebilmesi, çeşitli zorlanma bileşenleri arasında, zorunlu olarak bir fonksiyonel bağıntının varlığına işaret eder. Gerçekten, böyle bir bağıntı olmasaydı ve bunun sonucu olarak, zorlanma bileşenleri için, keyfi değerler kabul etmek mümkün olsaydı, denge denklemleri sağlansa bile, Şek. 8.2 den yerdeğiştirmelerin sürekliliğinin, mevcut olmadığı kolayca gözlenebilir. Zorlanma bileşenleri arasındaki bu ara-bağıntı, gerçekte uygunluk şartlarıdır. Bu şartların sağlanması, şekil değiştiren

cismin yerdeğiştirmelerinin sürekliliğini sağlar. Bu şartlar şunlardır:

$$\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (8.22a)$$

$$\frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 e_{yz}}{\partial y \partial z} \quad (8.22b)$$

$$\frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 e_{xz}}{\partial z \partial x} \quad (8.22c)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial e_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial e_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial e_{xy}}{\partial z} \right) = 2 \frac{\partial^2 e_{yz}}{\partial x \partial y} \quad (8.22d)$$

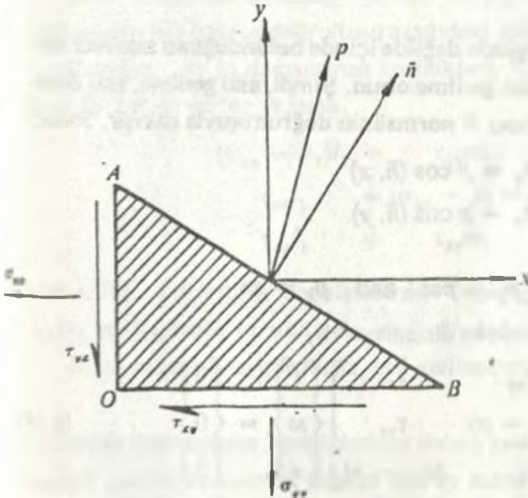
$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial e_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial e_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial e_{yz}}{\partial x} \right) = 2 \frac{\partial^2 e_{xz}}{\partial y \partial z} \quad (8.22e)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial e_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial e_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial e_{xz}}{\partial y} \right) = 2 \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial z \partial x} \quad (8.22f)$$

Yukardaki bütün denklemler, Denk.(8.1) ve (8.3) den türev işlemleriyle çıkarılabilir. Bu denklemlerin, denge denklemlerinde olduğu gibi (Denk.8.21 ler) doğrudan, sonlu eleman metodunda kullanılmadığına işaret edilmelidir.

8.9 SINIR ŞARTLARI

Cismin yüzeyinde, iç gerilmelerle, dış gerilmeler dengede olmak zorundadır. Şek. 8.7 de cismin yüzeyinde sonsuz küçük AB uzunluğu, p "toplam gerilme" ye



$$OA = AB \cos(\hat{n}, x)$$

$$OB = AB \cos(\hat{n}, y)$$

n , AB ye diktir.

(\hat{n}, x) = n ile x arasındaki açı

(\hat{n}, y) = n ile y arasındaki açı

Şek. 8.7

maruz bulunsun. p nin x ve y eksenlerindeki bileşenleri sırasıyla, p_x ve p_y olsun. OAB nin dengede bulunması için, şeklilden:

$$\begin{aligned} p_x AB &= \sigma_{xx} OA + \tau_{xy} OB \\ p_y AB &= \tau_{yx} OA + \sigma_{yy} OB \\ p_x &= \sigma_{xx} \cos(\bar{n}, x) + \tau_{xy} \cos(\bar{n}, y) \\ p_y &= \tau_{yx} \cos(\bar{n}, x) + \sigma_{yy} \cos(\bar{n}, y) \end{aligned}$$

Burada, (\bar{n}, x) ve (\bar{n}, y) açıları, \bar{n} dış normalıyla, sırasıyla x ve y eksenleri arasındaki açılardır. Bu çözümler üç-boyutlu durumda, cismin yüzeyi üzerindeki her noktada aşağıdaki "sınır" şartlarının sağlanacağını göstermek üzere genişletilebilir.

$$\begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix} \quad (8.23)$$

Burada l , m ve n ; Denk. (8.23) e ait koordinat sistemine göre \bar{n} normalinin doğrultman kosinüsleridir. Yukarıdaki denkleme p nin uygulandığı noktanın "gerilme tansörü" adı verilir.

Elastisite teorisinde p ye V içindeki malzeme üzerine ΔS boyunca, V dışındaki malzeme tarafından uygulanan birim yüzeydeki kuvvet olarak tanımlanan "gerilme vektörü" adı verilir. ΔS , S yüzeyinin bir elemanı olup, cismin keyfi bir V hacmini çevreler.

8.10 ASAL GERİLMELER

Şek. 8.7 deki OAB nin cismin yüzeyinde değilde içinde bulunduğunu tasavvur edelim. p , asal düzlemi AB olan bir asal gerilme olsun. Şimdi, asal gerilme, asal düzleme dik olduğundan, p nin doğrultusu \bar{n} normalinin doğrultusuyla çakışır. Sonuçta,

$$p_x = p \cos(\bar{n}, x)$$

$$p_y = p \cos(\bar{n}, y)$$

benzer şekilde, üç boyutlu halde;

$$p_x = pl, \quad p_y = pm \quad \text{and} \quad p_z = pn$$

bunları Denk.(8.23) e yerleştirip, yeniden düzenleyerek,

$$\begin{bmatrix} (\sigma_{xx} - p) & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & (\sigma_{yy} - p) & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & (\sigma_{zz} - p) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (8.24)$$

elde edilir.

Gerilme tansörü cismin belli bir noktasına ait ise, o noktadaki asal gerilmeler ve doğrultuları, Denk.(8.24) çözülerek tayin edilebilir.

Birçok elastisite probleminde, çeşitli noktalarda asal gerilmeleri ve doğrultularını hesaplamak gereklidir. Bu nedenle, şimdi, Denk.(8.24) çözüm metodlarını ve sonuçlarını bazı ayrıntılarıyla birlikte tartışacağız.

Denk.(8.24) ün bir çözümünün,

$$l = m = n = 0$$

olduğu söylenebilir. Bu, "geçersiz" çözüm olarak adlandırılır ve kabul edilemez. Çünkü, doğrultman kosinüsleri* arasındaki,

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1 \quad (8.25)$$

bağıntısını sağlamaz. Denk.(8.24) ün "geçersiz olmayan" bir çözümünü bulmak için, determinantını sıfıra eşitleyeceğiz ve buradan aşağıdaki p ye bağlı kübik denklem elde edilir.

$$p^3 - p^2I + pII - III = 0 \quad (8.26)$$

Burada,

$$I = (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})$$

$$II = (\sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}\sigma_{zz} + \sigma_{zz}\sigma_{xx} - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2)$$

$$III = (\sigma_{xx}\sigma_{yy}\sigma_{zz} + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_{xx}\tau_{yz}^2 - \sigma_{yy}\tau_{zx}^2 - \sigma_{zz}\tau_{xy}^2)$$

I, II ve III'e gerilme tansörünün, sırasıyla birinci, ikinci ve üçüncü "invariantları" adı verilir. Bir invariantın büyüklüğü koordinat dönüşümlerine bağlı değildir.

Denk.(8.26) nın üç kökü; p_1, p_2 ve p_3 istenen asal gerilme değerleridir. Bu gerilmelerin her birinin doğrultusu aşağıdaki gibi bulunabilir:

Örneğin p_1 in doğrultman kosinüsleri, l_1, m_1 ve n_1 olsun. p_1 i ve bunları Denk.(8.24) de yerine yazarak,

$$(\sigma_{xx} - p_1)l_1 + \tau_{xy}m_1 + \tau_{xz}n_1 = 0$$

$$\tau_{yx}l_1 + (\sigma_{yy} - p_1)m_1 + \tau_{yz}n_1 = 0$$

$$\tau_{zx}l_1 + \tau_{zy}m_1 + (\sigma_{zz} - p_1)n_1 = 0$$

elde edilir. Yukarıdaki denklemlerden (eğer gerekiyorsa, Denk.8.25 ile birlikte) l_1, m_1 ve n_1 çözülür bu yolla, p_2 ün doğrultuları da bulunabilir.

Buna rağmen, uygulamada, asal gerilmeleri ve doğrultularının, Denk.(8.24) ün

* Burada doğrultman kosinüslerinin daima reel olduğunu kabul ediyoruz. Gerilme tansörü gerçek ve simetrik olduğu için bu kabul geçerlidir.

yeniden düzenlenmesiyle elde edilen "özdeğer" denkleminin kökleri ve vektörleri olarak belirlemek, daha elverişlidir.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix} = p \begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix} \quad (8.27)$$

Denk.(8.27) nin kökleri (özdeğerleri) ve vektörleri (özvektörleri) çoğu bilgisayarlar- da bulunan standart hazır "alt programları" kullanarak kolayca hesaplanabilir. Bu- nunla birlikte, şu hususa dikkat edilmelidir. Eğer " normalleştirilmiş" olmazsa, Denk.(8.27) nin vektörleri gerçek doğrultman kosinüsleriyle* orantılı fakat eşit olmayacaktır. Örneğin p_1 köküne karşı gelen Denk.(8.27) nin vektörü $\{l_1, m_1, n_1\}$ ol- sun. Şimdi, aranan doğrultman kosinüsleri bu vektörle orantılı olduğundan, şunu yazabiliriz:

$$\begin{Bmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{Bmatrix} = r_1 \begin{Bmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{Bmatrix}$$

Burada,

$$r_1 = \frac{1}{(l_1^2 + m_1^2 + n_1^2)^{\frac{1}{2}}}$$

şeklinde tanımlanacaktır. Buna, p_1 in "normalleştirme" faktörü adı verilebilir.

r_2 ve r_3 faktörleri benzer şekilde, sırasıyla, p_2 ve p_3 ün gerçek doğrultularını bul- mak için hesaplanabilir. Düzlem problemlerde Denk.(8.27) nin,

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l \\ m \end{Bmatrix} = p \begin{Bmatrix} l \\ m \end{Bmatrix}$$

şekline indirgenebileceği açıktır. Burada, cismin $x-y$ düzleminde bulunduğu kabul edilmiştir.

8.11 LAME DENKLEMLERİ

Klasik elastisitede, verilen bir problemi çözmek için iki farklı yol vardır.

(1) Esas bilinmeyenler olarak, altı gerilme bileşenini (Denk. 8.13) alabiliriz. Bunları denge denklemleri (Denk. 8.21 ler) ve uygunluk denklemlerini (Denk. 8.22 ler) çözümler bulabiliriz.

(2) Bir başka yol, esas bilinmeyenler olarak üç yerdeğiştirme bileşenini alıp, bunlar denge denklemlerinde çözerek tayin edilebilir.

* Bu bağlamda, normalizasyon, l_1, m_1 ve n_1 nün değerlerinin düzeltilmesi anlamına gelir. Öyleki, bunlar düzeltilmeden sonra, Denk.(8.25) in şartını sağlarlar.

Her iki durumda da; çözüm belirlenen sınır şartlarını sağlamalıdır. Genellikle ikinci metot tercih edilir. Çünkü, burada bilinmeyenlerin sayısı, birinci metoden yarısı kadardır. Gerçekten okuyucu şimdiye kadar farketmesi gerekir ki, sonlu eleman metodu esas itibariyle, "bilinmeyen yerdeğiştirmeler" metodudur.

Yerdeğiştirmeleri bulmak için, şimdi, denge denklemlerini, yerdeğiştirmeler ansinden ifade etmek zorundayız. Bu aşağıdaki gibi yapılabilir:

Çarpma işlemi yapıldıktan sonra, Denk.(8.11) in birinci satırı olarak şunu elde ederiz:

$$\sigma_{xx} = (\lambda + 2G)e_{xx} + \lambda e_{yy} + \lambda e_{zz}$$

$$\bar{e} = (e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}), \quad (8.28)$$

Burada,

$$\sigma_{xx} = \lambda \bar{e} + 2Ge_{xx} = \lambda \bar{e} + 2G \frac{\partial u}{\partial x}$$

yine, Denk.(8.3) ve (8.9) dan,

$$\tau_{xy} = G \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad \text{ve} \quad \tau_{xz} = G \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

σ_{xx} , τ_{xy} ve τ_{xz} iin bu ifadeleri, Denk.(8.21a) da yerine yazılarak,

$$\lambda \frac{\partial \bar{e}}{\partial x} + G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) + \rho \bar{X} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\lambda \frac{\partial \bar{e}}{\partial x} + G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + G \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \rho \bar{X} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

olduğu görülür. Veya Denk.(8.28) den ve Lablace operatörü ∇^2

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

şeklinde tanımlanarak,

$$(\lambda + G) \frac{\partial \bar{e}}{\partial x} + G \nabla^2 u + \rho \bar{X} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (8.29a)$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$(\lambda + G) \frac{\partial \bar{e}}{\partial y} + G \nabla^2 v + \rho \bar{Y} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (8.29b)$$

$$(\lambda + G) \frac{\partial \bar{e}}{\partial z} + G \nabla^2 w + \rho \bar{Z} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (8.29c)$$

olduğu gösterilebilir.

Bu denklemler *Lame*'ye göre cismin, malzeme ve geometrik özellikleri ve denge şartlarının bir sentezini temsil eder. Bu denklemlerden, belirlenen sınır şartları yardımıyla, yerdeğişirmeler çözülebilir.

İki ve üç-boyutlu birçok mühendislik problemlerinde olduğu gibi cismin geometrik şekli karmaşık olduğunda Denk.(8.29) un kapalı form çözümü, hayli zorlaşır ve çoğunlukla olanaksızdır. Böyle durumlarda tek çıkar yol, sayısal çözüm metodlarını kullanmaktır.

9 GENEL ELEMAN KAREKTERİSTİKLERİ

9.1 BİRİM YERDEĞİŞTİRME TEOREMİ

Sonlu elemanların* direngenlik karakteristiklerinin çıkarımında kullanılabilen, belki en basit araç bu teoremdir¹. Bu teorem; (virtüel iş prensibinden dolayı), cismin dengeğini korumak için gerekli kuvvetlerle, gerçek gerilme dağılımı arasında, fonksiyonel bir bağıntı kurar. Teorem, aşağıdaki gibi çıkarılabilir:

Üç-boyutlu elastik bir cismin (Şek.9.1) yüzeyindeki k noktasına tekil F_k kuvveti etkisin, ve cisimde, kesim 2.1 deki varsayım 1 ve 2 geçerli olsun. Cisim denge halinde bulunsun ve cisimdeki gerilmeler $\{\sigma\}$ ve zorlanmalar $\{c\}$ ile tanımlansın. k 'nın u_k doğrultusundaki yerdeğiştirmesi F_k olsun.

Şimdi, k 'ya F_k doğrultusunda küçük virtüel δu_k yerdeğiştirmesini verelim. Bunun cismin heryerindeki zorlanma bileşenlerini değiştireceği açıktır. Tipik bir örnek olarak; e_{xx} deki değişim δe_{xx} olsun. Zorlanmanın herhangi bir değişimi, cismin toplam enerjisini değiştirdiğine göre, Şek. 9.2 den; δe_{xx} den dolayı "birim hacimdeki"*** zorlanma enerjisi değişimi $\sigma_{xx} \delta e_{xx}$ e eşit olacaktır. Bu işlem, sırasıyla bütün zorlanma bileşenleri için tekrar edilirse, δu_k dan dolayı cismin zorlanma enerjisindeki toplam değişimin;

$$\Delta H = \int_V (\sigma_{xx} \delta e_{xx} + \sigma_{yy} \delta e_{yy} + \sigma_{zz} \delta e_{zz} + \tau_{xy} \delta e_{xy} + \tau_{yz} \delta e_{yz} + \tau_{zx} \delta e_{zx}) dv \quad (9.1)$$

olduğu açıktır. Burada integral işlemi, cismin tüm hacmi üzerinde yapılacaktır. Denk. (9.1) deki ifadeyi kısa yazılışla "skalar çarpım" $\{\delta e\}^T \cdot \{\sigma\}$ şeklinde yazarak, bu denklemi şöyle ifade edebiliriz:

$$\Delta H = \int_V \{\delta e\}^T \cdot \{\sigma\} dv \quad (9.2)$$

Burada,

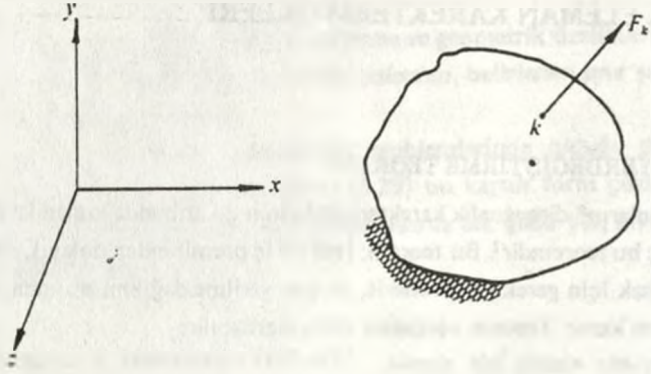
$$\{\delta e\}^T = \{\delta e_{xx} \delta e_{yy} \cdots \delta e_{zx}\}$$

$$\{\sigma\} = \{\sigma_{xx} \sigma_{yy} \sigma_{zz} \cdots \tau_{zx}\}^T$$

cisim geometrik olarak lineer tarzda deforme olduğundan (kesim 2.1) zorlanmalarla,

* Bir başka yaklaşım için kesim 14.2 ye bakınız.

** Elemanter mukavemette, gerilme—zorlanma eğrisi altındaki alanın cismin birim hacmindeki enerjisi gösterdiği kanıtlanmıştır.



Şek. 9.1 Yüzeyin k noktasına etkiyen F_k kuvvetinin etkisinde üç boyutlu bir elastik cisim.

yerdeğiştirmeler arasında lineer bir bağıntı olacaktır. Özel olarak,

$$\{\epsilon\} = \{f\}u_k \quad (9.3)$$

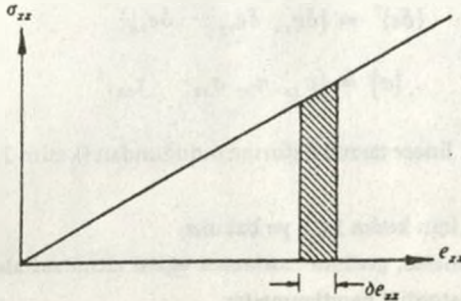
olsun. Burada $\{f\}$, zorlanmalar ve u_k arasındaki lineer bağıntıyı temsil eder. $\{\epsilon\}$, Denk. (8.4) ile tanımlanan zorlanma vektörüdür. Denk.(9.3) ün iki tarafının diferansiyelini alarak,

$$\{\delta\epsilon\} = \{f\} \delta u_k \quad (9.4)$$

elde edilir. Denk.(9.2) ve (9.4) arasında $\{\delta\epsilon\}$ elimine edilerek,

$$\Delta H = \int_V \delta u_k \cdot \{f\}^T \cdot \{\sigma\} dv$$

elde edilir. Deformasyon esnasında herhangi bir yolla enerji kaybı olmadığını varsayarak; ΔH , F_k nın, δu_k doğrultusunda hareketi sırasında yaptığı virtüel işe eşit olmak zorundadır.



Şek. 9.2, Şek. 9.1 Deki cismin $\sigma_{xx} - \epsilon_{xx}$ diyagramı.

Yani,

$$\delta u_k \cdot F_k = \int_V \delta u_k \cdot \{f\}^T \cdot \{\sigma\} dv$$

olur. Keyfi δu_k büyüklüğü her iki taraftan sadeleştirilirse,

$$F_k = \int_V \{f\}^T \cdot \{\sigma\} dv \quad (9.5)$$

elde edilir. Denk.(9.5) bir tek kuvvetin gözönüne alındığı durum için "birim yerdeğiştirme teoremini" en basit formda ifade etmektedir. Çok sayıda kuvvetin bulunduğu genel form aşağıdaki gibi kolayca elde edilebilir.

Bir tek kuvvet yerine cismin yüzeyindeki 1, 2, 3. N noktasına $F_1, F_2 \dots F_N$ kuvvetler etkisin. sözkonusu noktalarda, $F_1, F_2 \dots F_N$ kuvvetleri doğrultularındaki yerdeğiştirmeler, sırasıyla $u_1, u_2 \dots u_N$ olsun. Her bir kuvvet için Denk.(9.5) benzer bir denklemin elde edilebileceği açıktır.

$$\{P\} = \{F_1 \ F_2 \ \dots \ F_N\}^T$$

yazarak, çok sayıda kuvvet bulunması durumunda, Denk.(9.5) in karşılığının

$$\{P\} = \int_V [f]^T \cdot \{\sigma\} dv \quad (9.6)$$

olacağını gösterebiliriz. Burada $[f]$ matrisi,

$$\{\epsilon\} = [f]\{\delta\} \quad (9.7)$$

olarak tanımlanmıştır.

$$\{\delta\} = \{u_1 \ u_2 \ \dots \ u_N\}^T$$

dir. Denk.(9.6) birim yerdeğiştirme teoreminin matematiksel ifadesidir.

9.2 ELEMAN DİRENGENLİK KAREKTERİSTİKLERİ

Denk.(9.6) herhangi bir sonlu elemanın direngenlik karakteristiklerinin çıkarılabileceği temeli oluşturur. Verilen bir elemana bu denklem uygulandığında; $\{P\}$ ye o elemanın bütün düğüm kuvvetlerini kapsayan bir vektör olarak bakılmalıdır. Ayrıca elemanın serbest cisim diyagramı düşünüldüğünde $\{P\}$ elemanın uç (iç) kuvvetlerine eşit olmak zorundadır. Uç kuvvetleri $\{\bar{P}\}$ vektörüyle göstererek, Denk.(9.6) dan ,

$$\{\bar{P}\} = \int_V [f]^T \cdot \{\sigma\} dv \quad (9.8)$$

elde edilir. Bu aşamada, elemanın boyutunu (uç sayısı veya serbestlik derecesini) belirlemek gerekli değildir. Biz şimdi $\{\delta\}$ nın elemanın tüm uç yerdeğiştirmelerini

kapsadığını, $\{P\}$ vektörünün tüm uç kuvvetleri kapsadığını ifade etmekle yetineceğiz. Örneğin, eğer sözkonusu eleman, rijit bağlı bir uzay çerçevesinin bir elemanı ise, o takdirde, $\{P\}$ ve $\{\delta\}$, Denk.(6.15) in sırasıyla sol ve sağ taraftaki vektörler gösterecektir.

Şimdi, Denk.(9.7) ve (8.15) arasında $\{\epsilon\}$ yı elimine ederek,

$$\{\sigma\} = [d][f]\{\delta\} - \{\sigma\}_i - [d]\{e_i\} \quad (9.9)$$

elde edilir. Ve nihayet Denk.(9.8) ve (9.9) arasında $\{\sigma\}$, elimine edilerek şu sonuca ulaşılır.

$$\{P\} = \int_V [f]^T \cdot [d] \cdot [f] dv \{\delta\} - \int_V [f]^T \cdot \{\sigma\}_i dv - \int_V [f]^T \cdot [d] \cdot \{e_i\} dv \quad (9.10)$$

$\{\delta\}$ integralin dışına alınmıştır. Çünkü, kullanılan koordinatların fonksiyonu değildir. Isıl ve ilkel gerilmelerin bulunmaması halinde, Denk.(9.10) da ilk integralin, elemanın uç yerdeğiştirmelerini uç kuvvetlerine bağladığı açıktır. Dolayısıyla, kesim 2.5 deki tanımdan,

$$[K_i] = \int_V [f]^T \cdot [d] \cdot [f] dv \quad (9.11)$$

elde edilir. Eğer, elemanın $[f]$ i biliniyorsa, o takdirde eleman direngenlik matrisi $[K_i]$; Denk.(9.11) den, integral hesaplanmak suretiyle elde edilebilir.

Denk.(9.10) un ikinci ve üçüncü integralleri, sırasıyla, ısı ve ilkel zorlanma kuvvetlerini temsil eder. Burada,

$$\{P_i\} = \int_V [f]^T \cdot \{\sigma\}_i dv \quad (\text{ısı}) \quad (9.12)$$

$$\{P_i\} = \int_V [f]^T \cdot [d] \cdot \{e_i\} dv \quad (\text{ilkel zorlanma}) \quad (9.13)$$

Denk.(9.10) u,

$$[K_i]\{\delta\} = \{P\} + \{P_i\} + \{P_i\} \quad (9.14)$$

şeklinde yazabiliriz.

Bölüm 3 de açıklandığı gibi, verilen bir cisim temsil eden elemanları $[K_i]$ leri, cismin tümel direngenlik matrisini oluşturmak üzere toplanır. Bununla birlikte, eğer, toplama işlemine Denk.(9.14) ile başlarsak, $\{P_i\}$ ler ve $\{P_i\}$ ler; Denk.(3.9) un sağ tarafında ortaya çıkacaktır. Bu, etkiyen aktif dış kuvvetlerin yanısıra, eğer mevcut ise, ısı ve ilkel zorlanma kuvvetlerinin de elemanın bağlandığı düğümlere uygulanan dış kuvvetler olarak gözönüne alınacağını göstermektedir.

9.3 YAYILI DIŞ KUVVETLER

Kesim 5.2 de, bir giriş elemanı üzerine etkiyen yayılı dış kuvvetlerin elemanın bağlandığı düğümlere uygulanan eşdeğer konsantre dış kuvvetleri temsil eden $\{P_e\}$ vektörüyle değiştirilebileceğini görmüştük. Bir sonlu elemanın $\{P_e\}$ sini veren genel

formül aşağıdaki gibi çıkarılabilir.

$\{U\}$ fonksiyonu elemanın her yerindeki yerdeğiştirmeleri tanımlasın ve elemanın uç yerdeğiştirmeleriyle

$$\{U\} = [b]\{\delta\} \quad (9.15)$$

şeklinde bağıntılı olsun. Burada $[b]$ matrisi, yalnız kullanılan koordinatların bir fonksiyonudur. Yine p elemana etkiyen yayılı, yüzey dış yükünün yoğunluğunu, bir sabit veya koordinatların fonksiyonu olarak tanımlasın. Bu takdirde, $p \Delta s$ nun bir virtüel yerdeğiştirmesi esnasında, küçük konsantre kuvvet $\{\delta U\}$, tarafından yapılan işin, $\{\delta U\}^T \cdot p \Delta s$ e eşit olduğu açıktır. Böylece yayılı yükün yaptığı toplam virtüel iş,

$$\int_S \{\delta U\}^T \cdot p \, ds$$

dir. Burada integral, p nin etkidiği eleman alanı üzerinde alınır. Bu iş, karşı gelen virtüel uç yerdeğiştirme $\{P_o\}$ boyunca hareketi sırasında, $\{\delta\delta\}$ nin yaptığı işe eşit olmak zorundadır. Yani,

$$\{\delta\delta\}^T \cdot \{P_o\} = \int_S \{\delta U\}^T \cdot p \, ds \quad (9.16)$$

Denk.(9.15) in her iki tarafının diferansiyelini alarak,

$$\{\delta U\} = [b]\{\delta\delta\} \quad (9.17)$$

elde edilir. Çarpımın transpozmesini alma kuralını uygulayarak ($[AB]^T = [B]^T \cdot [A]^T$) Denk.(9.16) ve (9.17) den,

$$\{\delta\delta\}^T \cdot \{P_o\} = \int_S \{\delta\delta\}^T \cdot [b]^T \cdot p \, ds$$

elde edilir. Veya, keyfi $\{\delta\delta\}$ yı her iki taraftan sadeleştirerek,

$$\{P_o\} = \int_S [b]^T \cdot p \, ds \quad (9.18)$$

elde edilir. Herhangi bir sonlu elemanın eşdeğer kuvvet vektörü Denk.(9.18) den hesaplanabilir. Bu denklemin tipik bir uygulaması kesim 9.7 de verilecektir.

9.4 KÜTLE KUVVETLERİ

Tanımdan, kütle kuvvetleri (kesim 8.7) sonlu elemanın hacmiyle ilgilidir. Kesim 9.3 de ele alınan yayılı kuvvetlerde olduğu gibi, kütle kuvvetlerini de eşdeğer nokta kuvveti vektörü cinsinden ifade etmek mümkündür. Bu vektörü $\{P_h\}$ ile göstereceğiz.

$\{P_b\}$ ni çıkarımı, $\{P_c\}$ ni çıkarımına özdeştir. Bu durumda, kütle kuvvetleri tarafından yapılan toplam virtüel iş,

$$\int_V \rho \{oU\}^T \cdot \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} dv$$

ye eşittir. Bu integrasyon, elemanın bütün hacmi boyunca alınır. Bu virtüel iş, $\{\delta\delta\}$ boyunca hareket eden $\{P_b\}$ nin yaptığı işe eşittir. Buradan, son kesimdeki işlemi uygulayarak, şunu göstermek kolaydır.

$$\{P_b\} = \int_V \rho [b]^T \cdot \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} dv \quad (9.19)$$

Bu denklemin tipik bir uygulaması kesim 11.1 de verilecektir.

9.5 YERDEĞİŞTİRME FONKSİYONU—ÇÖZÜMÜN HASSASİYETİ

Sonlu eleman metodu çözümlemesinin temel varsayımı, belli bir kuvvet takımı etkisindeki sürekli bir cismin tepkisinin; cismin bölündüğü tasavvur edilen elemanlar sisteminin tepkisine eşit olmasıdır. Enerji noktasından, eğer şekil değiştiren cismin zorlanma enerjisi, onun parçalı modelininkine eşit olsaydı, cisim ve sonlu eleman modeli arasındaki eşdeğerlilik tam olacaktır. Denk.(9.1) ve (9.7) bu şartın model içindeki zorlanma dağılımının, cismin zorlanma dağılımı ile aynı olduğunda gerçekleştirilebileceğini gösterir.

Zorlanma dağılım fonksiyonu $[f]$ in tam olarak belirlenmesi, önemli zorluklar gösterir. Çünkü bu, lineer elastisite denklemlerinin titiz bir çözümü ile gerçekleştirilebilir. Çoğu hallerde, özellikle, iki ve üç boyutlu elemanlarda, bu denklemlerin kapalı form çözümü çok zor, genellikle olanaksızdır. Bu, bizi elemanın yerdeğiştirme fonksiyonu $\{U\}$ için bir varsayım yapmaya zorlar. Zorlanma dağılımı $[f]$ varsayılan bu yerdeğiştirmenin türevinden elde edilebilir. Sonlu eleman modelinin zorlanma enerjisi kapsamı, ve bunun sonucu olarak hassasiyet derecesi ve eleman sayısı arttıkça çözümün kesin değerine yaklaşması, öncelikle, kabul edilen yerdeğiştirmelerin (dolayısıyla zorlanmaların) kesin eşdeğerlerine uyuşma derecesi ile belirlenir.

n ucu bulunan bir sonlu elemanın yerdeğiştirme fonksiyonu $\{U\}$ nun kabulünde, aşağıdaki düşünceler yol gösterici olabilir.

(a) Eğer elemanda, yerdeğiştirme (veya fonksiyon) un bir veya daha çok sayıda bileşeni ortaya çıkıyorsa, her bir bileşen n tane bilinmeyen sabitli bir polinom

olarak kabul edilmelidir (örneğin, Bölüm 11 ve 12, kesim 13.2). Öte yandan, eğer m yerdeğiştirme, bir bağımsız yerdeğiştirmeden türetiliyorsa, bağımsız yerdeğiştirme, toplam, $n(m + 1)$ sayıda bilinmeyen sabiti olan bir polinomla tanımlanacaktır (örneğin, kesim 9.7b ve Bölüm 10). Çünkü her iki durumda da, bilinmeyen sabitlerin değerleri, elemanın uç yerdeğiştirmeleri cinsinden doğrudan belirlenebilir.

(b) $\{U\}$ öyle olmalıdır ki, eleman içindeki eğimler ve uç yerdeğiştirmeler sürekli olmalıdır. Çünkü herhangi bir süreksizlik, sonsuz zorlanmalara ve bunun sonucu sonsuz zorlanma enerjisine yolaçar. Bununla birlikte, gerekli olmasa da; komşu, iki ve üç boyutlu elemanların arakesitleri boyunca, eğimler ve yerdeğiştirmelerin sürekli olması arzu edilir (eleman arası süreklilik bir boyutlu elemanlarda toplama işlemiyle sağlanır; bkz. kesim 3.1). Bu şart bir ortak arakesit boyunca, eğimler ve yerdeğiştirmeler, o arakesiti tanımlayan düğümlerin eğim ve yerdeğiştirmelerine bağlıysa, gerçekleştirilmiş olur.

(c) Kesim 8.11 de görüldüğü gibi, bir elastisite probleminde esas bilinmeyenler olarak yerdeğiştirmeleri alan çözüm yöntemi, gerilme—denge denklemlerinin belirlenen sınır şartlarıyla birlikte çözümünü içerir. Dolayısıyla kabul edilen yerdeğiştirmelerden doğan gerilmelerin, gerilme—denge denklemlerini de (Denk.8.21 ler) sağlaması istenir. Bu ek şart, $\{U\}$ nun seçimini gerçekten zorlaştırır. Bunun sağlanmasının bir yolu, $\{U\}$ yu, zorlanmaların dolayısıyla gerilmelerin elemanın her tarafında sabit kalmasını sağlayacak şekilde seçmektir. Bu takdirde, Denk.(8.21) ler özdeş olarak sağlanacaktır.

(d) Yakınsaklık açısından $\{U\}$ nun seçimi genellikle zordur. Bu alanda daha ileri araştırma yapılması gereklidir. Görünen tatmin edici bir işlem, $\{U\}$ yu, zorlanmalar eleman boyunca sabit kalacak ve rijit yerdeğiştirmesi zorlanmaya yolaçmayacak tarzda seçmektir.

Elemanın varsayılan yerdeğiştirmelerinin, normal olarak, "yerel" koordinatlara ait olacağını gözönünde tutmak önemlidir (kesim 6.2). Yine cismi temsil eden tüm elemanların yerel eksenleri normal olarak birbirine paralel alınacaktır. Eğer böyle yapmak olanaklı değilse, Bölüm 6 ve 7 de olduğu gibi, o takdirde, "yerel" kuvvetler, yerdeğiştirmeleri vb., ortak bir "genel" koordinat sistemine göre, transform edilecektir. Böyle bir transformasyon ihtiyacının eğik ve/veya eğri yapılarda ortaya çıkacağı açıktır. Anizotropi veya ortotropi doğrultularının yerel eksenlerle çakışmadığı, anizotropik veya ortotropik problemlerde de transformasyon ihtiyacı doğar (bkz. kesim 11.6).

9.6 CİSMİN BÖLÜNMESİ

Kesim 9.5(d) de tartışılan sabit zorlanma kriteri, cismi bir sonlu elemanlar sistemi halinde bölme yöntemini belirlemede uygun bir temel oluşturur. Örneğin, eğer cismin belirli bir parçasında gerilmeler, hızla değişiyorsa, gerçek gerilme dağılımına

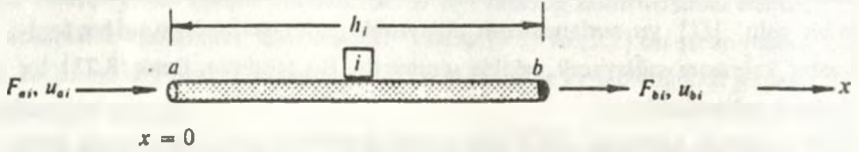
iyi yaklaşabilmek için orada daha çok sayıda ve daha küçük elemanlar kullanmak zorundayız. Cisim daha çok elemana bölündükçe, yaklaşımın gerçek gerilme dağılımına daha çok yaklaşacağı açıktır. Bundan başka bu bölgelerden uzaklaşırken ve gerilmelerin daha az değiştiği bölgelere doğru ilerlerken, giderek daha büyük elemanlar olarak bölme seyrekleştirilebilir. Bu seyrekleştirme, yavaş yavaş olmalıdır. Çünkü, deneyimler, elemanın boyutunda ani veya hızlı değişimin hassasiyette büyük kayıplara yol açtığını göstermiştir. Özel şartlar hariç, ölçeğin 2 den büyük olması tavsiye edilmez.

Şekil değiştiren cismin gerilme veya zorlanmalarındaki değişim tahmin edilemiyorsa, o durumda, tahmini bir ilk bölme yapılabilir. Bu bölmeye göre hesaplanan gerilme ve zorlanma dağılımı, geliştirilerek bölme tarzının temelinin oluşturacaktır. Uygulamada, çözümün tam değerine, nasıl yakınsadığını belirlemek için iki veya daha çok farklı şemanın denenmesi önerilebilir.

9.7 BİRKAÇ ÖRNEK

(a) Çubuk eleman

Başlangıç olarak, Denk.(9.11) i kullanarak, Şek. 9.3 deki üniform çubuk elemanın $[K_i]$ matrisini hesaplayalım.



Şek. 9.3 Üniform bir çubuk eleman.

Çubuk elemanda yalnız aksenal kuvvet ve aksenal yerdeğiştirmeler meydana gelir. Şimdi, eleman iki uçlu olduğundan kesim 9.5(a) ya göre, aksenal yerdeğiştirme $u(x)$, iki sabitli bir polinom olarak seçilebilir. Yani,

$$U = u(x) = A_0 + A_1x \quad (9.20)$$

burada, A_0 ve A_1 bilinmeyen sabitlerdir. Bu sabitlerin değerleri aşağıdaki gibi bulunabilir: Denk.(9.20) ve Şek. 9.3 den,

$$u_{a1} = u(0) = A_0$$

$$u_{b1} = u(h_i) = A_0 + A_1h_i$$

veya matris formunda:

$$\begin{Bmatrix} u_{a1} \\ u_{b1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & h_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_0 \\ A_1 \end{Bmatrix} \quad (9.21)$$

Şimdi, tanıma dikkat ederek,

$$\begin{aligned} \{\delta\} &= \begin{Bmatrix} u_{ax} \\ u_{bx} \end{Bmatrix} \\ [c] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & h_1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (9.22)$$

ve

$$\{A\} = \begin{Bmatrix} A_0 \\ A_1 \end{Bmatrix}$$

ile Denk.(9.21) i kısa yazılışla,

$$\{\delta\} = [c]\{A\} \quad (9.23)$$

şeklinde yazabiliriz. Sonuçta sabitlerin değeri,

$$\{A\} = [c^{-1}]\{\delta\} \quad (9.24)$$

şeklinde verilecektir. [Şimdi, bütün sonlu elemanlara uygulanabilen aşağıdaki gözlem sonuçlarına varılabilir:

(a) Uç yerdeğiştirmelerde $\{U\}$ yu tanımlayan sabitler arasındaki bağıntı, daima Denk.(9.23) deki terimler cinsinden ifade edilebilir.

(b) Eğer, $\{U\}$ yu tanımlayan bilinmeyen sabitlerin sayısı, kesim 9.5(a) da belirlenen sayıya eşit değilse, o takdirde, $[c]$ matrisi dikdörtgen hale gelir ve Denk.(9.24) anlamsız olur.

(c) $[c]$ matrisi, yalnız uç koordinatlara bağlı olup kullanılan koordinat sisteminden bağımsızdır.]

Çubuk eleman halinde, $[d]$, bir tek büyüklük yani E_t (= şimdi Young modülü) olur. Ve,

$$\text{zorlanma} = \epsilon = e_{xx} = \frac{du}{dx}$$

Denk.(9.20) nin türevini alarak,

$$\epsilon = A_1 = \{0 \ 1\} \begin{Bmatrix} A_0 \\ A_1 \end{Bmatrix} = \{0 \ 1\} \{A\} \quad (9.25)$$

elde edilir. Denk.(9.24) ve (9.25) arasında $\{A\}$ elimine edilerek,

$$\epsilon = \{0 \ 1\} [c^{-1}]\{\delta\} \quad (9.26)$$

ulaşılır. Bu durumda, Denk.(9.7) ve (9.26) karşılaştırıldığında,

$$\{f\} = \{0 \ 1\} [c^{-1}] \quad (9.27)$$

olur. Denk.(9.22) deki $[c]$ in tersini alarak,

$$[c^{-1}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/h_i & 1/h_i \end{bmatrix} \quad (9.28)$$

elde edilir. Sonuçta, Denk.(9.27),

$$\{f\} = \{0 \quad 1\} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/h_i & 1/h_i \end{bmatrix} = \{-1/h_i \quad 1/h_i\} \quad (9.29)$$

verir. Dolayısıyla, Denk.(9.11) den,

$$[K_i] = \int_V \begin{Bmatrix} -1/h_i \\ 1/h_i \end{Bmatrix} E_i \{-1/h_i \quad 1/h_i\} dv = (a_i E_i / h_i^2) \int_0^{h_i} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} dx$$

elde edilir. Burada a_i çubuğun kesit alanıdır. Şimdi,

$$[K_i] = k_i \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (9.31)$$

olduğunu göstermek kolay bir iştir. Bu, kesim 2.6 da çıkarılanla tamamen uyuşmaktadır (yine, bkz. Denk. 7.2).

(b) Kiriş eleman

İkinci bir örnek olarak, şek. 2.6 daki kiriş elemanın (eksenel ve burulma büyüklükleri ihmal edilerek) $[K_i]$ matrisini hesaplayalım. Elemanın dönme yerdeğiştirmesi, çökme yerdeğiştirmesinden çıkarıldığından, kesim 9.5(a) ya göre, $m = 1$ dir. Yine, elemanın iki ucu olduğundan, $n = 2$ dir. Buradan, elemanın düşey (çökme) yerdeğiştirmesi $v(x)$, $2(1 + 1) = 4$ bilinmeyen sabitli (kesim 9.5a) tanımlanan bir polinom olarak kabul edilecektir. Böylece,

$$U = v(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 \quad (9.32)$$

elemanın düşey çökme fonksiyonunu temsil etsin. Burada, $A_0 \cdots A_3$ bilinmeyen sabitlerdir. Tanımdan, elemanın dönmesi,

$$\theta(x) = \frac{dv}{dx} = A_1 + 2A_2 x + 3A_3 x^2 \quad (9.33)$$

dır. Uç yerdeğiştirmeleri v_{a_i} ve v_{b_i} , Denk.(9.32) de uç koordinatları yerine yazarak elde edilir. Böylece,

$$v_{a_i} = v(0) = A_0$$

$$v_{b_i} = v(h_i) = A_0 + A_1 h_i + A_2 h_i^2 + A_3 h_i^3$$

benzer tarzda, Denk.(9.33) den,

$$\theta_{ai} = \theta(0) = A_1$$

$$\theta_{bi} = \theta(h_i) = A_1 + 2A_2h_i + 3A_3h_i^2$$

elde edilir. Yukarıdaki dört denklem şimdi, Denk.(9.23) deki matris formunda ifade edilecektir. Burada,

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} u_{ai} \\ \theta_{ai} \\ u_{bi} \\ \theta_{bi} \end{Bmatrix} \quad \text{ve} \quad \{A\} = \begin{Bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{Bmatrix}$$

dir. Bu durumda, kolayca ispat edilebilir ki;

$$[c] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & h_i & h_i^2 & h_i^3 \\ 0 & 1 & 2h_i & 3h_i^2 \end{bmatrix} \quad (9.34)$$

dir. Bunun tersi,

$$[c^{-1}] = \frac{1}{h_i^3} \begin{bmatrix} h_i^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_i^3 & 0 & 0 \\ -3h_i & -2h_i^2 & 3h_i & -h_i^2 \\ 2 & h_i & -2 & h_i \end{bmatrix} \quad (9.35)$$

olur. Eğilmeye maruz bir kirişteki zorlanma, kirişin eğriliği olarak tanımlandığından, i üniform kiriş elemanın $[d]$ matrisi, yalnız $E_i I_i$ olur. Ve Denk.(9.11) şuna indirgenir.

$$[K_i] = E_i I_i \int_0^{h_i} \{f\}^T \{f\} dx \quad (9.36)$$

Böylece tanımdan, Denk.(9.32) den,

$$\epsilon = \frac{d^2 v}{dx^2} = 2A_2 + 6A_3 x = \{0 \ 0 \ 2 \ 6x\} \{A\} \quad (9.37)$$

elde edilir. Ve,

$$\{N\} = \{0 \ 0 \ 2 \ 6x\} \quad (9.38)$$

gösterimi ile ve Denk.(9.24) ü kullanarak, Denk.(9.37) yi sembolik formda şöyle yazabiliriz:

$$\epsilon = \{N\} \{A\} = \{N\} [c^{-1}] \{\delta\} \quad (9.39)$$

O takdirde, Denk.(9.7) ve (9.39) un karşılaştırılmasından,

$$\{f\} = \{N\}[c^{-1}] \quad (9.40)$$

olduğu görülür. $\{f\}$ i Denk.(9.36) da yazarak "çarpımın transpozesi" kuralını kullanarak (bkz. kesim 9.3)

$$[K_i] = E_i I_i [c^{-1}]^T \int_0^{h_i} \{N\}^T \{N\} dx [c^{-1}] \quad (9.41)$$

olduğunu gösterebiliriz. Şimdi, Denk.(9.38) den,

$$\int_0^{h_i} \{N\}^T \{N\} dx = \int_0^{h_i} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 12x \\ 0 & 0 & 12x & 36x^2 \end{bmatrix} dx = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4h_i & 6h_i^2 \\ 0 & 0 & 6h_i^2 & 12h_i^3 \end{bmatrix}$$

olduğu gösterilebilir. Bu sonucu, ve Denk.(9.35) deki $[c^{-1}]$ i kullanarak, Denk. (9.41) deki çarpma işlemini yaparak, bu yolla elde edilen $[K_i]$ nin, Bölüm 2 de elde edilenle tamamen aynı olduğu gösterilebilir.

YAYILI DIŞ KUVVETLER

Denk.(9.32) yi

$$U = \{M\}\{A\} \quad (9.42)$$

$$\text{şeklinde yazalım. Burada, } \{M\} = \{1 \quad x \quad x^2 \quad x^3\} \quad (9.43)$$

Denk.(9.24) ve (9.42) arasında $\{A\}$ elimine edilirse,

$$U = \{M\}[c^{-1}]\{\delta\} \quad (9.44)$$

Denk.(9.15) ve (9.44) karşılaştırılırsa,

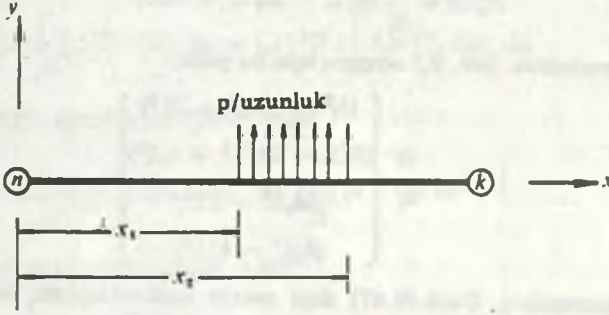
$$\{b\} = \{M\}[c^{-1}] \quad (9.45)$$

olduğu görülür. Örneğin, Şek. 9.4 deki kiriş elemanın $\{P_e\}$ sini hesaplamak için, $\{b\}$, Denk.(9.18) e yerleştirilirse, sonuç olarak,

$$\{P_e\} = [c^{-1}]^T \cdot \int_{x_1}^{x_2} \{M\}^T \cdot p \, dx$$

elde edilir ve Denk.(9.35) ve (9.43) ü kullanarak, yukarıdaki denklemden şu sonucun elde edilebileceğini gösterebiliriz:

$$\{P_e\} = \frac{p}{h_i^3} \int_{x_1}^{x_2} \begin{Bmatrix} (h_i^3 - 3h_i x^2 + 2x^3) \\ (h_i^3 x - 2h_i^2 x^2 + h_i x^3) \\ (3h_i x^2 - 2x^3) \\ (h_i x^3 - h_i^2 x^2) \end{Bmatrix} dx \quad (9.46)$$



Şek. 9.4 Yayılı yük taşıyan bir kiriş eleman.

Bu denklemde $x_1 = 0$ ve $x_2 = h_1$ konulduğunda, elde edilen $\{P_e\}$, Denk.(5.8) deki ile tamamen aynıdır.

KONSANTRE YUKLER

Konsantre dış yüklerin eşdeğer yük vektörü, konsantre yüklerin çok küçük bir alana etkidiği tasavvur edilerek, Denk.(9.18) den çıkarılabilir. Örnek olarak, Şek. 9.5 deki durumda,

$$p = \frac{W}{2e}$$

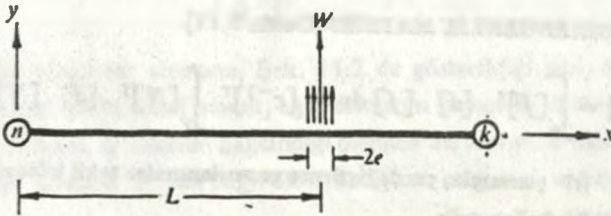
olduğunu varsayabiliriz. Burada, e çok küçüktür. Bu duruma ait $\{P_e\}$ vektörü, Denk.(9.46) da, $x_1 = (L - e)$, $x_2 = (L + e)$ yazarak ve p nin yukarıdaki değerini yerine yazarak hesaplanabilir. Bir elemanın $\{P_e\}$ si, diyelim ikinci elemanın, aşağıdaki gibi hesaplanabilir:

$$P_e(2) = \frac{W}{2h_1^3 e} \int_{(L-e)}^{(L+e)} (h_1^3 x - 2h_1^2 x^2 + h_1 x^3) dx$$

e/L ihmal edilebilecek kadar küçük olduğundan,

$$(1 \pm e/L)^n = 1 \pm ne/L$$

yazılabilir.



Şek. 9.5 Yayılı yük yoğunluğu $p = W/2e$ olan nokta yük W nun yaklaşımı, burada e çok küçüktür.

Bunu, yukarıdaki integralin sonucunda, kullanarak ve basitleştirmeleri yaparak,

$$P_c(z) = \frac{W}{h_i^3} (h_i^3 L - 2h_i^2 L^2 + h_i L^3)$$

olduğunu gösterebiliriz. Şek. 9.5 elemanı için bu yolla,

$$\{P_c\} = \frac{W}{h_i^2} \begin{Bmatrix} (h_i^3 - 3h_i L^2 + 2L^3) \\ (h_i^3 L - 2h_i^2 L^2 + h_i L^3) \\ (3h_i L^2 - 2L^3) \\ (h_i L^3 - h_i^2 L^2) \end{Bmatrix} \quad (9.47)$$

olduğunu gösterebiliriz. Denk.(9.47) deki vektör kullanıldığında, her bir nokta yükün bulunduğu yere bir düğüm koyma gereğinin ortadan kalkacağı açıktır. Bu, çok sayıda dış nokta yükleri taşıyan yapı elemanlarının çözümünde özellikle yararlıdır.

9.8 DENKLEMLERİN ÖZETİ VE GÖZLEMLER

Bir sonlu elemanın çeşitli matrisleri arasında aşağıdaki bağıntılar mevcuttur:

$$\{P\} = [K_d]\{\delta\}$$

$$\{U\} = [M]\{A\} = [b]\{\delta\}^*$$

$$\{c\} = [N]\{A\} = [f]\{\delta\}^*$$

$$\{A\} = [c^{-1}]\{\delta\}$$

$$[f] = [Nc^{-1}]$$

$$[b] = [Mc^{-1}]$$

burada,

$$\{P\} = \text{uç kuvvetler vektörü,}$$

$$\{\delta\} = \text{uç yerdeğiştirmeler vektörü,}$$

$$\{U\} = \text{kabul edilen yerdeğiştirme fonksiyonu,}$$

$$\{A\} = \{U\} \text{ yu tanımlayan sabitler vektörü,}$$

$$\{c\} = \text{elemandaki zorlanmalar.}$$

Elemanın çeşitli karakteristikleri aşağıdaki formüllerle verilmiştir.

ELEMAN DİRENGENLİK MATRİSİ (Denk. 9.11)

$$[K_d] = \int_V [f]^T \cdot [d] \cdot [f] dv = [c^{-1}]^T \cdot \int_V [N]^T \cdot [d] \cdot [N] ds [c^{-1}]$$

* $\{U\}$ ve $\{c\}$; sırasıyla, yerdeğiştirme ve zorlanmalar tekil bileşenleri tamhyanımsal olarak büyüklük haline gelir.

ISL KUVVET VEKTÖRÜ (Denk. 9.12)

$$\{P_i\} = \int_V [f]^T \cdot \{\sigma\}_i dv = [c^{-1}]^T \cdot \int_V [N]^T \cdot \{\sigma\}_i dv$$

EŞDEĞER KUVVET VEKTÖRÜ (Denk. 9.18)

$$\{P_o\} = \int_{S_j} [b]^T \cdot p ds = [c^{-1}]^T \cdot \int_S [M]^T \cdot p ds$$

KUTLE KUVVETİ VEKTÖRÜ (Denk. 9.19)

$$\{P_b\} = \int_V [b]^T \cdot \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} dv = [c^{-1}]^T \cdot \int_V [M]^T \cdot \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} dv$$

İLKEL ZORLANMA KUVVET VEKTÖRÜ (Denk. 9.13)

$$\{P_i\} = \int_V [f]^T \cdot [d] \cdot \{e\}_i dv = [c^{-1}]^T \cdot \int_V [N]^T \cdot [d] \cdot \{e\}_i dv$$

$\{P_o\}$, $\{P_b\}$ ve $\{P_i\}$ vektörleri, elemanın bağlandığı düğümlerde bulunabilecek dış kuvvetlerin yanısıra, düğümlere dış kuvvet olarak uygulanmalıdır. Bu kuvvetlerin uygulanma tarzı özetle şöyledir:

Örneğin Şek. 11.2 deki elemana $\{P_b\}$ kuvvetinin uygulanışını ele alalım. Elemanın üç ucu bulunduğu ve 2 serbestlik dereceli olduğundan $\{P_b\}$, 6- bileşenli bir vektör olacaktır. $\{P_b\}$ nin hesaplanan değeri,

$$\{P_b\} = \begin{Bmatrix} F_a \\ Q_a \\ F_b \\ Q_b \\ F_m \\ Q_m \end{Bmatrix}$$

olsun. O halde bu bileşenler elemana, Şek. 11.2 de gösterildiği gibi, dış kuvvet olarak uygulanacaktır. Daha genel olarak, eğer elemanın serbestlik derecesi m ise, $\{P_b\}$ nin ilk m bileşeni, a ucunun bağlandığı düğüme dış kuvvetler olarak etkiyecektir. Sonraki m bileşeni b nin bağlı olduğu düğüme etkiyecek ve böyle devam edecektir.

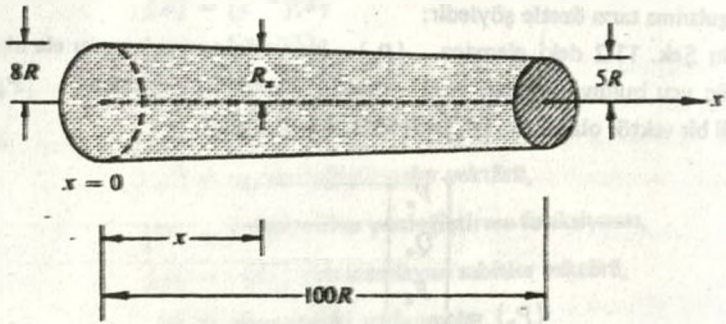
GÖZLEMLER

Bu bölümü bitirirken, aşağıda, varılan gözlem sonuçlarını sıralıyacağız:

(a) Bu bölümdeki denklemler, bir sonlu elemanın çeşitli karakteristiklerini üç matrisin $[M]$, $[c]$ ve $[N]$ matrislerinin fonksiyonları olduğunu göstermektedir. Bu yüzden bunlara, "birincil" matrisler olarak bakılabilir. Bundan dolayı çeşitli elemanların karakterleri konusu üzerine yapacağımız bundan sonraki tartışmada başlıca hedefimiz elemanların birincil matrislerini çıkarmak olacaktır. Buna ek olarak verilen bir elemanın $S(i, J, K)$ larını açıkça yazmak gerekmez. Bunun yerine bilgisayarda $[K_i]$ den $S(i, J, K)$ ları otomatik olarak tanımlamak daha uygundur.

(b) Kesim 2.1 deki 3 varsayımına göre $[d]$, ρ veya cismin diğer bir özelliği noktadan noktaya değişiyorsa, her bir elemanda bu özelliklerin ortalama değerleri o eleman boyunca sabit olarak alınmalıdır. Bununla birlikte, eğer elemanın özelliklerinin değişimi, bu kesimde kapalı formda verilen ifadelerin integrallerinin hesaplanmasının mümkün olduğu sürekli fonksiyonlarla ifade edilebilirse söz konusu varsayım kaldırılır. Böylece, örneğin Şek. 4.4b deki kiriş, değişik şekillerde üniform olmayan birkaç elemana bölünebilir. Bu yolla, aynı sayıda elemanla, elemanın özelliklerinin sabit kabul edildiği duruma göre daha hassas sonuçlar elde edilebilir.

Buna bir örnek olarak, Şek. 9.6 daki üniform olmayan homojen çubuk elemanı ele alalım. Elemanın elastisite modülü E dir. Eğer, kesim 2.1 deki 3 varsayımına göre, bu eleman 6.5R yarıçaplı üniform bir çubuk elemanı olarak ele alınsa,



Şek. 9.6 Gittikçe daralan dairesel kesitli çubuk eleman.

Denk. (9.31) den elemanın direngenlik matrisi,

$$[K_i] = 0.4225\pi RE \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

olacaktır. Bununla birlikte, çubuğu, kesit alanı,

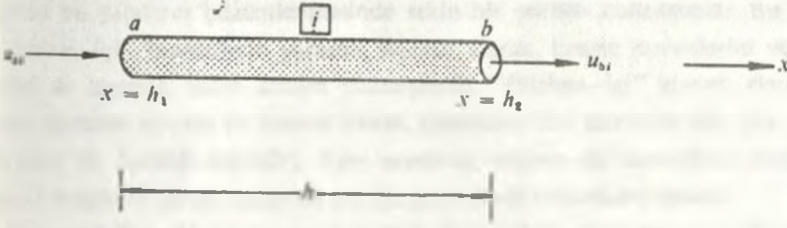
$$a(x) = \pi R^2 = \pi(8R - 0.03x)^2$$

şeklinde değişen üniform—olmayan bir çubuk olarak ele alırsak Denk.(9.30) dan

$$[K_i] = \frac{E}{10^4 R^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \int_0^{100R} a(x) dx = 0.43\pi RE \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Bu sonuçlar arasında dikkate değer bir fark yoktur.

(c) Şek. 9.7 de gösterilen üniform çubuk elemanı ele alalım. Burada yalnız ek-
senel kuvvetler ve eksenel yerdeğiştirmeler vardır.



Şek. 9.7

Şimdi Denk.(9.20) den,

$$u_{a1} = u(h_1) = A_0 + A_1 h_1$$

$$u_{b1} = u(h_2) = A_0 + A_1 h_2$$

elde edilir. Buradan,

$$A_0 = u_{a1} - \frac{(u_{b1} - u_{a1})h_1}{h} = u_{b1} - \frac{(u_{b1} - u_{a1})h_2}{h} \quad (9.48)$$

olduğu gösterilebilir.

Şimdi, bu elemanın x doğrultusunda, β miktarı kadar "küçük" bir rijit—cisim yerdeğiştirmesine (kesim 4.1) uğradığı varsayalım. O takdirde, çubuğun bütün noktaları tamamen aynı rijit—cisim yerdeğiştirmesine uğradıklarından,

$$u_{a1} = u_{b1} = \beta$$

elde edilir. Sonuç olarak Denk.(9.48)

$$A_0 = \beta$$

ya indirgenir. Denk. (9.20) deki "serbest" sabit A_0 , gerçekte çubuk elemanın rijit—cisim yerdeğiştirmesini gösterir. Verilen bir sonlu eleman için, genel olarak, bu tarzda, kabul edilen U ifadesi içinde yer alan bir "serbest" sabitin (yukarıdaki A_0 gibi), elemanın rijit cisim yerdeğiştirmesini temsil ettiği gösterilebilir. Bütün sonlu elemanlarda, varsayılan yerdeğiştirmenin her bir bağımsız bileşeni içinde bir serbest sabitin bulunması zorunludur. Bu yapılamadığı takdirde, elemanın rijit—cisim yerdeğiştirmesi yapamayacağı, fiziksel olarak uygunsuz bir duruma yolaçılmış olur.

REFERANSLAR

1. Argyris, J. H., *Energy Theorems and Structural Analysis*, Butterworths Scientific Publications, London, 1960.
2. Bazeley, G. P., *et. al.*, 'Triangular elements in plate bending: conforming and non-conforming solutions', *Proc. conf. Matrix methods in Structural Mechanics*, Wright Patterson Air Force Base, Ohio, 1965.

10 PLAK VE KABUK YAPILAR

10.1 GENELLEME

Plaklar, kabuklar ve katlı çatılar geleneksel yöntemlerle çözümlenmesi, genelde, zorluk gösteren yapıların önemli bir kategorisini oluşturur. Öte yandan, sonlu elemanlar bu yapıların çözümlenmesinde etkin bir şekilde kullanılabilir. Bu yapılar "düzlem-içi" kuvvetlerin yanısıra, normal olarak, kesme kuvvetlerini ve momentleri de taşımak üzere dizayn edilmişlerdir. "Düzlem-içi" kuvvet, elemanın düzlemi üzerinde uzanan bir kuvvet olarak tanımlanır (bu kuvvetler düz plak yapıların ortak bir özelliği değildir). Aynı zamanda, düzlem-içi kuvvetlerin düzleme; eksenel kuvvetlerin ise bir kirişe ait olduğu gözönünde bulundurulmalıdır.

Geometrik lineerlik varsayımı nedeniyle (kesim 2.1), kiriş elemanın eğilme direngenliğinin (Bölüm 2) eksenel direngenliğine etkilediği gibi, bir plağın "eğilme direngenliği" de onun "düzlem-içi" direngenliği ile etkileşmez. Bu problemlere ilişkin sonlu elemanların, direngenlik tanımının herbiri, kiriş elemanda olduğu gibi, diğerinden bağımsız olarak çıkarılabilir.

Bu bölümde, önce; yalnız eğilmeye maruz (düzlem-içi kuvvetler yok) düz plak olarak tanımlanan, "düz plak yapılar" ile uğraşacağız. Hem kesme ve hem de düzlem-içi kuvvetlerin etkilediği, düz plaklar olarak tanımlanan "gerilmiş" veya "basılmış" plak problemleri kesim 10.8 de ele alınacaktır. Nihayet, kesim 10.9 da kabuk ve çatı yapıların hesaplanmasını tartışacağız.

Plak ve kabuk yapılarla uğraşırken, yapıyı; "düz plak" veya kısaca "plak" dediğimiz elemanlara ayıracağız. Bu elemanlar gerçekte, iki-boyutlu, sabit kalınlıklı sonlu elemanlardır. Çözümlemede; üçgen, dikdörtgen ve dörtgen şekilli plak elemanlar kullanılabilir. Bununla birlikte, dörtgen eleman kullanılması cazip bir öneri değildir. Çünkü, dörtgen elemanın karakteristiklerinin çıkarımı integrasyon işlemi içerir ve bunların sayısal olarak bile hesaplanması zordur. Gerektiğinde bir dörtgen elemana, iki üçgen elemanın bileşimi olarak bakılabilir. Bu nedenle, şimdi, sadece dikdörtgen ve üçgen elemanlardan bahsedeceğiz. Dörtgen elemanların kullanıldığı problemlerden kesim 11.3 de söz edilecektir.

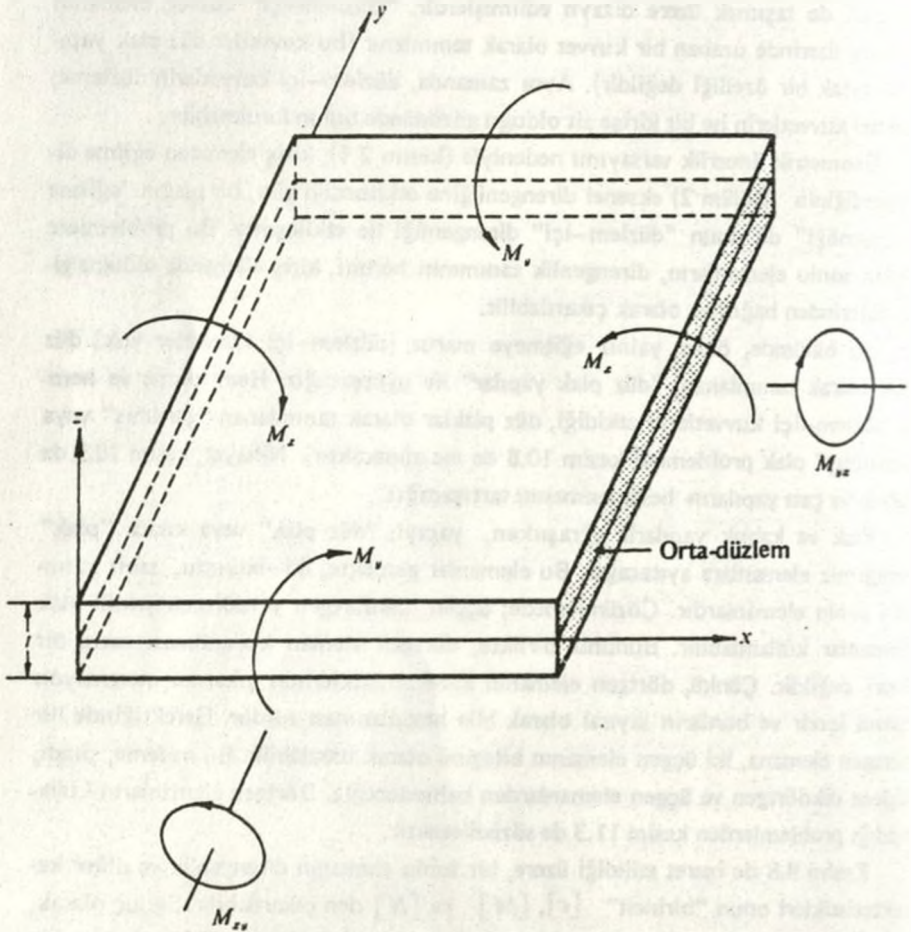
Kesim 9.8 de işaret edildiği üzere, bir sonlu elemanın direngenlik ve diğer karakteristikleri onun "birincil" $[c]$, $[M]$ ve $[N]$ den çıkarılabilir. Sonuç olarak, burada asıl amacımız, başka yerlerdeki gibi, bu matrislerin açık formlarını elde

etmektedir. Bunun yanısıra, hesaplanmanın çeşitli basamaklarında bilgisayar kullanacağımızdan plak elemanların $S(i, J, K)$ larını açıkça yazmanın gereği yoktur. Bunun yerine, bilgisayarda $[K_i]$ leri oluşturarak, bundan, otomatik olarak $S(i, J, K)$ ları tanımlamak daha uygun olmaktadır.

10.2 GERİLME-ZORLANMA BAĞINTISI

Düz plaklar için "elastisite" matrisi $[d]$ yi çıkarmak için, aşağıdaki varsayımları yapacağız.

(1) Yüksüz plağın orta düzlemi (Şek. 10.1) düz ve x - y düzlemi üzerinde uzanmaktadır.



Şek. 10.1 Bir plakta "gerilme momentleri".

(2) Plağın kalınlığı diğer boyutlara göre küçüktür.

(3) Plak malzemesi; izotropik, homojen ve lineer elastiktir (ortotropi daha sonra tartışılacaktır).

O halde, küçük yerdeğiştirmeler için klasik Kirchhoff teorisinden, plaktaki gerilmelerin, plağın z eksenine doğrultusundaki $w(x, y)$ çökmesiyle,

$$\sigma_{xx} = \frac{-zE}{(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (10.1a)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{-zE}{(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (10.1b)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = -2Gz \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (10.1c)$$

şeklinde bağıntılı olduğu gösterilebilir. Burada, E , elastisite modülü; G , rijitlik modülü; ν , poisson oranıdır. Şimdi, şekil değiştiren plaktaki genelleştirilmiş "zorlanmaları" tanımlayacağız.

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (10.2)$$

$E = 2(1 + \nu)G$ olduğundan, Denk.(10.1) matris formunda şöyle yazılabilir.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{Ez}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \{\epsilon\} \quad (10.3)$$

Denk.(10.3) ün plak için, gerilme-zorlanma bağıntısını verdiği açıktır. z faktörü hariç, Denk.(10.3) ün elastisite matrisinin düzlem gerilmeye ait Denk.(8.19) daki elastisite matrisine özdeş olduğunu gözlemlemek önemlidir. Bu beklenen bir sonuçtur. Çünkü, düzlem gerilmeye olduğu gibi, Kirchhoff teorisinde

$$\sigma_{zz} = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$$

olduğu kabul edilir. Sonuç olarak, e_{zz} zorlanması sıfır olmaz. Denk.(8.20) den elde edilebilir.

Plaktaki gerilmeler; "gerilme momentleri" denilen M_x , M_y , M_{xy} ve M_{yx} momentleriyle, aşağıdaki gibi bağıntılıdır.

$$M_x = \int \sigma_{xx} z \, dz, \quad M_y = \int \sigma_{yy} z \, dz \quad \text{and} \quad M_{yx} = M_{xy} = \int \tau_{xy} z \, dz$$

Burada integrasyon, her bir durumda, $-t/2$ ve $t/2$ sınırları arasında alınır. Şimdi, Denk.(10.1a) daki σ_{xx} in ifadesi yukarıdaki denklemlerden birincisinde yerine yazılıp ve integrasyon yapıldığında,

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (10.4a)$$

burada,

$$D = \frac{Et^3}{12(1 - \nu^2)}$$

büyüklüğüne, plağın "eğilme rijitliği" denir. Benzer şekilde,

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (10.4b)$$

$$M_{xy} = M_{yx} = -D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (10.4c)$$

olduğu gösterilebilir. Fiziksel olarak M_y ve M_x büyüklükleri, birim uzunluktaki eğilme momentlerini, M_{xy} , birim uzunluktaki burulma momentlerini gösterir. Şimdi, plaktaki "genelleştirilmiş" gerilmeler,

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix}$$

şeklinde tanımlarsak; Denk.(10.4), aşağıdaki gibi kompakt matris formunda yazılabilir.

$$\{\sigma\} = [d]\{\epsilon\} \quad (10.5)$$

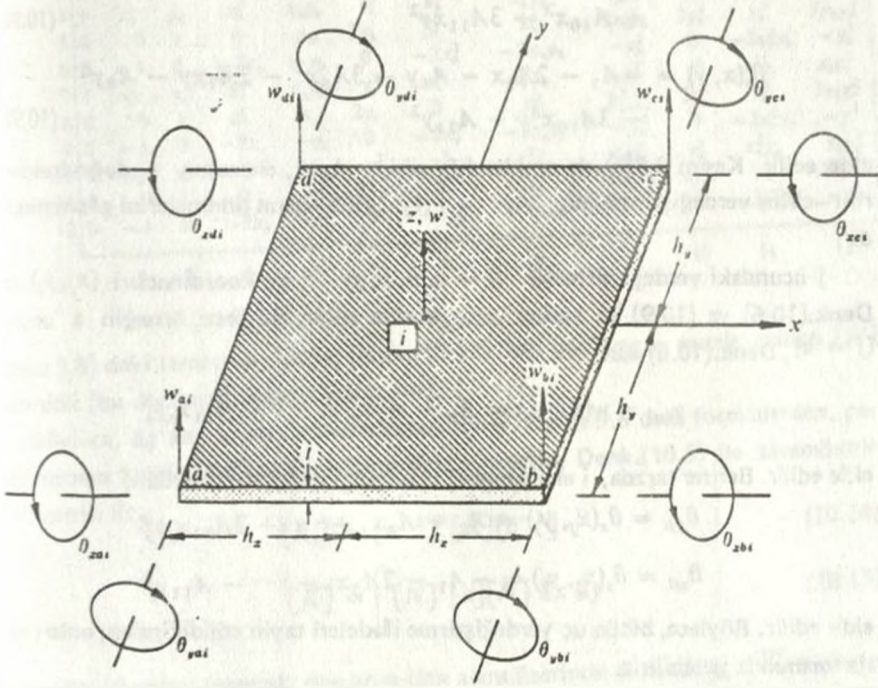
Burada, $[d]$, plağın aranan elastisite matrisidir. Bu matris,

$$[d] = D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix}$$

şeklinde verilmiştir. Bu $[d]$ yi izotropik plağın çözümlemesinde kullanacağız.

10.3 DİKDÖRTGEN PLAK ELEMAN

Şek. 10.2, bu elemanın her bir ucunun, biri düşey öteleme ve ikisi dönme olmak üzere üç yerdeğiştirmesinin olduğunu göstermektedir. Bu nedenle, elemanın serbestlik derecesi üçtür.



Şek.10.2 Eğilme etkisinde dikdörtgen plak eleman (genel olarak, θ_{xri} , i elemanın c ucundaki θ_x dönmesi anlamına gelir vb.).

Yine, eleman dört uca sahip olduğundan, düşey çökme $w(x, y)$ yi 12 sabitle* tanımlanan bir polinom olarak kabul edebiliriz. Özel olarak,

$$w(x, y) = A_0 + A_1x + A_2y + A_3x^2 + A_4xy + A_5y^2 + A_6x^3 + A_7x^2y + A_8xy^2 + A_9y^3 + A_{10}x^3y + A_{11}xy^3 \quad (10.6)$$

$$\{A\} = \{A_0 \ A_1 \ \dots \ A_{10} \ A_{11}\}^T$$

şeklinde kabul edilsin. O takdirde,

$$\text{ve} \quad \{M\} = \{1 \ x \ y \ x^2 \ xy \ y^2 \ x^3 \ x^2y \ xy^2 \ y^3 \ x^3y \ xy^3\} \quad (10.7)$$

Denk.(10.6) yı matris formunda, aşağıdaki şekilde yazabiliriz.

$$U = w(x, y) = \{M\}\{A\} \quad (10.8)$$

* Kesim 9.5 deki (a) ya göre, bu durumda, $n = 4$. dür. Yine, σ_x ve σ_y ; $w(x, y)$ den çıkarıldığından $m = 2$.dir.

$\theta_x(x, y)$ ve $\theta_y(x, y)$ dönmeleri,

$$\theta_x = \frac{\partial w}{\partial y} \quad \text{and} \quad \theta_y = -\frac{\partial w}{\partial x}$$

şeklinde elde edilebilir. Denk.(10.6) nın türevini alarak,

$$\theta_x(x, y) = A_2 + A_4x + 2A_5y + A_7x^2 + 2A_8xy + 3A_9y^2 + A_{10}x^3 + 3A_{11}xy^2 \quad (10.9a)$$

$$\theta_y(x, y) = -A_1 - 2A_3x - A_4y - 3A_6x^2 - 2A_7xy - A_8y^2 - 3A_{10}x^2y - A_{11}y^3 \quad (10.9b)$$

elde edilir. Kesim 9.8(c) de açıklandığı gibi, A_0 , elemanın z doğrultusunda rijit-cisim yerdeğiştirmesini, A_1 , A_2 , rijit-cisim dönmelerini göstermektedir.

j ucundaki yerdeğiştirmeler ($j = a, b, c, d$) ; uç koordinatları (x_j, y_j) leri Denk.(10.6) ve (10.9) da yerine yazarak elde edilir. Böylece, örneğin a ucunda ($j = a$), Denk.(10.6) dan,

$$w_{ai} = w(x_a, y_a) = A_0 + A_1x_a + \dots + A_{11}x_a y_a^3$$

elde edilir. Benzer tarzda, i elemanının j ucu için, Denk.(10.9) lardan,

$$\theta_{xji} = \theta_x(x_j, y_j) = A_2 + A_4x_j + \dots + 3A_{11}x_j y_j^2$$

$$\theta_{yji} = \theta_y(x_j, y_j) = -A_1 - 2A_3x_j - \dots - A_{11}y_j^3$$

elde edilir. Böylece, bütün uç yerdeğiştirme ifadeleri tayin edildiğinden; onları matris formunda yazabiliriz.

$$\{\delta\} = [c]\{A\}, \quad (10.10)$$

Burada, $\{\delta\}$ vektörü;

$$\{\delta\} = \{w_{ai}, \theta_{xai}, \theta_{yai}, w_{bi}, \theta_{xbi}, \theta_{ybi}, w_{ci}, \theta_{xci}, \theta_{yci}, w_{di}, \theta_{xdi}, \theta_{ydi}\}^T \quad (10.11)$$

şeklinde bütün uç yerdeğiştirmeleri kapsamaktadır. Ve birincil matris $[c]$ Tablo 10.1 de verildiği gibidir. Açıkçası $[c]$, uç koordinatlara bağlıdır. Bu bütün sonlu elemanlar için geçerlidir.

Birincil matris $[N]$; Denk.(10.2) den elde edilmiştir. Böylece, Denk.(10.2) deki şemaya göre Denk.(10.6) da varsayılan $w(x, y)$ çökmesinin türevini alarak,

$$\{\epsilon\} = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 6x & 2y & 0 & 0 & 6xy & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2x & 6y & 0 & 6xy \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4x & 4y & 0 & 6x^2 & 6y^2 \end{bmatrix} \{A\} \quad (10.12)$$

olduğu gösterilebilir. Veya sembolik olarak,

$$\{\epsilon\} = [N]\{A\} \quad (10.13)$$

Tablo 10.1 Bir dikdörtgen "plak" elemanın $[c]$ matrisi.

$[c] =$	1	x_a	y_a	x_a^2	$x_a y_a$	y_a^2	x_a^3	$x_a^2 y_a$	$x_a y_a^2$	y_a^3	$x_a^2 y_a$	$x_a y_a^2$
2	0	0	1	0	x_a	$2y_a$	0	x_a^2	$2x_a y_a$	$3y_a^2$	x_a^3	$3x_a y_a^2$
3	0	-1	0	$-2x_a$	$-y_a$	0	$-3x_a^2$	$-2x_a y_a$	$-y_a^2$	0	$-3x_a^2 y_a$	$-y_a^3$
4	1	x_b	y_b	x_b^2	$x_b y_b$	y_b^2	x_b^3	$x_b^2 y_b$	$x_b y_b^2$	y_b^3	$x_b^2 y_b$	$x_b y_b^2$
5	0	0	1	0	x_b	$2y_b$	0	x_b^2	$2x_b y_b$	$3y_b^2$	x_b^3	$3x_b y_b^2$
6	0	-1	0	$-2x_b$	$-y_b$	0	$-3x_b^2$	$-2x_b y_b$	$-y_b^2$	0	$-3x_b^2 y_b$	$-y_b^3$
7	1	x_c	y_c	x_c^2	$x_c y_c$	y_c^2	x_c^3	$x_c^2 y_c$	$x_c y_c^2$	y_c^3	$x_c^2 y_c$	$x_c y_c^2$
8	0	0	1	0	x_c	$2y_c$	0	x_c^2	$2x_c y_c$	$3y_c^2$	x_c^3	$3x_c y_c^2$
9	0	-1	0	$-2x_c$	$-y_c$	0	$-3x_c^2$	$-2x_c y_c$	$-y_c^2$	0	$-3x_c^2 y_c$	$-y_c^3$
10	1	x_d	y_d	x_d^2	$x_d y_d$	y_d^2	x_d^3	$x_d^2 y_d$	$x_d y_d^2$	y_d^3	$x_d^2 y_d$	$x_d y_d^2$
11	0	0	1	0	x_d	$2y_d$	0	x_d^2	$2x_d y_d$	$3y_d^2$	x_d^3	$3x_d y_d^2$
12	0	-1	0	$-2x_d$	$-y_d$	0	$-3x_d^2$	$-2x_d y_d$	$-y_d^2$	0	$-3x_d^2 y_d$	$-y_d^3$
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

(kesim 9.8) deki tanımdan dolayı, Denk.(10.12) deki dikdörtgen matris, aranan $[N]$ matrisidir (bu durumda, negatif işaret alır).

Böylece, üç ana matris belirlendikten sonra, kesim 9.8 deki formüllerden, çeşitli eleman karakteristiklerini çıkarabiliriz. Örneğin, Denk.(10.5) ile tanımlanan $[d]$ matrisi ile,

$$[K_i] = [c^{-1}]^T [K] [c^{-1}] \quad (10.14)$$

$$[K] = \int_S [N]^T [d] [N] dx dy \quad (10.15)$$

yazılabilir. Burada, integral, elemanın tüm alanı üzerinde alınacaktır. $[K]$ nin açık formu, Tablo 10.2 de verilmiştir (Şek.10.2 deki gibi, elemanın merkezinin, koordinatlarının orijini olarak alındığına dikkat edilmelidir). $[K_i]$; Denk.(10.14) matris çarpımı oluşturularak elde edilebilir. Bununla birlikte, $[c]$ nin diyagonalinde bulunan bazı elemanlar sıfır olduğu için; Tablo 10.1 $[c]^{-1}$ i doğrudan ters alma işlemiyle oluşturulamaz. Bu zorluk, kesim 15.3 de verilen basit işlemler yardımıyla aşılabılır. Bütün plak elemanlarının $[K_i]$ leri hesaplandıktan sonra, tümel dirençlilik matrisi $[K]$, Bölüm 3 deki yöntemlerle toplanabilir. Burada büyük boyutlu matrisler sözkonusu olduğundan bu işlemi bilgisayara terkedeceğiz. Programlama konusu kesim 15. tartışılacaktır. Belirlenen sınır şartları gözönüne alınarak, problem, Denk.(3.9) daki terimler cinsinden çözülebilir. Eğer, plak, toplam N düğüme sahipse o takdirde, $\{P\}$ ve $\{\delta\}$ nin kapsamı aşağıdaki gibi olacak:

$$\{P\} = \{H_1 \ M_{x1} \ M_{y1} \ H_2 \ M_{x2} \ M_{y2} \ \cdots \ H_N \ M_{xN} \ M_{yN}\}^T \quad (10.16)$$

$$\{\delta\} = \{w_1 \ \theta_{x1} \ \theta_{y1} \ w_2 \ \theta_{x2} \ \theta_{y2} \ \cdots \ w_N \ \theta_{xN} \ \theta_{yN}\}^T \quad (10.17)$$

Tablo 10.2 Dikdörtgen elemanın $[K]$ matrisi; $(D \times A)$: $D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$ ile çarpılacaktır.

$$A = 4h_x h_y; q = \frac{(1-\nu)}{2}, \quad (\text{elemanın merkezi koordinatların orijininde alınmıştır}).$$

$[K] =$

1	0																				
2	0	0																			
3	0	0	0																		
4	0	0	0	0	4																
5	0	0	0	0	0	4q															
6	0	0	0	0	4r	0	4														
7	0	0	0	0	0	0	0	12h _x ²													
8	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{4}{3}(h_x^2 + 4qh_x^2)$												
9	0	0	0	0	0	0	0	4vh _x ²	0	$\frac{4}{3}(h_x^2 + 4qh_x^2)$											
10	0	0	0	0	0	0	0	0	4vh _x ²	0	12h _x ²										
11	0	0	0	0	4qh _x ²	0	0	0	0	0	0	$\left(\frac{A^2}{4} + \frac{36}{5}qh_x^2\right)$									
12	0	0	0	0	4qh _x ²	0	0	0	0	0	0	$(r+q)\frac{A^2}{4}$	$\left(\frac{A^2}{4} + \frac{36}{5}qh_x^2\right)$								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12									

simetrik

Şek. 10.2 de; oklar, çeşitli yerdeğiştirmelerin ve onların ilgili olduğu kuvvetlerin pozitif yönlerini göstermektedir. k ($= 1, 2, \dots, N$).

$H_k = k$ da; düşey (z doğrultusunda) dış kuvvet.

$w_k = k$ nın düşey çökmesi.

$M_{xk}, M_{yk} = k$ ya uygulanan dış momentler.

$\theta_{xk}, \theta_{yk} = k$ daki dönmeler.

olduğuna dikkat edilmelidir. Isıl ve ilkel zorlanma kuvvetleri bulunursa, bunlar, kesim 9.8 de açıklandığı tarzda $\{P\}$ vektörüne dahil edilmelidir.

Düğüm yerdeğiştirmeleri $\{\delta\}$ hesaplandıktan sonra her bir elemandaki gerilme-momentleri, Denk.(10.5) dan elde edilebilir. Bunun genel ifadesi, ısıl ve ilkel zorlanma kuvvetlerini de içermek üzere (eğer varsa) şöyle yazılabilir:

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = [d][f]\{\bar{\Delta}\} - \frac{E\alpha T t^3}{12(1-\nu)} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} - [d] \begin{Bmatrix} e_{ixx} \\ e_{iyy} \\ e_{ixy} \end{Bmatrix} \quad (10.18)$$

Burada,

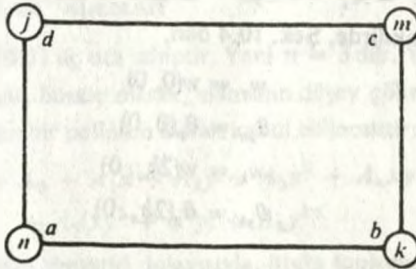
$$\{\bar{\Delta}\} = \{w_n \theta_{xn} \theta_{yn} \quad w_k \theta_{xk} \theta_{yk} \quad w_m \theta_{xm} \theta_{ym} \quad w_j \theta_{xj} \theta_{yj}\}^T$$

ve tanımdan (Bölüm 9),

$$[f] = [Nc^{-1}]$$

Denk.(10.18) kullanıldığında; n , k , m ve j düğümlerinin; Şek.10.3 de görüldüğü gibi, sırasıyla a , b , c , d uçlarına bağlandığını gözlemlemek önemlidir.

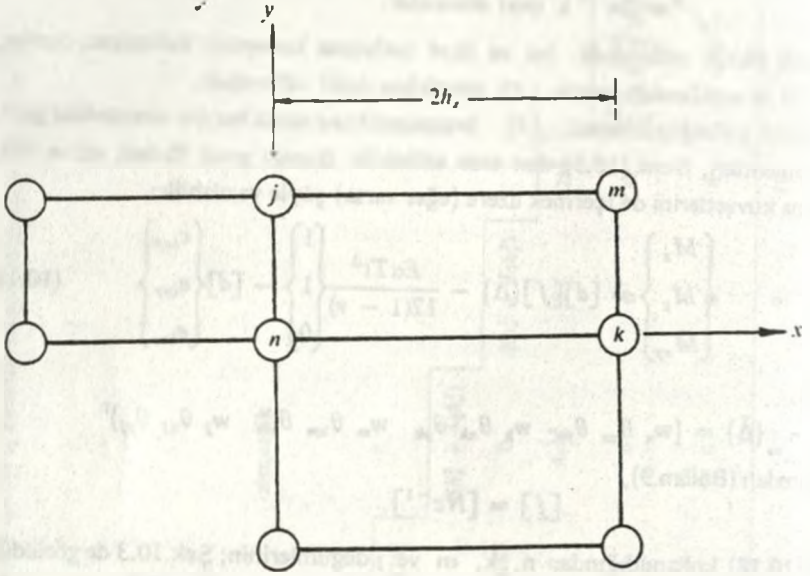
Denk.(10.12); $[N]$ ve buna bağlı olarak Denk.(10.18) deki gerilme - momentlerinin konumun fonksiyonları olduğunu göstermektedir. Böylece, bunların elemanın verilen bir noktasındaki değerleri; o naktanın koordinatlarına bağlıdır. $[N]$ nin konuma bağlı oluşunun matematik sonucu şudur σ_{xx} , σ_{yy} ve τ_{xy} nin (Denk.10.1 ler), genelde, Denk.(8.21) ler de ifade edilen gerilme denge şartlarını bozmalarıdır.



Şek. 10.3 Bir dikdörtgen elemanın uçlarının kabul edilen düğüm bağlantısı.

ARAYÜZEY SÜREKLİLİĞİ

Bölüm 3 de görüldüğü üzere, düğümlerdeki yerdeğiştirme ve eğimlerin sürekliliği; tümel direngenlik matrisinin toplamıyla sağlanmıştır. Buna ek olarak, kesim 9.5 de işaret edildiği gibi, kabul edilen yerdeğiştirme fonksiyonu; öyle olmalıdır ki: bitişik iki – ve üç– boyutlu elemanların arayüzeyleri boyunca da yerdeğiştirmeler ve eğimler sürekli olmalıdır. Sürekliliğin bulunmaması, genelde arayüzeylerde, bu büyüklüklerin çeşitliliği sonucunu doğurur.



Şek. 10.4 Bitişik dikdörtgen plak elemanlar arasında tipik arayüzeyler.

Şek. 10.4 de gösterilen, iki bitişik dikdörtgen eleman arasında tipik $n - k$ ($y = 0$) arayüzeyi boyunca; Denk.(10.6) ve (10.9b) den $w(x, 0)$ ve $\theta_y(x, 0)$

$$w(x, 0) = A_0 + A_1x + A_3x^2 + A_6x^3 \quad (10.19a)$$

$$\theta_y(x, 0) = -A_1 - 2A_3x - 3A_6x^2 \quad (10.19b)$$

şeklinde verilmiştir. Bu takdirde, Şek. 10.4 den,

$$w_n = w(0, 0)$$

$$\theta_{y_n} = \theta_y(0, 0)$$

$$w_k = w(2h_x, 0)$$

$$\theta_{y_k} = \theta_y(2h_x, 0)$$

elde edilir. Bunları Denk.(10.19) da yerine yerleştirip, sabitleri çekerek,

$$A_0 = w_n$$

$$A_1 = -\theta_{yn}$$

$$A_3 = \frac{1}{2h_x} (2\theta_{yn} + \theta_{yk}) + \frac{3}{4h_x^2} (-w_n + w_k)$$

$$A_6 = -\frac{1}{4h_x^2} (\theta_{yn} + \theta_{yk}) - \frac{1}{4h_x^3} (-w_n + w_k)$$

olduğu gösterilebilir. Açıkçası bu sabitler; n ve k düğümlerindeki $w(x, y)$ ve $\theta_y(x, y)$ değerlerine bağlı sabitlerdir. Böylece, Denk.(10.19) dan $n - k$ arayüzeyi boyunca; $w(x, y)$ ve $\theta_y(x, y)$ nin değişimleri, yalnız n ve k düğümlerindeki $w(x, y)$ ve $\theta_x(x, y)$ değerlerine bağlıdır. Buradan, $w(x, y)$ ve $\theta_y(x, y)$ nin $n - k$ arayüzeyi boyunca sürekli olduğu sonucuna ulaşırız.

Denk.(10.9a) ($n - k$) doğrultusunda $\theta_x(x, y)$ yi $n - k$

$$\theta_x(x, 0) = A_2 + A_4x + A_7x^2 + A_{10}x^3 \quad (10.20)$$

şeklinde verir. Denk. (10.19) ve (10.20) nin ortak sabitleri yoktur. Buna ek olarak;

iki şart, yani

$$\theta_{xn} = \theta_x(0, 0)$$

$$\theta_{xt} = \theta_x(2h_x, 0)$$

Denk. (10.20) den, $\theta_x(x, 0)$ in açık formunu tayin etmek için yeterli değildir. Matematiksel olarak, bu belirsizlik $\theta_x(x, y)$ nin $n - k$ boyunca süresiz olduğunu gösterir.

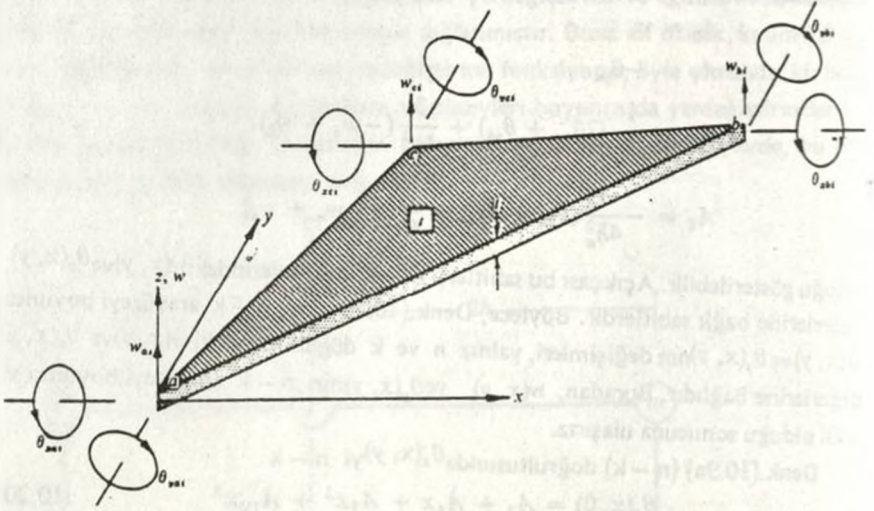
Aynı işlemi izleyerek y eksenine paralel arayüzeyler boyunca (yani, Şek.10.4 de $n - j$) $w(x, y)$ ve $\theta_y(x, y)$ nin sürekli, $\theta_y(x, y)$ nin süresiz olduğunu gösterebiliriz. Özetlersek; $w(x, y)$ komşu dikdörtgen elemanlar arasındaki arayüzeyler boyunca, $\theta_x(x, y)$ y eksenine paralel arayüzeyler boyunca $\theta_y(x, y)$ x eksenine paralel arayüzeyler boyunca sürekli dir. Bu gözlem bundan sonraki bölümde yer alacak üçgen plak elemanda kullanılacaktır.

10.4 ÜÇGEN "PLAK" ELEMAN

Bu eleman (şek. 10.5) üç uca sahiptir. Yani $n = 3$ dür. Yine, dikdörtgen elemandaki gibi $m = 2$ dir. Sonuç olarak, elemanın düşey çökmesi $w(x, y)$, aşağıdaki gibi 9 sabitle tanımlanan bir polinom olarak kabul edilecektir:

$$w(x, y) = A_0 + A_1x + A_2y + A_3x^2 + A_4xy + A_5y^2 + A_6x^3 + A_7(xy^2 + x^2y) + A_8y^3 \quad (10.21)$$

* Bu özel fonksiyon simetrisi dolayısıyla, öteki fonksiyonlara tercihen seçilmiştir.



Şek. 10.5 Eğilme etkisinde üçgen "plak" eleman; elemanın "orta düzlemi" x - y üzerinde uzanmaktadır.

$$\{A\} = \{A_0 \ A_1 \ A_2 \ \cdots \ A_8\}^T \quad \text{ve}$$

$$\{M\} = \{1 \ x \ y \ x^2 \ xy \ y^2 \ x^3 \ (xy^2 + x^2y) \ y^3\} \quad (10.21a)$$

Denk. (10.21) i, Denk.(10.8) in kısa yazılış formunda yazabiliriz. $w(x, y)$ nin türevini alarak,

$$\theta_x(x, y) = \frac{\partial w}{\partial y} = A_2 + A_4x + 2A_5y + A_7(2xy + x^2) + 3A_8y^2 \quad (10.22a)$$

ve

$$\theta_y(x, y) = -\frac{\partial w}{\partial x} = -A_1 - 2A_3x - A_4y - 3A_6x^2 - A_7(y^2 + 2xy) \quad (10.22b)$$

Baştafta olduğu gibi, uçlardaki çökme ve dönmeleri elde etmek için, Denk. (10.21) ve (10.22), de uç koordinatlar yazılır. Böylece, örneğin b ucunda (koordinatları x_b, y_b)

$$\theta_{xbi} = \theta_x(x_b, y_b) = A_2 + A_4x_b + 2A_5y_b + A_7(2x_by_b + x_b^2) + 3A_8y_b^2$$

dır. vb. Açıkça, bu işlemden böylece 9 denkleme ulaşılır. Denk.(10.10) da matris formunda ifade edilebilir. Burada,

$$\{\delta\} = \{w_{a1} \ \theta_{xa1} \ \theta_{ya1} \ w_{b1} \ \theta_{xb1} \ \theta_{yb1} \ w_{c1} \ \theta_{xc1} \ \theta_{yc1}\}^T \quad (10.23)$$

dir. Ve $[c]$ matrisi Tablo 10.3 de verilmiştir.

Tablo 10.3 Üçgen plak elemanın $[c]$ matrisi.

$[c] =$	1	x_a	y_a	x_a^2	$x_a y_a$	y_a^2	x_a^3	$x_a y_a^2 + x_a^2 y_a$	y_a^3
2	0	0	1	0	x_b	$2y_b$	0	$2x_b y_b + x_b^2$	$3y_b^2$
3	0	-1	0	$-2x_b$	$-y_b$	0	$-3x_b^2$	$-(y_b^2 + 2x_b y_b)$	0
4	1	x_b	y_b	x_b^2	$x_b y_b$	y_b^2	x_b^3	$x_b y_b^2 + x_b^2 y_b$	y_b^3
5	0	0	1	0	x_c	$2y_c$	0	$2x_c y_c + x_c^2$	$3y_c^2$
6	0	-1	0	$-2x_c$	$-y_c$	0	$-3x_c^2$	$-(y_c^2 + 2x_c y_c)$	0
7	1	x_c	y_c	x_c^2	$x_c y_c$	y_c^2	x_c^3	$x_c y_c^2 + x_c^2 y_c$	y_c^3
8	0	0	1	0	x_e	$2y_e$	0	$2x_e y_e + x_e^2$	$3y_e^2$
9	0	-1	0	$-2x_e$	$-y_e$	0	$-3x_e^2$	$-(y_e^2 + 2x_e y_e)$	0
	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Daha önce olduğu gibi, $[N]$ matrisi; Denk.(10.2) deki şemaya göre, Denk.(10.21) in türevi alınarak elde edilebilir. Bu durumda,

$$[N] = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 6x & 2y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2x & 6y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4(x+y) & 0 \end{bmatrix} \quad (10.24)$$

olduğunun ispatı okuyucuya terkedilmiştir. Şimdi, kesim 9.8 deki formülden, elemanın çeşitli karakteristiklerini çıkarmak durumundayız. Bu durumda,

$$[K] = \int_{\Delta} [N]^T [d][N] dx dy \quad (10.25)$$

$[N]^T d N$ çarpımının açık formu Tablo 10.4 de verilmiştir. Elemanın $[K_i]$ si, Tablo 10.3* deki $[c]$ matrisiyle birlikte Denk.(10.14) ve (10.25) den elde edilebilir. $\int_{\Delta} dx dy$ bir üçgen alan üzerindeki integrasyonu tanımlar.

Denk.(10.25) deki integral, gerçekte üçgen elemanın karakteristiklerini türetmek için hesaplanacak bütün integraller, üçgenin tüm alanı üzerinde alınmak zorundadır. Ek 3 den görüldüğü gibi, üçgenin ağırlık merkezi, koordinatların orijini alınmak suretiyle, bu integrallerin sonuçları basit bir form kazanır. Örnek olarak, $[K]$ nın (Tablo 10.4) 8. satır ve 6. sütundaki terimini düşünelim. Bu,

$$K(8, 6) = 4D \int_{\Delta} (x + y) dx dy$$

dir. Denk.(A3.8b ve c) lerden, hemen şu sonuca ulaşılır:

$$K(8, 6) = 4DI_{10} + 4DvI_{01} = 0 + 0 = 0$$

* Burada, dikdörtgen elemandaki gibi, $[c]$ nin doğrudan tersi alınamaz. Çünkü diyagonalı üzerinde sıfırla bulunmaktadır. Bunun için kesim 15.3 deki metotların kullanılması gerekir.

Tablo 10.4 Üçgen elemanın $[K]$ matrisi
$$[K] = D \int_{\Delta} dx dy$$

1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	2(1 - ν)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	4 ν	0	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	12 x	0	12 $x\nu$	36 x^2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	4($x\nu + y$)	4(1 - ν)($x + y$)	4(1 - ν)($x + y$)	4($x + y\nu$)	12 $x(x\nu + y)$	4($x^2 + y^2 + 2x y\nu$) + 8(1 - ν)($x + y$) ²	0	0	0	0	0	0	0	0	
9	0	0	0	0	12 $y\nu$	0	0	12 y	36 $x y\nu$	12 $y(x + y\nu)$	0	0	0	0	0	0	0	0	
1	2	3	4	5	6	7	8	9											

dx dy

Simetrik

Benzer tarzda, Δ üçgen elemanın alanı ile,

$$\begin{aligned} R(7, 7) &= 36D \int_{\Delta} x^2 dx dy = 36DI_{20} \\ &= 3D\Delta(x_a^2 + x_b^2 + x_c^2) \end{aligned}$$

$[K]$ matrisi; şimdi, bilinen yolla, belirlenen, sınır şartlarını sağlayacak düzenlemeleri yaparak, toplanır. O takdirde problem, Denk.(10.16) ile verilen $\{P\}$ ve Denk.(10.17) ile verilen $\{\delta\}$ ile birlikte, Denk.(3.9) cinsinden çözülebilir. Her bir elemandaki "gerilmeler" Denk.(10.18) den,

$$\{\bar{\Delta}\} = \{w_n \theta_{xn} \theta_{yn} \quad w_k \theta_{xk} \theta_{yk} \quad w_m \theta_{xm} \theta_{ym}\}^T$$

yardımıyla hesaplanır. Burada; n, k ve m düğümlerinin; sırasıyla a, b ve c düğümlerine bağlandığı kabul edilmiştir.

10.5 EŞDEĞER KUVVET VEKTÖRÜ

p, elemanın üniform yoğunluklu düşey yayılı yükünü gösterebilir. O takdirde, kesim 9.8 den, elemanın eşdeğer kuvvet vektörü;

$$\{P_e\} = p \cdot [c^{-1}]^T \int_{\Delta} \{M\}^T dx dy \quad (10.26)$$

haline gelir. Burada integrasyon p nin etkideği alan üzerinde alınmalıdır. Bunu göstermek için, bir örnek olarak üçgen elemanı ele alalım. Eğer, üçgenin ağırlık merkezi koordinatların orijini ise, ve p tüm alana etkiyorsa, o takdirde, Denk.(10.21) den,

$$\int_{\Delta} \{M\}^T dx dy = \{I_{00} \ 0 \ 0 \ I_{20} \ 0 \ I_{02} \ 0 \ 0 \ 0\}^T$$

olduğu gösterilebilir; I_{00} , I_{20} ve I_{02} , Denk.(A3.8a, d ve e) lerde verilmiştir. Eğer, $[c^{-1}]$ in açık formunu çıkarabilirsek; $\{P_e\}$ nin açık ifadesini bulabiliriz. Üçgen elemanlar için $[c^{-1}]$ çıkarımı zordur ve şimdiye kadar elde edilememiştir. $[c^{-1}]$, sayısal olarak kolayca elde edilebilir. O takdirde, Denk.(10.26) daki $\{P_e\}$ yi hesaplamak, kolay bir iş haline gelir. Gerçekte, bu işlem tümüyle bilgisayara terkedilebilir.

Öte yandan dikdörtgen elemanlar için; $[c^{-1}]$ in açık formu elde edilebilir².

Bunu ve Denk.(10.7) deki $\{M\}$ yı kullanarak; Denk.(10.26) nın,

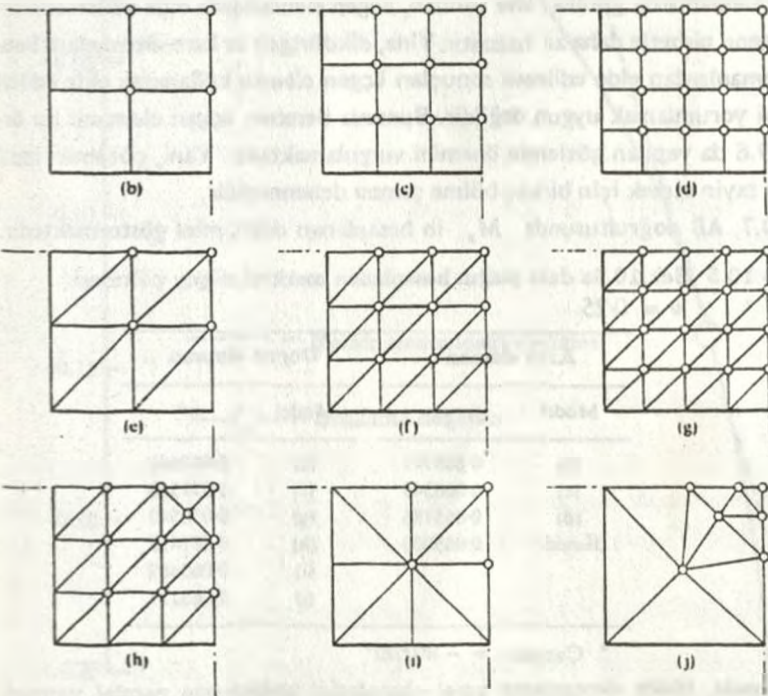
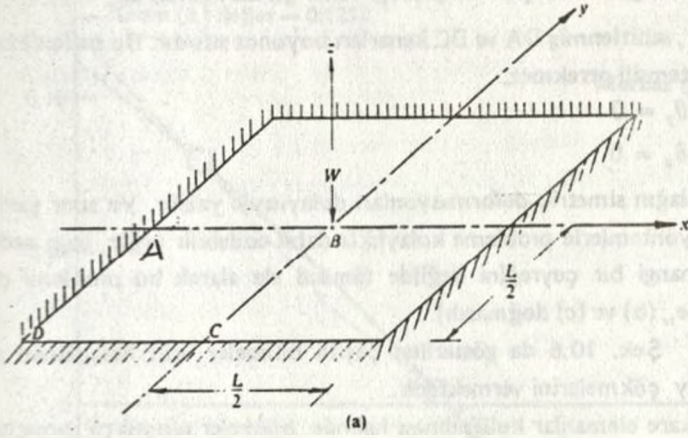
$$\{P_e\} = \begin{Bmatrix} H_n \\ M_{nn} \\ M_{yn} \\ H_k \\ M_{kk} \\ M_{yk} \\ H_m \\ M_{mm} \\ M_{ym} \\ H_j \\ M_{xj} \\ M_{yj} \end{Bmatrix} = 4ph_xh_y \begin{Bmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{h_y}{12} \\ \frac{h_x}{12} \\ \frac{1}{4} \\ -\frac{h_y}{12} \\ -\frac{h_x}{12} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{h_y}{12} \\ -\frac{h_x}{12} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{h_y}{12} \\ \frac{h_x}{12} \end{Bmatrix}$$

verdiğini gösterebiliriz. Burada, p nin tüm eleman üzerine etkidiği kabul edilmiştir. $\{P_e\}$ nin bileşenleri, diğer dış kuvvetlere ek olarak, nokta kuvvetleri olarak uygulanmak zorundadır. $\{P_e\}$ uygulandığında, Şek.10.3 de gösterildiği gibi; n , k , m ve j düğümlerinin a , b , c ve d uçlarına bağlı olduğunun kabul edildiğine dikkat ediniz.

Kesim 9.7 deki yöntemi izleyerek, eğer gerekiyorsa, nokta yüklere ait $\{P_e\}$; hem dikdörtgen, hem de üçgen elemanlar için hesaplamalar biraz daha karmaşık olmakla birlikte çıkarılabilir.

10.6 BİR ÖRNEK

Düz plak yapıları, sonlu elemanların tipik bir uygulaması olarak, Şek.10.6a daki problemi çözelim. Burada, bir üniform kare plak bütün kenarlarından sabitlenmiş



Şek. 10.6 (a) Merkezi bir nokta yükü W nun etkisinde bütün kenarlarından sabitlenmiş, **kare**, üniform izotropik plak. W düşey doğrultuda, aşağı yönde etkimektedir. (b) – (d) ABCD çeyreğinin **kare** elemanlı modelleri, (e) – (j) ABCD çeyreğinin **üçgen** elemanlı modelleri.

ve merkezine düşey nokta yükü W etkimektedir. Plâğın simetrisi nedeniyle, herhangi bir çeyreğini ele almak yeterlidir. Şek. 10.6b–j de ABCD* çeyreğinin birkaç sonlu eleman modeli gösterilmiştir. Bu çeyreğin sınır şartları şunlardır:

- (a) w, θ_x ve θ_y , sabitlenmiş DA ve DC kenarları boyunca sıfırdır. Bu nedenle bunların düşümlerle temsili gerekmez.
- (b) BC üzerinde $\theta_y = 0$
- (c) AB üzerinde $\theta_x = 0$

(b) ve (c) plâğın simetrik deformasyonları dolayısıyla yazılır. Ve sınır şartları kesim 5.1 deki yöntemlerle probleme kolaylıkla dahil edilebilir (eğer, bazı nedenlerle plâğın herhangi bir çeyreğini değilde tümünü ele alarak bu problemi çözsedydik, o takdirde, (b) ve (c) doğmazdı).

Tablo 10.5, Şek. 10.6 da gösterilen çeşitli bölmeler için hesaplanan plâğın merkezi düşey çökmelerini vermektedir.

Tablo 10.5 kare elemanlar kullanılması halinde, bölmeler sıkıştıkça sonuçların kesin değerlerine yaklaştıklarını göstermektedir. Genel olarak, bu durum dikdörtgen ve kare elemanlarda görülür. Öte yandan, üçgen elemanlarda elde edilen sonuçlar; dikdörtgene nisbetle daha az hassastır. Yine, dikdörtgen ve kare elemanlara benzemeyen elemanlardan elde edilecek sonuçları üçgen eleman kullanarak elde edilen sonuçlar gibi yorumlamak uygun değildir. Bununla beraber, üçgen elemanlı bu örnek; kesim 9.6 da yapılan gözlemin önemini vurgulamaktadır. Yani, çözümün nasıl davrandığını tayin etmek için birkaç bölme şeması denenmelidir.

Şek. 10.7, AB doğrultusunda M_x in hesaplanan değişimini göstermektedir.

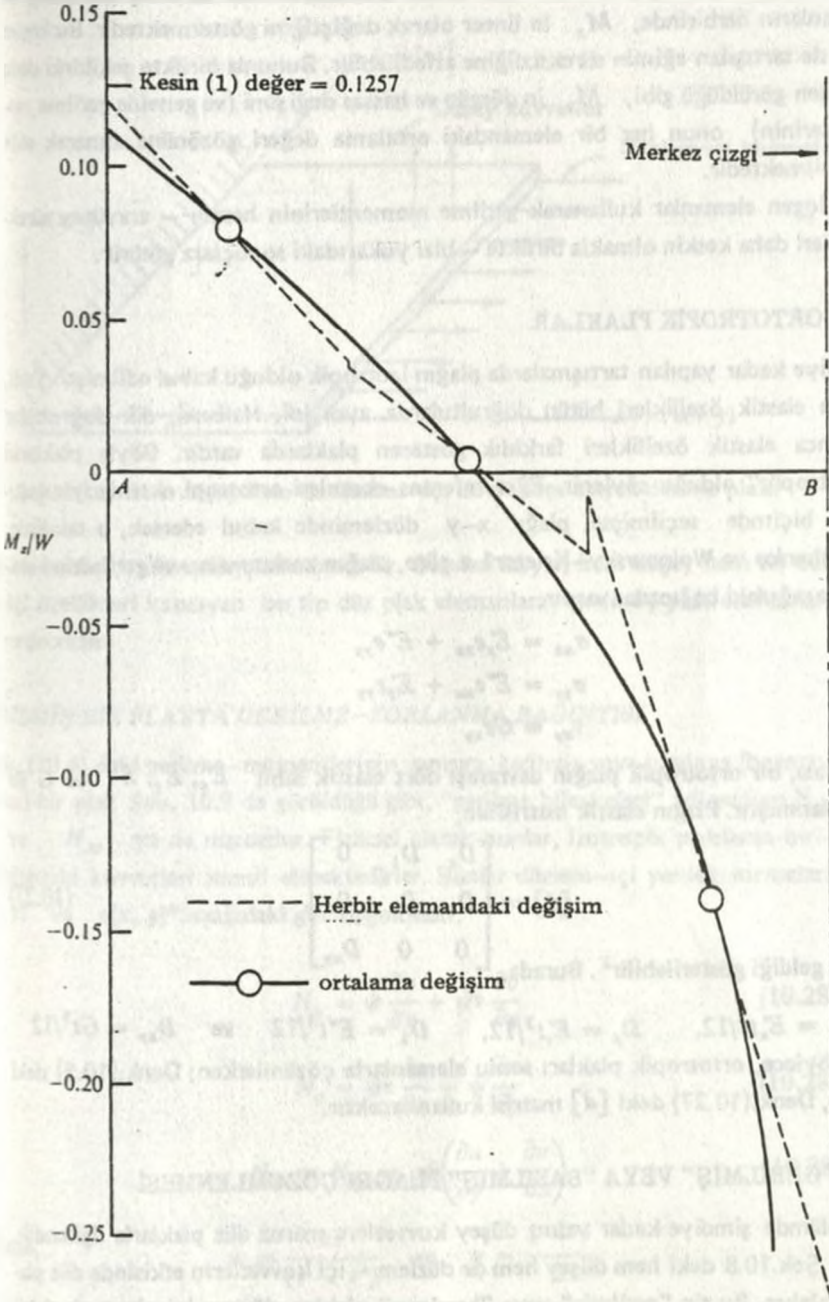
Tablo 10.5 Şek.10.6a daki plâğın hesaplanan merkezi düşey çökmesi.

$$v = 0.25$$

Kare eleman		Üçgen eleman	
Model	w^*	Model	w^*
(b)	0.068747	(e)	0.082682
(c)	0.066345	(f)	0.079558
(d)	0.065186	(g)	0.076543
Kesim	0.063000	(h)	0.081458
		(i)	0.063499
		(j)	0.065121

$$* \text{ Çarpan} = -WL^2/EI^3$$

* Bu problemde, bütün elemanların yerel eksenlerini birbirlerine paralel yapmak mümkündür. Bkz. kesim 9.5.



Şek. 10.7 (c) modeli kullanılarak, elde edilen Şek. 10.6(a) daki plağın AB doğrultusunda M_z in hesaplanan değişimi.

Kesikli çizgiler, bitişik elemanların ortak arayüzeylerinde süreksiz olduğunu ve elemanların herbirinde, M_x in lineer olarak değiştiğini göstermektedir. Bu kesim 10.3 de tartışılan eğimin süreksizliğine atfedilebilir. Bununla birlikte şekildeki dolu çizgiden görüldüğü gibi, M_x in düzgün ve hassas değişimi (ve genelde gerilme momentlerinin) onun her bir elemandaki ortalama değeri gözönüne alınarak elde edilebilmektedir.

Üçgen elemanlar kullanarak gerilme momentlerinin hesabı – arayüzey süreksizlikleri daha keskin olmakla birlikte – bizi yukarıdaki sonuçlara götürür.

10.7 ORTOTROPİK PLAKLAR

Şimdiye kadar yapılan tartışmalarda plağın izotropik olduğu kabul edilmişti. Yani, plağın elastik özellikleri bütün doğrultularda aynı idi. Halbuki, dik doğrultular boyunca elastik özellikleri farklılık gösteren plaklarda vardır. Böyle plakların "ortotropik" olduğu söylenir. Eğer referans eksenleri ortotropi eksenleriyle çakışacak biçimde seçilmişse, plağı x - y düzleminde kabul edersek, o takdirde, Timoshenko ve Woinowsky-Krieger¹ e göre, plağın zorlanmaları ve gerilmeleri arasında aşağıdaki bağıntılar vardır.

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= E_x e_{xx} + E'' e_{yy} \\ \sigma_{yy} &= E'' e_{xx} + E_y e_{yy} \\ \tau_{xy} &= G e_{xy}\end{aligned}$$

Açıkçası, bir ortotropik plağın davranışı dört elastik sabit E'_x , E'_y , E'' ve G ile tanımlanmıştır. Plağın elastik matrisinin,

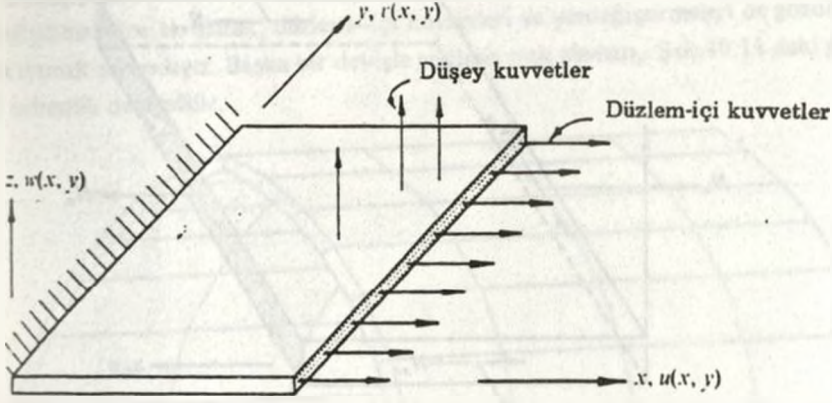
$$[d] = \begin{bmatrix} D_x & D_1 & 0 \\ D_1 & D_y & 0 \\ 0 & 0 & D_{xy} \end{bmatrix} \quad (10.27)$$

haline geldiği gösterilebilir¹. Burada,

$D_x = E'_x t^3/12$, $D_y = E'_y t^3/12$, $D_1 = E'' t^3/12$ ve $D_{xy} = G t^3/12$ dir. Böylece, ortotropik plakları sonlu elemanlarla çözümlerken; Denk.(10.5) deki yerine, Denk.(10.27) deki $[d]$ matrisi kullanılacaktır.

10.8 "GERİLMİŞ" VEYA "BASILMIŞ" PLAĞIN ÇÖZÜMLENMESİ

Bu bölümde şimdiye kadar yalnız düşey kuvvetlere maruz düz plaklarla ilgilendik. Şimdi Şek.10.8 deki hem düşey hem de düzlem – içi kuvvetlerin etkisinde düz plağı ele alalım. Bu tip "gerilmiş" veya "basılmış" plaklar, düzlem içi olanlarda dahil olmak üzere karakteristiklerini değiştirmek şartıyla kesim 10.3 ve 10.4 deki düz



Şek. 10.8 Hem düsey hem de düzlem-içi kuvvetlere maruz düz bir plak.

plak elemanları kullanarak çözümlenebilir. Bundan böyle, hem düsey hem de düzlem içi özellikleri kapsayan bu tip düz plak elemanlara "gerilmiş plak elemanlar" adı verilecektir.

GERİLMİŞ BİR PLAKTA GERİLME-ZORLANMA BAĞINTISI

Denk. (10.4) deki gerilme-momentlerinin yanısıra, gerilmiş veya basılmış (basmaya maruz) bir plak Şek. 10.9 da görüldüğü gibi, "gerilme bileşikleri" adı verilen N_x , N_y ve N_{xy} ye de maruzdur. Fiziksel olarak bunlar, izotropik plaklarda birim uzunlukta kuvvetleri temsil etmektedirler. Bunlar düzlem-içi yerdeğiştirmelerle $u(x, y)$ ve $v(x, y)$ * aşağıdaki gibi bağıntılıdır.

$$N_x = \psi \frac{\partial u}{\partial x} + \psi v \frac{\partial v}{\partial y} \quad (10.28a)$$

$$N_y = \psi v \frac{\partial u}{\partial x} + \psi \frac{\partial v}{\partial y} \quad (10.28b)$$

$$N_{xy} = N_{yx} = q\psi \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (10.28c)$$

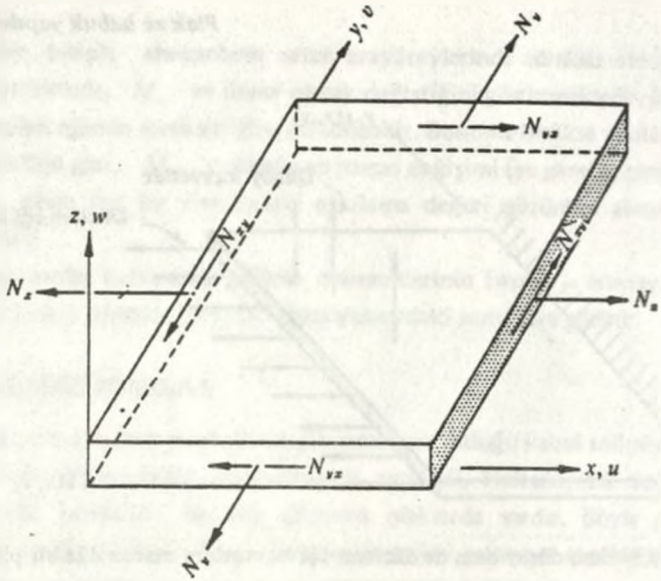
ve

burada,

$$\psi = \frac{Et}{(1 - \nu^2)} \quad \text{ve} \quad q = \frac{1 - \nu}{2}$$

Denk.(10.4) deki gerilme-momentleri ve yukarıdaki gerilme bileşikleri, basit bir matris şeklinde düzenlendiğinde,

* Bunlar, Şek.10.8 ve 10.9 da görüldüğü gibi, "orta-düzlem" üzerinde bulunan noktaların yerdeğiştirmesinin teğetsel bileşenleridir.



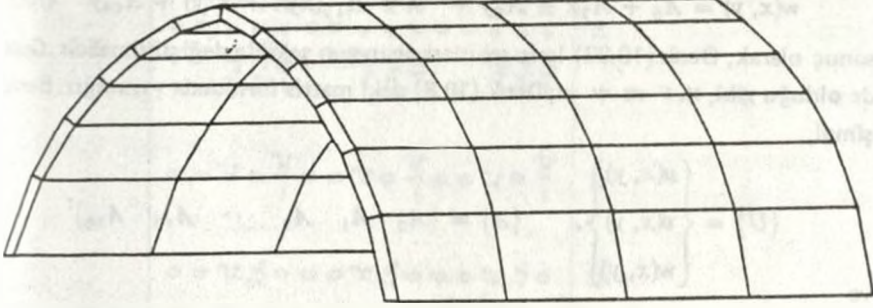
Şek. 10.9 Kabuk yapılarda "gerilme bileşikleri".

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi & \nu\psi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nu\psi & \psi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q\psi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D & \nu D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nu D & D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & qD \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (10.29)$$

ulaşılır. Denk. (10.29) un solundaki vektör; plağın genelleştirilmiş "gerilmeler" ini sağ taraftaki vektör, genelleştirilmiş "zorlanmalar" ı kapsamaktadır. O takdirde, tanımdan, Denk.(10.29) daki kare matris, plağın "elastisite" matrisi, $[d]$ dir.

BİRİNCİL MATRİSLER

Gerilmiş plak elemanın birincil matrislerini çıkarmak için, eğilme kuvvetleri ve yerdeğiştirmelerine ek olarak, düzlem-içi kuvvetleri ve yerdeğiştirmeleri de gözönünde tutmak zorundayız. Başka bir deyişle gerilmiş plak eleman, Şek.10.11 deki gibi, 5 serbestlik derecedir.



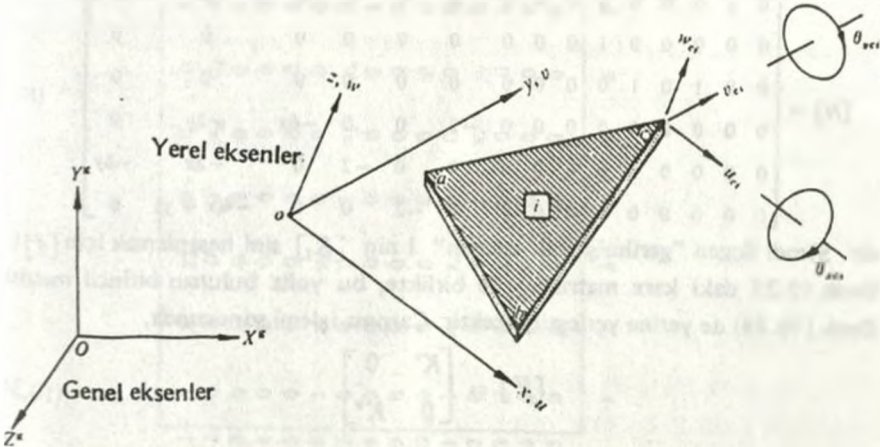
Şek.10.10 Dikdörtgen "gerilmiş plak elemanlar" sistemine bölünmüş bir kabuk yapı.

Örneğin; üçgen gerilmiş plak elemanı ele alalım: Düzlem-içi yerdeğiştirmeler $u(x, y)$ ve $v(x, y)$ in karşılıklı bağımsız olduğuna ve bu elemanın üç ucu bulunduğuna dikkat ederek, kesim 9.5(a) ya göre,

$$u(x, y) = A_0 + A_1x + A_2y \quad (10.30a)$$

$$v(x, y) = A_3 + A_4x + A_5y \quad (10.30b)$$

şeklinde kabul edebiliriz (elemanın düzlem-içi karakteristikleri Bölüm 11 de ayrıntılarıyla tartışılacaktır).



Şek. 10.11 Üçgen bir "gerilmiş plak eleman", yalnız, elemanın bir ucundaki yerdeğiştirmeler ($x-y$ düzleminde bulunduğu kabul edilen) gösterilmiştir.

Şimdi, geometrik lineerlik kabulü nedeniyle; elemanın düşey yerdeğiştirmesi $w(x, y)$; hem $u(x, y)$, hem de $v(x, y)$ den bağımsızdır. Bu yüzden, Denk. (10.21) deki $w(x, y)$ sabitlerinin hiçbiri u ve v nin sabitlerinden hiçbiri ile ortak olmayacak tarzda yeniden tanımlanmalıdır. Bu yüzden Denk.(10.21) de sabitleri değiştirerek $w(x, y)$ yi yeniden aşağıdaki gibi yazalım:

$$w(x, y) = A_6 + A_7x + A_8y + \dots + A_{13}(xy^2 + x^2y) + A_{14}y^3 \quad (10.31)$$

sonuç olarak, Denk.(10.22) lerin sabitleri de uygun şekilde değiştirilmelidir. Genel-
de olduğu gibi, u, v ve w yı; Denk.(10.8) deki matris formunda yazacağız. Burada şimdi,

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \\ w(x, y) \end{Bmatrix}, \quad \{A\} = \{A_0 \ A_1 \ A_2 \ \dots \ A_{13} \ A_{14}\}^T$$

ve

$$[M] = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & x^3 & (xy^2 + x^2y) & y^3 \end{bmatrix} \quad (10.32)$$

olacaktır. Elemanın $[c]$ matrisi; u, v, w, θ_x ve θ_y (θ_x ve θ_y için değiştirilmiş sabitlerle) ifadelerinde uç koordinatlarını yazarak elde edilmiştir. Tablo 10.6; Denk. (10.22), (10.30) ve (10.31) den bu yolla elde edilmiş $[c]$ matrisini vermektedir.

Nihayet, birincil matris $[N]$; Denk.(10.29) un sağ tarafındaki vektör şemasına göre u, v ve w ifadelerinin türevleri alınarak elde edilmiştir. İşpat edilebilir ki;

$$[N] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -6x & -2y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -2x & -6y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -4(x+y) & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (10.33)$$

dir. Şimdi üçgen "gerilmiş plak eleman" i nin $[K_i]$ sini hesaplamak için $[d]$ (bu Denk.10.29 daki kare matristir) ile birlikte, bu yolla bulunan birincil matrisler Denk.(10.14) de yerine yerleştirilecektir. Çarpma işlemi sonucunda,

$$[K] = \begin{bmatrix} K' & 0 \\ 0 & K'' \end{bmatrix} \quad (10.34)$$

Tablo 10.6 Üçgen "gerilmiş plak eleman" in $[c]$ matrisi

1	x_a	y_a	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	x_a	x_a^2	$x_a y_a$	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	y_a^2	$2x_a y_a$	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	-1	$-2x_a$	0	0	0	$-3x_a^2$	0	0	0
6	1	x_b	y_b	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	1	x_b	x_b^2	$x_b y_b$	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	1	x_b	1	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	$-2x_b$	0	0	0
11	1	x_c	y_c	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	1	x_c	x_c^2	$x_c y_c$	0	0	0	0	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
15	0	0	0	0	0	0	-1	$-2x_c$	0	0	0	$-3x_c^2$	0	0	0

burada, $[K^*]$, Tablo 10.4 deki $[K]$ matrisine eşittir.

$$[K^*] = \Delta \psi \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \nu \\ 0 & 0 & q & 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & q & 0 \\ 0 & \nu & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10.35)$$

Dikdörtgen "gerilmiş plak eleman" birincil matrisleri, Denk.(10.6) daki polinomu kullanarak ve tamamıyla aynı yolla,

$$u(x, y) = A_0 + A_1x + A_2y + A_3xy \quad (10.36a)$$

$$v(x, y) = A_4 + A_5x + A_6y + A_7xy \quad (10.36b)$$

çıkarılabilir. O takdirde birincil matrislerle birlikte Denk.(10.29) da $[d]$ matrisi bilinen yolla $[K_i]$ yi hesaplamak için kullanılabilir.

PROBLEM ÇÖZÜMÜ

Plâğın bölündüğü, bütün elemanların $[K_i]$ leri hesaplandığı da, bunlar; tüm plâğın tümel direngenlik matrisini oluşturmak için; Bölüm 3 deki yöntemle, bilinen yolla toplanacaktır. O takdirde, problem; Denk.(3.9) un terimleri cinsinden çözülecektir. Burada $\{\delta\}$ ve $\{P\}$ nin kapsamı şöyledir:

$$\{\delta\} = \{u_1 \ v_1 \ w_1 \ \theta_{x1} \ \theta_{y1} \ \cdots \ u_N \ v_N \ w_N \ \theta_{xN} \ \theta_{yN}\}^T$$

$$\{P\} = \{F_1 \ Q_1 \ H_1 \ M_{x1} \ M_{y1} \ \cdots \ F_N \ Q_N \ H_N \ M_{xN} \ M_{yN}\}^T$$

Burada N, parçalı plâğın toplam düğüm sayısıdır. k ıncı düğüm için ($k=1, 2, \dots, N$),

$F_k, Q_k, H_k = k$ düğümüne, sırasıyla x, y, z doğrultusunda uygulanan dış kuvvet.

$u_k, v_k, w_k = k$ düğümünde, sırasıyla x, y, z doğrultusunda yerdeğiştirmeler.

$M_{xk}, M_{yk} = k$ düğümüne uygulanan dış moment.

$\theta_{xk}, \theta_{yk} = k$ düğümündeki dönmeler.

10.9 KABUKLARIN ANALİZİ, KATLI ÇATILAR VB.

Genel olarak bir kabuk, bir katlı çatı veya benzer bir eğri eksenli yapıda, yapıya dış kuvvetler etkideğinde, hem düzlem-içi ve hem de düşey kuvvetler ve yerdeğiştirmeler meydana gelir. Bu yüzden, bu tip "ince" yapıları son kesimde tartışılan "gerilmiş plak elemanlara" bölmek suretiyle, çözemleyebiliriz.

Şek. 10.10 buna bir örnektir. Burada bir kabuk, dikdörtgen gerilmiş plak elemanlar sistemine ayrılmıştır.

Bilindiği gibi, gerilmiş plak elemanların $[K_i]$ matrisi, onun yerel koordinatlarına aittir. Örneğin, Şek. 10.11 de $oxyz$ koordinatlarına aittir. Ancak, böyle bir yapının elemanları farklı yönlere sahip olduğundan, her bir elemanın $[K_i]$ si, bütün elemanların ait olduğu bir "genel" koordinat sistemine transform edilmesi zorunludur. Bölüm 6 ve 7 de benzer transformasyonlarla karşılaşmıştık. Üçgen ve dikdörtgen elemanların transformasyon matrisleri sırasıyla:

$$[T_i] = \begin{bmatrix} t_i & 0 & 0 \\ 0 & t_i & 0 \\ 0 & 0 & t_i \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad [T_i] = \begin{bmatrix} t_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t_i \end{bmatrix}$$

dır. Burada,

$$[t_i] = \begin{bmatrix} x^e x & x^e y & x^e z & 0 & 0 \\ y^e x & y^e y & y^e z & 0 & 0 \\ z^e x & z^e y & z^e z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x^e x & x^e y \\ 0 & 0 & 0 & y^e x & y^e y \\ 0 & 0 & 0 & z^e x & z^e y \end{bmatrix}$$

dır. Burada, örneğin $x^e y$; X^e ve y eksenleri arasındaki açının kosinüsüdür (bkz. Şek. 10.11). O halde, i elemanın "genel eleman direngenlik matrisi" $[K^e]$;

$$[K^e] = [T_i][K_i][T_i]^T \quad (10.37)$$

şeklinde elde edilir. Burada, $[K_i]$; "gerilmiş plak eleman" i ye aittir. Yine, Denk. (10.37) nin çıkarımında, yukarıdaki $[T_i]$ lerin, Denk.(7.6) ya benzer denklemleri sağlaması gerçeğini kullandığımıza dikkat edilmelidir.

O takdirde, $[K^e]$ ler, $S^e(i, J, K)$ lara ayrılacak bunların, Bölüm 3 deki metotlarla toplanmasıyla, tümel direngenlik matrisi $[K^e]$ elde edilecektir. Ve sonra problem; belirlenmiş bütün sınır şartlarını hesaba katarak, Denk.(6.14) ün terimleri açısından çözülebilir.

Burada, $[t_i]$ dikdörtgen olduğundan, Denk.(10.37) den "gerilmiş plak eleman" yerel eksenlerin de 5 serbestlik dereceli olmalarına rağmen, genel eksen takımında 6 serbestlik dereceli olduğu kolayca ispatlanabilir (benzer bir durumun Bölüm 7 de ortaya çıktığını hatırlayınız. Orada, bir tek yerel eksen serbestlik derecesi, birden daha fazla genel eksen serbestlik derecesi de ortaya çıkmıştır). Yine fazlalık genel serbestlik derecesinin, M^e eksenine dik düzlemde bulunan Z^e momenti olduğu

ispatlanabilir. Sonuç olarak, parçalanmış yapının toplam N düğümü varsa, o takdirde,

$$\{P^e\} = \{F_1^e \ Q_1^e \ H_1^e \ M_{z1}^e \ M_{y1}^e \ M_{x1}^e \ \cdots \ F_N^e \ Q_N^e \ H_N^e \ M_{zN}^e \ M_{yN}^e \ M_{xN}^e\}^T$$

ve

$$\{\delta^e\} = \{u_1^e \ v_1^e \ w_1^e \ \theta_{z1}^e \ \theta_{y1}^e \ \theta_{x1}^e \ \cdots \ u_N^e \ v_N^e \ w_N^e \ \theta_{zN}^e \ \theta_{yN}^e \ \theta_{xN}^e\}^T$$

olacaktır. k düğümünde $\{P\}$ eksenine göre dış genel moment, $\{\delta\}$ ve buna karşı gelen k daki dönmeyi gösteren $M_{z,k}^e$ hariç, bu eşitliklerdeki bütün büyüklükler, kesim 10.8 deki Z^e ve $\theta_{z,k}^e$ nin genel eksenindeki karşılıklarıdır.

10.10 PLAK-KİRİŞ SİSTEMLERİ

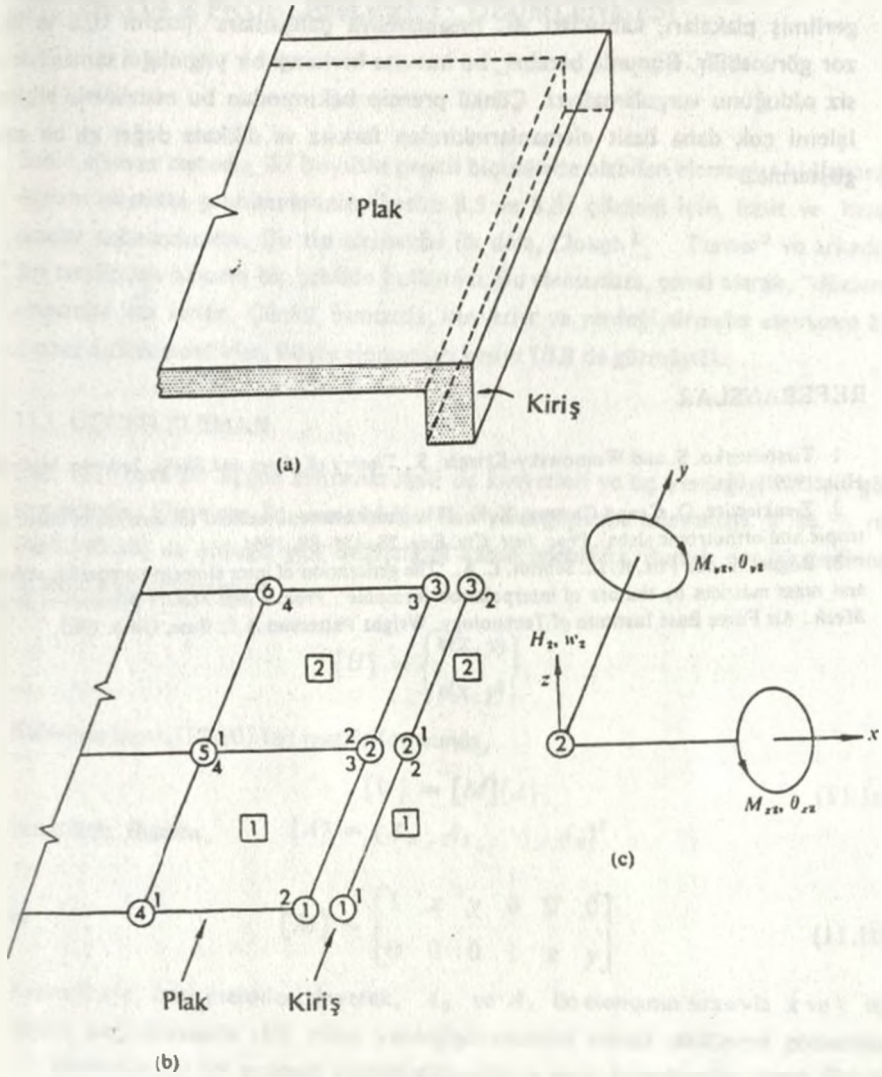
Plak-kiriş, kabuk-halka kiriş ve benzer bileşimlerin çözülmesi, herhangi bir zorluk ortaya çıkarmaz. Örneğin, Şek.10.12a daki plak-kiriş sistemini düşünelim. Kirişin sonlu eleman bölmesi Şek.10.12b de gösterilmiştir. Bu bileşimin $[K]$ matrisi; bilinen yolla toplanır. Örneğin, iki düğüm için, kesim 3.4 deki metodu uygulayarak, bu yapıda bu düğümün Denk.(3.9) a katılımının aşağıdaki gibi olduğu gösterilebilir.

	1	2	3	4	5	6	
	$S^p(1, 3, 2)$	$S^p(1, 3, 3)$	$S^p(2, 2, 3)$	$S^p(1, 3, 1)$	$S^p(1, 3, 4)$	$S^p(2, 2, 4)$	$\left\{ \begin{array}{l} w_1 \\ u_{z,2} \\ \theta_{y,2} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} H_1 \\ M_{z,2} \\ M_{y,2} \end{array} \right\}$
2	$+ S^p(1, 2, 1)$	$+ S^p(2, 2, 2)$	$+ S^p(2, 1, 2)$		$+ S^p(2, 2, 1)$		
		$+ S^p(1, 2, 2)$					
		$+ S^p(2, 1, 1)$					

Kuvvetlerin ve yerdeğiştirmelerin yönleri; Şek. 10.12c de gösterilmiştir. Burada, $S^p(i, J, K)$ ve $S^b(i, J, K)$, sırasıyla dikdörtgen plak elemanın (kesim 10.3), ve Bölüm 2 deki kiriş elemanın $S(i, J, K)$ larıdır (burada $M_{y,2}$ nin kirişe burulma yükü olarak etkiğine dikkat edilmelidir). Bu yolla $[K]$ ve $\{P\}$ matrisleri bilgisayarda kolayca toplanabilir.

10.11 GÖZLEMLER

Kesim 10.3 de; elemanın düşey çökmesi, bitişik elemanların arayüzeyleri boyunca sürekli olmakla birlikte, elemanın bir eksene göre dönmelerinin eksene paralel arayüzeyler boyunca süresiz olduğunu görmüştük. Sonuç olarak, Denk.(10.6) da varsayılan çökmeye "uygun-olmayan" çökme adı verilir. Bogner ve arkadaşları Hermit interpolasyon formüllerini kullanarak, bu tür süresizliklere yolaçmayan "uygun" çökme fonksiyonlarını çıkardılar. Genel olarak, bu fonksiyonlarla elde edilen hassasiyet, uygun-olmayan çökmeleri kullanarak elde edilenlerden daha kabadır.



Şek. 10.12 (a) Bir plak—kiriş bileşimi. (b) (a) nın bir sonlu elemanlara bölünmesi. (c) Uygulanan dış düğüm kuvvetleri.

Bu bölümdeki elemanlar, diğer boyutlarına göre t si küçük olmayan, "kalın" plakalar ve kabukları çözümlmek için kullanılamaz. Çünkü, bunların gerilmeleri ve yerdeğiştirmeleri esasen üç boyutludur. Onları çözümlmek için Bölüm 12 deki elemanlar kullanılacak.

Yeni başlayanlar için; bu bölümdeki birincil matrislerin boyutları, özellikle, gerilmiş plakaları, kabukları vb. hesaplamaya çalışanlara (kesim 10.8 ve 10.9), zor görünebilir. Bununla beraber, bu hususta herhangi bir yığınlığın tamamıyla yer-siz olduğunu vurgulamalıyız. Çünkü prensip bakımından bu matrislerin bilgisayar işlemi çok daha basit elemanlarınkinden farksız ve dikkate değer ek bir zorluk göstermez.

REFERANSLAR

1. Timoshenko, S. and Woinowsky-Krieger, S., *Theory of plates and Shells*, 2nd edn. McGraw-Hill, 1959.
2. Zienkiewicz, O. C. and Cheung, Y. K., 'The finite element method for analysis of elastic isotropic and orthotropic slabs', *Proc. Inst. Civ. Eng.* 28, 471-88, 1964.
3. Bogner, F. K., Fox, R. L., Schmit, L. A., 'The generation of inter element-compatible stiffness and mass matrices by the use of interpolation formulae', *Proc. Conf. Matrix Methods in Struct. Mech.*, Air Force Base Institute of Technology, Wright Patterson A.F. Base, Ohio, 1965.

11 DÜZLEM PROBLEMLERİN ÇÖZÜMLENMESİ

Sonlu eleman metodu, iki boyutlu çeşitli biçimlerde olabilen elemanlar kullanarak, düzlem elastisite problemlerinin (kesim 8.5 ve 8.6) çözümü için, basit ve hassas araçlar sağlamaktadır. Bu tip elemanlar ilk defa, Clough¹, Turner² ve arkadaşları tarafından başarılı bir şekilde kullanıldı. Bu elemanlara, genel olarak, "düzlem" elemanlar adı verilir. Çünkü, bunlarda, kuvvetler ve yerdeğıştirmeler elemanın bulunduğu düzlemedirler. Böyle elemanları kesim 10.8 de görmüştük.

11.1 ÜÇGEN ELEMAN

Şek. 11.1 tipik bir üçgen elemanla ilgili uç kuvvetleri ve uç yerdeğıştirmeleri göstermektedir. Elemanın üç ucu olduğundan yerdeğıştirme bileşenleri u ve v nin Denk.(10.30) da olduğu gibi değıştığını kabul edebiliriz. Burada her bir polinom üç sabitle gösterilmiştir*.

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix}$$

ifadesiyle Denk.(10.30) ları matris formunda,

$$\{U\} = [M]\{A\} \quad (11.1a)$$

yazabiliriz. Burada, $\{A\} = \{A_0 \ A_1 \ \dots \ A_5\}^T$

ve

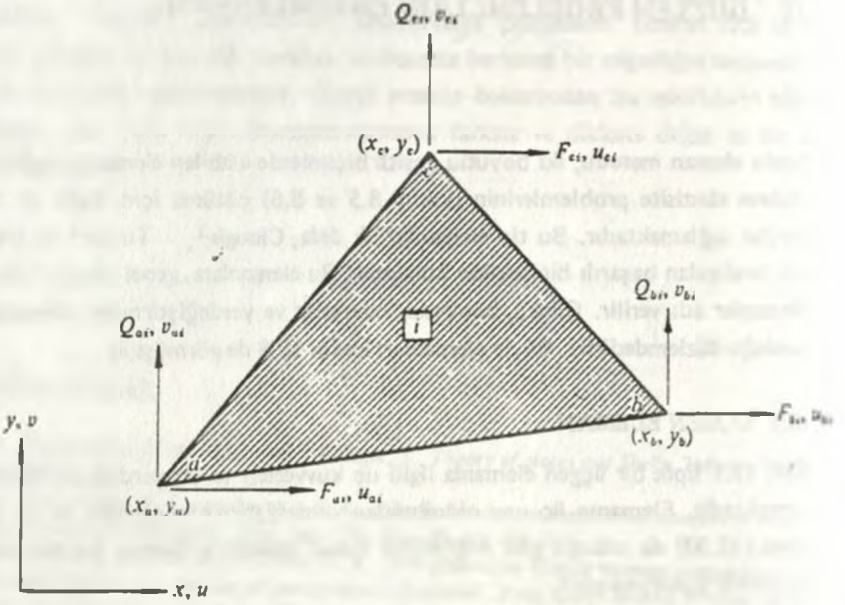
$$[M] = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \quad (11.1b)$$

Kesim 9.8(c) deki metodu izleyerek, A_0 ve A_3 ün elemanın sırasıyla x ve y eksenleri doğrultusunda rijit cisim yerdeğıştirmelerini temsil ettiklerini gösteriniz.

Elemanın her bir ucunun yerdeğıştirmeleri; o ucun koordinatları Denk.(10.30) da yerine yazılarak elde edilebilir. Buradan, örneğin a ucunda:

$$\begin{aligned} u_{a1} &= u(x_a, y_a) = A_0 + A_1 x_a + A_2 y_a \\ v_{a1} &= v(x_a, y_a) = A_3 + A_4 x_a + A_5 y_a \end{aligned}$$

* Bkz. kesim 9.5(a).

Şek. 11.1 Genel üçgen düzlem eleman. Üniform kalınlık = t .

vb. Şimdi, bütün bu uç yerdeğiştirmeleri aşağıda matris formuna koyacağız:

$$\{\delta\} = [c]\{A\} \quad (11.2)$$

burada,

$$\{\delta\} = \{u_{a1} \ v_{a1} \ u_{b1} \ v_{b1} \ u_{c1} \ v_{c1}\}^T$$

ve

$$[c] = \begin{bmatrix} 1 & x_a & y_a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_a & y_a \\ 1 & x_b & y_b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_b & y_b \\ 1 & x_c & y_c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_c & y_c \end{bmatrix} \quad (11.3)$$

Denk. (8.1), (8.3) ve (8.4a) dan elemanın zorlanmaları $\{\epsilon\}$

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ e_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (11.4a)$$

Şimdi, birincil matris $[N]$, Denk.(11.4) şemasına göre; Denk.(10.30) daki yerde-
ğiştirmelerin türevleri alınarak elde edilebilir. Gerçekte gösterebiliriz ki:

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_5 \\ A_2 + A_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \{A\}$$

dr. Veya sembolik olarak, $\{\epsilon\} = [N]\{A\}$ (11.4b)

burada $[N]$ yukarıdaki dikdörtgen matrisi tanımlamaktadır. Böylece üç birincil
matris $[M]$, $[N]$ ve $[c]$ tanımlanmış olduğundan, kesim 9.8 deki formüllerden,
elemanın çeşitli karakteristiklerini çıkarabiliriz. Örneğin, eleman direngenlik matrisi-
nin aşağıdaki şekilde elde edildiği kolaylık gösterilebilir.

$$[K_i] = t \cdot [c^{-1}]^T [K] [c^{-1}] \quad (11.5)$$

Burada, $[K] = \int_{\Delta} [N]^T [d] [N] dx dy$ (11.6)

yukarıdaki integral; elemanın tüm alanı üzerinde alınacaktır. Elemanın üniform ka-
lınlığı t dir. Denk.(11.4b), $[N]$ in kullanılan koordinatların bir fonksiyonu olma-
dığını göstermektedir. Sonuç olarak, üçgen eleman için;

$$[K] = [N]^T [d] [N] \int_{\Delta} dx dy = \Delta [N]^T [d] [N] \quad (11.7)$$

elde ederiz*. Burada Δ i elemanın alanı ve \int_{Δ} bir üçgen alan üzerindeki integras-
yonu tanımlamaktadır. Düzlem gerilmeler için Denk.(11.7) de kullanılacak $[d]$ mat-
risi, Denk.(8.19) daki matrisidir. Halbuki, düzlem zorlanma için $t = 1$ almak ve
Denk.(8.18) daki $[d]$ matrisini kullanmak zorundayız.

Hesaplamalar için bilgisayar kullanılacağından, $S(i, J, K)$ ların açık formlarını
yazmak yerine Denk.(11.5) ve (11.7) de $[K_i]$ yi oluşturmak için bilgisayar kullan-
mak çok daha uygundur. Sonra, $[K_i]$ den $S(i, J, K)$ otomatik olarak tayin edilebi-
lir. Bununla birlikte, küçük bir zorluk vardır: Diyagonali üzerinde birkaç sıfır oldu-
ğundan, $[c]$ nin doğrudan tersi alınamaz. $[c]$ nin tersini kesim 15.3 de verilen
yöntemi kullanarak dolaylı olarak almak mümkündür. Bir başka yolla, Denk.(11.2)
ye benzer denklemlerin bir çözümünden,

$$A_0 = \frac{1}{2\Delta} ((x_b y_c - x_c y_b) u_{a1} + (x_c y_a - x_a y_c) u_{b1} + (x_a y_b - x_b y_a) u_{c1}),$$

$$A_1 = \frac{1}{2\Delta} (y_{bc} u_{a1} + y_{ca} u_{b1} + y_{ab} u_{c1})$$

$$A_2 = \frac{1}{2\Delta} (x_{cb} u_{a1} + x_{ac} u_{b1} + x_{ba} u_{c1})$$

* Üçgen alan üzerinde integrasyon için bkz. Ek 3.

elde edilir. Burada, $2\Delta = (y_{bc}x_{ab} - y_{ab}x_{bc})$ i üçgeninin alanının iki katı. vb. koordinat farklarını gösterdiğine dikkat edilmelidir:

$$x_{ab} = x_a - x_b$$

$$y_{bc} = y_b - y_c$$

Yine açıktır ki; $x_{ab} = -x_{ba}$, $y_{bc} = -y_{cb}$ vb.

A_3 , A_4 ve A_5 sabitleri, sırasıyla, A_0 , A_1 ve A_2 yi veren ifadelerde u_{a1} , u_{b1} ve u_{c1} yerine sırasıyla v_{a1} , v_{b1} ye v_{c1} yazılarak elde edilmiştir. Bu sabitleri matris formunda düzenleyerek,

$$\{A\} = [X]\{\delta\}$$

yazılır. Tanımdan, (kesim 9.8) $[X]^{-1} = [c^{-1}]$ olduğu görülmektedir. Tablo 11.1 de bu yolla elde edilmiş $[c^{-1}]$ verilmiştir.

Üçgen elemanlar kullanarak düzlem problemlerin sonlu elemanlarla çözümlenmesine, her elemanın $[K_i]$ lerini oluşturarak başlanmış ve sonra Bölüm 3 de gösterilen tarzda elemanların $S(i, j, k)$ ları parçalara ayrılmış cismin tümel direngenlik

Tablo 11.1 Üçgen elemanın $[c]^{-1}$ matrisi.

$$[c]^{-1} = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} x_b y_c - x_c y_b & 0 & x_r y_a - x_a y_c & 0 & x_a y_b - x_b y_a & 0 \\ y_{bc} & 0 & y_{ca} & 0 & y_{ab} & 0 \\ x_{ca} & 0 & x_{ab} & 0 & x_{bc} & 0 \\ 0 & x_b y_c - x_c y_b & 0 & x_r y_a - x_a y_c & 0 & x_a y_b - x_b y_a \\ 0 & y_{bc} & 0 & y_{ca} & 0 & y_{ab} \\ 0 & x_{ca} & 0 & x_{ab} & 0 & x_{bc} \end{bmatrix}$$

matrisi $[K]$ yi oluşturmak üzere toplanır. Nihayet, $[K]$ ya, belirlenen sınır şartları dahil edilip, bundan sonra problem, Denk.(3.9) un terimleri cinsinden çözülebilir. Burada, $\{P\}$ ve $\{\delta\}$ nın kapsamı aşağıdaki gibidir:

$$\{P\} = \{F_1 \quad Q_1 \quad F_2 \quad Q_2 \quad \cdots \quad F_N \quad Q_N\}^T \quad (11.8)$$

$$\text{ve} \quad \{\delta\} = \{u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad \cdots \quad u_N \quad v_N\}^T \quad (11.9)$$

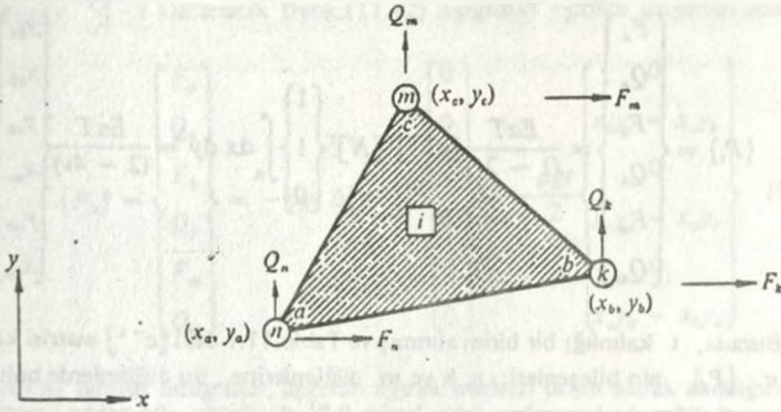
burada, N ; parçalanmış cismin toplam düğüm sayısıdır. $k (= 1, 2, \dots, N)$ düğümünde;

$$F_k = k \text{ da } x \text{ doğrultusunda dış kuvvet}$$

$$Q_k = k \text{ da } y \text{ doğrultusunda dış kuvvet}$$

$$u_k, v_k = \text{sırasıyla } k \text{ düğümünün, } x \text{ ve } y \text{ doğrultusundaki yerdeğiştirmeleridir.}$$

İsıl, ilkel zorlanma ve kütle kuvvetleri, mevcut ise, kesim 9.8 de belirtildiği biçimde, $\{P\}$ bunları da kapsamak zorundadır.



Şek. 11.2 Düzlemde bir üçgen eleman.

Her bir elemandaki gerilmeler, elemanın bünye denklemi ve Denk.(11.4b) arasında $\{c\}$ elimine edilerek düğüm yerdeğiştirmelerinden hesaplanır. Böylece, örneğin, düzlem gerilme durumunda; tipik bir elemandaki (Şek. 11.2), elastik, ısı ve ilkel zorlanmalardan oluşan gerilmeler,

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [d][N][c^{-1}] \begin{Bmatrix} u_n \\ v_n \\ u_k \\ v_k \\ u_m \\ v_m \end{Bmatrix} - \frac{E\alpha T}{(1-\nu)} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} - [d] \begin{Bmatrix} e_{ixx} \\ e_{iyy} \\ e_{ixy} \end{Bmatrix} \quad (11.10)$$

ile hesaplanacaktır. Burada elastisite matrisi, Denk. (8.19) daki $[d]$ matrisidir. n, k ve m düğümleri sırasıyla, a, b ve c uçlarına bağlı olduğu kabul edilmiştir. Yukarıdaki gerilmelere karşı gelen asal gerilmeler (eğer istenirse) kesim 8.10 daki yöntemlerle tayin edilebilir.

Hem $[c]$ ve hem de $[N]$ kullanılan koordinatlardan bağımsız olduğundan; Denk.(11.10), her bir gerilme bileşeninin (ve dolayısıyla zorlanmanın) elemanın her yerinde sabit bir değere sahip olduğunu göstermektedir. Sonuç olarak, gerilme denge denklemleri (Denk. 8.21 ler), özdeş olarak sağlanır.

ISIL KUVVETLER

Şek. 11.2 deki tipik elemanın, ısı kuvvet vektörü $\{P_i\}$ bünye denklemlerinden elde edilen $\{\sigma_i\}$, Denk.(9.12) de yerine yazarak elde edilecektir. Böylece, örneğin,

Denk.(8.18) için düzlem zorlanmalar,

$$\{P_i\} = \begin{Bmatrix} F_n \\ Q_n \\ F_k \\ Q_k \\ F_m \\ Q_m \end{Bmatrix} = \frac{E\alpha T}{(1-2\nu)} [c^{-1}]^T [N]^T \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \int_{\Delta} dx dy = \frac{E\alpha T}{(2-4\nu)} \begin{Bmatrix} y_{nc} \\ x_{nc} \\ y_{kc} \\ x_{kc} \\ y_{mc} \\ x_{mc} \end{Bmatrix}$$

dir. Burada, t kalınlığı bir birim alınmış ve Tablo 11.1 deki $[c^{-1}]$ matrisi kullanılmıştır. $\{P_i\}$ nin bileşenleri; n, k ve m düğümlerine, bu düğümlerde bulunması muhtemel diğer dış kuvvetlere (bkz. kesim 9.8) ek olarak, dış nokta kuvveti şeklinde uygulanmak zorunluluğu vardır.

KÜTLE KUVVETLERİ

Denk.(9.19) kütle kuvvet vektörünün; elastisite matrisinin bir fonksiyonu olmadığını göstermektedir. Bu nedenle, verilen bir eleman biçimi için; $\{P_b\}$, hem düzlem gerilme ve hem de düzlem zorlanma hali için, aynı olacaktır. Burada t bir birim olarak alınmıştır. Şimdi, $x-y$ düzlemindeki bir düzlem eleman için kesim 9.8 den,

$$\{P_b\} = \rho t \cdot [c^{-1}]^T \int_{\Delta} [M]^T \begin{Bmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \end{Bmatrix} dx dy \quad (11.11)$$

elde edilir. Burada; integral, elemanın tüm alanı üzerinde alınır.

Bir örnek olarak şimdi, Şek.11.2 deki eleman için kütle kuvvet vektörünü çıkaralım. Burada kütle kuvvetlerinin sadece yerçekimine bağlı olduğunu kabul edelim. Dolayısıyla $\bar{X} = 0$, $\bar{Y} = -g$ olur. Burada g yerçekimi ivmesini göstermektedir. Denk.(11.16) ve (11.11) den gösterebiliriz ki:

$$\{P_b\} = \rho t \cdot [c^{-1}]^T \int_{\Delta} \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ x & 0 \\ y & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & x \\ 0 & y \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -g \end{Bmatrix} dx dy = -\rho t g [c^{-1}]^T \int_{\Delta} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix} dx dy \quad (11.12)$$

Şimdi Ek 3 deki integrali kullanarak (A3.8a, b ve c denklemleri) ve Tablo 11.1 de

verilmiş $[c^{-1}]$ i kullanarak Denk.(11.12) aşağıdaki eşitliğe ulaşıldığı görülür.

$$\{P_b\} = \begin{Bmatrix} F_n \\ Q_n \\ F_k \\ Q_k \\ F_m \\ Q_m \end{Bmatrix} = -\rho g t \Delta [c^{-1}]^T \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = -\frac{\rho g t}{2} \begin{Bmatrix} 0 \\ x_b y_c - x_c y_b \\ 0 \\ x_c y_a - x_a y_c \\ 0 \\ x_a y_b - x_b y_a \end{Bmatrix} \quad (11.13)$$

Denk.(A3.8) lerdeki integraller, üçgenin ağırlık merkezi orijin olarak alındığından, yukarıdaki denklemlerde uç koordinatların, ağırlık merkezinden ölçülmesi zorunludur (alternatif olarak Denk. (A3.7) de kullanılabilir).

Herhangi bir üçgen için, Denk.(11.13) ile verilen $\{P_b\}$ nin sıfır-olmayan bileşenlerini, basit bir hesaplamayla,

$$Q_n = Q_k = Q_m = -\frac{\rho g t \Delta}{3}$$

olduğu ispatlanabilir. Bu ifade; elemanın bağlı olduğu düğümlerin herbiri üçgenin toplam ağırlığının üçte-birini taşıdığını göstermektedir. Deneyimlerden de beklediğimiz sonuç budur. Öte yandan, ataletten doğan kütle kuvvetlerinden, "kütle" matrisleri (kesim 14.1) doğar. Kütle matrislerinin fiziksel yorumu biraz daha karmaşıktır.

ARAYUZEY SÜREKLİLİĞİ

A_0 , A_1 ve A_2 ifadelerini Denk.(10.30) da yerine yazıp ve Şek. 11.2 ye dikkat ederek:

$$u_{oi} = u_n, \quad u_{bi} = u_k \quad \text{ve} \quad u_{ci} = u_m$$

gösterilebilir ki;

$$u(x, y) = a_1 u_n + a_2 u_k + a_3 u_m \quad (11.14a)$$

burada,

$$a_1 = \frac{1}{2\Delta} ((y_{bc}(x - x_c) - x_{bc}(y - y_c))$$

$$a_2 = \frac{1}{2\Delta} ((y_{ca}(x - x_a) - x_{ca}(y - y_a))$$

$$\text{ve} \quad a_3 = \frac{1}{2\Delta} ((y_{ab}(x - x_b) - x_{ab}(y - y_b))$$

benzer şekilde,

$$v(x, y) = a_1 v_n + a_2 v_k + a_3 v_m \quad (11.14b)$$

$u(x, y)$ ve $v(x, y)$ nin üçgenin herhangi bir kenarı boyunca değişimleri; sözkonusu kenarı tanımlayan düğümlerin yerdeğiştirmesine bağlı olduğunu Denk.(11.14) den gösterebiliriz. Bu aşağıdaki gibi yapılabilir: Örneğin, $k-m$ kenarını tanımlayan doğrunun denklemi;

$$y = \frac{1}{x_{bc}} (y_{bc}x + x_b y_c - x_c y_b)$$

dir. Denk.(11.14) lerde y ifadesi yazılırsa, $k-m$ boyunca yerdeğiştirmelerin aşağıdaki gibi değiştiği görülür:

$$u(x, y) = a_2 u_k + a_3 u_m$$

$$v(x, y) = a_2 v_k + a_3 v_m$$

Bu, herhangi bir kenar, iki komşu üçgen eleman arasındaki ortak sınırı tanımladığından, bu sınır boyunca yerdeğiştirmelerin sürekli olduğunu gösterir.

Denk.(10.30) ların türevi, $u(x, y)$ ve $v(x, y)$ nin eğimlerinin üçgenin her tarafında sabit olduğunu göstermektedir. Bununla birlikte; şekil değiştiren her bir elemanda farklı düzeyde zorlanmaya (eğim) sahip olduğundan, komşu elemanların arayüzeyleri boyunca eğimlerde bir süreksizlik olacaktır.

11.2 DİKDÖRTGEN ELEMAN

Düzlem dikdörtgen elemanda, uç kuvvetler ve uç yerdeğiştirmeler Şek. 11.3 de gösterildiği gibidir. Bu elemanın özelliklerinin incelenmesi, x' ve y' ile tanımlanan boyutsuz koordinatlar vasıtasıyla basitleşir. Bu koordinatlar;

$$x' = \frac{x}{h_x} \quad \text{ve} \quad y' = \frac{y}{h_y}$$

şeklinde tanımlanır. Elemanın dört ucu olduğundan, her bir yerdeğiştirme bileşeninin değişimi, dört sabitle tanımlanan bir polinom olarak (kesim 9.5a) kabul edilebilir. Özel olarak,

$$u(x', y') = A_0 + A_1 x' + A_2 y' + A_3 x' y' \quad (11.15a)$$

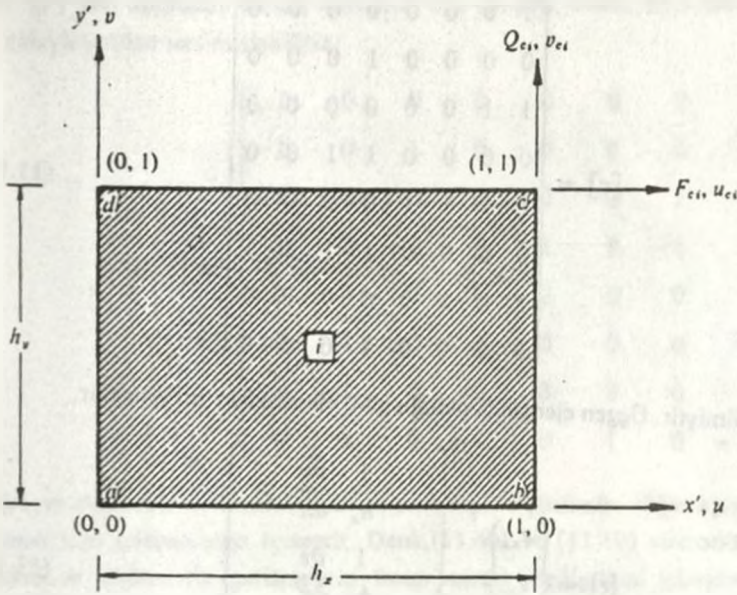
$$v(x', y') = A_4 + A_5 x' + A_6 y' + A_7 x' y' \quad (11.15b)$$

olsun. Bu denklemleri (11.1a) daki matris formunda yazarak,

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} u(x', y') \\ v(x', y') \end{Bmatrix}$$

$$\{A\} = \{A_0 \quad A_1 \quad \dots \quad A_7\}^T$$

elde edilir.



Şek. 11.3 Düzlem de dikdörtgen eleman; üniform kalınlık t (açıkça görülmesi için, yalnız c ucundaki yerdeğiştirmeler ve kuvvetler gösterilmiştir).

$$[M] = \begin{bmatrix} 1 & x' & y' & x'y' & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x' & y' & x'y' \end{bmatrix} \quad (11.16)$$

$x'y'$ terimi, yerdeğiştirmelerin kenarlar boyunca lineer değişimini sağlamasından dolayı, diğerlerine tercih edilmiş olduğuna dikkat edilmelidir. Açıkçası, her yerdeğiştirme, iki dereceli bir yüzeyle temsil edilmiş olup, $x' = \text{sabit}$ iken y' eksenini doğrultusunda, ve $y' = \text{sabit}$ iken x' eksenini doğrultusunda lineer olarak değişmektedir. Sonuçta, bitişik dikdörtgenlerin arayüzeyleri boyunca yerdeğiştirmelerin sürekliliği sağlanmaktadır. a, b, c ve d uçlarının sırasıyla boyutsuz koordinatlar $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ ve $(0, 1)$ e yerleştirilmiş olduğuna dikkat ederek, Denk.(11.5) den

$$u_{ai} = u(0, 0) = A_0$$

$$v_{ai} = v(0, 0) = A_4$$

$$u_{bi} = u(1, 0) = A_0 + A_1$$

vb. Şimdi, sekiz uç yerdeğiştirmesi Denk.(11.2) deki matris formunda ifade edilirse, bu durumda,

$$\{\delta\} = \{u_{oi} \ v_{oi} \ u_{bi} \ v_{bi} \ u_{ci} \ v_{ci} \ u_{di} \ v_{di}\}^T$$

olduğu görülebilir. Ve birincil matris $[c]$

$$[c] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (11.17)$$

şeklinde verilmiştir. Üçgen elemanda olduğu gibi, elemandaki zorlanmalar,

$$\{c\} = \begin{Bmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ e_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{h_x} \cdot \frac{\partial u}{\partial x'} \\ \frac{1}{h_y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y'} \\ \frac{1}{h_y} \cdot \frac{\partial u}{\partial y'} + \frac{1}{h_x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x'} \end{Bmatrix} \quad (11.18)$$

olur. Üçüncü ana matris $[N]$ yukarıdaki şemaya göre Denk.(11.5) lerin türevi alınarak ve bu türevin sonucunu Denk.(11.4b) deki matris formunda ifade ederek;

$$[N] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{h_x} & 0 & \frac{y'}{h_x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{h_y} & \frac{x'}{h_y} \\ 0 & 0 & \frac{1}{h_y} & \frac{x'}{h_y} & 0 & \frac{1}{h_x} & 0 & \frac{y'}{h_x} \end{bmatrix} \quad (11.19)$$

olduğu gösterilebilir. Böylece, Denk.(11.15) lerdeki kabul edilen yerdeğiştirmeler için üç ana matris açık formda tayin edilmiş olduğundan, kesim 9.8 deki formüllerle çeşitli eleman karakteristiklerini çıkarabiliriz. Örneğin, eleman direngelik matrisi Denk.(11.5) de

$$[K] = \int_0^1 \int_0^1 [N]^T [d] [N] dx' dy'$$

yerine yazarak bulunabilir. Burada yine, diyagonalı üzerinde sıfırlar bulunması dolayısıyla $[c]$ nin doğrudan tersini alamayız. Öte yandan, kesim 15.3 deki yöntemlerle, dolaylı yoldan tersini alabiliriz.

$$[c^{-1}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Dikdörtgen elemanlar kullanarak, düzlem problemleri çözümün diğer aşamalar, üçgen eleman için izlenen yola özdeştir. Denk.(11.4b) ve (11.19) elemanlardaki zorlanmaların ve dolayısıyla gerilmelerin lineer olarak değiştiğini göstermektedir. Bu yüzden, gerilme denge denklemleri (Denk. 8.21 ler) sağlanmaz.

ARAYÜZEY SÜREKLİLİĞİ

Denk.(11.5) lerden sabitleri elimine ederek ve a, b, c, d uçlarının sırasıyla n, k, m ve j düğümlerine bağlandığına dikkat ederek; Denk.(11.15) lerin açık formunun

$$u(x', y) = (1 - x')(1 - y)u_n + (x' - x'y)u_k + x'y'u_m + (y' - x'y)u_j \quad (11.20a)$$

and

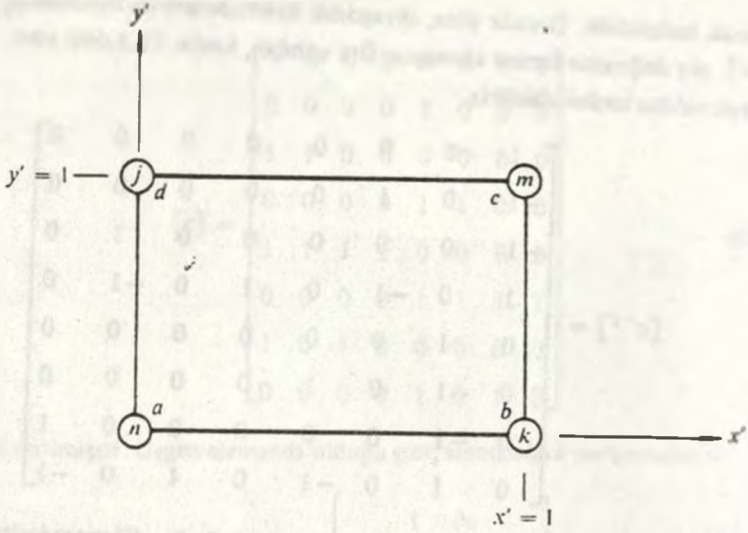
$$v(x', y) = (1 - x')(1 - y)v_n + (x' - x'y)v_k + x'y'v_m + (y' - x'y)v_j \quad (11.20b)$$

olduğunu gösterebiliriz. Örneğin; $x' = 1$ ile bu yerdeğişirmeler $k-m$ kenarı boyunca

$$u(1, y) = (1 - y)u_k + y'u_m$$

$$v(1, y) = (1 - y)v_k + y'v_m$$

şeklinde değişir. $k-m$, iki komşu dikdörtgen eleman arasında ortak bir arayüzeyleştir. Yerdeğişirmeler; sadece, k ve m düğümlerinin yerdeğişirmelerine bağlı olduğundan, Denk.(11.15) deki yerdeğişirmelerin, $k-m$ boyunca sürekli oldukları sonucuna ulaşırız. Bu yolla, Denk.(11.15) deki yerdeğişirmelerin, komşu dikdörtgen elemanlar arasındaki bütün arayüzeyler boyunca, sürekli olduğunu gösterebiliriz.



Şek. 11.4

Denk.(11.20) lerin x ve y ye göre türevlerinden,

$$h_x e_{xx} = (y' - 1)u_n + (1 - y')u_k + y'u_m - y'u_j$$

$$h_y e_{yy} = (x' - 1)v_n + (1 - x')v_k + x'v_m - x'v_j$$

elde edilir. Bu denklemlerden ve Şek. 11.4 den şunlar kolaylıkla ispatlanabilir;

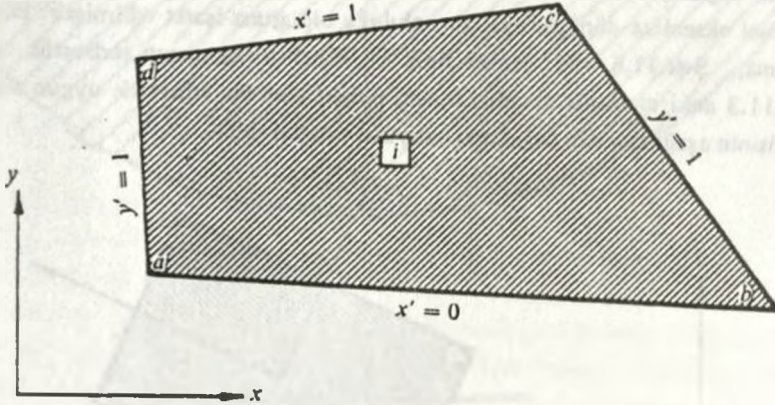
(a) e_{xx} , $y' = \text{sabit}$ çizgisi doğrultusunda; e_{yy} , $x' = \text{sabit}$ çizgisi doğrultusunda sabittir.

(b) e_{xx} , x' eksenine paralel arayüzeyler (bitişik dikdörtgen elemanlar arasında) boyunca süreklidir. Çünkü; e_{xx} , yalnız, sözkonusu arayüzeyleri tanımlayan düğümün yerdeğiştirmelerine bağlıdır. Aynı mantıkla, e_{yy} , y' eksenine paralel arayüzeyler boyunca süreklidir.

Öte yandan, bu yolla, e_{xy} nin herhangi bir arayüzeyi boyunca sürekli olmadığı ispatlanabilir.

11.3 DÖRTGEN ELEMAN

Şek. 11.5 deki dikdörtgen elemanın karakteristikleri, Denk.(11.15) lere benzer tarzda kabul edilen yerdeğiştirmelerden çıkarılabilir. Bununla birlikte, Denk. (11.15) lerdeki yerdeğiştirmeler; genel olarak, bu arayüzeyler koordinat eksenleriyle açı yaptığından komşu elemanlar arasındaki arayüzeyler boyunca, yerdeğiştirmelerin sürekliliğini garanti edemez. Kabul edilen yerdeğiştirmelerin, Şek.11.5 de gösterilen ortogonal olmayan ve boyutsuz koordinat sisteminde ifade edilmesiyle sürekliliği sağlanabilir.



Şek. 11.5 Düzlem dörtgen eleman; üniform kalınlık = t

yox ortogonal sistemdeki bir kütle, Jacobiyen dönüşümünü kullanarak, bu sisteme transform edilebilir. Tanımdan, bu durumda Jacobiyen determinanı $|J|$

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial x'} & \frac{\partial y}{\partial x'} \\ \frac{\partial x}{\partial y'} & \frac{\partial y}{\partial y'} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial x'} \cdot \frac{\partial y}{\partial y'} - \frac{\partial x}{\partial y'} \cdot \frac{\partial y}{\partial x'}$$

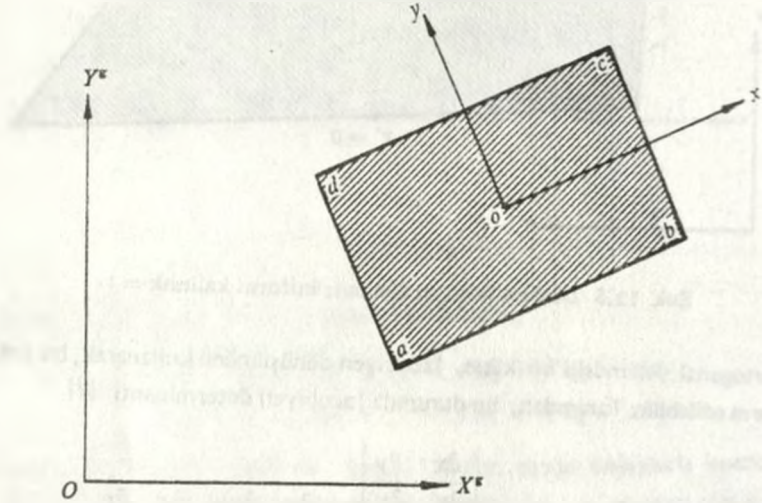
şimdi, dörtgen elemanın, eleman direngenlik matrisini, Denk.(11.6) yı ,

$$[K] = \int_0^1 \int_0^1 [N]^T [d][N] |J| dx' dy'$$

şeklinde transform ederek, Denk.(11.5) den tayin edebiliriz. Buradan; $[N]$ nin de Jacobiyen'le transform edildiği anlaşılmaktadır. Bu integrallerin paydalarında polinomlar bulunduğundan, dörtgen alan üzerinde kapalı form integrasyon genellikle çok zor veya imkansızdır. Buna karşılık, bunları hesaplamak için, nümerik integrasyon işlemleri kullanılabilir. Ne var ki, bunlar uzun bilgisayar programları³ gerektirmektedir. Bu elemanın, en cazip olmayan özelliği budur.

11.4 DÖNÜŞÜM MATRİSİ

Kesim 9.5 de verilen cismi temsil eden her bir elemanın "yerel" eksenleri birbirine paralel değilse; "yerel" kuvvetleri, yerdeğiştirmeleri ve eleman karakteristiklerini genel eksenlere dönüştürmek zorunluluğu olduğuna işaret edilmiştir. Böyle bir duruma, Şek.11.6 daki eleman tipik bir örnektir. Elemanın serbestlik derecesi Şek.11.3 deki elemanla aynıdır. Bölüm 6 daki yöntemi izleyerek uygun dönüşüm matrisinin aşağıdaki gibi olduğunu okuyucu ispatlayabilir.



Şek. 11.6 Tipik bir düzlem elemanın "yerel" (y o x) ve "genel" (Y* O X*) eksenleri.

$$[T_i] = \begin{bmatrix} t_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t_i \end{bmatrix} \quad (11.21)$$

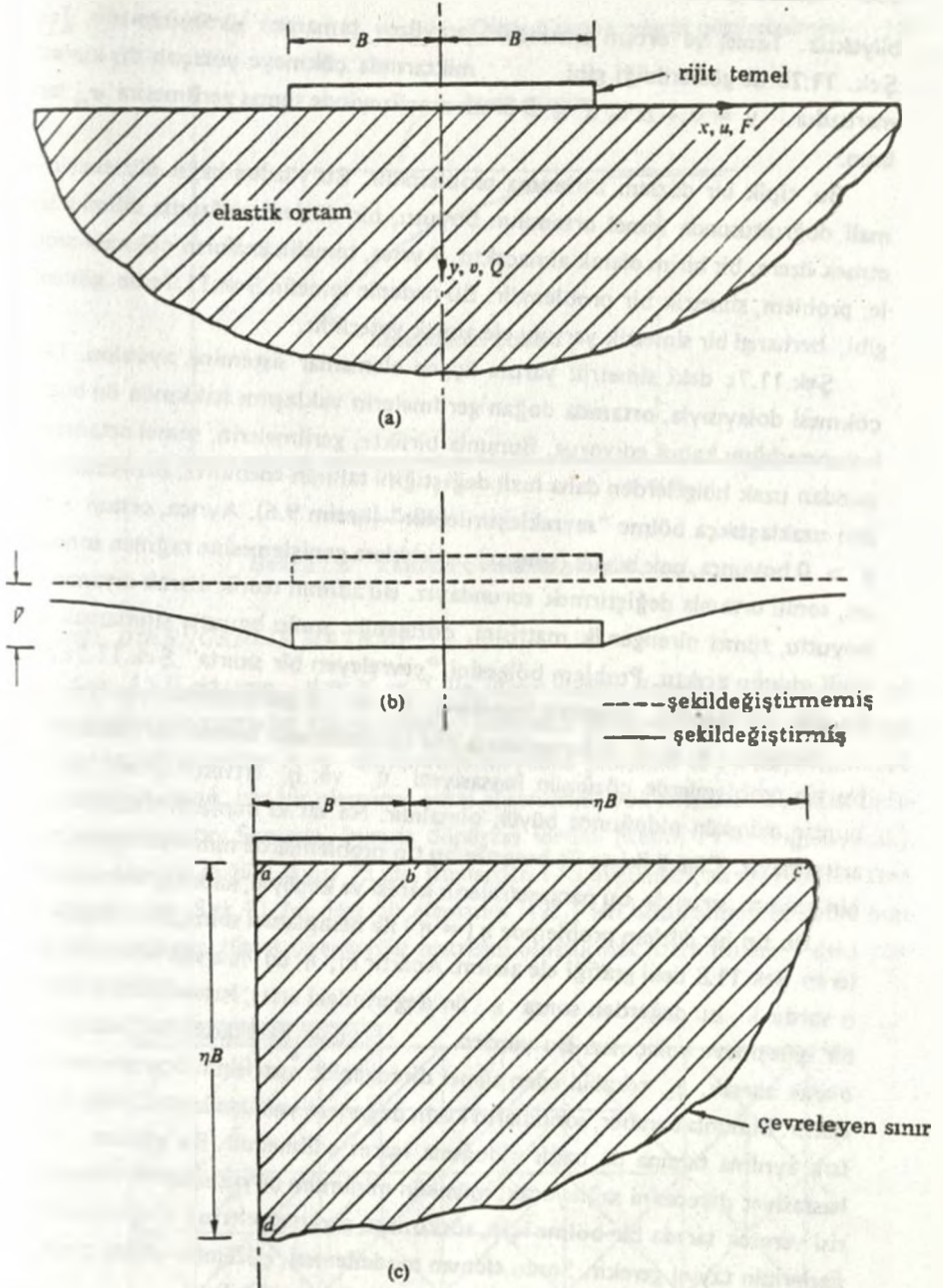
$$[t_i] = \begin{bmatrix} x^*x & x^*y \\ y^*x & y^*y \end{bmatrix}$$

Burada, x^*x , x^*y ve y^*x eksenleri arasındaki açının kosinüsünü tanımlamaktadır vb.

11.5 BİR ÖRNEK

Aşağıdaki problemi ele alalım:

Şek. 11.7a da gösterilen rijit temel, $y < 0$ doğrultusu hariç, her doğrultuda çok büyük boyutlara ulaşan izotropik, homojen ve elastik bir zeminde bulunmaktadır. Temelin, kağıt düzleminin normali doğrultusundaki boyutu, $2B$ ye göre çok



Şek. 11.7 (a) izotropik, homogen ve elastik bir zemin üzerinde bulunan rijit bir sürekli temel. (b) Temelin üniform dik çökmesi. (c) Sonsuz bir ortama sonlu bir yaklaşım.

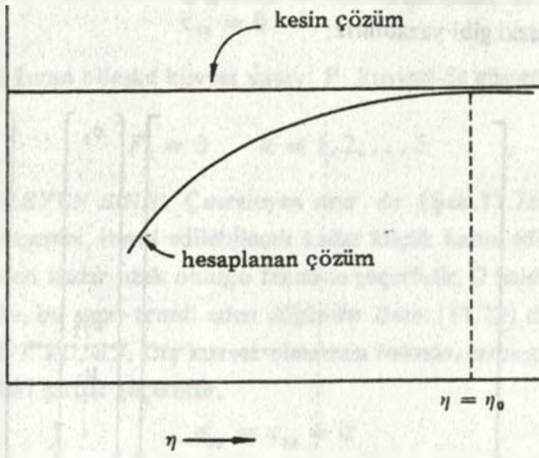
büyüktür. Temel ve ortam arasındaki arayüzey tamamen sürtünmesizdir. Temel, Şek. 11.7b de gösterildiği gibi, miktarında çökmeye yolaçan dış kuvvetlere maruzdur. $y = 0, -B \leq x \leq B$ ortak arayüzeyinde temas gerilmesini σ_{xx} tanımlasın.

Bu, tipik bir düzlem zorlanma problemi. Bu yüzden kağıt düzleminin normal doğrultusunda temel ortamının boyutu, bir düzlem zorlanma dilimini temsil etmek üzere, bir birim olarak alınacaktır. Ayrıca, temelün üniform çökmesi nedeniyle, problem, simetrik bir problemdir. Bu nedenle temelün Şek.11.7c de gösterildiği gibi, herhangi bir simetrik yarısını ele almak yeterlidir.

Şek.11.7c deki simetrik yarımı üçgen elemanlar sistemine ayıralım. Temelin çökmesi dolayısıyla, ortamda doğan gerilmelerin yaklaşımı hakkında ön bilgimizin bulunmadığını kabul ediyoruz. Bununla birlikte, gerilmelerin, temel ortamında, ortamdaki uzak bölgelerden daha hızlı değiştiğini tahmin edebiliriz. Bu yüzden, temelden uzaklaştıkça bölme "seyrekleştirilebilir" (kesim 9.6). Ayrıca, ortam $x > 0$ ve $y > 0$ boyunca, çok büyük (sonsuz) uzaklıklara genişlemesine rağmen sonsuz ortamı, sonlu ortamla değiştirmek zorundayız. Bu adımın teorik olarak ortamın sonsuz boyutlu, tümel direngenlik matrisini, çözülebilir sonlu boyutla sınırlamak için gerekli olduğu açıktır. Problem bölgesini "çevreleyen bir sınırla" Şek.11.7c de olduğu gibi sınırlayalım. Bölgenin boyutları η ve η' parametreleriyle tayin edilsin.

Burada, η ve η' değerlerinin tayini çözümlemede önemli bir husustur. Çünkü bu tip problemlerde çözümün hassasiyeti η ve η' arttıkça artar. İdeal olarak, bunlar mümkün olduğunca büyük olmalıdır. Ne var ki bunların değerlerini sonsuz artıramayız. Çünkü iki ve üç boyutlu bu tip problemlerde tümel direngenlik matrisinin boyutu, sırasıyla, bu parametrelerin karesi ve küpüyle, kabaca, orantılıdır.

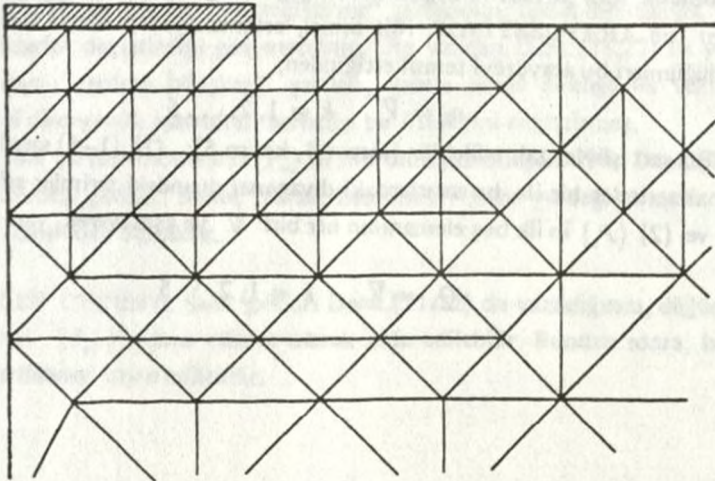
Bu tip bir düzlem problemde $\eta (= \eta')$ ile hesaplanan sonuçların değişimini gösteren Şek.11.8 deki grafiği ele alalım. Açığı ki, η ün η_0 a eşit olan belli bir değeri vardır ki, bu değerden sonra η ün değerindeki artış, hassasiyette dikkate değer bir iyileşmeye yolaçmaz. Bu yüzden η_0 daki hata düzeyini "kabul edilebilir" olarak alırsak, η_0 tekabül eden tümel direngenlik matrisinin boyutu optimum olacaktır. Bununla beraber, sonuçların kesin değerlere yaklaşmasının, bölgenin elemanlara ayrılma tarzına da bağlı olduğuna işaret edilmelidir. Bu yüzden, maksimum hassasiyet derecesini sağlayacak, mümkün minimum boyutlu tümel direngenlik matrisi verecek tarzda bir bölme için, sözkonusu parametrelerin (η gibi) optimum değerlerinin tayini gerekir. Sonlu eleman modellemesi, çözümleyicinin, çeşitli uygulamalarda geliştirdiği ustalık ve deneyimle daha iyi yapılabilir.



Şek. 11.8 Yapılan çözümün yakınsaması.

TÜMEL DİRENGENLİK MATRİSİ

Şek. 11.9 ortamın, $\eta = \eta' = 5$ ile, üçgen eleman sistemine bölünmüş bir hazırlık (gerekirse sonradan değiştirilebilir) bölmesini göstermektedir (bu problemde, bütün yerdeğiştirmeler $x-y$ düzleminde meydana gelmekte ve ayrıca, ortam izotropik olduğundan, her bir elemanın yerel eksenlerini, yo eksenlerine paralel olduğu varsayılacaktır. Sonuçta, burada dönüşüm sorunu (kesim 11.4) doğmayacak). Burada, toplam düğüm sayısı 72 dir. Bunlardan 1-5 düğümleri, ab arayüzeyini temsil etmektedir (Şek.11.7c). Her bir elemanın $[K_i]$ leri hesaplanmıştır. Sonra bunlar, tüm ortamın tümel direngenlik matrisini oluşturmak üzere Bölüm 3 deki yöntemle toplanır.



Şek.11.9

li Şek.11.7c deki şekil ortamının bir sonlu eleman parçası.

Bu arayüzdeki diğer şart x doğrultusundaki kuvvetler ve yerdeğiştirmelerle ilgilidir. Arayüzey tamamen sürtünmesiz olduğuna göre,

$$\tau_{xy} = 0 \quad (11.26)$$

dr. τ_{xy} yi doğuran bileşke kuvvet yatay F kuvveti ile gösterilmiştir. Böylece, Denk.(11.26),

$$F_k = 0 \quad k = 1, 2, \dots, 5 \quad (11.27)$$

(b) **ÇEVRELEYEN SINIR.** Çevreleyen sınır dc (Şek.11.7c) de, yerdeğiştirmenin her iki bileşenini, ihmal edilebilecek kadar küçük kabul ediyoruz. Bu kabul, dc temelden yeteri kadar uzak olduğu takdirde geçerlidir. O halde, kesim 5.1 deki yöntem 2 ye göre, bu sınırı temsil eden düğümler Denk.(11.22) den çıkarılacaktır.

(c) **SERBEST YÜZEY.** Dış kuvvet olmaması halinde, serbest yüzey bc (Şek. 11.7c) de aşağıdaki şartlar geçerlidir.

$$\sigma_{yy} = \tau_{xy} = 0 \quad (11.28)$$

σ_{yy} nin ve τ_{xy} nin bileşkelerini sırasıyla F ve Q nün temsil ettiğine dikkat ederek; serbest yüzeyde bulunan herhangi bir k düğümü için, Denk.(11.28) de,

$$F_k = Q_k = 0 \quad (11.29)$$

yazılarak, sınır şartının probleme dahil olabileceği açıktır.

(d) **SİMETRİDEN DOĞAN SINIR.** Ortamın yerdeğiştirmesi $x = 0$ a göre simetrik olduğundan, ortamda simetrik olan herhangi iki noktanın (herbiri bir simetrik yarım üzerinde) yatay yerdeğiştirmeleri, büyüklükçe eşit, fakat yönleri ters olacaktır. Sonuç olarak $x = 0$ da bulunan herhangi bir k düğümü için,

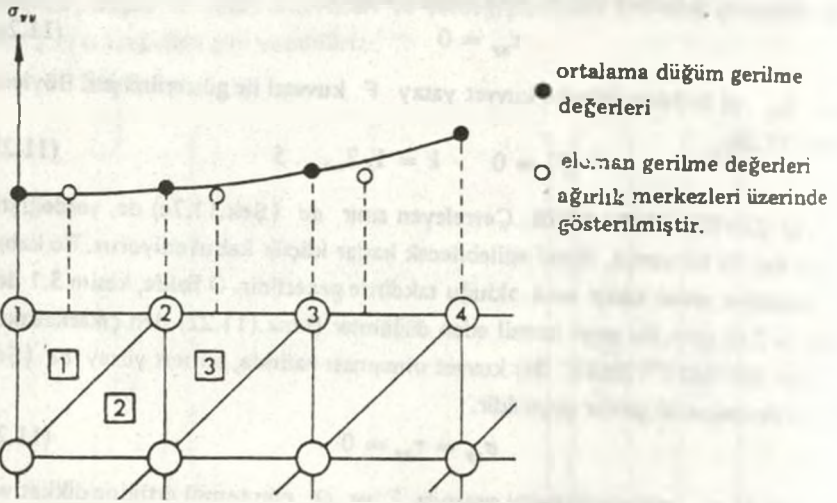
$$u_k = 0 \quad (11.30)$$

dır. Bu şart; Denk.(11.22) den bu düğümlere ait (bkz. metot 2, kesim 5.1) bütün satırları ve sütunları çıkararak, uygulanabilir.

Denk.(11.24) ile yazılan "yerdeğiştirme" şartlarının; tümel direngenlik matrisinin özelliklerini değiştirdiği gözlenecektir. Öte yandan Denk.(11.27) ile yazılan "kuvvet" veya "gerilme bileşkesi" şartları, yalnız tümel direngenlik vektörüne katılır, tümel direngenlik matrisinin herhangi bir özelliğini değiştirmez.

Bütün sınır şartları incelenirse $\{P_s\}$ in sıfır olmayan bileşenlerinin Denk.(11.24) den elde edileceği görülür. Sonuç olarak, hesaplanan bütün yerdeğiştirmeler ve gerilmeler ∇ cinsinden olacaktır.

PROBLEM ÇÖZÜMÜ. Sınır şartları Denk.(11.22) de yazıldığında, düğüm yerdeğiştirmeleri $\{\delta_i\}$ yegane çözüm olarak elde edilebilir. Bundan sonra, her bir elemanın gerilmeleri tayin edilebilir.



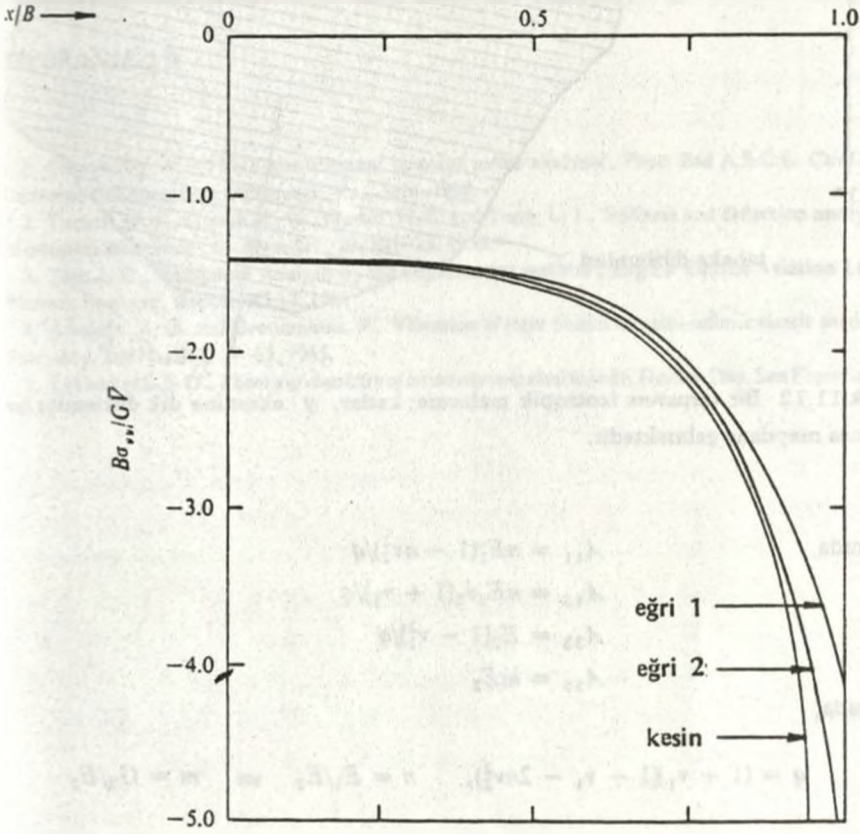
Şek. 11.10 Üçgen elemanda gerilme değişimi eğrisi.

Üçgen elemanlarda sabit gerilmeler bulunduğundan (kesim 11.1), herhangi bir gerilmenin değişimini göstermenin belli başlı yolu, Şek.11.10 da gösterildiği gibi, her bir elemanda, elemanın ağırlık merkezi üzerinde, o elemanın gerilme değerini çizmektir. Daha iyi sonuç veren bir başka yol, bir düğümde birleşen bütün elemanlardaki gerilme değerlerinin ortalamasını alarak, o düğümdeki gerilmeyi elde etmektir. Böylece, örneğin, 2 düğümünde (Şek.11.10) ordinat; 1, 2 ve 3 elemanlarının ortalama σ_{yy} değerini gösterir.

Şek.11.11 de 1 eğrisi; temas yüzeyi ab de σ_{yy} nin hesaplanan değişimini gösteriyor. σ_{yy} nin teorik değerinin sonsuz olduğu $x = B$ çevresi hariç, karşı gelen kesin çözümle⁴ uyumunun oldukça iyi olduğu görülmektedir. 2 eğrisi; $x = B$ civarında daha küçük bölmelerle geliştirilmiş bir çözümü temsil etmektedir. Burada, $\eta (= \eta')$ 10'a eşit alındı ve ortamı temsil eden toplam düğüm sayısı 113 idi. Eğer gerekiyorsa, temel yakınında özellikle $x = B$ deki kenarında daha küçük parçalar kullanarak, çözüm daha da iyileştirilebilir.

11.6 TRANSVERS İZOTROPİ

Şek.11.7a daki elastik ortamın homojen fakat elastik özelliklerinin dik doğrultular boyunca farklı olduğunu varsayalım. O takdirde, ortam "transvers izotropik" olarak nitelendirilecektir. Bu tür özellikler, genelde, tabakalı malzemelerde görülür.



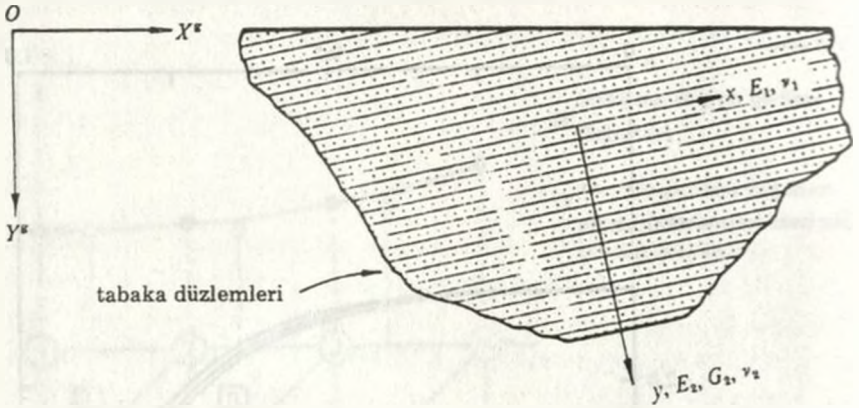
Şek.11.11 Sürtünmesiz kabul edilen, temas yüzeyindeki σ_{xx} nin değişimi; $\nu = 0.3$. G ortamın rijitlik modülü. Eğri 1 $\eta = \eta' = 5$; eğri 2, $\eta = \eta' = 10$.

Şek.11.12 deki düzlem dilimi düşünelim, burada tabakalar şekilde gösterildiği gibi meydana geliyor. Ele alınan malzemenin x doğrultusundaki elastik özellikleri E_1 ve ν_1 ; y eksenine* doğrultusunda elastik özellikleri E_2 , ν_2 ve G_2 olsun. O takdirde, Lekhnitskii⁵, ye göre elastisite matrisleri aşağıdaki gibi olacaktır.

DÜZLEM ZORLANMA

$$[d] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{13} & 0 \\ A_{13} & A_{33} & 0 \\ 0 & 0 & A_{55} \end{bmatrix} \quad (11.31)$$

* $E_1 = 2(1 + \nu_1)G_1$, Fakat $E_2 \neq 2(1 + \nu_2)G_2$.



Şek.11.12 Bir transvers izotropik malzeme; katlar, y eksenine dik düzlemler boyunca meydana gelmektedir.

Burada,

$$A_{11} = nE_2(1 - nv_2^2)/q$$

$$A_{13} = nE_2\nu_2(1 + \nu_1)/q$$

$$A_{33} = E_2(1 - \nu_1^2)/q$$

$$A_{55} = mE_2$$

burada,

$$q = (1 + \nu_1)(1 - \nu_1 - 2\nu_2^2), \quad n = E_1/E_2 \quad \text{ve} \quad m = G_2/E_2$$

DÜZLEM GERİLME

$[d]$ matrisi Denk.(11.31) ile elde edilir. Şimdi burada,

$$A_{11} = nE_2/q,$$

$$A_{13} = nE_2\nu_2/q,$$

$$A_{33} = E_2/q$$

$$A_{55} = mE_2$$

burada, $q = (1 - \nu_2^2)$.

Transvers izotropik problemlerde, malzeme davranışı; beş karşılıklı bağımsız elastik sabit; E_1 (or G_1), ν_1 , E_2 , G_2 ve ν_2 ile tamamen belirlenebilir. Bu problemler, sonlu elemanlarla; Bölüm 8 deki elastisite matrisleri yerine sadece yukarıdaki $[d]$ matrislerini kullanarak çözülebilir. Bununla birlikte; Şek.11.12 deki gibi, şayet transvers izotropi eksenleri, genel eksenlerle çakışmıyorsa, uygun dönüşümlerin (kesim 11.4) yapılması zorunludur.

REFERANSLAR

1. Clough, R. W., 'The Finite Element in plane stress analysis', Proc. 2nd A.S.C.E. Conf. in Electronic Computation, Pittsburgh, Pa., Sept. 1960.
2. Turner, M. J., Clough, R. W., Martin, H. C. and Topp, L. J., 'Stiffness and deflection analysis of complex structures', *J. Aero. Sci.*, 23, 805-23, 1956.
3. Taig, I. C., 'Structural Analysis by the displacement method', English Electric Aviation Ltd., Waton, England, Report SO 17, 1961.
4. Awojabi, A. O. and Grootenhuis, P., 'Vibration of rigid bodies on semi-infinite elastic media', *Proc. Roy. Soc. A*, 287, 27-63, 1965.
5. Lekhnitskii, S. G., *Theory of elasticity of an anisotropic elastic body*, Holden Day, San Francisco, 1963.

12 ÜÇ BOYUTLU GERİLME ANALIZI

Bölüm 8 deki denklemleri integre etmek suretiyle üç-boyutlu elastisite probleminin çözümü, kesim 8.11 de işaret edildiği gibi, aşağı-yukarı daima imkansız bir durumdur. Öte yandan sonlu eleman metodu bölgenin geometrisi ne denli karmaşık olursa olsun, bu problemlerin hassas ve etkin bir şekilde çözümlenmesinde kullanılabilir. Şimdi cisim, üç-boyutlu bir sonlu elemanlar sistemine ayrılır. Bu sistemin karakteristikleri de Bölüm 9 daki birim yerdeğiştirme teoreminden çıkarılabilir. Mümkün eleman şekillerinden, en yaygın kullanılanı dörtüzlü ve dikdörtgen prizmadır.

12.1 DÖRTYÜZLÜ ELEMAN

Şek.12.1 tipik bir dörtüzlü elemanın uç kuvvetlerini ve yerdeğiştirmelerini göstermektedir. Bu eleman dört uçlu olduğundan, yerdeğiştirmesinin her bir bileşeninin değişimi, aşağıdaki gibi dört sabitle* tanımlanan bir polinom olarak varsayabiliriz.

$$u(x, y, z) = A_0 + A_1x + A_2y + A_3z \quad (12.1a)$$

$$v(x, y, z) = A_4 + A_5x + A_6y + A_7z \quad (12.1b)$$

$$w(x, y, z) = A_8 + A_9x + A_{10}y + A_{11}z \quad (12.1c)$$

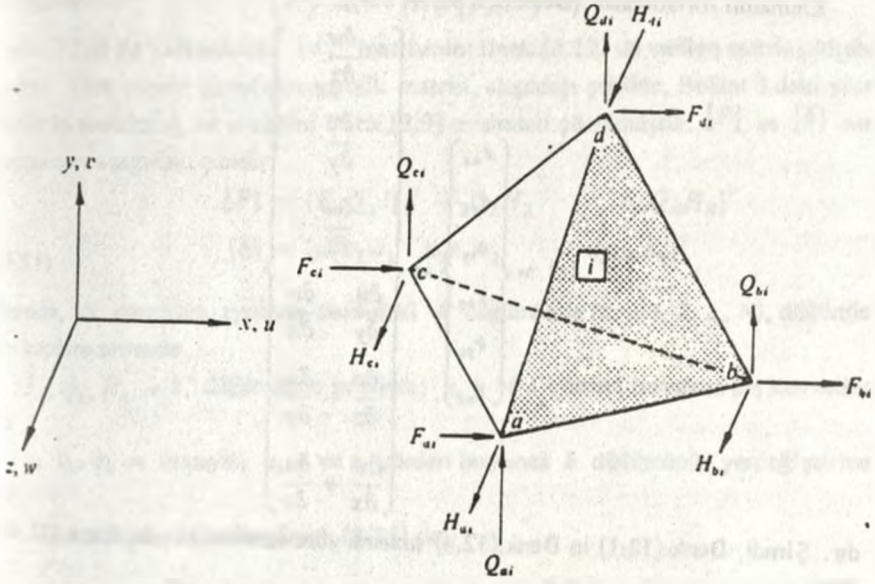
Burada, A_0, A_4 ve A_8 ;sırasıyla x, y ve z eksenleri boyunca rijit cisim ötelemelerini göstermektedir (kesim 9.8c). Bu denklemleri Denk.(11.1a) da,

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{Bmatrix}$$
$$\{A\} = \{A_0 \ A_1 \ \dots \ A_{10} \ A_{11}\}^T$$
$$[M] = \begin{bmatrix} 1 & x & y & z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & z \end{bmatrix} \quad (12.2)$$

uç yerdeğiştirmeler u_{oi}, v_{oi} vb. Denk.(12.1) lerde yerdeğiştirilerek elde edilir. Böylece,

$$u_{ri} = u(x_r, y_r, z_r) \quad v_{ri} = v(x_r, y_r, z_r)$$
$$w_{ri} = w(x_r, y_r, z_r)$$

* Bkz. kesim 9.5(a).



Şek.12.1 Tipik bir dörtyüzlü eleman (yalnız uç kuvvetler gösterilmiştir).

Burada, $r = a, b, c, d$ ve x_r, y_r ve z_r ; r ucunun koordinatlarıdır. Genel olarak bu yerdeğiştirmeleri aşağıdaki matris formunda yazabiliriz:

$$\{\delta\} = [c]\{A\} \quad (12.3)$$

Burada,

$$\{\delta\} = \{u_{a1} \ v_{a1} \ w_{a1} \ \dots \ u_{d1} \ v_{d1} \ w_{d1}\}^T, \text{ and}$$

$$[c] = \begin{bmatrix} 1 & x_a & y_a & z_a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_a & y_a & z_a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_a & y_a & z_a & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & x_b & y_b & z_b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_b & y_b & z_b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_b & y_b & z_b & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & x_c & y_c & z_c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_c & y_c & z_c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_c & y_c & z_c & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & x_d & y_d & z_d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_d & y_d & z_d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_d & y_d & z_d & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Elemanın zorlanmaları (Denk.8.1, 8.3 ve 8.4),

$$\{e\} = \begin{Bmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ e_{zz} \\ e_{xy} \\ e_{yz} \\ e_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad (12.4)$$

dir. Şimdi, Denk.(12.1) in Denk.(12.4) sırasına göre türevini alarak, Denk.(11.4b) den;

$$[N] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olduğu gösterilebilir. $[c]$, $[M]$ ve $[N]$ birincil matrislerinin açık formu böylece tanımlanmış olduğundan, şimdi kesim 9.8 deki formüllerden; elemanın çeşitli karakteristikleri çıkarılabilir. Örneğin, eleman direngenlik matrisi,

$$[K_i] = [c^{-1}]^T [K] [c^{-1}] \quad (12.5)$$

ile elde edilir. Burada, $[K] = \int [N]^T [d] [N] dx dy dz$ (12.6)

dir. İntegral, elemanın tüm hacminde alınmıştır. $[N]$ nin kullanılan koordinatlarda bağımsız olduğuna dikkat ederek, elemanın bütün hacminde integral alınarak, aşağıdaki integralden,

$$\int dx dy dz = V = \text{dörtüzlünün hacmi}$$

yazılabilir.

$$[K] = V \cdot [N]^T [d] [N]$$

Denk.(12.6) da kullanılacak $[d]$ matrisinin; Denk.(8.12) de verilen matris olduğu açıktır. Tüm cismin tümel direngenlik matrisi, alışıldığı şekilde, Bölüm 3 deki yöntemlerle toplanmış, ve problem Denk.(3.9) cinsinden çözülmüştür. $\{P\}$ ve $\{\delta\}$ nin toplamları aşağıdaki gibidir:

$$\{P\} = \{F_1 Q_1 H_1 \quad F_2 Q_2 H_2 \quad \cdots \quad F_N Q_N H_N\}^T$$

$$\{\delta\} = \{u_1 v_1 w_1 \quad u_2 v_2 w_2 \quad \cdots \quad u_N v_N w_N\}^T$$

Burada, N ; parçalara ayrılmış cisimdeki k düğümünde ($k = 1, 2, \dots, N$), düğümlerin toplam sayısıdır.

$F_k, Q_k, H_k = k$ düğümünde sırasıyla; x, y ve z yönleri boyunca dış kuvvetler, ve

$u_k, v_k, w_k =$ sırasıyla, x, y ve z yönleri boyunca k düğümünün yerdeğiştirmeleri.

Elemandaki gerilmeler; Denk.(8.15) de,

$$\{c\} = [N][c^{-1}] \begin{Bmatrix} u_a \\ v_a \\ w_a \\ u_b \\ v_b \\ w_b \\ u_c \\ v_c \\ w_c \\ u_j \\ v_j \\ w_j \end{Bmatrix}$$

yerleştirildiğinde elde edilecektir. Burada, n, k, m ve j nin, sırasıyla a, b, c ve d uçlarına bağlandığı varsayılmıştır.

$[N]$, konumun fonksiyonu olmadığından, zorlanmalar ve bunun sonucu olarak elemandaki gerilmeler bütün hacimde sabit kalır. Sonuç olarak; gerilme denge denklemleri özdeş olarak sağlanır. Aynı zamanda, komşu elemanlar arasındaki arayüzeylerde; Denk.(12.1) de varsayılan yerdeğiştirmelerin sürekli olduğunu Bölüm 11 deki işlemi izleyerek gösterebiliriz. Bununla birlikte, her bir elemanın farklı

zorlanması olduğundan, dik yüzeyler boyunca eğimlerde bir süreksizlik vardır. Dört-yüzlünün bu özellikleri, gerçekte, kesim 11.1 deki üçgen elemanın özelliklerine özdeşir.

Eğer kütle kuvveti ivmeleri; tüm eleman hacminde sabit veya sabit olduğu varsayılırsa, kesim 11.1 deki işlemi izleyerek; toplam kütle kuvvetinin dörtte biri; elemana bağlı her bir düğüm tarafından taşınacaktır. Bu basit sonucun, dikkate değer pratik bir önemi vardır. Ve

$$\int x \, dx \, dy \, dz, \quad \int y \, dx \, dy \, dz \quad \text{and} \quad \int z \, dx \, dy \, dz$$

integralleri; elemanın merkezini koordinatların orijini olarak almak şartıyla, tüm eleman hacminde alındığında sıfır olduğuna dikkat ederek, çıkarılabilir.

12.2 DİKDÖRTGEN PİRİZMA ELEMAN

Şek.12.2 deki dikdörtgen pirizma elemanın sekiz ucu olduğundan, elemandaki yerdeğiştirme bileşenlerinin her biri, sekiz sabitle* tanımlanan bir polinom olarak değişeceğini varsayabiliriz. Böylece,

$$u(x', y', z') = A_0 + A_1x' + A_2y' + A_3z' + A_4x'y' + A_5y'z' + A_6z'x' + A_7x'y'z' \quad (12.7a)$$

$$v(x', y', z') = A_8 + A_9x' + A_{10}y' + A_{11}z' + A_{12}x'y' + A_{13}y'z' + A_{14}z'x' + A_{15}x'y'z' \quad (12.7b)$$

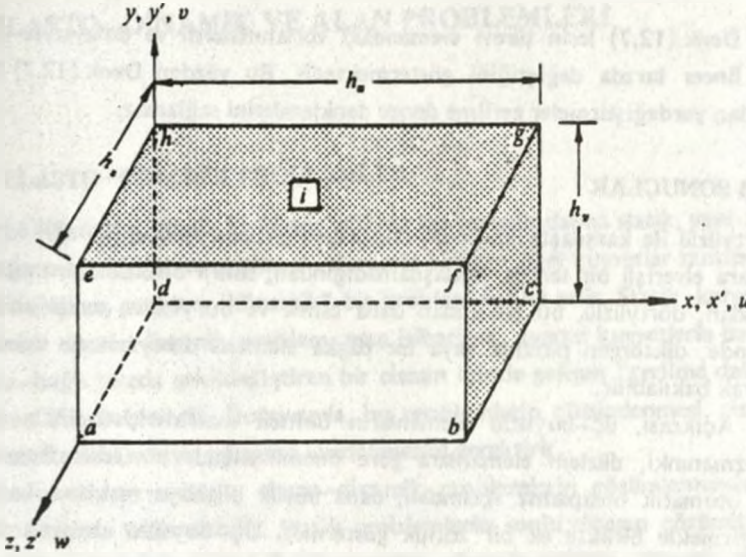
$$w(x', y', z') = A_{16} + A_{17}x' + A_{18}y' + A_{19}z' + A_{20}x'y' + A_{21}y'z' + A_{22}z'x' + A_{23}x'y'z' \quad (12.7c)$$

olsun. Burada boyutsuz koordinatlar $0x'y'z'$ ile $0xyz$ sistemi aşağıdaki şekilde bağlantılıdır.

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} h_x & 0 & 0 \\ 0 & h_y & 0 \\ 0 & 0 & h_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{Bmatrix} \quad (12.8)$$

Burada tekrar, yerdeğiştirmeler için eleman yüzeylerinde lineer olarak değişecek şekilde Denk.(12.7) deki fonksiyonları seçtik. Elemanın herhangi bir yüzeyindeki yerdeğiştirme, sözkonusu yüzeyi tanımlayan düğümlerin (veya uçların) yerdeğiştirmelerine bağımlı olduğu gösterilebildiği takdirde; yerdeğiştirmeler, bitişik dikdörtgen

* Kesim 9.5(a).



Şek.12.2 Dikdörtgen prizma ("tuğla") eleman.

prizma elemanlar arasındaki arayüzeyleri boyunca süreklidir. Bu elemanlarda; açıkça,

$$[M] = \begin{bmatrix} L & 0 & 0 \\ 0 & L & 0 \\ 0 & 0 & L \end{bmatrix}$$

burada, $\{L\} = \{1 \ x' \ y' \ z' \ y'z' \ z'x' \ z'x' \ x'y'z'\}$

Şimdi; $[c]$ matrisi,

$$u_{ri} = u(x'_r, y'_r, z'_r)$$

$$v_{ri} = v(x'_r, y'_r, z'_r)$$

$$w_{ri} = w(x'_r, y'_r, z'_r)$$

ifadelerine göre, Denk.(12.7) lerden uç yerdeğişiklikler hesaplanarak tayin edilmiştir. Burada, $r = a, b, c, d, e, f, g, h$ x'_r, y'_r ve z'_r ; r ucunun boyutsuz koordinatlarıdır. Bu durumda, $[c]$, 24x24 lük bir matris olacaktır.

$[N]$ matrisi, Denk.(12.7) lerin Denk.(12.4) sırasına göre birinci türevini alarak, ve sonra sonucun Denk.(11.4b) terimleri cinsinden ifade ederek bulunabilecektir (zorlanmaların Denk.12.8 e göre dönüştürülebileceği gözönünde tutulmalıdır; yerdeğişiklikleri tanımlamak üzere $oxyz$ koordinatları kullanılsaydı bu dönüşüm gerekmezdi). Birincil matrisleri açıkça belirlendikten sonra çözümün kalan adımları dörtüzlü elemanın ki ile tamamen aynıdır.

Denk.(12.7) lerin türevi elemandaki zorlanmaların ve dolayısıyla gerilmelerin lineer tarzda değiştiğini göstermektedir. Bu yüzden Denk.(12.7) lerde varsayılan yerdeğiştirmeler gerilme denge denklemlerini sağlamaz.

12.3 SONUÇLAR

Dörtüzlü ile karşılaştırıldığında; diktörtgen prizma eleman ile, eğri ve karışık sınırlara elverişli bir tarzda yaklaşmadığından, sınırlı bir kullanıma sahiptir. Öteyandan, dörtüzlü, bu bakımdan daha esnek ve bu yüzden tercih edilir. Gerekliğinde, diktörtgen prizma veya bir başka elemana dörtüzlünün kombinasyonu olarak bakılabilir.

Açıkçası, üç-boyutlu elemanların birincil matrisleri, özellikle diktörtgen prizmanınki, düzlem elemanlara göre önemli ölçüde büyüktür. Bununla birlikte, otomatik hesaplama açısından, daha büyük bilgisayar saklama kapasitesi gerektirmekle birlikte ek bir zorluk göstermez. Üç-boyutlu elemanlarda, gerçekte iki-boyutlu elemanlarda olduğu gibi, $[c]$ matrisinin diyagonalinde, genellikle, sıfırlar bulunduğundan doğrudan tersi alınamaz. Bu zorluk, kesim 15.3 de verilen yöntemlerle aşılabılır.

13 ELASTO—DİNAMİK VE ALAN PROBLEMLERİ

13.1 ELASTO—DİNAMİK PROBLEMLER

Önceki bölümlerde, elastik bir cisme etkiyen kuvvetlerin daima statik, yani zamandan bağımsız, olduğu varsayılmıştı. Bununla birlikte, eğer kuvvetler zamana bağlı olarak değişirse, problem "dinamik" bir problem haline gelir. Statik karşılığının tersine bir elasto—dinamik problem, esas itibarıyla, uyarıcı kuvvetlerle başlayıp, zamana—bağlı tarzda şekil değiştiren bir cismin içinde gelişen "gerilme dalgaları" nı içeren bir problemdir. Dolayısıyla, bu problemlerin çözümlenmesi, cisimdeki dalga hareketinin ortaya çıkışının incelenmesini gerektirir.

Sonlu eleman metodu, elasto—dinamik problemlerin çözümlenmesinde etkin bir biçimde kullanılabilir. Statik problemlerin sonlu eleman çözümü, yalnız dirençlilik matrisinin tayini ile karakterize olmakla birlikte, dinamik problem buna ek olarak, aşağıdaki matrislerin tayinini de gerektirmektedir.

"KÜTLE" MATRİSİ. Cismin "ataleti", onun titreşime ataletsel direncidir. "Parçalanmış" formda, cismin toplam ataleti, "tümel kütle matrisi" adı verilen matrisle temsil edilecektir.

"SÖNÜMLEME" MATRİSİ. "Sönümlü" titreşimde, direnç, enerji kaybıyla sonuçlanan, cismin iç sürtünmesiyle oluşur. Bu tarzda, enerji kaybının miktarı ve niteliği, cismin malzemesinin sönümlenme özellikleriyle belirlenir. Cismin toplam sönümlenmesi, "tümel sönümlenme matrisi" ile temsil edilecektir. İç sürtünmeye ek olarak, sonsuz bölgesi problemlerde meydana gelen "yayılan sönümlenme" adı verilen, yolla da enerji kaybolur. Bu, ayrıntılı olarak kesim 13.2.8 de tartışılacaktır.

Elasto—dinamik problemlerle, bilimsel ve mühendislik alanlarında sıklıkla karşılaşılır. Tasarım açısından, bu problemlerin hassas bir çözüm gerekliliği üzerinde fazla durulmayabilir. Bu kesimde, elasto—dinamiğin temelleri bakımından sonlu elemanların uygulamasını ele alacağız.

13.1.1 ELEMEN "KÜTLE" MATRİSİ

Denk.(8.21a),

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \rho(X + X_i) = 0 \quad (13.1.1)$$

şeklinde yazılabilir. Burada,

$$\bar{X}_i = -\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (13.1.2a)$$

dır. Burada t zamanı göstermektedir.

Denk.(13.1.1) e dikkat edilirse, \bar{X}_i , ye x doğrultusunda "dinamik kütle kuvveti ivmesi" olarak gözönüne alınırsa; $\rho(\bar{X} + \bar{X}_s)$ nin, x doğrultusundaki statik ve dinamik kütle kuvvetlerinin (birim hacimde) toplamını temsil ettiği açıktır. Denk.(8.21b) ve (8.21c) de, sırasıyla,

$$\bar{Y}_i = -\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (13.1.2b)$$

$$\bar{Z}_i = -\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (13.1.2c)$$

yazılırsa, ve bu denklemleri Denk.(13.1.1) formunda ifade edersek, aşağıdaki sonuçlara ulaşabiliriz:

Eğer, problemin dinamik niteliği, "dinamik kütle kuvvetleri ivmeleri" \bar{X}_i , \bar{Y}_i ve \bar{Z}_i ile temsil edilirse, cismin dinamik tepkisi (\bar{X} , \bar{Y} ve \bar{Z} den doğan cismin statik tepkisindeki artma) cismin \bar{X}_i , \bar{Y}_i ve \bar{Z}_i den doğan dinamik kütle kuvvetlerinin etkisinde olduğunu tasavvur ederek hesaplanabilir.

Denk.(9.19) u çıkarmak için kullanılan işlemi izleyerek, herhangi bir i sonlu elemanın "dinamik kuvvet vektörü" nün genel ifadesinin,

$$\{P_b\}_{\text{Dinamik}} = [c^{-1}]^T \int_V \rho [M]^T \begin{Bmatrix} \bar{X}_i \\ \bar{Y}_i \\ \bar{Z}_i \end{Bmatrix} dv \quad (13.1.3)$$

olduğunu gösterebiliriz. Cismin bir titreşiminde; u , v , w , \bar{X}_i , \bar{Y}_i , \bar{Z}_i ve $\{P_b\}_{\text{Dinamik}}$ uzayın hem de zamanın fonksiyonlarıdır. Bu büyüklükler "basit harmonik" tarzında değişsin, öyle ki aşağıdaki bağıntılar geçerli olsun:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{Bmatrix} \sin(\omega t) \quad (13.1.4)$$

$$\{P_b\}_{\text{Dinamik}} = \{P_b\} \sin(\omega t) \quad (13.1.5)$$

Burada, ω , titreşimin "dairesel frekansı" dır; ve u_0 , v_0 , w_0 , sırasıyla u , v , w nin "sürekli durum genlikleri"; ve $\{P_b\}$, $\{P_b\}_{\text{Dinamik}}$ dir.

* Genel olarak; bu fiziksel olarak geçerli bir varsayımdır.

Denk.(13.1.2)–(13.1.5) den,

$$\{P_B\} = \omega^2 [c^{-1}]^T \int_V \rho [M]^T \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{Bmatrix} dv \quad (13.1.6)$$

olduğu kolayca gösterilebilir. Fakat, dinamik problem halinde tanımdan,

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{Bmatrix} = [M]\{A\} = [M][c^{-1}]\{\delta\} \quad (13.1.7)$$

bağıntısı yazılabilir. Ve sonuçta,

$$\{P_B\} = \omega^2 [c^{-1}]^T \int_V \rho [M]^T [M] dv [c^{-1}]\{\delta\} \quad (13.1.8)$$

$$\{P_B\} = \omega^2 [m_i]\{\delta\} \quad (13.1.9)$$

burada,

$$[m_i] = [c^{-1}]^T \int_V \rho [M]^T [M] dv [c^{-1}] \quad (13.1.10)$$

$[m_i]$ ye, i elemanın "kütle" matrisi adı verilir. Denk.(13.1.10) un yapısı, $[K_i]$ nin $[m_i]$ nin boyutuna eşit bir kare matris. olduğu görülebilir. $[K_i]$ ve $[m_i]$ in kabul edilen aynı bir yerdeğiştirme fonksiyonundan çıkarıldığına dikkat edilmelidir. Bu yüzden, $[m_i]$ nin, $[K_i]$ ile "uygun" olduğu söylenir ve i elemanın "uygun kütle matrisi"¹ olarak da bilinir.

Çözümlemeyi basitleştirmek için, tıpkı $[K_i]$ nin alt matrisler $S(i, J, K)$ lara ayrılmasında olduğu gibi, $[m_i]$ de $\bar{m}(i, J, K)$ alt matrislerine ayrılacaktır. Yani, eğer i elemanın n ucu varsa; $[m_i]$, toplam n^2 tane eşit boyutlu kare matrislere ayrılacak ve bunlar $\bar{m}(i, J, K)$ ile gösterilecektir.

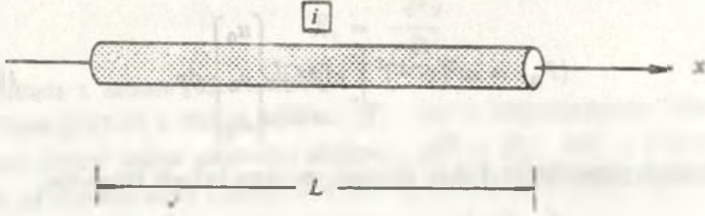
Gelecek örnekler, Denk.(13.1.10) un uygulamasını göstermektedir.

ÖRNEK 1. Şek.13.1 de gösterilen çubuk elemanı ele alalım. Eleman bir tek, eksenel, serbestlik derecelidir. O halde Denk.(9.20) de olduğu gibi;

$$U = u_0(x) = A_0 + A_1 x \\ = \{1 \ x\} \{A\}$$

yazabiliriz. Burada, $\{A\} = \{A_0 \ A_1\}^T$ dir. Sonuçta, Denk.(13.1.7) den,

$$\{M\} = \{1 \ x\} \quad (13.1.11)$$

Şek.13.1 Kesiti a olan üniform bir çubuk eleman.

yazılır. Yine, Denk.(9.28) den,

$$[c^{-1}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \quad (13.1.12)$$

elde edilir. Denk.(13.1.11) den,

$$[X] = \int_V \rho \{M\}^T \{M\} dv = \rho a \int_0^L \{1 \quad x\}^T \{1 \quad x\} dx = \rho a \begin{bmatrix} L & \frac{L^2}{2} \\ \frac{L^2}{2} & \frac{L^3}{3} \end{bmatrix}$$

olduğu gösterilebilir. Denk.(13.1.12) deki $[c^{-1}]$ i

$$[m_i] = [c^{-1}]^T [X] [c^{-1}] \quad (13.1.13)$$

de kullanarak, ve Denk.(13.1.13) deki çarpımı oluşturarak çubuk elemanın kütle matrisinin,

$$[m_i] = \gamma \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad (13.1.14)$$

olduğu gösterilebilir. Burada $\gamma = \rho a L$ elemanın toplam kütlesidir.

ÖRNEK 2. İkinci olarak, kesim 9.7 de tartışılan kiriş elemanı ele alalım, Denk.(9.32) yi,

$$U = v_0(x) = \{1 \quad x \quad x^2 \quad x^3\} \{A\}$$

şeklinde yazalım. Burada $\{A\} = \{A_0 \quad A_1 \quad A_2 \quad A_3\}^T$ dir. Tanımdan Denk. (13.1.7),

$$\{M\} = \{1 \quad x \quad x^2 \quad x^3\} \quad (13.1.15)$$

dr. Sonuç olarak, uygunluk için $h_1 = L$ yazarak,

$$\begin{aligned}
 [X] &= \int_V \rho \{M\}^T \{M\} dv = \rho a \int_0^L \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \end{Bmatrix} \{1 \ x \ x^2 \ x^3\} dx \\
 &= \rho a \int_0^L \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & \\ x & x^2 & \text{Simetrik} & & & & & & \\ x^2 & x^3 & x^4 & & & & & & \\ x^3 & x^4 & x^5 & x^6 & & & & & \end{bmatrix} dx \\
 &= \rho a \begin{bmatrix} L & & & & & & & & \\ \frac{L^2}{2} & \frac{L^3}{3} & \text{Simetrik} & & & & & & \\ \frac{L^3}{3} & \frac{L^4}{4} & \frac{L^5}{5} & & & & & & \\ \frac{L^4}{4} & \frac{L^5}{5} & \frac{L^6}{6} & \frac{L^7}{7} & & & & & \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

olur. Ve sonra, Denk.(9.35) deki $[c^{-1}]$ ve yukarıdaki $[X]$ i Denk.(13.1.13) de yerlerine yazarak, çarpım işlemi sonucu giriş elemanı için;

$$[m_i] = \frac{\gamma}{420} \begin{bmatrix} 156 & & & & & & & & \\ & 22L & & 4L^2 & & & & & \text{Simetrik} \\ & & & & & & & & \\ & 54 & & 13L & & 156 & & & \\ & -13L & & -3L^2 & & -22L & & 4L^2 & \end{bmatrix} \quad (13.1.16)$$

olduğunu gösterebiliriz. Burada, $\gamma = \rho a L$ elemanın toplam kütesidir. Açıkçası $[m_i]$ nin alt matrisleri,

$$\bar{m}(i, 1, 1) = \frac{\gamma}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L \\ 22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (13.1.17a)$$

$$\bar{m}(i, 1, 2) = \frac{\gamma}{420} \begin{bmatrix} 54 & -13L \\ 13L & -3L^2 \end{bmatrix} \quad (13.1.17b)$$

$$\bar{m}(i, 2, 2) = \frac{\gamma}{420} \begin{bmatrix} 156 & -22L \\ -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (13.1.17c)$$

dır. Ve elbette $\bar{m}(i, 1, 2)$ ve $\bar{m}(i, 2, 1)$, birbirinin transpozeleridir.

ÖRNEK 3. Son bir örnek olarak, Şek.13.2 de gösterilen düzlem gerilme elemanının kütle matrisini çıkaralım. Denk.(11.1b) deki $[M]$ i kullanarak ve Denk. (A3.8) lerdeki integralleri kullanarak,

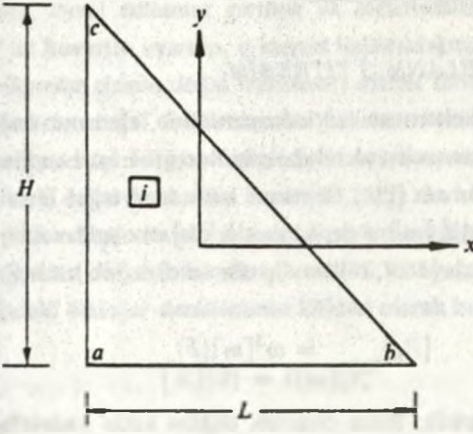
$$[X] = \int_V \rho [M]^T [M] dv = \rho p \int_{\Delta} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x & 0 \\ y & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & x \\ 0 & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} dx dy$$

$$= \rho p \int_{\Delta} \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ x & x^2 & & & & \\ & & \text{Simetrik} & & & \\ y & xy & y^2 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & x & x^2 & \\ 0 & 0 & 0 & y & xy & y^2 \end{bmatrix} dx dy$$

$$= \rho p \Delta \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ 0 & \frac{L^2}{18} & & & & \\ & & \text{Simetrik} & & & \\ 0 & -\frac{LH}{36} & \frac{H^2}{18} & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{L^2}{18} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{LH}{36} & \frac{H^2}{18} \end{bmatrix}$$

olduğunu gösterebiliriz. Bu durumda, Şek.13.2 den aşağıdaki ifadeler yazılabilir:

$$x_a = -\frac{L}{3}, \quad x_b = \frac{2L}{3}, \quad x_c = -\frac{L}{3}, \quad y_a = -\frac{H}{3}, \quad y_b = -\frac{H}{3} \quad \text{ve} \quad y_c = \frac{2H}{3}$$



Şek.13.2 p sabit kalınlıklı üçgen düzlem eleman (eksenlerin orijini ağırlık merkezindedir).

Bu koordinatları Tablo 11.1 de yerine yazarak,

$$[c^{-1}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{L} & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{H} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{H} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{L} & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{H} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{H} \end{bmatrix}$$

elde edilir. Şimdi Denk.(13.1.13) deki matris çarpımını yaparak şu kolayca gösterilebilir:

$$[m_i] = \frac{\gamma}{3} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & & & & & \\ 0 & \frac{1}{3} & \text{Simetrik} & & & \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & & & \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & & \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad (13.1.18)$$

Burada, $\gamma = \rho p \Delta$ elemanın toplam kütesidir. Denk.(11.1b) de tanımlanan $[M]$ ile, Denk.(13.1.18) deki $[m_i]$ nin herhangi şekilli p kalınlıklı bir üçgen eleman için elde edilebileceği kanıtlanabilir.

13.1.2 SÖNUMSUZ ZORLANMIŞ TİTREŞİM

Kesim 9.8 de bir sonlu elemanın kütle kuvvetlerine, elemanın bağlı olduğu düğümlere uygulanan dış kuvvetler olarak bakılabileceğine işaret edilmişti. Sonuçta bölünmüş cismin her elemanı için, elemanın kütle kuvvetleri Denk.(13.1.8) den hesaplanabilir ve uygun düğümlere dış kuvvetler olarak uygulanabilir. Daha sonra, Bölüm 3 deki yöntemi izleyerek, bölünmüş cismin dinamik kütle kuvveti—yerdeğiştirme bağıntısının,

$$\{P_B\}_{Tümel} = \omega^2 [m] \{\delta\} \quad (13.1.19)$$

olduğu gösterilebilir. Burada, bütün dinamik düğüm kütle kuvvetlerini kapsayan $\{P_B\}_{Tümel}$ vektörüne bir dış kuvvet olarak bakılabilir. $[m]$ matrisine bölünmüş cismin "tümel kütle matrisi" adı verilir. Çünkü tıpkı $S(i, J, K)$ lardan $[K]$ nin elde edilmesinde olduğu gibi, $[m]$ in, $\bar{m}(i, J, K)$ ların toplamı olduğu Bölüm 3 den kolayca tanımlanabilir.

Şimdi, Denk.(13.1.19) daki kütle kuvvetlerinden uzaklaşıp; cismin "harmonik genliği" $\{P_0\}$ olan zamana—bağlı dış düğüm yüklerine maruz olduğunu tasarlayalım. Bu takdirde, tanımdan cisme etkiyen toplam dış kuvvet,

$$\{P\} = \{P_B\}_{Tümel} + \{P_0\} \quad (13.1.20)$$

olur. Denk.(3.9), (13.1.19) ve (13.1.20) den,

$$[K - \omega^2 m] \{\delta\} = \{P_0\} \quad (13.1.21)$$

elde edilir. Denk.(13.1.21), gerçekte, bölünmüş cismin sönümsüz zorlanmış hareket denklemdir. Titreşimin belli bir frekansında (yani ω nın belli bir değerinde) ve belli bir "uyarı" $\{P_0\}$ da, Denk.(13.1.21) çözümü, cismin yerdeğiştirme "tepkisi" $\{\delta\}$ yı verecektir.

13.1.3 DOĞAL FREKANSLAR

Denk.(13.1.21) i sıfır yapan belli ω değerleri vardır. Yani,

$$\det |[K] - \omega^2 [m]| = 0 \quad (13.1.22)$$

bu meydana geldiğinde, $\{P_0\}$ in büyüklüğüne bakılmaksızın Denk.(13.1.21), $\{\delta\}$ nın sonsuz değerlerini verecektir. Bu durum "rezonans" olarak adlandırılır. Fizik-

sel olarak $\{\delta\}$ ne zaman uyarı frekansı cismin "doğal frekanslarından" birine eşit hale gelirse, cisim, ihmal edilemez gerilme ve zorlanmalara yolaçan rezonansa uğrar. Cisim bir an kuvvetle uyarılıp, o kuvvet kaldırıldığında, enerji harcanmaksızın titreştiği frekanslar cismin doğal frekansları olarak tanımlanır. Uygulamada, dinamik problemlerin doğal frekanslarının belirlenmesinin çok büyük önemi vardır. Çünkü emniyet için cisim bu frekanslarda uyarılmamalıdır.

Açıkçası, cismin doğal frekansları Denk.(13.1.22) nin kökleridir. Bununla birlikte uygulama problemlerinde $[K]$ (ve dolayısıyla $[m]$) genellikle büyük bir boyuta sahip olduğundan doğal frekansları Denk.(13.1.21) de, $\{P_0\} = \{0\}$ yazarak elde edilen aşağıdaki özdeğer denkleminin kökleri olarak bulmak daha uygundur.

$$[K]\{\delta\} = \lambda[m]\{\delta\} \quad (13.1.23)$$

Burada $\lambda = \omega^2$ dir.

Denk.(13.1.23)ün çözümü, kökleri ("özkökler") ve vektörleri ("özvektörler") verecektir. Eğer $[K]$ (ve dolayısıyla $[m]$) $n \times n$ lik bir matris ise Denk.(13.1.23) ün n kökü ve n vektörü olacaktır. k -ıncı kök λ_k , ω_k^2 ya eşit olacaktır. Burada, ω_k , cismin k -ıncı "mod" titreşimindeki doğal frekansıdır. Yine k -ıncı vektör $\{\delta_k\}$, cisim ω_k frekansında titreştiğinde "mod biçimini" temsil eder.

Denk.(13.1.23) ün her iki tarafını soldan $[K^{-1}]$ ile çarparak cismin frekansı daha iyi tanıyan bir formda,

$$[K^{-1}m]\{\delta\} = \frac{1}{\lambda}\{\delta\} \quad (13.1.24)$$

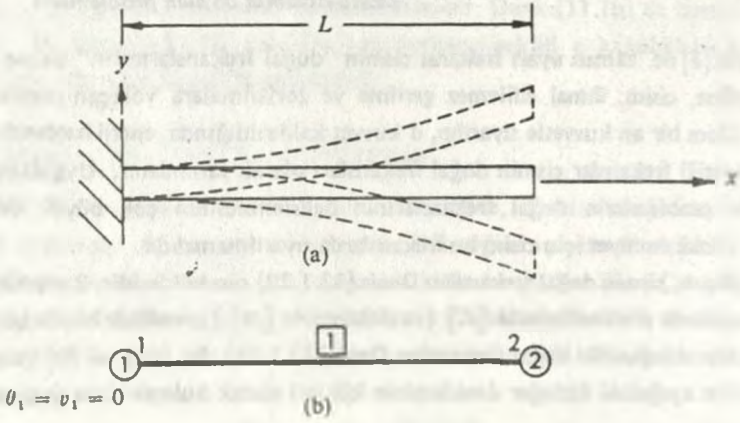
şeklinde ifade edilebilir. Uygulama problemlerinde cismin küçük doğal frekansları başlıca ilgi konusudur. Denk.(13.1.24) den bunları çıkarabilmek için basit bilgisayar programları yazılabilir. Buna alternatif olarak referans 2 de verilen özel bir yöntem Denk.(13.1.24) den bütün kökleri ve özvektörleri elde etmek kullanılabilir.

Denk.(13.1.22) nin uygulamasını göstermek için aşağıda birkaç örnek verilmiştir:

ÖRNEK 1. Şek.13.3a daki üniform konsol kirişi ele alalım. Kirişin düşey titreşiminin "temel" (yani en düşük doğal) frekansını bulmak için kirişin tamamını Şek.13.3b de gösterildiği gibi bir tek kiriş elemanı temsil edelim. Bu özel durumda kirişe etkiyen herhangi bir eksenel veya burulma kuvvetleri veya yerdeğiştirmeleri yoktur. Dolayısıyla kirişin $[K_1]$ si, Denk.(2.8) den, bu denklemden eksenel ve burulma büyüklüklerine ait satırlar ve sütunlar silinerek elde edilebilecektir. Ve sonra kesim 3.4 deki yöntemi uygulayarak, $[K]$ dan bir düğümü çıkarıldığından,

$$[K] = S(1, 2, 2) = q \begin{bmatrix} 12 & -6L \\ -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

olduğunu gösterebiliriz.



Şek.13.3 (a) Uniform bir konsol kirişin düşey titreşimi; EI sabit, ve kesit alanıdır. (b) (a) ya bir tek elemanla yaklaşım.

Burada $q = EI/L^3$ dir. Ayrıca Denk.(13.1.17c) den, tümel "uygun kütle matrisi" nin,

$$[m] = \bar{m}(1, 2, 2) = r \begin{bmatrix} 156 & -22L \\ -22L & 4L^2 \end{bmatrix}^*$$

şeklinde olduğu görülür. Burada $r = \rho aL/420$ dir. O halde bu kiriş için Denk. (13.1.22),

$$\det \begin{bmatrix} (12q - 156r\omega^2) & (22r\omega^2 - 6q)L \\ (22r\omega^2 - 6q)L & 4(q - r\omega^2)L^2 \end{bmatrix} = 0$$

haline gelir. Bu determinantın açılımdan,

$$35r^2\omega^4 - 102qr\omega^2 + 3q^2 = 0$$

ifadesine ulaşılır. Bunun kökleri,

$$\omega^2 = \frac{6EI}{\rho aL^3} (102 \pm (9984)^{\frac{1}{2}})$$

$$\omega_1 = 3.533(EI/\rho aL^4)^{\frac{1}{2}} \quad \text{ve} \quad \omega_2 = 34.807(EI/\rho aL^4)^{\frac{1}{2}}$$

dir. Küçük kök ω_1 kirişin "temel" frekansıdır; ω_2 , daha büyük kök olup, cismin "birinci harmonik" frekansı adını alır. Kirişin bu frekanslarının kesin³ değerleri,

$$\omega_1 = 3.515(EI/\rho aL^4)^{\frac{1}{2}} \quad \text{ve} \quad \omega_2 = 22.034(EI/\rho aL^4)^{\frac{1}{2}}$$

dir. Kirişe bir tek eleman ile yapılan kaba bir yaklaşımda bile hesaplanan ω_1 değerinin kesin değerinden yalnız yüzde 0.51 farklı olduğunun görülmesi ilginç bir gözlemdir.

* Belli bir bölünmüş cismin $[m]$ matrisini, tıpkı $[M_i, J, K]$ lardan $[K]$ nin elde edilmesinde olduğu gibi $S(i, J, K)$ lardan toplanarak elde edileceğine dikkat edilmelidir.

Bununla beraber ω_2 nin hesaplanan değeri ve kesin değeri arasında önemli bir fark vardır. Hesaplanan değerler, daima, kirişin bölündüğü eleman sayısı arttıkça kesin değerlerine yaklaşacaktır. Bu bütün cisimler için geçerli genel bir gözlemdir. Yine, genelde hesaplanan frekansların hassasiyeti mod sayısı arttıkça azalmaktadır. Yani ω_1 nin hesaplanan değeri en hassas olacak, ω_2 nin değeri ω_1 den daha az hassas ve vb.

[Denk.(13.1.16) dan kütle matrisi kullanma yerine probleme elemanın toplam kütlesinin yarısının, her bir düğümünde olduğunu tasarlayarak probleme "sağduyu" açısından yaklaştığımızı varsayalım. O takdirde kirişin "toplanmış kütle matrisi",

$$[m] = \frac{\rho a L}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

haline gelir. Sonuç olarak Denk.(13.1.22) den,

$$\det \begin{vmatrix} (12q - \rho a L \omega^2 / 2) & -6qL \\ -6qL & 4qL^2 \end{vmatrix} = 0$$

elde edilir. Bu denklemin kökünü çekerek,

$$\omega_1 = 2.450(EI/\rho a L^4)^{1/2}$$

olduğunu gösterebiliriz. Açıkcası, bu sonuç "uygun kütle matrisi" ile hesaplanana göre oldukça kabadır. Genelde, cismin belli bir bölmesi için "toplanmış kütle matrisi" kullanarak elde edilen frekanslar "uygun kütle matrisi" kullanarak elde edilen sonuçlardan daha az hassas olacaktır.]

ÖRNEK 2. Bir sonlu elemanın $[m]$ matrisi "yerel" koordinatlara ait olduğundan cisimi temsil eden çerçeve, kabuk vb. elemanların kullanılması durumunda $[m_i]$ lerin ortak "genel" koordinat sistemine transform edileceği açıktır. Buna tipik bir örnek her iki elemanın da aynı a kesatine sahip olduğu, Şek.13.4a da gösterilen mafsallı-bağlı düzlem çerçeveyi ele alalım. Elemanların elastisite modülü E, ve kütle yoğunluğu ρ dur.

Bu ve benzeri problemlerde $[m_i]$ lerin genel koordinatlardaki karşılıklarının,

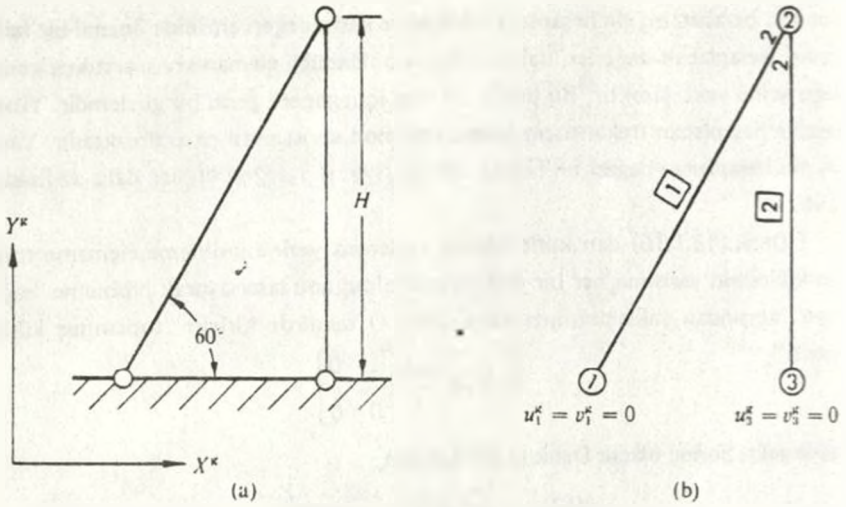
$$[m_i^*] = [T_i][m_i][T_i]^T \quad (13.1.25)$$

şeklinde elde edilebileceği gözlenir. O halde Denk.(7.4), (13.1.14) ve (13.1.25) den, eğer mafsallı bağli çerçeve elemanı i; L boyuna, a kesatine ve ρ kütle yoğunluğuna sahipse o takdirde,

$$\bar{m}^u(i, 1, 1) = \bar{m}^u(i, 2, 2) = \frac{\rho a L}{3} \begin{bmatrix} l_i^2 & l_i m_i \\ l_i m_i & m_i^2 \end{bmatrix} \quad (13.1.26a)$$

$$\bar{m}^u(i, 1, 2) = \bar{m}^u(i, 2, 1) = \frac{\rho a L}{6} \begin{bmatrix} l_i^2 & l_i m_i \\ l_i m_i & m_i^2 \end{bmatrix} \quad (13.1.26b)$$

olduğunu gösterebiliriz.



Şek.13.4 (a) Mafsallı—bağlı bir düzlem çerçeve. (b) (a) nın sonlu eleman modeli.

Burada, $\bar{m}^s(i, J, K)$ lar $\bar{m}(i, J, K)$ ların genel koordinatlardaki karşılıklarıdır.

Şimdi, kesim 3.4 deki metodu kullanarak; 1 ve 3 (Şek.13.4b) düğümlerinde bütün yerdeğiştirmeler sıfır olduğundan,

$$[K^*] = S^s(1, 2, 2) + S^s(2, 2, 2)$$

olduğunu gösterebiliriz. Denk.(7.13) den bu denklemin sağ tarafının hesaplanmasıyla,

$$\begin{aligned} [K^*] &= \frac{\sqrt{3} aE}{8H} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 \end{bmatrix} + \frac{aE}{H} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= q \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 + \frac{8}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (13.1.27)$$

elde edilir. Burada $q = \sqrt{3} aE/8H$ dir.

Yine, genel tümel kütle matrisinin,

$$[m^s] = \bar{m}^s(1, 2, 2) + \bar{m}^s(2, 2, 2)$$

olduğunu gösterebiliriz. Denk.(13.1.26a) da bu denklemin sağ tarafı hesaplandığında,

$$\begin{aligned} [m^s] &= \frac{\rho aH}{6\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 \end{bmatrix} + \frac{\rho aH}{3} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= r \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 + 2\sqrt{3} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (13.1.28)$$

elde edilir. Burada, $r = \rho aH/6\sqrt{3}$ dir.

Açıkcası çerçeve, kabuk vb. durumunda Denk.(13.1.22),

$$\det |[K^*] - \omega^2[m^*]| = 0 \quad (13.1.29)$$

şekline gelecektir. İfadelerin Denk.(13.1.27) ve (13.1.28) deki değerleri Denk. (13.1.29) da yerlerine yazıp ve denklemi açarak, köklerinin çerçevenin doğal frekansları olduğunu göstermek basit bir iştir:

$$\omega^2 = \frac{4q}{3r}$$

$$\omega_1 = (3E/\rho H^2)^{\frac{1}{2}}$$

Bu, çerçevenin "temel frekansı" dır. Bu durumda yukarıdaki determinantın bir tek kökü olması, Şek.13.4a daki çerçevenin bir tek titreşim moduna sahip olduğunu göstermektedir.

13.1.4 SÖNÜMLÜ ZORLANMIŞ TİTREŞİM

İç sürtünmeden dolayı elemanlara ayrılmış cismin içindeki enerji kaybı, bizim burada $[C]$ ile göstereceğimiz, "viskoz sönümlenme matrisi" adı verilen matrisle temsil edilir. Cismin içinde oluşan, harekete direnen viskoz sönümlenme kuvvetleri partikül hızlarıyla orantılıdır. Bu yüzden $[C]$ ye "hız sönümlenme matrisi"de denir.

Sönümlenme kuvvetlerinin harekete karşı oluşuna dikkat ederek; dinamik teorisinden bölünmüş cismin sönümlü zorlanmış hareket denkleminin,

$$[K]\{\delta\} + [C] \frac{d\{\delta\}}{dt} + [m] \frac{d^2\{\delta\}}{dt^2} = \{P\} \quad (13.1.30)$$

olduğu kolayca kanıtlanabilir. Burada t zamanı göstermektedir. Ve hem $\{\delta\}$ ve hem de $\{P\}$ zamana bağlıdır.

Hız sönümlenme teriminin bulunması dolayısıyla, cismin tepkisi $\{\delta\}$, biri "reel" ve diğeri "imajiner" olan iki bileşenli bir "kompleks" olacaktır.

$$\{\delta\} = \{\delta_{re}\} \sin(\omega t) + \{\delta_{im}\} \cos(\omega t)$$

$$\{P\} = \{P_0\} \sin(\omega t)$$

olsun. Burada, $\{\delta_{re}\}$ ve $\{\delta_{im}\}$, "kompleks tepki" $\{\delta\}$ nin sırasıyla "reel" ve "imajiner" bileşenleridir. Ve sonra $\{\delta\}$ ve $\{P\}$, Denk.(13.1.30) da yerlerine yazılırsa aşağıdaki iki denkleme ulaşılır:

$$[K - \omega^2 m]\{\delta_{re}\} - \omega[C]\{\delta_{im}\} = \{P_0\} \quad (13.1.31a)$$

$$\omega[C]\{\delta_{re}\} + [K - \omega^2 m]\{\delta_{im}\} = \{0\} \quad (13.1.31b)$$

$[C]$ matrisi cismin viskoz sönümlenme özelliklerine bağlıdır. Bu belirlendiğinde verilen bir ω da, tepkinin reel ve imajiner bileşenleri yukarıdaki iki denk-

lemin çözülmesiyle bulunabilir. Çoğu kez, bu denklemleri, aşağıdaki gibi, bir başka formda ifade edip çözmek daha uygun olabilir:

$$\begin{bmatrix} [K - \omega^2 m] & -\omega [C] \\ \omega [C] & [K - \omega^2 m] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\delta_{re}\} \\ \{\delta_{im}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{P_0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix}$$

13.2 "ALAN" DENKLEMLERİ

"Alan" denklemleri olarak bilinen denklemlerle ifade edilen birçok fiziksel olay vardır. Çeşitli bilimsel ve mühendislik disiplinlerde sıklıkla karşılaşılan bu denklemlerden, burada, sonlu eleman çözümünü tartışacağınız denklemler şunlardır:

Poisson denklemi,

Laplace denklemi ve

Dalga denklemi.

Her bir durumda amacımız, problemin bölünmüş bölgesindeki bütün düğümlerde, ϕ ile gösterdiğimiz "alan fonksiyonunu" tanımlamaktır. Verilen denklemi sağlamanın yanısıra ϕ aynı zamanda problemin belirlenen sınır şartlarını da sağlamak zorundadır.

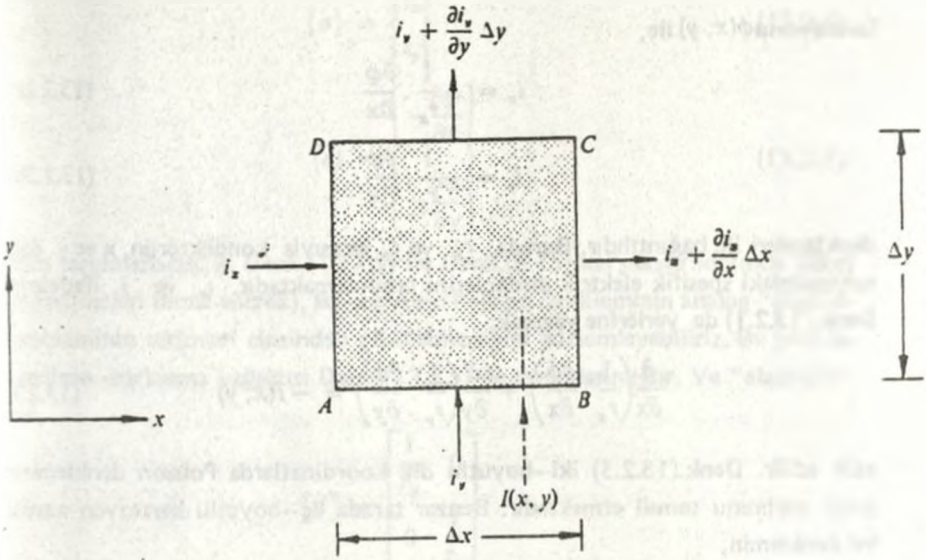
Bu aşamada, ϕ nin neyi temsil ettiğinin kesin olarak belirlenmesi gerekli değildir. Gerçekte o yukarıdaki denklemlerden herhangi biriyle ifade edilen problem bölgesindeki fiziksel büyüklüklerden birini temsil edebilir.

Bu denklemlerin çözümünü sağlayacak sonlu eleman karakteristikleri, en tatmin edici tarzda varyasyonlar hesabı metotlarından çıkarılabilir. Ancak bunun nisbeten yüksek düzeyde bir matematik bilgisini gerektirdiğinden burada onları, basit bir alternatif yöntem olan "elastik analoji" den çıkaracağız. Bunun için problem bölgesini "elastik" bir sürekli ortam olarak düşüneceğiz; ve "alan" ve "elastik" büyüklükler arasında bir bağıntı kuracağız. Basitliğinin yanısıra bu yaklaşımın başlıca avantajı alan probleminin böyle ele alınması onu bir Denk.(3.9) ile çözülebilen analog "elastik" probleme dönüştürmesinde yatmaktadır.

Varyasyon yaklaşımına ait bir örnek Ek 2 de verilecektir.

13.2.1 POISSON DENKLEMİ

Başlangıçta, bu denklem tarafından verilen spesifik, basit bir fiziksel olaya dikkatimizi yöneltmek yol gösterici olacaktır. Örneğin, Şek.13.5 de bir diferansiyel elemanı gösterilen tamamıyla dirençsel iki-boyutlu bir kondüktördeki elektrik akımı akışını ele alalım. Burada, ABCD ye giren akım şiddetleri (akım/yüzey olarak tanımlanan) i_x ve i_y nin yanısıra, birçok "kaynak" dan gelen akım yoğunluğu (akım/hacim olarak tanımlanan) $I(x, y)$, de ABCD ye katılmaktadır. Bunlardan



Şek.13.5 İki-boyutlu direnç kondüktörünün bir diferansiyel elemanı.

yalnız birisi kesikli çizgiyle gösterilmiştir. Diyagramdan açıkça görülür ki:

ABCD ye giren toplam akım = $i_x \Delta y + i_y \Delta x + I(x, y) \Delta x \Delta y$ * ve ABCD yi terkeden toplam akım,

$$= \left(i_x + \frac{\partial i_x}{\partial x} \Delta x \right) \Delta y + \left(i_y + \frac{\partial i_y}{\partial y} \Delta y \right) \Delta x$$

dir. Dolayısıyla ABCD de biriken toplam akım miktarı,

$$\left(\frac{\partial i_x}{\partial x} + \frac{\partial i_y}{\partial y} - I(x, y) \right) \Delta x \Delta y$$

olur. Bununla birlikte kondüktör elektrik akımını biriktiremediği için yukarıdaki denkleme sıfıra eşitleyerek şu ifadeyi elde ederiz:

$$\frac{\partial i_x}{\partial x} + \frac{\partial i_y}{\partial y} = I(x, y) \quad (13.2.1)$$

Denk.(13.2.1), "süreklilik şartı" olarak bilinir; kondüktör içindeki akım akışının sürekliliğini sağlamaktadır. Buna kesim 3.1 deki yerdeğiştirme uygunluğunun elektrikteki eşi olarak bakılabilir.

Şimdi, Ohm kanununa göre akım şiddetleri, potansiyel (voltaj)

* $I(x, y)$ ın ABCD içinde değişmediğini varsayıyoruz.

fonksiyonu $\phi(x, y)$ ile,

$$i_x = -\frac{1}{r_x} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (13.2.2a)$$

$$i_y = -\frac{1}{r_y} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (13.2.2b)$$

denklemleri ile bağıntılıdır. Burada, r_x ve r_y sırasıyla kondüktörün x ve y doğrultusundaki spesifik elektrik dirençlerini tanımlamaktadır. i_x ve i_y ifadelerini Denk.(13.2.1) de yerlerine yazarak,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r_x} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r_y} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = -I(x, y) \quad (13.2.3)$$

elde edilir. Denk.(13.2.3) iki-boyutlu dik koordinatlarda Poisson denkleminin genel formunu temsil etmektedir. Benzer tarzda üç-boyutlu kartezyen uzayda bu denklemin,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r_x} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r_y} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r_z} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = -I(x, y, z) \quad (13.2.4)$$

haline geldiğini gösterebiliriz. Bir dizi fiziksel olay Poisson denklemiyle ifade edilir. Pirizmatik çubukların burulması ince yüklü membranların düşey çökmesi, vb. iyi bilinen birkaç örnektir. Bütün bu olaylar aşağıdaki ortak özelliklere sahiptir:

- (1) Tüm problem bölgesinde tek-değerli bir fonksiyon (biz bunu ϕ ile tanımladık) mevcuttur.
- (2) "Gradyen değişkenler" (burada bunları i_x, i_y ve i_z ile tanımladık), ϕ ile Denk.(13.2.2) lere benzer denklemlerle bağıntılıdır, ve
- (3) r_x, r_y ve r_z bölgenin bir özelliğini temsil eder. İztropik bölgelerde bunlar koordinat eksenleri doğrultusundaki özelliği temsil ederler. İztropi durumunda $r_x = r_y = r_z = r$ dir.

13.2.2 POISSON DENKLEMİNİN ÇÖZÜMÜ İÇİN BİR "ELASTİK ANALOJİ"

Denk.(13.2.2) matris formunda,

$$\begin{Bmatrix} i_x \\ i_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r_x} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r_y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{\partial \phi}{\partial x} \\ -\frac{\partial \phi}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (13.2.5)$$

şeklinde ifade edilebilir. Poisson denklemiyle işlem yaparken problem bölgesini bir "elastik cisim" olarak düşüneceğiz. İki boyutlularda cismin "gerilmeleri" ve

"zorlanmaların", sırasıyla,

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} i_x \\ i_y \end{Bmatrix} \quad (13.2.6)$$

ve

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial\phi}{\partial x} \\ -\frac{\partial\phi}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (13.2.7)$$

şeklinde tanımlanacaktır. Denk.(13.2.5) ile Denk.(8.15) karşılaştırıldığında (ilkel ve ısıl gerilmeleri ihmal ederek), iki-boyutlu Poisson denkleminin analog "elastisite" probleminin terimleri cinsinden çözülebileceğini gözlemleyebiliriz. Bu problemin gerilme-zorlanma bağıntısı Denk.(13.2.5) ile tanımlanmıştır. Ve "elastisite" matrisi,

$$[d] = \begin{bmatrix} \frac{1}{r_x} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r_y} \end{bmatrix} \quad (13.2.8)$$

dir. Analojiyi tamamlamak için $I(x, y)$ nin "elastik" eşini de bulmak zorundayız. Tanımından ve kesim 8.7 ve 9.4 de yapılan gözlemlerden $I(x, y)$ nin karakteristiklerinin elastisitedeki kütle kuvvetlerinin karakteristiklerine özdeş olduğu açıktır.

Ve dolayısıyla aynı şekilde işleme sokulacaktır. O halde $\rho \left\{ \frac{X}{Y} \right\}$ vektörünü $I(x, y)$ ile yer değiştirerek tanımdan (kesim 9.8), iki-boyutlu Poisson denklemi için "kütle kuvvetlerinin",

$$\{P_b\} = [c^{-1}]^T \int_S [M]^T I(x, y) dx dy \quad (13.2.9)$$

şeklinde olduğunu gösterebiliriz. Üç boyutlu durumda Poisson denkleminin, analog "elastik" büyüklüklerinin aşağıdaki gibi olduğu kolayca ispatlanabilir:

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} i_x \\ i_y \\ i_z \end{Bmatrix} \quad (13.2.10)$$

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial\phi}{\partial x} \\ -\frac{\partial\phi}{\partial y} \\ -\frac{\partial\phi}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad (13.2.11)$$

$$[d] = \begin{bmatrix} \frac{1}{r_x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r_y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r_z} \end{bmatrix} \quad (13.2.12)$$

$$\text{ve} \quad \{P_b\} = [c^{-1}]^T \int_V [M]^T I(x, y, z) dv \quad (13.2.13)$$

Yukarıdaki analogi, Bölüm 9 daki metotlardan Poisson denkleminin çözümü-
nü verecek sonlu eleman özelliklerinin çıkarılmasını mümkün kılar.

Bu analogiyi kullanarak; Poisson, Laplace ve Dalga denklemi, sonlu eleman
çözümü Bölüm 11 ve 12 de anlatılan analog elastisite problemlerinin terimleri
cinsinden çözülecektir.

13.2.3 POISSON DENKLEMİNİN ÇÖZÜMÜ

Bu denklem ile verilen problemlerde biz genel olarak, yalnız düğüm değerleri ϕ
nin tayini ile ilgili olduğumuzdan, serbestlik derecesi birdir. İki boyutta bu denk-
lem "elastik cisim", üniform birim kalınlıklı üçgen ve/veya dikdörtgenler eleman-
lar sistemine bölünmek suretiyle çözülecektir. Üç boyutlu durumda ise cisim dört-
yüzlü ve/veya dikdörtgen prizma elemanlara bölünecektir. Birincil matrisler $[M]$,
 $[c]$ ve $[N]$, ve $\{P_b\}$ vektörü aşağıdaki gibi bulunacaktır:

İKİ-BOYUTLU ELEMANLAR. Önce Şek.13.6 da gösterilen üçgen düzlem
elemanı ele alalım. Kesim 9.5(a) ya göre bu elemanda $\phi(x, y)$ nin değişimini şöyle
kabul edilebilir:

$$\phi(x, y) = A_0 + A_1x + A_2y \quad (13.2.14)$$

$$U = \phi(x, y) = \{1 \ x \ y\} \{A\}$$

$$\{A\} = \{A_0 \ A_1 \ A_2\}^T$$

dolayısıyla, tanımdan,

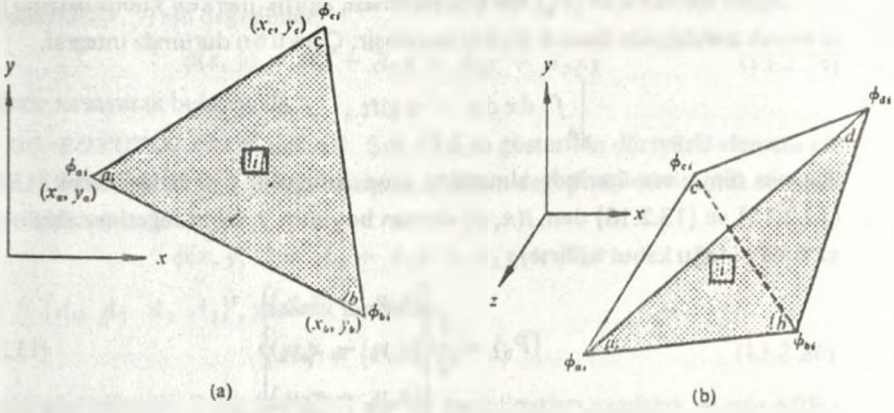
$$\{M\} = \{1 \ x \ y\} \quad (13.2.15)$$

olur. Şimdi, Denk.(13.2.14) de uç koordinatlarını yerleştirerek,

$$\phi_{a_i} = \phi(x_a, y_a) = A_0 + A_1x_a + A_2y_a$$

$$\phi_{b_i} = \phi(x_b, y_b) = A_0 + A_1x_b + A_2y_b$$

$$\phi_{c_i} = \phi(x_c, y_c) = A_0 + A_1x_c + A_2y_c$$



Şek.13.6 (a) Birim kalınlıklı bir üçgen alan elemanı. (b) Dört yüzlü bir alan elemanı.

elde edilir. Ve bu denklemleri matris formunda yazarak,

$$\begin{Bmatrix} \phi_{ai} \\ \phi_{bi} \\ \phi_{ci} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_a & y_a \\ 1 & x_b & y_b \\ 1 & x_c & y_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} \quad (13.2.16)$$

elde edilir. Veya sembolik notasyon kullanarak,

$$\{\delta\} = [c]\{A\} \quad (13.2.17)$$

olur. Burada $[c]$, Denk.(13.2.16) daki kare matrisi tanımlamaktadır. $[c]$ nin doğrudan tersini alarak,

$$[c^{-1}] = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} (x_b y_c - x_c y_b) & (x_c y_a - x_a y_c) & (x_a y_b - x_b y_a) \\ (y_b - y_c) & (y_c - y_a) & (y_a - y_b) \\ (x_c - x_b) & (x_a - x_c) & (x_b - x_a) \end{bmatrix} \quad (13.2.18)$$

olduğunu gösterebiliriz. Burada, Δ = üçgenin alanıdır.

Şimdi, Denk.(13.2.14) ün türevini alarak,

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \phi}{\partial x} &= -A_1 \\ -\frac{\partial \phi}{\partial y} &= -A_2 \end{aligned}$$

elde edilir. Veya matris notasyonu kullanarak,

$$\begin{Bmatrix} -\frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} \quad (13.2.19)$$

yazılabilir.

Veya sembolik notasyon kullanarak,

$$\{\epsilon\} = [N]\{A\} \quad (13.2.20)$$

yazılır. Burada $[N]$ Denk.(13.2.19) daki dikdörtgen matrisi göstermektedir.

Üçgen eleman için $\{P_b\}$ nin hesaplanması, ağırlık merkezi koordinatların orijini olarak alındığında önemli ölçüde basitleşir. Çünkü bu durumda integral,

$$\int_{\Delta} f^n dx dy \quad n \text{ çift}, \quad f = x, y$$

üçgenin tüm alanı üzerinde alınmakta olup, sıfır olur.* O halde Denk.(13.2.9), (13.2.15) ve (13.2.18) den, $I(x, y)$ eleman boyunca I sabit değerine sahip ise (veya öyle olduğu kabul edilirse),

$$\{P_b\} = \frac{I}{2} \begin{Bmatrix} (x_b y_c - x_c y_b) \\ (x_c y_a - x_a y_c) \\ (x_a y_b - x_b y_a) \end{Bmatrix} \quad (13.2.21)$$

olduğunu gösterebiliriz. (Denk.11.13 ve 13.2.21 arasında dikkate değer bir benzerlik vardır). Basit bir hesaplama ile, birim kalınlıklı herhangi bir üçgen elemanda $\{P_b\}$ nin,

$$\{P_b\} = \frac{\Delta I}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (13.2.22)$$

şekline dönüşeceği görülebilir. Denk.(11.13) de olduğu gibi üçgenin toplam "kütle" ΔI nin üçte biri üçgenin bağlı olduğu her bir düğüm tarafından taşınmaktadır. Uygulamada cismi, $I(x, y)$ i her bir elemanda değişmeyecek tarzda elemanlara ayırma en uygun yoldur. Denk.(13.2.22) nin basit ifadesi hassas sonuçlar vermeye üzere kullanılabilir. Bununla birlikte bunu yapmak mümkün değilse ve $I(x, y)$ nin değişimi sürekli bir fonksiyon vasıtasıyla temsil edilebiliyorsa $\{P_b\}$, Denk. (13.2.9) un integralini almak suretiyle bulunabilir.

Böylece birincil matrisler belirlendikten sonra kesim 9.8 de verilen formüllerden çeşitli eleman karakteristiklerini çıkarabiliriz. Örneğin bu elemanın $[N]$ si kullanılan koordinatlardan bağımsız olduğu için,

$$[K_i] = \Delta [c^{-1}]^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r_x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r_y} \end{bmatrix} [c^{-1}] \quad (13.2.23)$$

olduğunu gösterebiliriz. Burada $[c^{-1}]$ Denk.(13.2.18) de verilmiştir.

* Bkz. Ek 3.

Birincil matrisler ve sonra dikdörtgen elemanın karakteristikleri aynı yolla, elemandaki $\phi(x, y)$ nin değişimini,

$$\phi(x, y) = A_0 + A_1x + A_2y + A_3xy \quad (13.2.24)$$

şeklinde varsayarak bulunabilir.

UÇ-BOYUTLU ELEMANLAR. Şek.13.6 da gösterilen dörtyüzlü elemanı ele alalım. Elemanın dört ucu olduğundan $\phi(x, y, z)$ nin değişimi, dört sabitli bir polinom olarak varsayılacaktır:

$$\phi(x, y, z) = A_0 + A_1x + A_2y + A_3z \quad (13.2.25)$$

$\{A\} = \{A_0 \ A_1 \ A_2 \ A_3\}^T$, yazarak tanımdan,

$$\{M\} = \{1 \ x \ y \ z\} \quad (13.2.26)$$

olduğu gösterilebilir. Denk.(13.2.25) de uç koordinatları yazılarak ve elde edilen dört denklem Denk.(13.2.17) nin matris formunda ifade edilerek,

$$[c] = \begin{bmatrix} 1 & x_a & y_a & z_a \\ 1 & x_b & y_b & z_b \\ 1 & x_c & y_c & z_c \\ 1 & x_d & y_d & z_d \end{bmatrix} \quad (13.2.27)$$

olduğu gösterilebilir. Birincil matris $[N]$, Denk.(13.2.25), (13.2.11) sırasına göre türevi alınarak bulunabilir. Ve sonra "zorlanmaları" Denk.(13.2.20) nin matris formunda ifade ederek,

$$[N] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (13.2.28)$$

olduğu ispatlanabilir. Dörtyüzlünün ağırlık merkezini koordinatların orijini olarak alıp, eğer $I(x, y, z)$ sabit (veya sabit olduğu varsayılan I değerine sahipse, o takdirde,

$$\{P_b\} = \frac{VI}{4} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (13.2.29)$$

olduğu gösterilebilir. Burada V = dörtyüzlünün toplam hacmidir.

Birincil matrisler ve sonra dikdörtgen prizma elemanı (Şek.12.2) karakteristikleri tamamı ile aynı yolla, $\phi(x, y, z)$ nin eleman içinde,

$\phi(x, y, z) = A_0 + A_1x + A_2y + A_3z + A_4xy + A_5yz + A_6zx + A_7xyz$ şeklinde değiştiği varsayılarak bulunabilir.

PROBLEM ÇÖZÜMÜ. "Cismin" bölündüğü bütün elemanların $[K_i]$ leri hesaplandıktan sonra $S(i, J, K)$ ler tüm cismin tümel "direngenlik" matrisini oluşturmak üzere Bölüm 3 deki yöntemleri kullanarak toplanacaktır. Hem iki- ve hem de üç- boyutlu elemanlarda $S(i, J, K)$ ların her biri, serbestlik derecesi bir olduğu için, gerçekte, bir tek büyüklüktür. Poisson denklemi Denk.(3.9) un terimleri cinsinden çözülebilir. Bu denklem,

$$[K]\{\phi\} = \{P\} \quad (13.2.30)$$

haline gelir. Burada $\{\phi\}$, ϕ nin bilinmeyen düğüm değerlerini kapsamaktadır. Sınır değerleri belirlendikten sonra, $\{P\}$ nin sıfır-olmayan bileşenleri; (a) elemanların $\{P_b\}$ lerine ve (b) sıfır-olmayan sınır şartları olarak probleme dahil edilecektir.

Bununla birlikte Denk.(13.2.30) un ϕ nin bir değerler takımını elde etmek üzere çözmek için belirlenen bütün sınır şartlarını probleme dahil edilmelidir. Bu gelecek kesimde anlatılacaktır.

13.2.4 SINIR şARTLARININ UYGULANMASI

Bölgenin sınırlarında ϕ nin sağladığı şartlar genellikle şöyle,

$$\phi = \phi_b \quad S \text{ üzerinde} \quad (13.2.31)$$

$$\text{veya,} \quad \frac{\partial \phi}{\partial n} + qa(s) + \beta \phi = 0 \quad S \text{ üzerinde} \quad (13.2.32)$$

şeklinde belirlenebilir. Burada q ve β sabitler olup, $a(s)$ bir fonksiyondur. Burada S ya "cismin" sınırının bir parçası veya bütünü olabilir; ve $\partial \phi / \partial n$, n doğrultusunda ϕ nin eğimidir; n , S nin dış normalidir. Genel olarak, ϕ_b , $a(s)$, ϕ ve $\partial \phi / \partial n$ S üzerinde değişecektir.

Denk.(13.2.31) şartı kesim 5.1 deki birinci metotla kolayca uygulanabilir. Buna göre ϕ_b , S yi temsil eden her noktada belirlenen bir "yerdeğiştirme" olarak gözönüne alınacaktır.

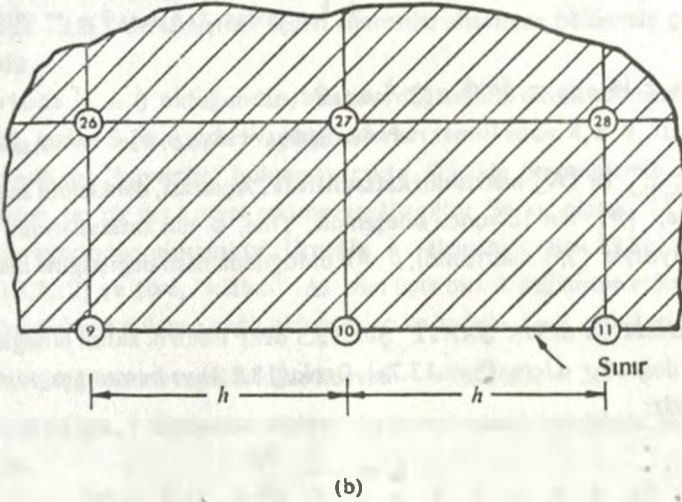
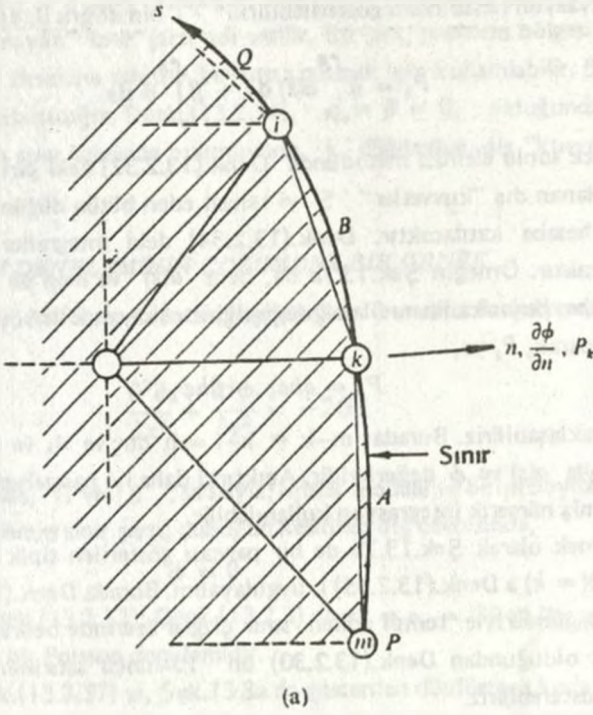
Öte yandan, Denk.(13.2.32) deki şart, bir zorluk gösterir. Çünkü, şimdi elastik analogi bozulmakta olup dolayısıyla varyasyonlar hesabının yöntemlerine başvurmak gerekmektedir. Örneğin eğer bu denklem,

$$-\frac{\partial \phi}{\partial n} = qa(s) + \beta \phi$$

şeklinde yazılıp ve elastik analogide ısrar edilirse, sağ tarafın n doğrultusunda "zorlanmaya" eşit olabileceği açıkça görülmektedir. Örneğin şek.13.7a da, k düğümündeki durumu ele alalım. k PQ üzerinde bulunduğundan k ya etkiyen P_k "kuvveti" şöyle elde edilecektir.

$$P_k = -\frac{1}{r_n} \int_A^B \frac{\partial \phi}{\partial n} ds = \frac{q}{r_n} \int_A^B a(s) ds + \frac{\beta}{r_n} \int_A^B \phi ds \quad (13.2.33)$$

* Kuvvet = \int (gerilme) ds ve gerilme ("elastisite") (zorlanma).



Şek. 13.7 (a) PQ üzerinde "gradient" sınır şartı (cisim birim kalınlıktır).
 (b) Dikdörtgen alan elemanlara bölünmüş bir bölge parçası. Denk.(13.2.32) nin şartı 9—10—11 çizgisi üzerinde belirlenmiştir.

Burada $1/r_n$, n doğrultusunda "elastisite" dir; ve A ve B sırasıyla $m-k$ ve $k-i$ orta noktalarıdır (Şek.13.7a). Bununla birlikte Denk.(13.2.33) doğru değildir. Çünkü varyasyon hesabından gösterilebilirki⁴ P_k nin doğru ifadesi ,

$$P_k = q \int_A^B a(s) ds + \beta \int_A^B \phi ds \quad (13.2.34)$$

dir. Böylece sonlu eleman metodunda Denk.(13.2.32) deki şart, Denk. (13.2.34) den hesaplanan dış "kuvvetler" S yi temsil eden bütün düğümlere uygulanmak suretiyle hesaba katılacaktır. Denk.(13.2.34) deki integraller nümerik olarak hesaplanacaktır. Örneğin Şek.13.7a da, hem $a(s)$ ve hem de ϕ nin $m-k$ ve $k-i$ kenarları boyunca lineer olarak değiştiğini varsayarak ve böyle kenarların ya eşit yaparak, P_k ya,

$$P_k = qha_k + \beta h\phi_k \quad (13.2.35)$$

şeklinde yaklaşabiliriz. Burada $m-k = k-i = h$ dir; ve a_k ve ϕ_k , k düğümündeki sırasıyla $a(s)$ ve ϕ değerleridir. Açıkçası daha iyi hassasiyet elde etmek için daha gelişmiş nümerik integrasyon kullanılabilir.

Bir örnek olarak Şek.13.7b de bir parçası gösterilen tipik bir bölgede sınır düğümü 10(= k) a Denk.(13.2.35) i uygulayalım. Burada Denk.(13.2.32) şartı; 9, 10 ve 11 düğümleriyle temsil edilen sınır çizgisi üzerinde belirlenmiştir. P_k bir dış kuvvet olduğundan Denk.(13.2.30) un 10-uncu satırının aşağıdaki gibi olacağını gösterebiliriz.

$$k_{10,9}\phi_9 + k_{10,10}\phi_{10} + k_{10,11}\phi_{11} + k_{10,26}\phi_{26} \\ + k_{10,27}\phi_{27} + k_{10,28}\phi_{28} = qha_{10} + \beta h\phi_{10}$$

or,

$$k_{10,9}\phi_9 + (k_{10,10} - \beta h)\phi_{10} + k_{10,11}\phi_{11} \\ + k_{10,26}\phi_{26} + k_{10,27}\phi_{27} + k_{10,28}\phi_{28} = qha_{10}$$

Burada, $k_{i,j}$ ler $[K]$ matrisinin katsayılarıdır. Açıkçası, denklemin sağ tarafı qha_{10} gerçekte, $\{P\}$ nin 10-uncu bileşenidir. Yine, ϕ nin katsayılarının/katsayısının (ve dolayısıyla $[K]$ matrisinin), $\beta \neq 0$ olduğunda nasıl değiştiğine dikkat edilmelidir.

YANSITAN SINIR ŞARTI. Şek.13.5 deki elektrik akımı örneğine dönerek, normal doğrultu n için (Şek.13.7a), Denk.(13.2.2) ye benzer aşağıdaki denklemi yazabiliriz:

$$i_n = -\frac{1}{r_n} \frac{\partial \phi}{\partial n}$$

Şimdi, eğer PQ iletken olmayan sınır temsil ederse o takdirde, PQ boyunca akış olmayacağı açıktır, yani $i_n = 0$ dir. Ve sonuç olarak,

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad \text{on } PQ \quad (13.2.36)$$

Denk.(13.2.32) de $q = \beta = 0$ yazarak da elde edilen yukarıdaki şarta, "yansıtıcı" veya "iletken—olmayan" sınır şartı adı verilir. Bu şart, problem bölgesi bir veya daha fazla simetri eksenine sahipse, boyutu azaltmak için kullanılabilir. Bunu aşağıdaki örnekte kullanacağız. Denk.(13.2.34), $q = \beta = 0$, olduğunda, eğer k böyle bir yansıtıcı sınır üzerinde bulunuyorsa, k düğümüne, dış "kuvvet" uygulanmayacaktır.

13.2.5 POISSON DENKLEMİNİN ÇÖZÜMÜNE BİR ÖRNEK

Keyfi kesitli, dolu, üniform ve izotropik çubuğun "burulma fonksiyonu" ϕ yi veren denklem,

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -2G\theta \quad (13.2.37)$$

şeklinde. Burada, G ve θ , sırasıyla, rijitlik modülü ve birim boydaki dönme açısıdır. Bu problemin sınır şartı; çubuğun kesitinin dış çevresinde,

$$\phi = 0$$

dir. Açıkçası, Denk.(13.2.37); Denk.(13.2.3) de $r_x = r_y = G\theta$ ve $I(x, y) = 2$ yazarak elde edilen bir Poisson denklemidir.

Şimdi, Denk.(13.2.37) yi, Şek.13.8a da gösterilen dikdörtgen kesit için çözelim. Açıkçası, eğer, simetri eksenleri, "yansıtıcı" sınırlar olarak alınırsa, kesitin herhangi bir simetrik çeyreğini ele almamız yeterli olacaktır. Şek.13.8b, karakteristikleri kesim 13.2.3 de tartışılan üçgen elemanlar sistemine bölünmüş çeyreği göstermektedir.

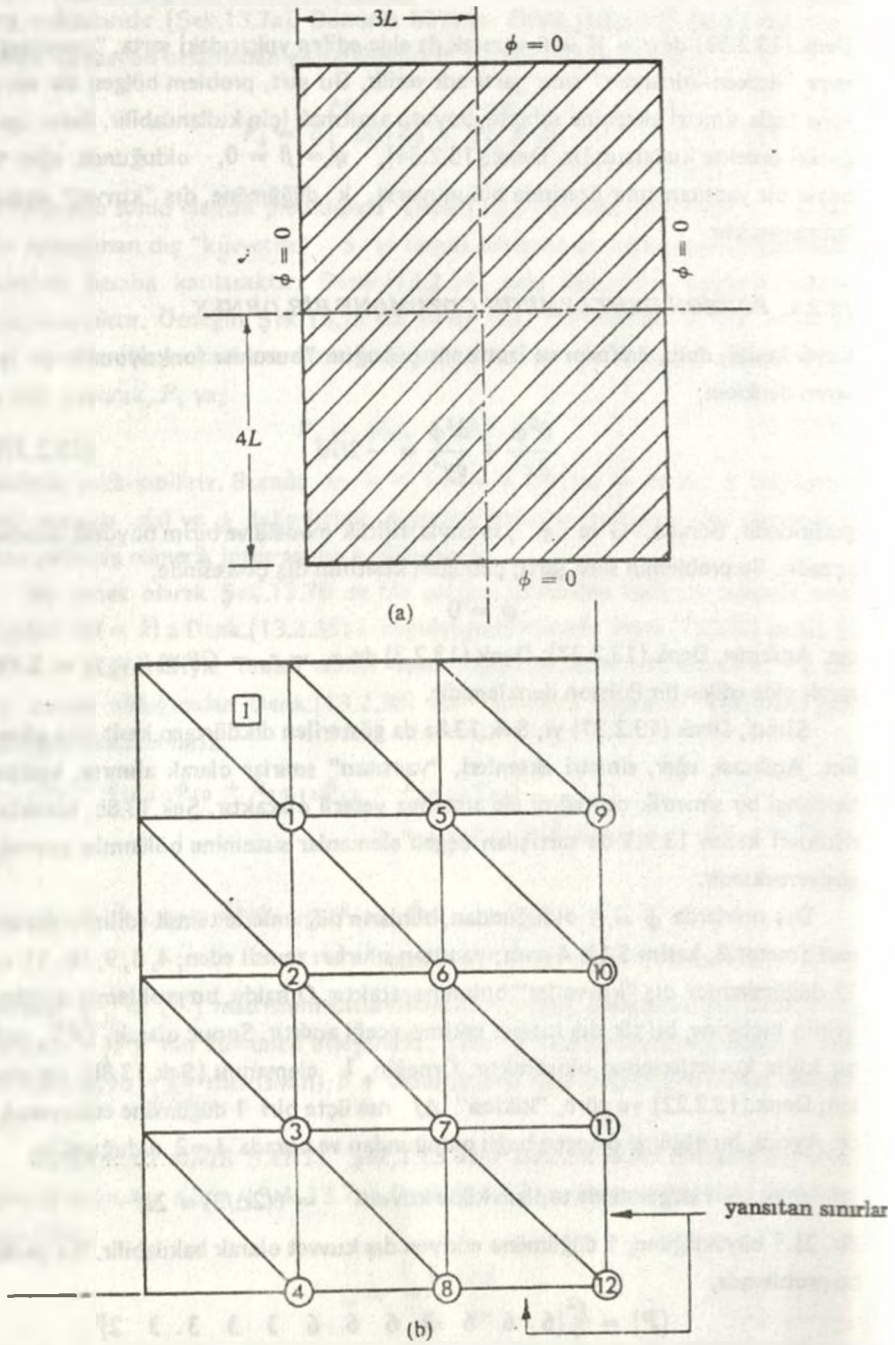
Dış sınırlarda $\phi = 0$ olduğundan, bunların düğümleri temsil edilmesi gerekmez (metot 2, kesim 5.1). Ayrıca; yansıtıcı sınırları temsil eden; 4, 8, 9, 10, 11 ve 12 düğümlerinde dış "kuvvetler" bulunmayacaktır. O halde, bu problemin düğümlerinin hiçbirine, bu tür dış kuvvet etkimeyeceği açıktır. Sonuç olarak, $\{P\}$, yalnız kütle kuvvetlerinden oluşacaktır. Örneğin, 1 elemanını (Şek.13.8b) ele alalım; Denk.(13.2.22) ye göre, "kütlesi" ΔI nın üçte biri 1 düğümüne etkiyecektir. Ayrıca, bu düğüme 6 üçgen bağlı olduğundan ve burada $I = 2$ olduğundan,

$$1 \text{ düğümünde toplam kütle kuvveti} = 6(2\Delta/3) = 2L^2$$

dir. $2L^2$ büyüklüğüne, 1 düğümüne etkiyen dış kuvvet olarak bakılabilir. Bu yolla, bu problemde,

$$\{P\} = \frac{L^2}{3} \{6 \ 6 \ 6 \ 3 \ 6 \ 6 \ 6 \ 3 \ 3 \ 3 \ 3 \ 2\}^T$$

dir. Bu bölümde geliştirilen metoda dayalı basit bir program hazırlanabilir. Hazırlanan böyle bir programla, bu problemde, ϕ nin bulunan düğüm değerleri şunlardır:



Şek.13.8 (a) Burulma etkisinde, izotropik, homojen dikdörtgen bir kesit. (b), (a) daki bir çeyreğin üçgen elemanlara (bütün üçgenler eşit boyutludur) bölünmesi.

Düğüm	Hesaplanan değerler	Kesin ⁵ değerler
	$\phi/G\theta L^2$	$\phi/G\theta L^2$
1	2.0559	2.0990
2	3.1516	3.1818
3	3.7021	3.7120
4	3.8755	3.8720
5	3.0719	3.1073
6	4.8484	4.8773
7	5.7812	5.7748
8	6.0979	6.0484
9	3.3832	3.4123
10	5.3891	5.4083
11	6.4763	6.4337
12	6.9538	6.7478

Açıkçası, hassasiyet oldukça iyi olup eğer gerekiyorsa, daha sık bölme kullanarak daha da iyileştirilebilir.

13.2.6 "GERİLMELERİN" HESABI

ϕ nin düğüm değerleri bir kez hesaplandı mı, elastik analogiyi izleyerek, bölünmüş cismin her bir elemanındaki "gerilmeler" kolayca bulunabilir. Örneğin, Şek.13.6b deki dört yüzlü elemanda,

$$\begin{Bmatrix} i_x \\ i_y \\ i_z \end{Bmatrix} = [d][Nc^{-1}] \begin{Bmatrix} \phi_a \\ \phi_k \\ \phi_m \\ \phi_j \end{Bmatrix} \quad (13.2.38)$$

olduğunu gösterebiliriz. Burada, $[d]$, $[N]$ ve $[c]$ de sırasıyla, Denk.(13.2.12), (13.2.28) ve (13.2.27) verilmiştir. Ve n, k, m ve j düğümlerinin sırasıyla, a, b, c ve d uçlarına bağlanmış olduğu varsayılmıştır.

13.2.7 LAPLACE DENKLEMİ

Poisson denkleminin sağ tarafı sıfıra eşitlendiğinde, elde edilen denkleme Laplace denklemi adı verilir. Dolayısıyla; Denk.(13.2.3) de $I(x, y) = 0$ yazarak, iki boyutlu Laplace denkleminin genel formu,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r_x} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r_y} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = 0 \quad (13.2.39)$$

şeklinde elde edilir. Benzer yolla üç boyutlu duruma ait denklem de elde edilebilir.

Laplace denklemi, belkide, fiziğin en önemli ve temel denklemidir. Laplace denklemiyle verilen çok sayıda fiziksel olayda, en çok bilinenler şunlardır:

- Gözenekli ortamda sızıntı,
- Sürekli durumda ısı akışı,
- İdeal akışkanların döngüsel olmayan akışı,
- Elektrik ve magnetik potansiyellerin dağılımı, vb.

$I(x, y) = I(x, y, z) = 0$, olduğundan, "kütle kuvveti" vektörü $\{P_b\}$, burada sıfır olacaktır. Sonuçta, Denk.(13.2.30) daki $\{P\}$ nin sıfır—olmayan bileşenleri yalnız belirlenen sınır şartlarından gelecektir. Bu farklılık hariç, Laplace denkleminin sonlu eleman işlemi, Poisson denklemininkine özdeştir.

13.2.8 DALGA DENKLEMİ

Poisson denkleminin sağ tarafı,

$$\rho \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$$

ile değiştirildiğinde, elde edilen denkleme "Dalga denklemi" adı verilir. Burada t zamanı tanımlamaktadır. Böylece, Denk.(13.2.4) den üç boyutlu durum için Dalga denkleminin,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r_x} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r_y} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r_z} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = \rho \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (13.2.40)$$

olduğu bulunabilir. r_x , r_y ve r_z büyüklükleri, burada, bölgenin,

$$1/(\rho r_x)^{\frac{1}{2}}, \quad 1/(\rho r_y)^{\frac{1}{2}} \quad \text{ve} \quad 1/(\rho r_z)^{\frac{1}{2}}$$

şeklinde belirli büyüklükleridir. Bunların tümü hız boyutundadır. İzotropik bölgeler için $r_x = r_y = r_z = r$ ve sonuç olarak Denk.(13.2.40),

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (13.2.41)$$

haline gelir. Burada, $c = 1/(\rho r)^{\frac{1}{2}}$ olup, "dalga hızı" adı verilir.

Bir karşılaştırma yapılırsa; Dalga denklemi, Poisson veya Laplace denkleminin tersine, esas itibariyle, bir dinamik denklemdir. Burada, "alan fonksiyonu" ϕ hem uzay hem de zamana bağlıdır. Böylece, örneğin, Denk.(13.2.41), izotropik üç boyutlu bir ortamdaki dalga hareketini verir. Bu ortamda, dalgalar bir uyarı ile başlatılır ve c hızıyla seyrederek. Enerjinin ortam içinde, noktadan noktaya dalgalarla taşındığı bir dizi fiziksel olay, dalga denklemiyle verilir. Bu tür dalga hareketinin bilinen örnekleri: elektromanyetik dalgaların yayılması, suda ağırlık

dalgaları, elastik cisimlerde gerilme dalgaları, vb.

Dalga denkleminin iki farklı çözüm tipi vardır. Yani, "duran dalga" çözümü ve "gelişen dalga" çözümü. Örneğin, bir havuzdaki durgun su yüzeyi üzerine bir damlacığın düşmesiyle başlayan su dalgalarının hareketini ele alalım. Bir an, bu dalgaların hareketini herhangi bir yolla durduracak bir etkinin bulunmadığını ve havuzun kıyılarının tamamen yansıtıcı olduğunu varsayalım. Enerji yutan hiç bir mekanizmanın bulunmaması halinde, dalga hızıyla seyreden bu dalgaların, havuzun kıyıları arasında, periyodik olarak tekrarlanıp sonsuza dek yansıtılacağı açıktır. Bu dalga biçimine "duran" dalga adı verilir. Bu yüzden, duran dalgaların, veya daha çok dalga denkleminin duran dalga çözümü; dalga denkleminin ortamı, yansıtıcı sınırlara sahip olduğunda elde edilecektir.

Öte yandan, havuzun sınırları, (teorik olarak) sonsuzda olsaydı; yani yansıma meydana gelmeseydi, o takdirde, enerji, uyarı kaynağından sonsuza dalgalar vasıtasıyla taşınacaktı. Açıkcası, yansımaların bulunmaması halinde, uyarı kaynağının enerjisinin "geri besleme" si olmayacaktı. Bu durum, dalga denkleminin "gelişen dalga" çözümünün bilindiği durum olarak adlandırılır. Uygulamada, hem gelişen hem de duran dalgalar, ortamın iç sürtünmesinden (suda viskozite) dolayı sonunda kaybolacaktır. Bununla birlikte; sonsuz ortamlarda, enerjinin sonsuza, dalgalar vasıtasıyla kendi kendine taşınması, "yansıyan sönümlenme" adı verilen, ek bir sönümlenme mekanizması oluşturur. Bu, iç sürtünmeden doğan mekanizmadan farklıdır. Sonlu bir bölgenin, sınırları arasında tekrarlı yansıyan dalgalardan doğan "doğal frekans"lara sahip olduğu gözlenmelidir. Öte yandan, yansımaların bulunmadığı bir sonsuz ortam, böyle doğal frekanslara sahip değildir.

Buraya kadar okuyucu farketmiş olacaktır ki, dalga denkleminin çözümü, genelde, bir duran dalga çözümü olacaktır. Bunun sebebi, bir sonsuz bölgeyi, kural olarak, bir sonlu eleman modeli ile temsil edilememesidir (kesim 11.5 de duran veya gelişen dalga sorusu sözkonusu olmadığını hatırlayınız. Çünkü orada, problem bir statik problem idi). Şimdi, ϕ nin, zamanın bir harmonik fonksiyonu olduğu durumu ele alalım. Öyleki iki boyutlu halde,

$$\phi(x, y) = \phi' \sin(\omega t) \quad (13.2.42)$$

yazılabilir. Burada; ω , dalga hareketinin dairesel frekansıdır. Ve sonra, $\phi(x, y)$ ifadesinin, Denk.(13.2.41) iki boyuttaki karşılığında yerine yazılırsa,

$$\frac{\partial^2 \phi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi'}{\partial y^2} = -(\omega/c)^2 \phi' \quad (13.2.43)$$

elde edilir. Bir karşılaştırma yapıлып, Denk.(13.2.3) de $r_x = r_y = 1$, $\phi = \phi'$ ve $I(x, y) = (\omega/c)^2 \phi'$ yazılırsa; o takdirde, Denk.(13.2.43) iki boyutlu bir Poisson denklemi gibi çözülebileceği görülür. Denk.(13.2.9) da uygun yerleştirmeleri yaparak,

$$\{P_b\} = (\omega/c)^2 [c^{-1}]^T \int_S [M]^T \phi' dx dy$$

elde edilir. Veya, tanımdan (kesim 9.8), $\phi' = [M][c^{-1}]\{\delta\}$

$$\{P_b\} = (\omega/c)^2 [c^{-1}]^T \int_S [M]^T [M] dx dy [c^{-1}]\{\delta\} \quad (13.2.44)$$

veya, $\{P_b\} = (\omega/c)^2 [m_i]\{\delta\} \quad (13.2.45)$

burada, $[m_i] = [c^{-1}]^T \int_S [M]^T [M] dx dy [c^{-1}] \quad (13.2.46)$

(Yukarıda $[m_i]$ nin, Denk.(13.1.10) un tersine ρ yu ihtiva etmediğine dikkat edilmelidir).

Denk.(13.2.46) ile Denk.(13.1.10) karşılaştırıldığında; Denk.(13.2.43) ün sonlu eleman çözümünün kesim 13.1 de tartışılan elasto-dinamik problemin çözümünde olduğu şekilde devam edeceğini gözlüyebiliriz. Önce Denk.(13.2.46) da, bölgenin bölündüğü her bir elemanın $[m_i]$ leri (veya üç boyutlu durumda bunun eşi) hesaplanacaktır. Ve sonra bunlar bölünmüş tüm bölgenin "tümel kütle matrisi" $[m]$ i oluşturmak üzere, elasto-dinamik problemlerde olduğu gibi, toplanacaktır. Daha sonra belirlenen sınır şartları probleme dahil edilip, verilen bir ω frekansında bilinmeyen düğüm değerleri ϕ' ,

$$[K - (\omega/c)^2 m]\{\phi'\} = \{P_0\} \quad (13.2.47)$$

denkleminde çözülecektir. Burada, $[K]$, Denk.(13.2.30) da olduğu gibidir. Ve $\{P_0\}$ uygulanan dış "kuvvetlerin" "harmonik genliği" ni tanımlamaktadır. Bu çözüm metodunun üç boyutlu dalga denkleminde genişletilebileceği açıktır.

Denk.(13.2.46) nın tipik bir uygulaması olarak, Şek.13.9 da gösterilen elemanın $[m_i]$ matrisini hesaplayalım. Burada, koordinatların orijini, elemanın ağırlık merkezinde alınmıştır.

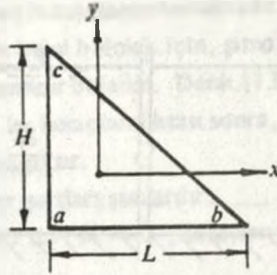
$$\begin{aligned} \phi'(x, y) &= A_0 + A_1 x + A_2 y \\ \{M\} &= \{1 \quad x \quad y\} \end{aligned} \quad (13.2.48)$$

olduğunu kabul ederek, tanımdan,

ve sonuçta,

$$\begin{aligned} [X] &= \int_{\Delta} \{M\}^T \{M\} dx dy = \int_{\Delta} \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix} \{1 \quad x \quad y\} dx dy \\ &= \int_{\Delta} \begin{bmatrix} 1 & x & y \\ x & x^2 & xy \\ y & xy & y^2 \end{bmatrix} dx dy \end{aligned}$$

elde edilir.



Şek.13.9

Denk.(A3.8) lerdeki integralleri kullanarak,

$$[X] = \Delta \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L^2}{18} & -\frac{LH}{36} \\ 0 & -\frac{LH}{36} & \frac{H^2}{18} \end{bmatrix}$$

olduğunu gösterebiliriz. Şimdi, Denk.(13.2.18) de elemanın uç koordinatlarını yerleştirerek,

$$[c^{-1}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} & 0 \\ -\frac{1}{H} & 0 & \frac{1}{H} \end{bmatrix}$$

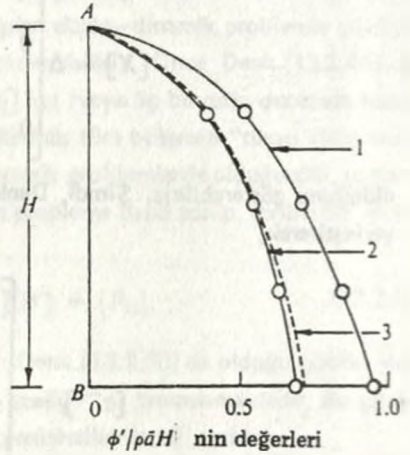
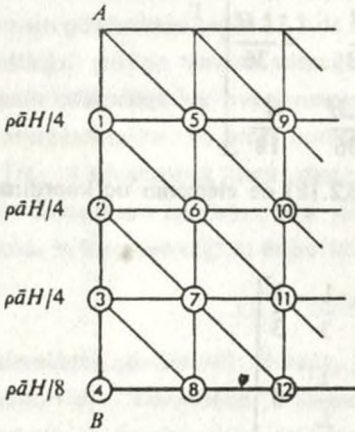
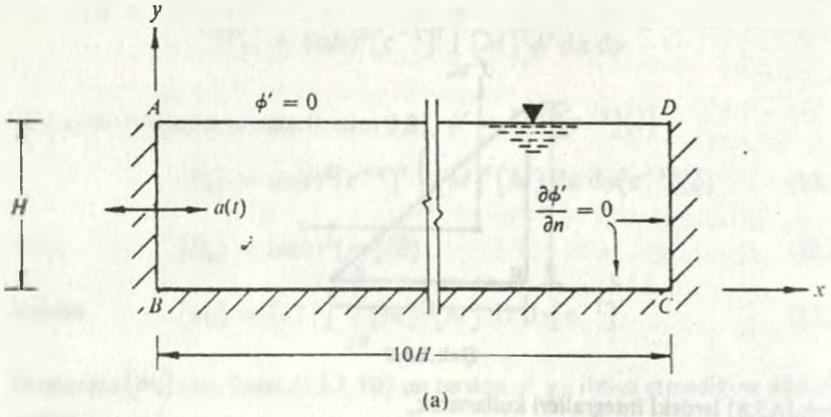
elde edilir. Ve sonra Denk.(13.2.46) daki çarpımı oluşturarak,

$$[m_i] = [c^{-1}]^T [X] [c^{-1}] = \frac{\Delta}{3} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

olduğunu gösterebiliriz. Denk.(13.2.48) de tanımlanan $\{M\}$ ile, herhangi bir üçgen elemanın, yukarıdaki $[m_i]$ değerinin elde edilebileceği kanıtlanabilir.

13.2.9 DALGA DENKLEMİNİN ÇÖZÜMÜNE BİR ÖRNEK

Şek.13.10a daki iki-boyutlu, su-dolu hazne ele alalım. Burada, BC ve CD kenarları hareketsiz ve AB kenarı hareketli olup; hazne ,



Şek.13.10 (a) Su dolu haznenin geometrisi. (b) (a) nın bir parçasının sonlu eleman modeli. (c) AB yüzeyi üzerindeki dinamik basınçlar:(1) hesaplanan, $\omega = \pi c / 3H$ (2) hesaplanan, $\omega = 0$; (3) kesin⁶ $\omega = 0$.

$$a(t) = \bar{a} \sin(\omega t)$$

gösterildiği gibi, ivmesine maruzdur. Bu hareketin sonucu olarak hidrodinamik basınçlar $\phi(x, y, t)$ doğacaktır. Eğer suyun viskozitesi ihmal edilirse, o takdirde bu basınçlar zaman ile,

$$\phi(x, y, t) = \phi' \sin(\omega t)$$

şeklinde değişecektir.

Burada, ϕ' , hidrodinamik basınçların "harmonik genliklerini" tanımlamaktadır. Hareketin küçük genlikleri için, ϕ' nün, Denk.(13.2.43) ile ifade edilebileceğini gösterebiliriz. Burada c sudaki ses hızını tanımlamaktadır.

ABCD içinde ϕ' nin değerlerini bulmak için, şimdi, Şek.13.10b de gösterilen parçayı sonlu elemanlar sistemine bölelim. Denk.(13.2.46) da $[m_i]$ lar ve kısım 13.2.3 deki metotla $[K_i]$ ler hesaplandıktan sonra, bunlar, sırasıyla $[m]$ ve $[K]$ yı elde etmek üzere toplanacaktır.

Bu problemin belirlenen sınır şartları şunlardır:

(a) Suyun serbest yüzeyi AD de $\phi' = 0$; dolayısıyla bu yüzeyin düğümlerle temsil edilmesi gerekmez.

(b) BC ve CD üzerinde $\partial\phi'/\partial n = 0$. Denk.(13.2.35) e göre, bu "yansıtma" şartı, bu sınırları temsil eden düğümlere sıfır dış "kuvvetler" uygulayarak hesaba katılacaktır.

(c) Hareket eden AB sınırı üzerinde, $\partial\phi'/\partial x = -\rho\bar{a}$. Bu şart Denk.(13.2.35) ile uygulanacaktır. Burada $h = H/4$, $q = \rho$, $a_k = \bar{a}$, $\beta = 0$ alınmalıdır. Örneğin 1 düğümünü (Şek.13.10b) ele alalım. Bu denkleme göre, bu düğümdeki dış kuvvet ($k = 1$),

$$P_1 = \rho\bar{a}H/4.$$

dır. Benzer tarzda bu yüzeydeki diğer düğümler için,

$$P_2 = P_3 = \rho\bar{a}H/4 \quad \text{ve} \quad P_4 = \rho\bar{a}H/8.$$

dır. Açıkçası, $\{P_0\}$ nin sıfır—olmayan bileşenleri, yalnız (c) den elde edilecektir. Yani,

$$\{P_0\} = \rho\bar{a}H\left\{\frac{1}{4} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{8} \quad \dots \text{bütün sıfırlar} \dots\right\}$$

dır. Denk.(13.2.47) yi ϕ' nin düğüm değerlerini bulmak için çözebiliriz. Şek. 13.10b, hareketin iki frekansında, AB yüzeyi üzerinde hesaplanan basınçları göstermektedir. Açıkıktır ki, hesaplanan sonuçların hassasiyeti, eğer istenirse, daha sık bölme yapmak suretiyle iyileştirilebilir.

Gerçekte, $\omega = 0$ (Şek.13.10c) ile elde edilen çözümler; Denk.(13.2.43) de $\omega = 0$ yazarak ulaşılan Laplace denklemi,

$$\frac{\partial^2 \phi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi'}{\partial y^2} = 0$$

den elde edilen çözüm olması ilginçtir.

REFERANSLAR

1. Archer, J. S., 'Consistent mass matrix for distributed systems', *Proc. Amer. Soc. Civ. Eng.*, 89, ST4, p. 161, 1963.
2. Zienkiewicz, O. C., Irons, B. and Nath. B., 'Natural frequencies of complex, free or submerged, structures by the finite element method', in *Symposium on Vibrations in Civil Engineering*, London, 1965.
3. Timoshenko, S. and Young, D. H., *Vibration problems in Engineering*, 3rd edn., D. Van Nostrand Company Inc., New York, 1955.
4. Visser, W., 'A finite element method for the determination of non-stationary temperature distribution and thermal deformations', *Proc. Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics*, Air Force Inst. of Technology, Ohio, Oct. 1965.
5. Filonenko-Boroditch, M., *Mathematical Theory of Elasticity*, Dover Publications Inc., p. 236, 1965.
6. Westergaard, H. M., 'Water pressure on Dams during Earthquakes', *Trans. Amer. Soc. Civ. Eng.*, 98, 1933, p. 418-33.

14 STABİLİTE PROBLEMLERİ

14.1 GENELLEME

Şimdiye kadar yapılan tartışmalarda, zorlanmalarla yerdeğiştirmelerin lineer olarak bağlı olması anlamına gelen cismin geometrik olarak "lineer" (kesim 2.1) olduğu varsayılmıştı. Bu varsayım yalnız yerdeğiştirmeler küçük olduğu sürece geçerlidir. Öyleki, cismin şekil değiştirmiş geometrisi, şekil değiştirmemiş geometrisinden önemli bir farklılık göstermez. Böyle durumlarda, bölünmüş cismin kuvvet—yerdeğiştirme bağıntısını Denk.(3.9) un terimleri cinsinden ifade edebiliriz. Öte yandan, eğer, yerdeğiştirmeler çok büyükse, cismin şekil değiştiren geometrisinin şekil değiştirmemiş geometrisinden önemli ölçüde farklı olduğu açıktır. Bu durum, Non—linear zorlanma—yerdeğiştirme bağıntısında ortaya çıkar. Bu tip büyük—yerdeğiştirme problemlerinin "geometrik olarak non—linear" olduğu söylenir.

Geometrik non—lineerite, yapı mekaniğinde sıkça karşılaşılan "elastik instabilite" problemlerinin bir özelliğidir. Bu problemlerde, okuyucunun farketmiş olacağı üzere, eğer uygulanan yük yapının "kritik" veya "burkulma" yükünü aşarsa yapı stabilitesini kaybeder ve sonunda "burkular". Bu olayın bilinen bir örneği Euler çubuğudur. Tasarım açısından, yapıların "kritik" yüklerinin hesaplanmasının çok büyük önemi vardır.

Sonlu eleman metodu kritik yüklerin^{1,2,3} hesaplanmasında etkin ve elegan bir biçimde kullanılabilir. Şimdi, zorlanma—yerdeğiştirme bağıntısı non—linear olduğunda şekil değiştiren cismin toplam zorlanması,

$$\{\epsilon\}_{\text{TOP}} = \{\epsilon\} + \{\epsilon\}^* \quad (14.1)$$

toplamı olarak ifade edilebilir. Burada, $\{\epsilon\}$ önceki bölümlerdeki geometrik olarak lineer zorlanmadır. Öte yandan, $\{\epsilon\}$ yerdeğiştirme(ler) in non—linear bir fonksiyonu olup, toplam zorlanmanın non—linear kısmını göstermektedir.

H , şekil değiştiren cismin $\{\epsilon\}$ dan doğan zorlanma enerjisini gösterebilir. Ve H , $\{\epsilon\}$ den doğan enerjiyi gösterebilir. O halde, cismin toplam zorlanma enerjisi,

$$H_{\text{TOP}} = H + H \quad (14.2)$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu bölümde, cismin malzemesinin Hooke kanununa uyduğu varsayılacaktır. Bununla birlikte uygulamada malzeme ve geometrik non—lineeritenin, çoğu kez olduğu gibi, bir arada ortaya çıkabileceğine dikkat edilmelidir.

* Bu bölümde altı çizilmiş semboller, geometrik olarak non—linear büyüklükleri tanımlamaktadır.

14.2 KUVVET—YERDEĞİŞTİRME BAĞINTISI

Tanımdan; H ,

$$H = \frac{1}{2} \int_V \{\epsilon\}^T \{\sigma\} dv \quad (14.3)$$

şeklinde verilmiştir. Yine, kesim 9.8 de, $\{\epsilon\} = [f]\{\delta\}$

$$\{\sigma\} = [d]\{\epsilon\}$$

sonuçta,
$$H = \frac{1}{2} \{\delta\}^T \int_V [f]^T [d] [f] dv \{\delta\} \quad (14.4)$$

olur. Sonra, matris cebri metotlarını uygulayarak Denk.(14.4) ün her iki tarafının $\{\delta\}$ ya göre türevi alındığında,

$$\frac{\partial H}{\partial \{\delta\}} = \int_V [f]^T [d] [f] dv \{\delta\} \quad (14.5)$$

elde edilir. [Burada, türev alma kuralı şöyledir:

Eğer, $\{x\}$ ve $\{B\}$ sütun vektörler ve $[A]$ bir kare matris ise, ve eğer,

$$H = \frac{1}{2} \{x\}^T [A] \{x\} + \{x\}^T \{B\}$$

ise, bu takdirde,
$$\frac{\partial H}{\partial \{x\}} = [A] \{x\} + \{B\}$$

olur. Denk.(9.11) den bu denklemin integralinin $[K_i]$ matrisi gibi olduğu farkedilebilir. Bu yüzden,

$$\frac{\partial H}{\partial \{\delta\}} = [K_i] \{\delta\} \quad (14.6)$$

yazabiliriz. H ait benzer bir bağıntıyı çıkarmak için, $[\sigma_0]$ geometrik olarak lineer analizden hesaplandığı gibi elemandaki düzlem—içi veya aksenal gerilmeleri gösterin. Yine, $\{\psi\}$, öyle olsun ki, zorlanma enerjisi H ,

$$H = \frac{1}{2} \int_V \{\psi\}^T [\sigma_0] \{\psi\} dv \quad (14.7)$$

şeklinde ifade edilebilir. [Bazı durumlarda olduğu gibi $[\sigma_0]$ ve $\{\psi\}$ her biri bir skalar büyüklüğü tanımlıyorsa Denk.(14.7),

$$H = \frac{1}{2} \int_V \psi \sigma_0 \psi dv \quad (14.8)$$

olacaktır.

$\{\psi\}$ henüz belirlenmediğinden, ve biraz sonra görüleceği üzere sözkonusu elemanın tipine bağlı olduğundan, ayrıca,

$$\{\psi\} = [N]\{A\} = [N][c^{-1}]\{\delta\} \quad (14.9)$$

olsun. Burada $[N]$, $[N]$ nin non-lineerdeki eşidir. Ve şimdi, Denk.(14.7), (14.9) arasında $\{\psi\}$ elimine edilerek,

$$H = \frac{1}{2}\{\delta\}^T [c^{-1}]^T \int_V [N]^T [\sigma_0] [N] dv [c^{-1}]\{\delta\} \quad (14.10)$$

elde edilir. Denk.(14.10) un her iki tarafının $\{\delta\}$ ye göre türevini alarak Denk. (14.5) de olduğu gibi,

$$\frac{\partial H}{\partial \{\delta\}} = [c^{-1}]^T \int_V [N]^T [\sigma_0] [N] dv [c^{-1}]\{\delta\} \quad (14.11)$$

$$[K_i] = [c^{-1}]^T \int_V [N]^T [\sigma_0] [N] dv [c^{-1}] \quad (14.12)$$

olur. Denk.(14.11) şimdi,

$$\frac{\partial H}{\partial \{\delta\}} = [K_i]\{\delta\} \quad (14.13)$$

şeklinde yazılacaktır. Sonuçta, Denk.(14.2), (14.6) ve (14.3) den,

$$\frac{\partial H_{\text{Topl}}}{\partial \{\delta\}} = [K_i + K_j]\{\delta\} \quad (14.14)$$

elde edilir. Fakat Castigliano teoreminin 1. bölümüne göre, Denk.(14.14) ün sol tarafı cismin üzerine etkileyen kuvvetlere eşittir. Sonuç olarak, kesim 9.2 de olduğu gibi bu denklemleri aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\{P\} = [K_i + K_j]\{\delta\} \quad (14.15)$$

$\{\epsilon\}$ dan doğan zorlanma enerjisini ele alarak elde edilen $[K_i]$ matrisine, i elemanın "geometrik direngenlik matrisi" adı verilir.

Elastik instabilite teorisinde⁴; $[\sigma_0]$ in düşey yerdeğiştirmelerden etkilenmediği varsayılır; yani, $\{\epsilon\}$ yalnız düşey yerdeğiştirmenin bir fonksiyonu olduğunda, $\{\epsilon\}$ ye göre $[\sigma_0]$ sabit kalır. Sonuçta, örneğin, belli bir yapıda $[\sigma_0]$ in bir tek σ_{xx} büyüklüğüne eşit olduğu bulunmuşsa ϵ yalnız düşey yerdeğiştirmenin bir fonksiyonu ise, o takdirde, ϵ dan doğan, cismin birim hacmindeki zorlanma enerjisinin $\epsilon \cdot \sigma_{xx}$ 'e eşit olacağı açıktır. Bu gerçekten, H hesaplandıktan sonra $[K_i]$ nin hesaplanması için yararlanılabilir.

Yapının bölündüğü bütün elemanların $[K_i]$ ve $[K_j]$ leri hesaplandıktan sonra yapının burkulma yükleri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$[K_i]$ ler bilinen yolla, $[K]$ yı oluşturmak üzere; $[K_i]$ ler tüm yapının "tümel

geometrik direngenlik matrisi" $[K]$ yı oluşturmak üzere tamamen aynı yolla toplanacaktır. O halde, Denk.(3.9) un geometrik non-linear de eşi,

$$[K + K]\{\delta\} = \{P\} \quad (14.16)$$

şeklinde yazılacaktır. Şimdi, ölçek faktörü λ dahil edip,

$$[K] = \lambda[K^*] \quad (14.17)$$

yazalım. Burada, $[K^*]$; $\{P\}$, 1 e eşit iken $[K]$ nin değeri olarak tanımlanır. O halde Denk.(14.16),

$$[K + \lambda K^*]\{\delta\} = \{P\} \quad (14.18)$$

$$\text{haline gelir. Ve buradan, } \{\delta\} = [K + \lambda K^*]^{-1}\{P\} \quad (14.19)$$

elde edilir. Bir yapının "burkulma" yükleri, $\{\delta\}$ yerdeğiştirmelerini sonsuza götürülen yükler olarak tanımlar. Denk.(14.19) determinantı sıfır olduğunda, yani,

$$\det |[K] + \lambda[K^*]| = 0 \quad (14.20)$$

ise, $\{\delta\}$ nin sonsuz olacağını göstermektedir. Dolayısıyla Denk.(14.20) $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ köklerine sahipse o takdirde λ_k ($k = 1, 2, \dots, N$), bölünmüş yapının k-ıncı burkulma modundaki burkulma yüküdür. Yine λ_k ya ilişkin bir burkulma "mod biçimi" vardır. Bu k-ıncı burkulma modundaki yapının burkulmuş biçiminin bağıl büyüklüğünü temsil eder. Burkulmanın birinci veya temel modundaki burkulma yükü en küçük kök $-\lambda_1$, tasarım açısından en önemli unsurdur.

Uygulama problemlerinde genellikle çok büyük $[K]$ ve $[K^*]$ matrisleri oluşmaktadır. Böyle durumlarda bilgisayar kullanılarak özdeğer denklemi,

$$[K]\{\delta\} = -\lambda[K^*]\{\delta\} \quad (14.21)$$

nin kökleri olarak burkulma yüklerinin belirlenmesi en uygun yoldur. Denk.(14.21), Denk.(14.20) nin değişik bir ifadesidir. Bu denklemin "özvektörleri" burkulma modu biçimleridir.

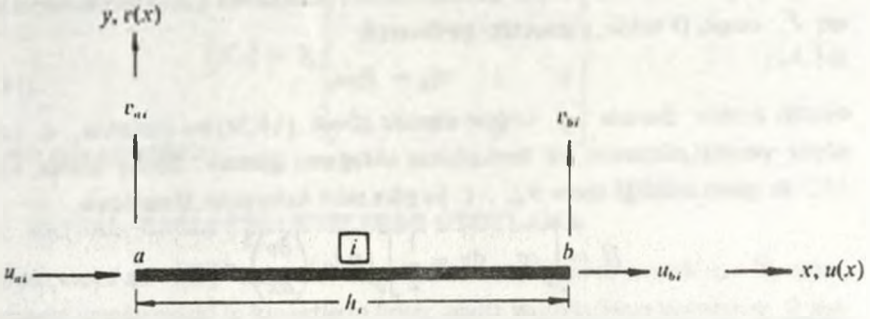
14.3 ÇUBUK ELEMANLARIN GEOMETRİK DİRENGENLİK MATRİSİ

Şek.14.1 gözönüne alınan elemanı göstermektedir. Kabul edilen geometrik lineerlik dolayısıyla bu elemanın düşey yerdeğiştirmeleri kesim 9.7 de ihmal edilmişti. Öte yandan, bu çözümlemede düşey yerdeğiştirme önemli* bir büyüklüğe sahip olduğundan hem eksenel, hem de düşey yerdeğiştirmeler gözönüne alınmalıdır.

$$u(x) = A_0 + A_1 x \quad (14.22a)$$

$$v(x) = A_2 + A_3 x \quad (14.22b)$$

* Çünkü, çubuğun deforma olmuş geometrisi deforme olmamış geometrisinden önemli ölçüde farklılaşmıştır.



Şek.14.1 Geometrik non-linear üniform çubuk eleman.

Sırasıyla, kabul edilen aksenal ve düşey yerdeğiştirmeler olsun. Şimdi, yukarıdaki denklemlerde uç koordinatları yerine yerleştirerek,

$$u_{ai} = u(0) = A_0$$

$$v_{ai} = v(0) = A_2$$

$$u_{bi} = u(h_i) = A_0 + A_1 h_i$$

$$v_{bi} = v(h_i) = A_2 + A_3 h_i$$

elde edilir. Alışıldığı üzere, bu denklemleri, Denk.(9.23) deki matris formuna koyacağız. Böylece,

$$[\delta] = \begin{Bmatrix} u_{ai} \\ v_{ai} \\ u_{bi} \\ v_{bi} \end{Bmatrix} \quad \text{ve} \quad \{A\} = \begin{Bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{Bmatrix}$$

ile,

$$[c] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & h_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h_i \end{bmatrix}$$

olduğunu gösterebiliriz. Tersini alarak,

$$[c^{-1}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1/h_i & 1/h_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/h_i & 1/h_i \end{bmatrix} \quad (14.23)$$

olur. Non-linear elastisite teorisinden çubuklarda,

$$\xi = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \quad (14.24)$$

olduğunu gösterebiliriz. Lineer çözümlerden hesaplanan çubuktaki ekeseysel kuvvet F_i olsun. O halde, çubuktaki gerilmenin,

$$\sigma_{xx} = F_i/a_i \quad (14.25)$$

olacağı açıktır. Burada, a_i kesitin alanıdır. Denk. (14.24) bu durumda, ϵ yalnız düşey yerdeğiştirmenin bir fonksiyonu olduğunu gösterir. Sonuç olarak, kesim 14.2 de işaret edildiği üzere σ_{xx} , ϵ ye göre sabit kalacaktır. Dolayısıyla,

$$H = \int_V \epsilon \sigma_{xx} dv = \frac{1}{2} \int_V (F_i/a_i) \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dv \quad (14.26)$$

yazılabilir. O halde, bu denklemi değişik bir şekilde,

$$H = \frac{1}{2} \int_V \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) (F_i/a_i) \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) dv \quad (14.27)$$

yazarak ve Denk.(14.8) ile (14.27) karşılaştırılarak, bu durumda,

$$\psi = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (14.28)$$

ve

$$\sigma_0 = F_i/a_i \quad (14.29)$$

olduğu açıktır. Şimdi, Denk.(14.22b) de $u(x)$ in türevi,

$$\psi = A_3 = \{0 \ 0 \ 0 \ 1\} \{A\} \quad (14.30)$$

bu denklemi verir. Denk.(14.9) ve (14.30) arasındaki karşılaştırmadan,

$$\{N\} = \{0 \ 0 \ 0 \ 1\} \quad (14.31)$$

olduğu görülür. Ve şimdi, Denk.(14.29) ve (14.31),

$$\int_V [N]^T [\sigma_0] [N] dv = F_i \int_0^a \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \{0 \ 0 \ 0 \ 1\} dx = F_i h_i \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (14.32)$$

olduğunu gösterebiliriz. Nihayet, Denk.(14.12), (14.23) ve (14.32) den,

$$[K_i] = (F_i/h_i) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (14.33)$$

olduğunu gösterebiliriz. $[K_i]$ nin boyutunu $[K_i]$ nin boyutu ile aynı olmak zorunda olduğundan Denk.(7.2) den şimdi,

$$[K_i] = k_i \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (14.34)$$

şeklinde elde edilecektir.

14.4 MAFSAL—BAĞLI ÇERÇEVELERDE UYGULAMA

Tüm çerçeveye ait $[K]$ nın genel eksenlerdeki karşılığını toplamak için ilk adım, çerçevenin uzuvlarındaki iç kuvvetlerin lineer analiz yoluyla hesaplanmasıdır. O halde, $[K_i]$ ler Denk.(14.33) den bulunabilir. Bundan sonraki adım, bunların hepsini ortak genel koordinat sistemine transform etmektir. Burada, Bölüm 7 de olduğu gibi bu matrislerin genel değerleri,

$$[K^*] = [T_i][K_i][T_i]^T \quad (14.35)$$

şeklinde bulunacaktır. Örneğin, düzlem çerçevede, Denk.(14.35) de kullanılacak transformasyon matrisinin,

$$[T_i] = \begin{bmatrix} l_i & -m_i & 0 & 0 \\ m_i & l_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_i & -m_i \\ 0 & 0 & m_i & l_i \end{bmatrix} \quad (14.36)$$

olduğu kolayca ispatlanabilir. Sonuçta, Denk.(14.33), (14.35) ve (14.36) da,

$$[K^*] = (F_i/h_i) \begin{bmatrix} r & -s & -r & s \\ -s & q & s & -q \\ -r & s & r & -s \\ s & -q & -s & q \end{bmatrix} \quad (14.37)$$

olduğunu gösterebiliriz. Burada, $q = l_i^2$, $r = m_i^2$ ve $s = l_i m_i$ (l_i ve m_i Şek.7.1 de tanımlanmıştır).

$[K^*]$ lar hesaplandıktan sonra, bilinen yolla, tüm çerçevenin "genel tümel geometrik dirençlik matrisi" $[K^{**}]$ yi elde etmek üzere toplanacaktır. Ve sonra,

$$[K^*] = \lambda [K^{**}] \quad (14.38)$$

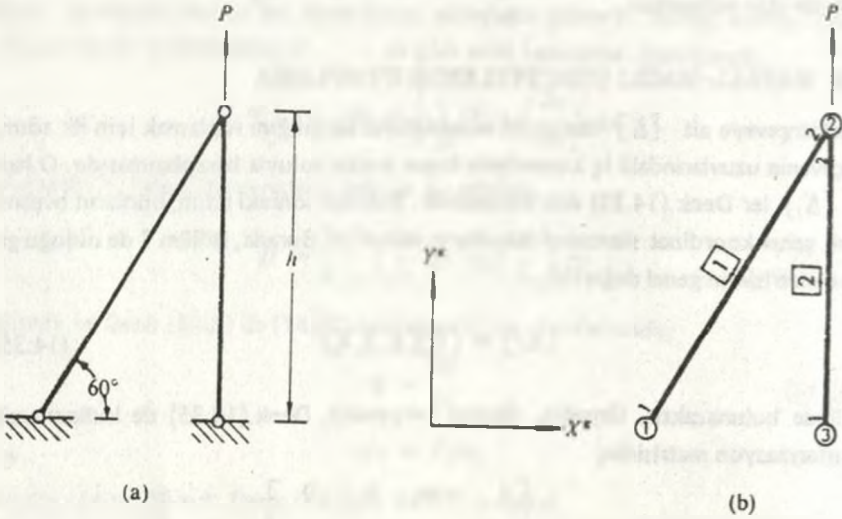
ile, burkulma yükleri,

$$\det |[K^*] + \lambda [K^{**}]| = 0 \quad (14.39)$$

nin kökleri olarak bulunabilecektir. Burada $[K^*]$, Bölüm 7 deki lineer genel tümel dirençlik matrisidir.

BİR ÖRNEK

Şek.14.2a daki basit düzlem çerçevesi ele alalım. Çerçevenin sonlu eleman modeli Şek.14.2b de gösterilmiştir. $a_1 = a_2 = a$ ve $E_1 = E_2 = E$ şeklinde verilmiştir. O halde,



Şek.14.2 (a) Mafsal-bağlı düzlem çerçeve. (b) (a) nın sonlu eleman modeli.

Denk.(7.12) den,

$$[K_1^e] = \frac{\sqrt{3}aE}{8h} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} & -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 & -\sqrt{3} & -3 \\ -1 & -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -3 & \sqrt{3} & 3 \end{bmatrix} \quad (14.40)$$

elde edilir. Ve,

$$[K_2^e] = \frac{aE}{h} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (14.41)$$

olur. Bu durumda sınır şartlarının,

$$u_1^e = v_1^e = u_3^e = v_3^e = 0$$

olduğu açıktır. Daha sonra 1 ve 3 düğümlerini dışarıda bırakıp, Bölüm 3 deki metotları izleyerek, Denk.(14.40) ve (14.41) den,

$$[K^*] = \frac{\sqrt{3aE}}{8h} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 + \frac{8}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \quad (14.42)$$

olduğunu gösterebiliriz. Denk.(14.37) den $[K^*]$ leri hesaplamak için, lineer analizden hesaplandığı gibi, iç uzuv kuvvetlerinin $F_2 = P^*$ ve $F_1 = 0$ olduğuna dikkat edilmelidir. Sonuç olarak,

$$[K^*] = [0]$$

ve

$$[K^*] = \frac{P}{h} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dır. Bu matrisleri $[K^*]$ lerdeki gibi aynı yolla toplayarak,

$$[K^*] = \frac{P}{h} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Ve tanımdan $P = 1$ olduğunda $[K^{**}] = [K^*]$ olduğuna dikkat ederek,

$$[K^{**}] = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (14.43)$$

elde edilir. O halde, Denk.(14.39), (14.42) ve (14.43) den,

$$\det \begin{vmatrix} 1 + \frac{8\lambda}{\sqrt{3aE}} & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 + \frac{8}{\sqrt{3}} \end{vmatrix} = 0 \quad (14.44)$$

elde edilir. Bu denklemden λ yı çekerek burkulma yükü olarak,

$$P_{KRITIK} = \lambda = -\frac{\sqrt{3aE}}{8 + 3\sqrt{3}}$$

elde edilir. Negatif işaret, burkulma yükünün Şek.14.2a da gösterilen doğrultuya zıt doğrultuda etkidiğini göstermektedir. Bu sonuç, Timoshenko ve Gere⁴ tarafından verilen kesin sonuçla uygunluk gösterir. Denk.(14.44) ün bir tek kökü olması, çerçevenin bir tek burkulma moduna sahip olduğunu gösterir.

* F_1 çekmede pozitif ve basmada negatiftir.

14.5 KİRİŞ ELEMANLARIN GEOMETRİK DİRENGENLİK MATRİSİ

Şek.2.6 daki üniform kiriş elemanı ele alalım (eksenel ve burulma büyüklükleri ile ilgili olmadığımızdan, burada, ihmal edilecektir). Bu elemanda, kesim 14.4 deki çubuk elemanda olduğu gibi,

$$\sigma_0 = F_1/a_1$$

$$\epsilon = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2$$

olduğunu gösterebiliriz. Burada, $v(x)$ elemanın transvers çökmesidir. Sonuç olarak Denk.(14.28) bu eleman için geçerlidir. O halde, Denk.(9.32) de $v(x)$ in türevini alarak,

$$\psi = A_1 + 2A_2x + 3A_3x^2$$

$$= \{0 \quad 1 \quad 2x \quad 3x^2\} \{A\} \quad (14.45)$$

elde edilir. Burada, $\{A\}$, Denk.(9.32) deki sabitleri kapsar. Denk.(14.9) ve (14.45) karşılaştırıldığında,

$$\{N\} = \{0 \quad 1 \quad 2x \quad 3x^2\} \quad (14.46)$$

olduğu açıktır. O halde, Denk.(14.29) ve (14.46) dan,

$$\int_V [N]^T [\sigma_0] [N] dv = F_1 \int_0^{h_1} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2x \\ 3x^2 \end{Bmatrix} \{0 \quad 1 \quad 2x \quad 3x^2\} dx$$

$$= F_1 \int_0^{h_1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2x & 4x^2 & 6x^3 \\ 0 & 3x^2 & 6x^3 & 9x^4 \end{bmatrix} dx$$

$$= F_1 h \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & h & h^2 \\ 0 & h & \frac{4h^2}{3} & \frac{3h^3}{2} \\ 0 & h^2 & \frac{3h^3}{2} & \frac{9h^4}{5} \end{bmatrix} \quad (14.47)$$

elde edilir. Burada, uyum sağlamak için h_1 yerine h yazılmıştır. Denk.(9.35) ve (14.47) yi Denk.(14.12) de kullanarak ve çarpma işlemini yaparak,

$$[K_i] = (F_i/h) \begin{bmatrix} \frac{6}{5} & & & \\ & \text{Simetrik} & & \\ \frac{h}{10} & \frac{2h^2}{15} & & \\ -\frac{6}{5} & -\frac{h}{10} & \frac{6}{5} & \\ \frac{h}{10} & -\frac{h^2}{30} & -\frac{h}{10} & \frac{2h^2}{15} \end{bmatrix} \quad (14.48)$$

olduğu kanıtlanır. Elemanın $[K_i]$ si aksel ve/veya burulma direngenlikleri (örneğin Denk.2.8) ihtiva ediyorsa, $[K_i]$ de uygun yerlere sıfırlar yerleştirilmelidir. Öyle ki, bu iki matris aynı boyutta olsunlar. Yine, rijit-bağlı çerçevelerde olduğu gibi, elemanlar farklı doğrultulara sahipse, Denk.(14.48) deki $[K_i]$, Bölüm 6 daki transformasyon matrisleri kullanılarak dönüştürülecektir.

BİR ÖRNEK

Denk.(14.48) deki $[K_i]$ nin tipik bir uygulaması olarak, Şek.14.3a daki aksel yüklü üniform çubuğu ele alalım. Başlangıçta çubuğu, Şek.14.3b deki bir tek elemanla temsil edelim. Bu durumda, Denk.(2.8) den (aksel ve burulma büyüklükleri ihmal edilerek) çubuğun her iki ucunda transvers yerdeğiştirme sıfır olduğundan,

$$[K] = \frac{EI}{h} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad (14.49)$$

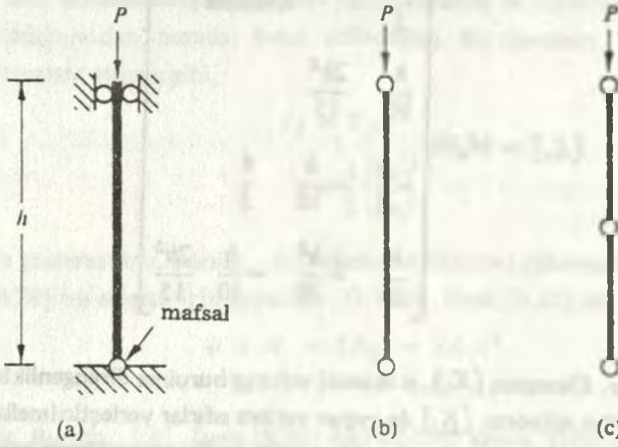
olduğunu gösterebiliriz. Benzer tarzda Denk.(14.48),

$$[K] = -Ph \begin{bmatrix} \frac{2}{15} & -\frac{1}{30} \\ -\frac{1}{30} & \frac{2}{15} \end{bmatrix} \quad (14.50)$$

ve böylece tanımdan $P = 1$,yazarak,

$$[K^*] = -h \begin{bmatrix} \frac{2}{15} & -\frac{1}{30} \\ -\frac{1}{30} & \frac{2}{15} \end{bmatrix} \quad (14.51)$$

elde edilir.



Şek.14.3 (a) Bir üniform çubuk (EI sabit). (b) (a) nın bir eleman ile temsili. (c) (a) nın iki elemanla temsili.

Sonuç olarak, Denk.(14.20),

$$\det \begin{vmatrix} 4\beta - \frac{2h\lambda}{15} & 2\beta + \frac{h\lambda}{30} \\ 2\beta + \frac{h\lambda}{30} & 4\beta - \frac{2h\lambda}{15} \end{vmatrix} = 0$$

haline gelir. Burada, $\beta = EI/h$ dir. Bu denklemin kökleri: $\lambda_1 = 12EI/h^2$ ve $\lambda_2 = 60EI/h^2$ dir. Böylece, temel burkulma modundaki burkulma yükü,

$$P_{\text{KRITİK}} = \lambda_1 = 12EI/h^2$$

dir. Bu yükün kesin değeri $\pi^2 EI/h^2$ dir. Elde edilen sonuçtaki hata oranı %21,6 dir. Bununla beraber, bu beklenen bir sonuçtur. Çünkü, çubuk bir tek sonlu elemanla temsil edilmektedir. Çubuk çok sayıda sonlu elemanla temsil edilirse, hassasiyetin iyileştiği görülecektir. Örneğin, Şek.14.3c de olduğu gibi, iki elemanla temsil edildiğinde, hata nisbetinin %2,7 olduğu kanıtlanabilir.

Büyük kök λ_2 çubuğun ikinci burkulma modunda $P_{\text{KRITİK}}$ değerine eşittir. Burada, bu yükün hesaplanan değeri, kesin değer $4\pi^2 EI/h^2$ den 1.5 kat fazladır. Bununla beraber, bu değer, λ_1 de olduğu gibi, hassasiyeti, çubuğu temsil eden eleman sayısı arttıkça iyileşecektir.

14.6 PLAKLARDA UYGULAMA

İnce düz plakların büyük–yerdeğiştirme teorisinde, "orta düzlemin" (Şek.10.1) şekildeğiştirmemiş durumda x - y düzlemiyle çakışan şekildeğiştirmiş bir plaktaki non-linear zorlanma $\{\xi\}$ un,

$$\{\underline{\epsilon}\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (14.52)$$

şeklinde ifade edilebileceği gösterilmiştir. Burada, $w(x, y)$ plağın transvers çökmesini göstermektedir. Böylece, eğer elemandaki gerilmeler geometrik lineer analizde hesaplandığı gibi,

$$\sigma'_{xx}, \sigma'_{yy} \text{ ve } \tau'_{xy},$$

ise, bu durumda,

$$\underline{H} = \int_V \left(\frac{1}{2} \sigma'_{xx} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \sigma'_{yy} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \tau'_{xy} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \right) dv$$

olur. Bu denklem matris formunda,

$$\underline{H} = \frac{1}{2} \int_V \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} \sigma'_{xx} & \tau'_{xy} \\ \tau'_{xy} & \sigma'_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} dv \quad (14.53)$$

şeklinde yazılabilir. Denk.(14.7) ve (14.53) karşılaştırıldığında, bu durumda,

$$[\sigma_0] = \begin{bmatrix} \sigma'_{xx} & \tau'_{xy} \\ \tau'_{xy} & \sigma'_{yy} \end{bmatrix} \quad (14.54)$$

ve

$$\{\psi\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (14.55)$$

olduğu açıktır. Elemanın $[N]$ matrisi şimdi, Denk.(14.55) de bulunabilir. Denk. (10.21), (14.9) ve (14.55) den örneğin, üçgen plak elemanın $[N]$ olduğunu gösterebiliriz.

$$[N] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2x & y & 0 & 3x^2 & (2xy + y^2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x & 2y & 0 & (2xy + x^2) & 3y^2 \end{bmatrix} \quad (14.56)$$

Üniform t kalınlıklı ince bir plak eleman halinde Denk.(14.12) nin,

$$[K_i] = t \cdot [c^{-1}]^T \int_S [N]^T [\sigma_0] [N] dx dy [c^{-1}]$$

haline geldiğine dikkat edilmelidir. Burada integrasyon işlemi elemanın tüm alanı üzerinde yapılmıştır. Üçgen plak elemanın $[K_i]$ matrisi, $[\sigma_0]$, $[N]$ ve $[c^{-1}]$ (Tablo 10.3 de $[c]$ nin tersi alınarak elde edilir) yukarıdaki denklemlerde yerine yazılarak bulunabilir. İzlene yöntem dikdörtgen plak elemandaki yöntemle özdeşdir.

Denk.(11.18) ve (11.19) dikdörtgen bir elemanda zorlanmaların ve bunun sonucu olarak, $[\sigma_0]$ in lineer olarak değişeceğini göstermektedir. Böyle durumlarda, $[\sigma_0]$ in değişiminin gözönüne alındığı bölünmüş plağın her bir elemanı için,

$$\int_S [N]^T [\sigma_0] [N] dx dy$$

kapalı form integralinin hesaplanması gerekir. Bununla birlikte, bu oldukça sıkıcı bir işlem olduğundan, çoğu kez önemli bir hassasiyet kaybı söz konusu olmaksızın her bir elemanda σ'_{xx} , σ'_{yy} , τ'_{xy} o eleman üzerinde karşı gelen ortalama değerlerine eşitlenir.

14.7 EKSENEL VEYA DÜZLEM—İÇİ KUVVETLERİN ETKİSİNDE BULUNAN YAPILARIN TRANSVERS TİTREŞİMİ

Eksenel veya düzlem—içi kuvvetler etkidiğinde plaklar, kirişler vb. nın dinamik karakteristiklerinin değiştiği bilinen bir gerçektir. Değişme miktarı, bu kuvvetlerin işaret ve büyüklüğüne bağlıdır. Bu yapıların doğal frekanslarının ve mod biçimlerinin hassas bir şekilde belirlenmesinde sonlu eleman metodu kullanılabilir. Geometrik lineer yapıların doğal frekanslarının Denk.(13.1.22) nin kökleri olduğu kesim 13.1 de gösterilmişti. Eğer probleme geometrik non—lineerite dahil edilirse, bu durumda yapının toplam direngenliğinin,

$$[K] + [K]$$

toplamı haline geldiği açıktır. Sonuç olarak, Denk.(13.1.22) nin geometrik non—lineer eşi, şimdi,

$$\det [K + K] - \omega^2 [m] = 0 \quad (14.57)$$

şeklinde yazılır. Veya bir özdeğer denklemi cinsinden,

$$[K + K]\{\delta\} = \omega^2 [m]\{\delta\} \quad (14.58)$$

yazılır. Bu denklemler şimdi, sözkonusu yapının doğal frekanslarını ve mod biçimlerini hesaplamak için çözülebilir.

BİR ÖRNEK

Yukarıdaki denklemlerin tipik bir uygulaması olarak Şek.14.3a daki aksel yükü çubuğun transvers titreşiminin temel frekansını hesaplıyalım. Çubuk, Şek.14.3b deki gibi, bir tek elemanla temsil edildiğinde, Denk.(14.49) ve (14.50) den,

$$[K + \underline{K}] = \begin{bmatrix} 4\beta - \frac{2Ph}{15} & 2\beta + \frac{Ph}{30} \\ 2\beta + \frac{Ph}{30} & 4\beta - \frac{2Ph}{15} \end{bmatrix} \quad (14.59)$$

elde edilir. Çubuğun $[m]$ matrisinin, bir tek elemanla yaklaşımda, Denk.(13.1.16) daki $[m_i]$ ye eşit olacağına dikkat edilmelidir. Bundan başka çubuğun her iki ucunda transvers çökmeler sıfır olduğundan, $[m]$ nin 1 ve 3 satırları ve sütunları silinecektir. Sonuç olarak,

$$[m] = \frac{\rho ah^3}{420} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \quad (14.60)$$

dır. Burada, a kesit alanını tanımlamaktadır. Denk.(14.57), (14.59) ve (14.60) dan dan bu çubuğun frekans denkleminin,

$$\det \begin{vmatrix} 4\beta - \frac{2Ph}{15} - \frac{\gamma}{105} & 2\beta + \frac{Ph}{30} + \frac{\gamma}{140} \\ 2\beta + \frac{Ph}{30} + \frac{\gamma}{140} & 4\beta - \frac{2Ph}{15} - \frac{\gamma}{105} \end{vmatrix} = 0 \quad (14.61)$$

olduğu bulunabilir. Burada, $\gamma = \omega^2 \rho ah^3$ dir. Yukarıdaki determinanti çözerek bu denklemin iki kökünün,

$$\omega_1 = 10.954 \left(\frac{EI}{\rho ah^4} \right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{Ph^2}{12EI} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (14.62)$$

$$\omega_2 = 50.200 \left(\frac{EI}{\rho ah^4} \right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{Ph^2}{60EI} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (14.63)$$

olduğunu gösterebiliriz. Bunlar sırasıyla, temel ve birinci harmonik (doğal) dairesel frekanslardır. Bu frekansların kesin değerleri,

$$\omega_1 = \pi^2 \left(\frac{EI}{\rho ah^4} \right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{Ph^2}{\pi^2 EI} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\omega_2 = 4\pi^2 \left(\frac{EI}{\rho ah^4} \right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{Ph^2}{4\pi^2 EI} \right)^{\frac{1}{2}}$$

dir. ω_1 ve ω_2 nin bu değerleri göstermektedir ki:

(a) Hesaplanan sonuçların önemli ölçüde hatalı olduğu açıktır. Bununla birlikte, genelde, çubuğun bölündüğü eleman sayısı arttıkça, sonuçlar kesin değerlerine yaklaşacaktır.

(b) Eksenel kuvvet basma olduğunda, Şek.14.3a daki gibi, doğal frekanslar azalmakta ve çekme olduğunda artmaktadır.

(c) Denk.(14.62),

$$P = 12EI/h^2$$

olduğunda, $\omega_1 = 0$ olduğunu göstermektedir. Fakat P nin bu değeri, çubuğun temel burkulma modu için hesaplanan P_{kritik} değeridir (bkz. kesim 14.5). Benzer şekilde, Denk.(14.63) ün gösterdiği gibi; P çubuğun ikinci burkulma modunun hesaplanan kritik değerine eşit olduğunda $\omega_2 = 0$ dir. Bu yüzden aşağıdaki sonucu çıkarabiliriz:

Eğer uygulanan eksenel veya düzlem-içi kuvvet basma ve büyüklüğü k-ıncı burkulma modundaki P_{kritik} büyüklüğüne eşit ise, yapının titreşimi, k-ıncı titreşim modunda (yani, $\omega_k = 0$; bkz. kesim 13.1.3) son bulur. Bu durum, yapının k-ıncı titreşimi ve burulma modlarının özdeş olması şartıyla meydana gelir. Bazı durumlarda olduğu gibi, bunlar özdeş değil ise, durum daha karmaşık hale gelir.

(a) ve (b) bütün yapılarla; (c) bu tip yapıların çoğuna uygulanır.

REFERANSLAR

1. Argyris, J. H., Kelsey, S. and Kamel, H., 'Matrix Methods in Structural analysis, AGARD-ograph 72, Pergamon Press, pp. 1-164, 1964.
2. Turner, M. J., Martin, H. C. and Weikel, R. C., 'Further Development and Application of the Stiffness method', AGARD-ograph 72, Pergamon Press, pp. 203-66, 1964.
3. Martin, H. C., 'On the derivation of stiffness matrices for the analysis of large deflection and stability problems', *Proc. conf. Matrix Methods in Structural Mechanics*, Air Force Base Institute of Technology, Wright Patterson Air Force Base, Ohio, Oct. 1965.
4. Timoshenko, S. P. and Gere, J. M., *Theory of Elastic Stability*, 2nd edn., McGraw-Hill, 1961.
5. Fung, Y. C., *Foundations of Solid Mechanics*, Prentice Hall Inc., 1965.

15 HESAPLAMA*

15.1 GENELLEME

Bilimsel veya mühendislik problemleri sonlu elemanlara bölündüğünde, büyük boyutlu tümel direngenlik matrisleri ortaya çıkmakta ve bunların işlemleri bilgisayar kullanımını kaçınılmaz kılmaktadır. Günümüzde yüksek hızlı ve çok yetenekli bilgisayarlar sayesinde birçok bilimsel ve mühendislik problemlerinin çözümü, uygun bir çözüm şemasını kurmak kaydıyla, gerçekleştirilebilmektedir.

Sonlu elemanlar problemlerinin bilgisayar çözümü, ana verilerin sistematik bir tarzda düzenlenmesiyle büyük ölçüde kolaylaşır. Burada, belki de en önemli veriler, tümel direngenlik matrisinin toplanmasıyla ilgili olanlardır. Burada, bunlar özellikle vurgulanacaktır. Çünkü, deneyimler yeni başlayanların bu toplama işlemi ve programlanmasını zor bulduklarını göstermektedir. Problemin çözümüne götüren, diğer hesaplama adımları da, her bir işlem için gerekli veri takımları halinde bölünmek suretiyle basit bir tarzda sunulacaktır.

Genel amaçlı programlar —"paket" programlar adı verilen— yazma eğilimi bile- rek teşvik edilmeyecektir. Çünkü, bu programlar, sonlu elemanların programlanma- sında, önemli işlemleri, yeni başlayanların anlamasını engellemektedir.

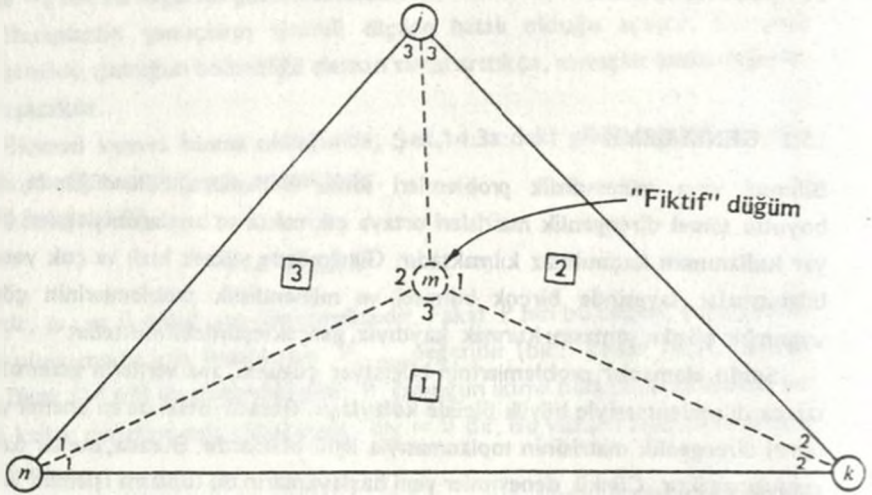
15.2 $[K_i]$ Yİ İYİLEŞTİRME YÖNTEMLERİ

Daha hassas sonuçlar elde etmek için, bir sonlu elemanın $[K_i]$ matrisini iyileştirme- nin birçok yolu vardır. Bunlardan yaygın olarak kullanılanlar şunlardır:

"FİKTİF" DÜĞÜMLER YÖNTEMİ

Bu metotta, bir veya daha çok "fiktif" (hayali) düğüm, dış kuvvetlerin bulunma- dığı iç düğümler olarak tanımlanır. Bir tek fiktif düğüm m yi ihtiva eden, $n_k j$

* Kitabın orijinalinde bu bölümün sonuna eklenmiş bulunan, fortran dilinde yazıl- mış programlar ve bu programlarla ilgili açıklamalar çeviride çıkarılmıştır. Yalnız hesaplamalarla ilgili genel açıklamalar alınmıştır.



Şek.15.1 "Fiktif" düğümlü bir üçgen eleman.

üçgen elemanını (Şek.15.1) ele alalım. Fiktif m düğümü elemanı daha küçük olan 1, 2 ve 3 üçgenlerine bölmektedir (daire ve kare içindeki rakamlar, sırasıyla, düğüm ve eleman numaralarını göstermektedir). Bu üçgenler ve onları bağlayan düğümlerin tüm "yapıyı" oluşturduğu hayal edilebilir. Yapının tümel direngenlik matrisi Bölüm 3 deki yöntemlerle toplanabilir. Gerçekten, bu "yapı" için Denk.(3.9) un,

$$\begin{Bmatrix} \{P_n\} \\ \{P_k\} \\ \{P_j\} \\ \{P_m\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S(1, 1, 1) & S(1, 1, 2) & S(3, 1, 3) & S(3, 1, 2) \\ + S(3, 1, 1) & & & + S(1, 1, 3) \\ S(1, 2, 1) & S(1, 2, 2) & S(2, 2, 3) & S(1, 2, 3) \\ & + S(2, 2, 2) & & + S(2, 2, 1) \\ S(3, 3, 1) & S(2, 3, 2) & S(2, 3, 3) & S(2, 3, 1) \\ & & + S(3, 3, 3) & + S(3, 3, 2) \\ \hline S(3, 2, 1) & S(1, 3, 2) & S(2, 1, 3) & S(1, 3, 3) \\ + S(1, 3, 1) & + S(2, 1, 2) & + S(3, 2, 3) & + S(2, 1, 1) \\ & & & + S(3, 2, 2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\delta_n\} \\ \{\delta_k\} \\ \{\delta_j\} \\ \{\delta_m\} \end{Bmatrix} \quad (15.1)$$

haline geleceği açıktır. Burada, $\{P_k\}$ ve $\{\delta_k\}$ lar kesim 2.7 de tanımlanmıştır. 1, 2 ve 3 elemanlarının $S(i, j, k)$ ları açık olarak bilinmektedir. Şimdi, Bu denklemi sembolik formda,

$$\begin{Bmatrix} \{P_j\} \\ \{P_m\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\delta\} \\ \{\delta_m\} \end{Bmatrix} \quad (15.2)$$

şeklinde yazalım. Denk.(15.1) ve Denk.(15.2) deki matrislerin eşdeğer oldukları açıktır. m düğümü fiktif olduğu için, tanımdan, $\{P_m\} = \{0\}$ dir.

Dolayısıyla Denk.(15.2) nin çarpımından,

$$\{P\} = [A]\{\delta\} + [B]\{\delta_m\} \quad (15.3a)$$

$$\{0\} = [B]^T\{\delta\} + [C]\{\delta_m\} \quad (15.3b)$$

elde edilir. Denk.(15.3b) nin her iki tarafını soldan $[C^{-1}]$ ile çarparak ve elde edilen sonuç ve Denk.(15.3a) arasında $\{\delta_m\}$ i elimine ederek,

$$\{P\} = [A - BC^{-1}B^T]\{\delta\} \quad (15.4)$$

olduğu gösterilebilir. Denk.(15.4); n, k ve j düğümlerindeki kuvvetleri bu düğümlerdeki yerdeğiştirmelere bağlar. Ayrıca, elemanı izole edilmiş olarak düşündüğümüz için, düğüm kuvvetleri ve yerdeğiştirmeleri sırasıyla, elemanın uç (iç) kuvvetlerine ve yerdeğiştirmelerine eşittir. Sonuç olarak, tanımdan,

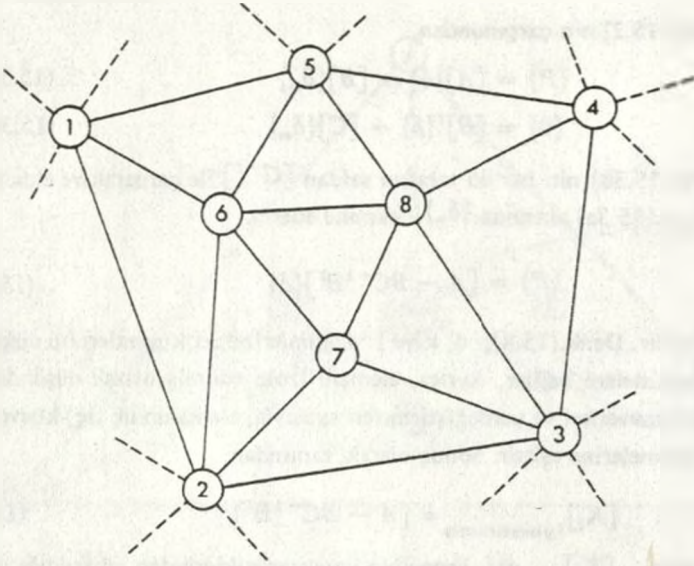
$$[K_i]_{\text{iyileştirilmiş}} = [A - BC^{-1}B^T] \quad (15.5)$$

yazabiliriz. Burada, $[K_i]$, nkj üçgeninin karakteristiklerinden çıkarıldığı için, Şek.15.1 ve Denk.(15.5) e dikkat edilirse, $[K_i]_{\text{iyileştirilmiş}}$ nin çıkarımı, 1, 2 ve 3 elemanlarını daha da küçültecek tarzda njk nin sık bölünmesine bağlı olduğu görülür. Bu yüzden kesim 9.6 da yapılan açıklamalara göre, $[K_i]_{\text{iyileştirilmiş}}$ den elde edilen sonuçlar, $[K_i]$ den elde edilenlerden daha hassas olacaktır. Bu işlemin bütün sonlu elemanlara uygulanabileceği açıktır.

Yukarıdaki işlem esas itibariyle, dış kuvvetlerin bulunmadığı iç düğümlerin elimine edilmesi işlemidir. Bu yüzden bu yöntemi, verilen bir problemde böyle düğümleri elimine ederek problemin boyutunu küçültmek için de kullanılabilir. Bunun bilgisayar saklama hafızasında önemli bir tasarruf sağlayacağı açıktır. Örneğin bir problemin "alt-bölgesini" oluşturan düğümleri ele alalım. Serbestlik derecesi, 3 olsun; ve 6, 7 ve 8 düğümlerinde dış kuvvetler bulunmasın. Şimdi, bilinen yolla bu alt-bölgenin $[K]$ matrisini toplarsak, boyutu 24 x 24 olacaktır. Öte yandan, eğer 6, 7 ve 8 düğümlerine "fiktif" olarak bakılıp, ve yukarıda anlatılan yöntemle elimine edilirse, $[K]$ nın boyutu 15 x 15 e inmiş olacaktır. Açık ki, eğer bu işlem problemin bütün alt-bölgeleri için tekrarlanırsa; bu, bilgisayar hafızasında önemli bir tasarruf sağlayacaktır. Bu tip düğümlerin eliminasyonunu tamamiyle otomatik olarak yapacak bilgisayar programları hazırlanabilir.

EK UÇLAR YÖNTEMİ

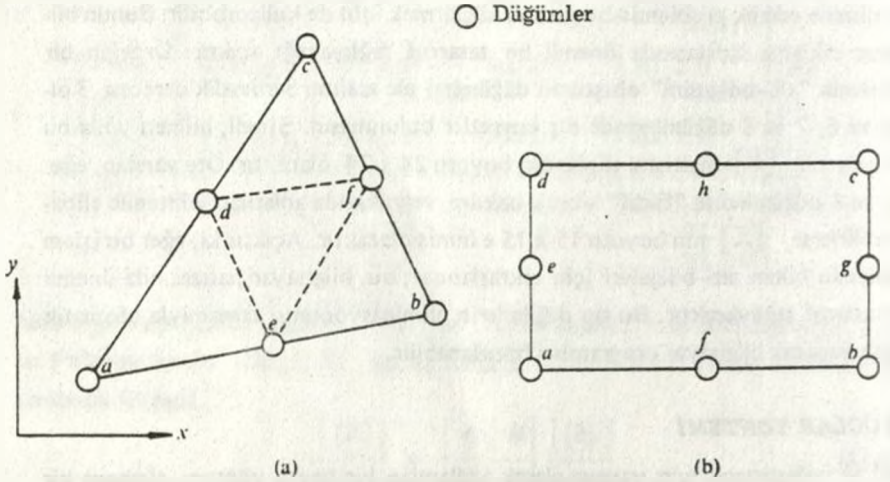
$[K_i]$ yi iyileştirmek için yaygın olarak kullanılan bir başka yöntem, elemana bir çok "ek uçlar" dahil etmektir. Örneğin, Şek.15.3a (kesikli çizgiler zamanla kaldırılacaktır) daki üçgen elemanı ele alalım. Burada; d, e ve f ek uçlardır. Böylece,



Şek. 15.2 Büyük bir problemin tipik bir "alt-bölgesi".

kesim 9.5(a) ya göre bu durumda $n = 6$ dir. Sonuç olarak, elemanın her bir yerdeğiştirmesini 6 bilinmeyen sabitle tanımlanan bir polinom olarak kabul edebiliriz (3 uçlu üçgen elemanda her bir bileşen için 3 sabitin kullanıldığını hatırlayınız).

Bir örnek olarak Şek.15.3 deki elemanın düzlem problemlerin çözümünde kullanıldığını varsayalım. O takdirde, yerdeğiştirmenin her bir bileşeni, 6 sabit



Şek.15.3 Tipik "çok-uçlu elemanlar"; (a) üçgen; d, e ve f ek uçlardır. (b) Dikdörtgen; e, f, g ve h ek uçlardır.

$$u(x, y) = A_0 + A_1x + A_2y + A_3xy + A_4x^2 + A_5y^2 \quad (15.6a)$$

$$v(x, y) = A_6 + A_7x + A_8y + A_9xy + A_{10}x^2 + A_{11}y^2 \quad (15.6b)$$

şeklinde kabul edilebilir. $j (= a, b, c, \dots, f)$ ucunun koordinatları (x_j, y_j) bilindiği gibi, uç yerdeğiştirmeler şimdi, u_{ji} ve v_{ji} yi elde etmek için bu denklemlerde yerlerine yazılır. Bütün yerdeğiştirmeler $[c]$ yi elde etmek için Denk.(11.2) deki matris formunda düzenlenir. Bu matris, burada 12 x 12 lik bir matris olarak bulunacaktır. Bu durumda Denk.(11.4a) şemasına göre, Denk.(15.6) ların bilinen yolla, türevlerini alarak $[N]$ matrisi bulunabilir. $[c]$ ve $[N]$ matrisleri bulunduktan sonra, kesim 9.8 deki denklemlerden elemanın $[K_i]$ si hesaplanacaktır.

Dikkat edilirse, Denk.(10.30) larla temsil edilen yerdeğiştirmeler lineer olarak değişmekle birlikte; Denk.(15.6) bir parabolik değişimi gösterir ve bu değişimin, elemanın gerçek yerdeğiştirmesine daha iyi yaklaşacağı açıktır. Sonuç olarak, Denk.(15.6) lardan elde edilen $[K_i]$, Denk.(10.30) lardan elde edilenden daha hassas sonuçlar verir. Şek.15.3a ya dikkat ederek, bunun niçin böyle olduğunu anlamak kolaydır. Ek uçlar ilavesi, kesikli çizgilerle gösterildiği gibi, orijinal elemanı çok sayıda elemana ayırmak için, daha sık bölme şeklinde bakılabilir. Gerçekte, deneyim, ek uçlar kullanarak yapılan çözüm sonuçlarının, Şek.15.3a daki gibi, uçlarını kesikli çizgilerle birleştirilmesiyle yapılan bölmeden elde edilen sonuçlardan daha iyi olduğunu göstermektedir.

Bu metodun herhangi bir sonlu elemanda kullanılabileceği açıktır. Tipik bir çok uçlu dikdörtgen eleman Şek.13.3b de gösterilmiştir. Ayrıca bu metotları kullanarak $[K_i]$ ve $[m_i]$ matrisleri de daha hassas sonuçlar elde etmek için iyileştirilebilir.

15.3 BİR MATRİSİN DOLAYLI OLARAK TERSİNİN ALINMASI

Önceki bölümlerde, ana diyagonalı üzerinde bir veya daha çok sıfır ihtiva ettiğinde $[c]$ matrisinin doğrudan tersinin alınmadığı durumlara sık sık karşılaşmıştık. Bununla birlikte, $[c]$ veya determinantı sıfır olmayan herhangi bir kare matrisin, bilgisayara kolayca programlanabilen, aşağıdaki metotlarla dolaylı olarak tersi alınabilir:

"SATIR DEĞİŞTİRME" METODU

Aşağıdaki denklem sistemini ele alalım.

$$\begin{aligned} 4h_1 + 2b_2 - b_3 + h_4 &= 9 \\ 2b_1 + 3h_3 - h_4 &= 7 \\ -h_1 + b_2 + h_3 + 2h_4 &= 12 \\ 3h_1 - h_2 + 2h_3 + 5h_4 &= 27 \end{aligned} \quad (15.7)$$

Bu denklemi aşağıdaki şekilde matris formuna koyabiliriz.

$$[A] \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 9 \\ 7 \\ 12 \\ 27 \end{Bmatrix} \quad (15.8)$$

Burada,

$$[A] = \begin{matrix} 1 \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \quad (15.9)$$

dır. $[A]$ nin determinantı sıfıra eşit olmadığı için, Denk.(15.8) in çözümünün,

$$\begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{Bmatrix} = [A^{-1}] \begin{Bmatrix} 9 \\ 7 \\ 12 \\ 27 \end{Bmatrix}$$

olduğu açıktır. $[A]$ matrisinin doğrudan tersini alamayız. Çünkü, ana diyagonalı üzerinde ikinci satırda sıfır bulunmaktadır. Dolayısıyla "ilgili" satır ile bir başka satırı aralarında yerdeğiştirerek $[A]$ matrisini "değiştirilmiş" şekle koyalım. Öyle ki, $[A]$ matrisinin yeni şeklinde ana diyagonalı üzerinde sıfır bulunmasın. Örneğin, 2. satır ve 3. satırı aralarında yerdeğiştirerek Denk.(15.7) yi matris formunda,

$$[A_r] \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 9 \\ 12 \\ 7 \\ 27 \end{Bmatrix}$$

şeklinde yazabiliriz. Burada, $[A_r]$, $[A]$ matrisinin "değiştirilmiş" şeklidir ve,

$$[A_r] = \begin{matrix} 1 \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 3 & -1 \\ 4 & 3 & -1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix}$$

şeklinde verilmiştir.

Şimdi, $[A_r]$ matrisinin doğrudan tersini alabiliriz. Ve kanıtlanabilir ki,

$$[A_r^{-1}] = \begin{bmatrix} 0.12500 & -0.18750 & 0.06250 & 0.06250 \\ 0.20833 & 0.39583 & 0.06250 & -0.18750 \\ -0.08333 & 0.16667 & 0.25000 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.12500 & -0.12500 & 0.12500 \end{bmatrix}$$

1 2 3 4

dır. Şimdi, $[A^{-1}]$ matrisi, $[A_r^{-1}]$ in 2. ve 3. sütunlarını aralarında yerdeğiştirmek suretiyle elde edilebilir. Böylece,

$$[A^{-1}] = \begin{bmatrix} 0.12500 & 0.06250 & -0.18750 & 0.06250 \\ 0.20833 & 0.06250 & 0.39583 & -0.18750 \\ -0.08333 & 0.25000 & 0.16667 & 0.00000 \\ 0.00000 & -0.12500 & 0.12500 & 0.12500 \end{bmatrix} \quad (15.10)$$

1 3 2 4

dır. Açık ki, bu yöntem, ana diyagonalı üzerinde çok sayıda sıfır ihtiva ettiğinde yukarıda işaret edildiği gibi, satırları aralarında değiştirmek suretiyle, değiştirilmiş matrisi elde etmek şartıyla kullanılabilir.

Eğer, uygunsa, $[A]^{-1}$ i teşkil etmek üzere $[A]$ nin satırları yerine sütunları benzer tarzda aralarında yerdeğiştirilebilir. Bazen $[A]$ nin hem satırları ve hem de sütunlarının aynı zamanda aralarında değiştirildiği bir "karışık" şemanın kullanılması uygun olabilir.

$[Z]$ MATRİS YÖNTEMİ

Değişik bir yol olarak Denk.(15.9) daki $[A]$ matrisinin tersi aşağıdaki yolla alınabilir:

$[Z]$ determinantı sıfır olmayan bir kare matris olsun ve,

$$[X] = [A][Z] \quad (15.11)$$

olsun. O takdirde, eğer $[X]$ nin sıfır olmayan elemanları, $[Z]$ in ana diyagonalı üzerinde sıfır meydana gelmeyecek tarzda seçilmiş ise, $[X]$ in doğrudan tersi alınabilir. Şimdi, Denk.(15.11) in her iki tarafının tersi alındığında,

$$[[A][Z]]^{-1} = [Z^{-1}][A^{-1}] \quad \text{olduğundan, } [X^{-1}] = [Z^{-1}][A^{-1}] \quad (15.12)$$

elde edilir. Denk.(15.12) nin her iki tarafını $[Z]$ ile soldan çarparak,

$$[A^{-1}] = [Z][X^{-1}] \quad (15.13)$$

ulaşılır. Denk.(15.13), $[A^{-1}]$ in; önce Denk.(15.11) de tanımlanan $[X]$ in tersi alınıp ve sonra $[Z][X^{-1}]$ çarpımı yapılarak elde edilebileceğini göstermektedir.

Bu metoda ait tipik bir uygulama olarak $[A]$ matrisinin (Denk.15.9) ters

alma işlemini ele alalım. Eğer $[Z]$ i keyfi olarak,

$$[Z] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde seçmiş isek ve sonra Denk.(15.9) ve (15.11) den,

$$[X] = [A][Z] = \begin{bmatrix} 4 & 6 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

elde edilir. $[X]$ in ana diyagonalı üzerinde sıfır bulunmadığından doğrudan tersini alabiliriz.

$$[X^{-1}] = \begin{bmatrix} -0.08333 & 0.00000 & -0.58333 & 0.25000 \\ 0.20833 & 0.06250 & 0.39583 & -0.18750 \\ -0.08333 & 0.25000 & 0.16667 & 0.00000 \\ 0.00000 & -0.12500 & 0.12500 & 0.12500 \end{bmatrix}$$

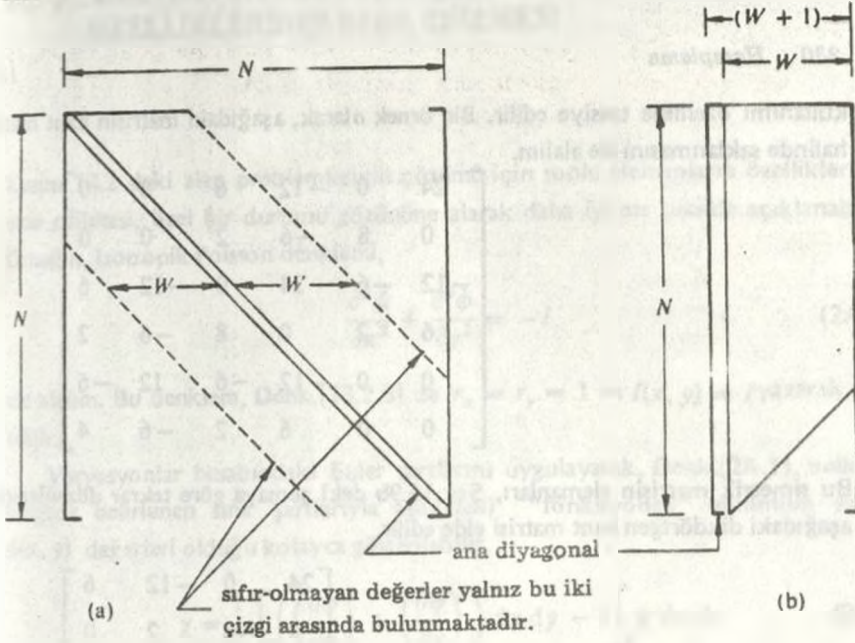
Çarpma işlemini yaparak $[Z][X^{-1}]$ çarpımının tamamıyla Denk.(15.10) daki $[A^{-1}]$ e eşit olduğu kanıtlanabilir. $[Z]$ nin seçiminin tamamen keyfi olduğu ve $[A][Z]$ çarpımının ana diyagonalı üzerinde sıfır ihtiva etmeyecek tarzda seçilebileceği gözlenmektedir. Deneyim en iyi sonuçların,

$$[Z] = [A]^T$$

yazarak elde edilebileceğini göstermektedir. Bu yöntem, satırları aralarında değiştirme yönteminde olduğu gibi, determinantı sıfırdan farklı olan, ve doğrudan tersi alınamayan herhangi bir matrisin tersini almak için kullanılabilir.

15.4 $[K]$ NİN BİR DİKDÖRTGEN MATRİS GİBİ, ÇÖZÜMÜ

$[K]$ nın bir kare matris şeklinde elde edilebileceğini görmüştük. Bununla birlikte, $[K]$, değişik bir yol olarak çok daha küçük bir dikdörtgen matris olarak tanımlanıp, saklanabilir. Bu, bölünmüş cismi sistematik olarak numaralandırma ile yapılabilir. O takdirde, $[K]$ nın sıfır-olmayan terimleri, normal olarak, ana diyagonal çevresinde bulunacaktır. Örneğin Şek.15.9a da gösterilen; "bant genişliği" nin burada, W olduğu söylenen $[K]$ matrisini ele alalım. $[K]$ nın mertebesi N olduğundan, Şek.15.9a da görüldüğü gibi bilgisayarda bir kare matris olarak saklanması için



Şek.15.9 (a) Kare formdaki $[K]$ matrisi. (b) dikdörtgen formdaki $[K]$ matrisi; yalnız simetrik yarısı.

toplam N^2 "sözcüğün" gerektiği açıktır. Öte yandan, eğer $[K]$ nin simetrik olma avantajı kullanılır. Ve Şek.15.9b de görüldüğü gibi, N satırlı ve $(W + 1)$ sütunlu bir dikdörtgen matris olarak toplarsak, bu durumda, saklamak için yalnız $N(W + 1)$ "sözcük" gerekli olacaktır. Açık ki, bu yolla özellikle büyük problemlerde "bant genişliği" W yu minimize ederek bilgisayar saklama kapasitesinde önemli ölçüde tasarruf sağlanacaktır.

Verilen bir problemde, W değeri, bölünmüş cismin numaralanma tarzıyla belirlenir. Bu yolla, $[K]$ matrisinde "bantlama" suretiyle, maksimum tasarruf sağlanması, düğüm numaralandırma işlemi rasgele yapılarak gerçekleştirilemeyeceği açıktır. Öte yandan, eğer numaralandırma işlemi sistematik ve ardışık bir tarzda yapılırsa W ve bunun sonucu saklama kapasitesi ihtiyacı minimize edilecektir. Gerçekten, bu tip bir minimizasyon problemi, çok ilginç bir problem olup büyük problemleri çözerken okuyucuyu, minimum W değerini tayin etmek için, iki veya daha çok farklı numaralandırma şemasını denemeye teşvik eder.

Saklama kapasite ihtiyacının oldukça küçülmesinden başka "dikdörtgenleştirilmiş" veya "bantlanmış" $[K]$ matrisinin bilgisayar işlem zamanı, kare $[K]$ matrisinin işleminden de önemli ölçüde azalır. Bu yüzden dikdörtgen $[K]$ matrisinin

kullanımı özellikle tavsiye edilir. Bir örnek olarak, aşağıdaki matrisin bant matris halinde saklanmasını ele alalım.

$$\begin{bmatrix} 24 & 0 & -12 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -6 & 2 & 0 & 0 \\ -12 & -6 & 24 & 0 & -12 & 6 \\ 6 & 2 & 0 & 8 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & -12 & -6 & 12 & -6 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

Bu simetrik matrisin elemanları, Şek.15.9b deki şemaya göre tekrar düzenlenirse, aşağıdaki dikdörtgen bant matrisi elde edilir.

$$\begin{bmatrix} 24 & 0 & -12 & 6 \\ 8 & -6 & 2 & 0 \\ 24 & 0 & -12 & 6 \\ 8 & -6 & 2 & 0 \\ 12 & -6 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Açıkçası, burada $W = 3$ olup, kare matrisin ana diyagonalı, bant matrisin birinci sütunu haline gelir. Bu yüzden, simetrik olmayan kare matris, bir bant matris halinde yazılırsa, kare matrisin ana diyagonalı, bant matrisin $(W + 1)$ -inci sütunu haline gelir. Aynı zamanda, bu durumda, bant matrisin boyutu $N(2W + 1)$ olacaktır.

EK 2 VARYASYON PRENSİBİNDEN "ALAN" ELEMANLARININ ÖZELLİKLERİNİN ELDE EDİLMESİ

Kesim 13.2 deki alan problemlerinin çözümü için sonlu elemanların özelliklerinin elde edilmesi, özel bir durumu gözönüne alarak daha iyi bir şekilde açıklanabilir. Örneğin, izotropik Poisson denklemi,

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -I \quad (2A.1)$$

ele alalım. Bu denklem, Denk.(13.2.3) de $r_x = r_y = 1$ ve $I(x, y) = I$ yazarak elde edilir.

Varyasyonlar hesabındaki Euler şartlarını uygulayarak, Denk.(2A.1), belli bir bölgede belirlenen sınır şartlarıyla aşağıdaki "fonksiyoneli" minimum yapan $\phi(x, y)$ değerleri olduğu kolayca gösterilebilir.

$$\chi = \frac{1}{2} \int_S \left(\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right) dx dy - I \int_S \phi dx dy \quad (2A.2)$$

Örneğin, Şek.13.6a daki üçgen elemanı ele alalım. $\phi(x, y)$ nin bu elemanda Denk.(13.2.14) e göre değiştiğini varsayalım. Türev işlemlerini yaparak Denk. (2A.2),

$$\chi = \frac{1}{2} \int_{\Delta} (A_1^2 + A_2^2) dx dy - I \int_{\Delta} \phi dx dy \quad (2A.3)$$

haline gelir. Burada, A_1 ve A_2 , Denk.(13.2.14) ün sabitleridir. Şimdi,

$$\{A\} = \{A_0 \quad A_1 \quad A_2\}^T,$$

olduğundan,

$$A_1^2 + A_2^2 = \{A\}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \{A\} \quad (2A.4)$$

olduğunu gösterebiliriz. Tanımdan (kesim 9.8) $\{A\} = [c^{-1}]\{\delta\}$ olduğundan, çarpımın transpozunu alma kuralını uygulayarak,

$$A_1^2 + A_2^2 = \{\delta\}^T [c^{-1}]^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [c^{-1}]\{\delta\}$$

elde edilir.

EK 1 Sİ BİRİMLERİNİN F.P.S. BİRİMLERİNE DÖNÜŞÜMÜ

Uzunluk	1 m	= 3.28083 ft
Alan	1 m ²	= 10.76391 ft ²
Kütle	1 kg	= 2.20462 lb
Yoğunluk	1 kg/m ³	= 0.062428 lb/ft ³
Kuvvet	1 N	= 0.224809 lbf
Moment	1 Nm	= 0.737562 lbf ft
Gerilme	1 MN/m ²	= 145.038 lbf/in ² .

$$1 \text{ kN} = 10^3 \text{ N}$$

$$1 \text{ MN} = 10^6 \text{ N}$$

$$1 \text{ GN} = 10^9 \text{ N}$$

Bunu ve $\phi = \{M\}[c^{-1}]\{\delta\}$ yı Denk.(2A.3) de yerine yazıp; ve $[c^{-1}]$ ve $\{\delta\}$ nin kullanılan koordinatlardan bağımsız olduğuna dikkat ederek,

$$\chi = \frac{1}{2}\{\delta\}^T [c^{-1}]^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [c^{-1}]\{\delta\} \int_{\Delta} dx dy - I\{\delta\}^T [c^{-1}]^T \int_{\Delta} \{M\}^T dx dy^*$$

elde edilir. Veya üçgenin alanı üzerinde alınan $\int_{\Delta} dx dy$ integrali üçgenin alanı Δ ya eşit olup,

$$\chi = \frac{1}{2}\{\delta\}^T [c^{-1}]^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [c^{-1}]\{\delta\} \Delta - I\{\delta\}^T [c^{-1}]^T \int_{\Delta} \{M\}^T dx dy$$

elde edilir. Bu denklemin $\{\delta\}$ ya göre türevini alarak (Denk.14.5 in dipnotuna bakınız).

$$\frac{\partial \chi}{\partial \{\delta\}} = \Delta [c^{-1}]^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [c^{-1}]\{\delta\} - I [c^{-1}]^T \int_{\Delta} \{M\}^T dx dy \quad (2A.5)$$

elde edilir. $r_x = r_y = 1$ kabul edildiğinde, Denk.(13.2.23) den,

$$\Delta [c^{-1}]^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [c^{-1}]$$

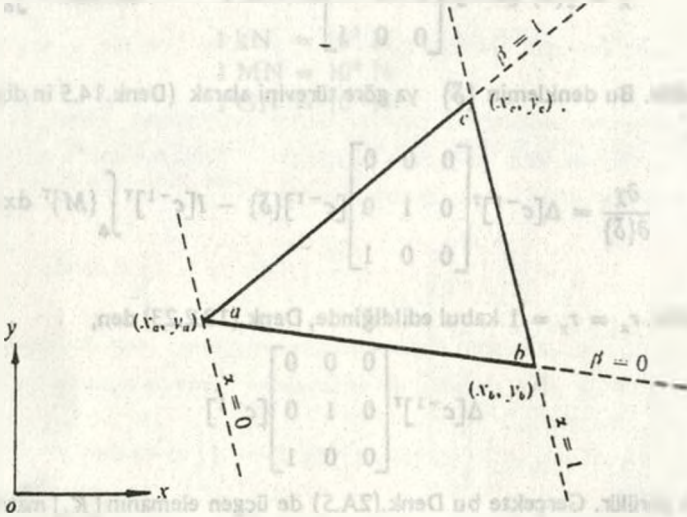
olduğu görülür. Gerçekte bu Denk.(2A.5) de üçgen elemanın $[K_i]$ matrisidir. Ayrıca Denk.(13.2.13) den, Denk.(2A.5) in ikinci terimi (negatif işaretsiz) üçgen elemanın $\{P_b\}$ vektörüdür. Burada $I(x, y) = I$ dir.

Bu yöntem; sözkonusu fiziksel problemi veren denklemin fonksiyoneli χ yı varyasyonlar hesabından elde edebilmek şartıyla; alan, yapı ve sürekli ortam elemanlarının özelliklerini elde etmek için kullanılabilen genel bir yöntemdir.

* $\phi(x, y)$ bir skalar olduğundan, $\phi = \phi^T$ yazabiliriz.

EK 3 ÜÇGEN ALAN ÜZERİNDE İNTEGRASYON

Bir üçgen alan üzerinde genel formda $\int_{\Delta} x^m y^n dx$ integralinin hesabı Şek.A3.1 de gösterildiği gibi üçgen koordinatlar $\alpha\beta$ kullanıldığında önemli ölçüde basitleşir. Şekilden, y o x deki uç koordinatlarla $\alpha\beta$ sistemi arasında aşağıdaki bağıntılar mevcuttur.



Şek.A3.1 Dikdörtgen (yox) ve üçgen ($\alpha\beta$) koordinat sistemleri.

$$x = x_a, \quad y = y_a \quad \text{da} \quad \alpha = 0, \quad \beta = 0 \quad (\text{A3.1a})$$

$$x = x_a, \quad y = y_b \quad \text{da} \quad \alpha = 0, \quad \beta = 1 \quad (\text{A3.1b})$$

$$x = x_b, \quad y = y_b \quad \text{da} \quad \alpha = 1, \quad \beta = 0 \quad (\text{A3.1c})$$

$$x = x_c, \quad y = y_c \quad \text{da} \quad \alpha = 1, \quad \beta = 1 \quad (\text{A3.1d})$$

Dört farklı şart bulunduğundan, her bir dik eksenini üçgen eksenlerin terimleri cinsinden dört sabitle ifade edebiliriz. Özel olarak,

$$x = A_0 + A_1\alpha + A_2\beta + A_3\alpha\beta \quad (\text{A3.2})$$

olsun. Denk.(A3.1) lerdeki şartları, Denk.(A3.2) den yerine yazarak şimdi; $A_0 \dots A_3$

sabitleri tayin edilebilir. Burada Denk.(A3.2),

$$x = x_a + \alpha x_{ba} + \alpha\beta x_{cb} \quad (\text{A3.3a})$$

haline gelir. Burada, x_{ba} ve x_{cb} koordinat farklarıdır (kesim 11.1). Benzer tarzda,

$$y = y_a + \alpha y_{ba} + \alpha\beta y_{cb} \quad (\text{A3.3b})$$

olduğunu gösterebiliriz. y o x sisteminde ve üçgen alan üzerinde gerçekleştirilen $\int_{\Delta} x^m y^n dx dy$ integrali, şimdi üçgen sisteme,

$$\begin{aligned} I_{mn} &= \int_{\Delta} x^m y^n dx dy \\ &= \int_0^1 \int_0^1 (x_a + \alpha x_{ba} + \alpha\beta x_{cb})^m (y_a + \alpha y_{ba} + \alpha\beta y_{cb})^n \cdot |J| \cdot d\alpha d\beta \quad (\text{A3.4}) \end{aligned}$$

şeklinde transform edilebilir. Transformasyonun Jakobiyan determinanı $|J|$ tanımından,

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \alpha} & \frac{\partial y}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial x}{\partial \beta} & \frac{\partial y}{\partial \beta} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial y}{\partial \beta} - \frac{\partial x}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial y}{\partial \alpha} \quad (\text{A3.5})$$

dır. Denk.(A3.3), (A3.5) ler ve kesim 11.1 den,

$$|J| = \alpha(x_{ab}y_{bc} - x_{bc}y_{ab}) = 2 \Delta\alpha \quad (\text{A3.6})$$

olduğunu gösterebiliriz. Denk.(A3.4) de $|J|$ yi yerine yazıp integrasyon işlemini yaparak aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

$$I_{00} = \int_{\Delta} dx dy = \Delta \quad (\text{A3.7a})$$

$$I_{10} = \int_{\Delta} x dx dy = \frac{\Delta}{3}(x_a + x_b + x_c) \quad (\text{A3.7b})$$

$$I_{01} = \int_{\Delta} y dx dy = \frac{\Delta}{3}(y_a + y_b + y_c) \quad (\text{A3.7c})$$

$$I_{20} = \int_{\Delta} x^2 dx dy = \frac{\Delta}{6}(x_a^2 + x_b^2 + x_c^2 + x_a x_b + x_a x_c + x_b x_c) \quad (\text{A3.7d})$$

$$I_{02} = \int_{\Delta} y^2 dx dy = \frac{\Delta}{6}(y_a^2 + y_b^2 + y_c^2 + y_a y_b + y_a y_c + y_b y_c) \quad (\text{A3.7e})$$

$$I_{11} = \int_{\Delta} xy dx dy = \frac{\Delta}{12}(x_a y_a + x_b y_b + x_c y_c + (x_a + x_b + x_c)(y_a + y_b + y_c)) \quad (\text{A3.7f})$$

Alternatif olarak, eğer üçgenin ağırlık merkezi, y o x koordinatlarının orijini olarak alınırsa, sonuçta,

$$(x_a + x_b + x_c) = (y_a + y_b + y_c) = 0,$$

elde edilir. Denk.(A3.7) lerden aşağıdaki kullanılması daha kolay olan basit formlar elde edilir. Bunlar:

$$I_{00} = \Delta \quad (\text{A3.8a})$$

$$I_{10} = 0 \quad (\text{A3.8b})$$

$$I_{01} = 0 \quad (\text{A3.8c})$$

$$I_{20} = \frac{\Delta}{12}(x_a^2 + x_b^2 + x_c^2) \quad (\text{A3.8d})$$

$$I_{02} = \frac{\Delta}{12}(y_a^2 + y_b^2 + y_c^2) \quad (\text{A3.8e})$$

$$I_{11} = \frac{\Delta}{12}(x_a y_a + x_b y_b + x_c y_c) \quad (\text{A3.8f})$$

