T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LORENTZ DÜZLEMİNDE BURMESTER TEORİSİ

DOKTORA TEZİ

Kemal EREN

Enstitü Anabilim Dalı : **MATEMATİK**

Enstitü Bilim Dalı : **GEOMETRİ**

Tez Danışmanı : **Prof. Dr. Soley ERSOY**

Ocak 2019

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LORENTZ DÜZLEMİNDE BURMESTER TEORİSİ

DOKTORA TEZİ

Kemal EREN

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Enstitü Bilim Dalı : GEOMETRİ

Bu tez 04/01/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği/oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr.
Nuri KURUOĞLU
Jüri Başkanı

Prof. Dr.
Soley ERSOY
Üye

Prof. Dr.
Mehmet Ali GÜNGÖR
Üye

Doç. Dr.
Adil BAŞOĞLU
Üye

Dr. Öğr. Üyesi
Nurten GÜRSES
Üye

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

Kemal EREN
04.01.2019

TEŞEKKÜR

Tezimin hazırlanması sırasında ilminden faydalandığım, yanında çalışmaktan onur duyduğum değerli danışmanım Prof. Dr. Soley ERSOY'a sonsuz teşekkür ve saygılarımı sunarım.

Bilgilerini ve deneyimlerini her zaman cömertçe benimle paylaşan Matematik Bölümü Öğretim Üyeleri Prof. Dr. Murat TOSUN'a, Prof. Dr. Mehmet Ali GÜNGÖR'e, Doç. Dr. Mahmut AKYİĞİT'e ve Dr. Öğr. Üyesi Hidayet Hüda KÖSAL'a tezime olan katkılarından dolayı şükranlarımı sunarım.

Hem tezimin hazırlanması süresince hem de hayatımın her anında yanımda olan, yüksek sabrı ile beni sürekli destekleyen değerli eşim Halime EREN'e ve her zaman benim için en iyisini isteyen, maddi manevi bütün imkânlarıyla beni bugünlere getiren aileme tüm kalbimle teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

Bl	: Ball nokta
Bl_r	: r -ek Ball nokta
Br	: Burmester nokta
br	: Çift çembersel kübik eğri
Br_s	: s -ek Burmester nokta
cp	: Çembersel nokta eğrisi
$c\tilde{p}$	: Merkez nokta eğrisi
Γ	: Merkezi pol normali üzerinde olan cp eğrisinin çemberi
$\tilde{\Gamma}$	: Merkezi pol normali üzerinde olan $c\tilde{p}$ eğrisinin çemberi
Γ_0	: Merkezi pol teğeti üzerinde olan çember
κ	: Yörünge eğriliği
(ξ,η)	: Eğrilik merkezi
ρ_f	: Sabit pol eğrisi
ρ_m	: Hareketli pol eğrisi
R	: Eğrilik yarıçapı
xoy	: Hareketli koordinat sistemi
XOY	: Sabit koordinat sistemi
v	: Hareketli düzlem
V	: Sabit düzlem
v/V	: 1-parametreli hareket
V/v	: 1-parametreli ters hareket

ŞEKİLLER LİSTESİ

TABLOLAR LİSTESİ

ÖZET

Anahtar kelimeler: Lorentz düzlemsel hareket, çembersel nokta eğrisi, merkez nokta eğrisi, çift çembersel nokta eğrisi, Ball nokta, Burmester nokta

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmış olup literatür özeti ve tezin amacı verilmiştir. İkinci bölümde karmaşık ve hiperbolik sayıların cebirsel ve geometrik özellikleri özetlenmiştir. Üçüncü bölümde ise Öklid düzleminde hareketler ayrıntılı olarak incelenmiştir.

Dördüncü bölüm bu çalışmanın orijinal kısmını oluşturmaktadır ve üç alt bölüm olarak düzenlenmiştir. Dördüncü bölümün birinci alt bölümünde Lorentz düzleminde hareketle ilgili temel kavramlar verilip pol noktaları, özel referans sistemleri, Bottema'nın ani invaryantları, yörünge eğriliği, kanonik sistemler, orijinin yörüngesi, ters hareket, pol noktasında hareketli ve sabit pol eğrilerin eğriliği ve ikinci pol noktasında ikinci sabit pol eğrisinin eğriliği incelenmiştir. İkinci alt bölümde Lorentz düzleminde çembersel nokta eğrisi, merkez nokta eğrisi, Ball noktaları, ters hareketin Ball noktaları, ek Ball noktaları araştırılmıştır. Ayrıca çembersel nokta eğrisi ve merkez nokta eğrisinin dejenere durumlarında oluşan çemberler analiz edilmiş ve bu eğrilerin geometrik yorumları verilmiştir. Üçüncü alt bölümde ise Lorentz düzleminde Burmester nokta tanımı verilerek Burmester noktaların geometrik yeri olan eğrinin denklemi elde edilmiş ve bu eğri ile çembersel nokta eğrisinin sonsuzda reel kesişimleri incelenmiştir. Bu inceleme neticesinde Lorentz düzleminde Burmester noktaların sayısı ve geometrik yeri belirtilmiştir.

Beşinci bölümde tüm çalışmanın geniş bir özeti yapılmış ve bundan sonra yapılacak araştırmalara yönelik öneride bulunulmuştur.

BURMESTER THEORY IN LORENTZIAN PLANE

SUMMARY

Keywords: Lorentzian planar motion, circling point curve, centering point curve, twice circling point curve, Ball point, Burmester point.

This thesis consists of five chapters. The first chapter is the introduction chapter which includes a review of the literature and the scope of the research problem. In the second chapter, the algebraic and geometric properties of the complex numbers and hyperbolic numbers are summarized. In the third chapter, motion in the Euclidean plane are examined in detail.

The fourth chapter is the original part of this study and it is organized as three subsections. In the first subsection of the fourth chapter, the basic concepts with Lorentzian plane motion, pole points, special systems of reference, Bottema's instantaneous invariants, curvature of orbits, canonical systems, path of the origin, inverse motion, curvatures of the fixed and the moving polode at the pole and curvature of the second fixed polode at the second pole are investigated. In the second subsection, the circling point curve, centering point curve, Ball points, Ball points of the inverse motion and Ball points with excess are examined in the Lorentzian plane. Moreover, the Lorentzian circles formed in the degenerate cases of the circling point curve and the centering point curves are analyzed and geometric interpretations of these curves are given. In the third subsection, by defining Burmester point in the Lorentzian plane, the equation of the curve which is the geometric locus of the Burmester points is obtained and the real intersection of this curve and circling point curve at infinity is investigated. As the result of this investigation, the number and geometric location of the Burmester points in Lorentz plane are represented.

In the fifth chapter of this thesis, a brief summary of the study is given and a suggestion is proposed for further investigations.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Yüzyıllar boyunca geometrinin tek amacı 2-boyutlu ya da 3-boyutlu Öklid uzayının özelliklerini araştırmak olmuştur. Farklı görüşler gelişmesine rağmen küresel geometri ve hiperbolik geometri keşfedilinceye kadar Öklid uzayı kavramının evrensel olduğu düşünülmüştür. 2000 yıla dayanan bu görüşü ortadan kaldıran C. F. Gauss (1777-1855), N. I. Lobachevsky (1793-1856) ve J. Bolyai (1802-1860), 19. yüzyılda yaptıkları araştırmalar matematik tarihinde eşsiz olarak kabul edilmektedir [1]. Gauss yaklaşık 1816 tarihinde Öklid geometriye benzer yeni geometrik sistemin farkına varmıştır. Kendini hiperbolik geometriye adayan Lobachevsky ise araştırmalarını 1829 yılında yayınlamıştır. Bolyai de Öklid dışı geometrilerle ilgili teknik ve ilgi çeken hesaplamalar yapmıştır. Böylece Bolyai, Lobachevsky ve Gauss tarafından yapılan çalışmalar birçok araştırmacı tarafından derinlemesine incelenmiş ve 19. yüzyılda geometride hızlı gelişmeler olmuştur. Ayrıca V.F. Kagan (1869-1953) da kitabında hiperbolik hesaplamalara yer vermiştir [2]. Bu çalışmaların her biri hiperbolik geometriye, kendine has tamamen bağımsız fikirler vermiştir.

Bu geometrilerden farklı olarak küresel geometriden ilk defa G.F.B. Riemann (1826-1866) bahsetmiştir. Hiperbolik geometrinin varlığı ile Riemann'ın geometriye bakışı değişmiştir. 1854'de ünlü matematikçi Riemann araştırmalarını geometrik açıdan formüle etmiş ve çalışmalarını Göttingen Üniversitesi'nde açılış konuşması olarak sunmuştur [3]. Riemann'ın fikirlerinin büyük çoğunluğu 1916 tarihinde A. Einstein (1879-1955) tarafından yayınlanan "Genel İzafiyet Teorisinin Temelleri" adlı araştırmada daha da değer kazanmıştır. Ayrıca Riemann, Öklid, hiperbolik ve küresel geometrilerine çok yakın olan eliptik geometri şeklinde farklı bir geometrik sistemden bahsetmiştir. Bu geometrilerin isimleri 1870 tarihinde Alman matematikçi F. Klein (1849-1925) tarafından verilmiştir [4, 5]. Klein'ın geometrik görüşleri 1872 yılında Erlangen Üniversitesi'nde açılış konuşması olarak bilim dünyasına sunulmuştur. Diğer taraftan H. Weyl, 1919 tarihinde yayınlanan kitabında Riemann'ın çalışmalarına yeni bir boyut kazandırmış ve aynı zamanda Klein'ın görüşlerine yer vermiştir [6]. Ayrıca İngiliz geometrici D. M. Y. Sommerville 1910 yılında Klein geometrilerinin alt dallarını çalışmıştır. Bu geometrilere Öklid geometrisi, hiperbolik geometri ve eliptik geometri de dâhildir. Aslında Klein'ın görüşlerinin temelini A. Cayley (1821-1891) tarafından 1872 yılında Erlangen Programında değerlendirilen çalışması ile önceki çalışmalarının bir sentezinden oluşturmaktadır [7, 8]. Böylece Lobachevsky, Bolyai ve Gauss'un çalışmaları Öklid geometrisinin özel durumlarını ortadan kaldırırken Riemann ve Klein'in çalışmaları ise hiperbolik geometrinin özel durumlarını kaldırmıştır. "Öklid dışı geometri" terimi hiperbolik geometri, eliptik geometri ve diğer geometriler için kullanılmaktadır. Öklid dışı geometrilerin, Öklid geometrisi ile benzerlikleri de vardır. Yaglom [8] kitabında bu geometrileri ayrıntılı olarak incelemiş ve Öklid geometrisiyle karşılaştırmalar yapmıştır. Düzlemde tanımlanan bu geometrik sistemler Öklid geometrisi, Galile geometrisi ve Lorentz (Minkowski) geometrisi olarak bilinmektedir. Bu geometriler birçok bilim insanı tarafından ayrıntılı olarak ele alınmıştır [5, 6, 7, 8, 9]. Böylece Öklid ve Öklid-dışı geometriler için karşılaştırmalı araştırmalar yapmak birçok yeni teorinin doğmasını sağlamıştır.

Tez çalışmamıza konu olan Burmester teorisi ise birçok araştırmacı tarafından Öklidyen hareketin matematiksel modeli göz önüne alınarak geometrik ve cebirsel açıdan ayrıntılı olarak çalışılmış ve kinematik alanında geniş bir uygulama alanına sahip olmuştur [10, 11, 12]. Bu teori düzlemsel veya uzaysal hareket sonucu oluşan büküm eğrisi, çembersel nokta eğrisi ve çift çembersel nokta eğrisi gibi özel geometrik yer eğrilerin ve kesim noktaları olan Ball ve Burmester noktalarının belirlenmesi ile ilgilenir. Temelleri Burmester tarafından [11]'de ortaya konan bu teori, Sandor ve Freudenstein tarafından ani invaryantlar yardımıyla incelenmiş ve yüksek mertebeden Öklidyen düzlemsel hareket için eliptik, dairesel, hiperbolik ve parabolik durumları içeren genel konik kesit teorisi geliştirilmiştir [10]. İlk defa Bottema [13] tarafından tanıtılan ani invaryantlar, Öklid uzayında düzlemsel veya küresel hareketinin çeşitli geometrik ve kinematik özelliklerini incelemede kullanılmıştır. Günümüzde de ani invaryantlar mekanizmaların analiz ve sentezi, kontrol teorisi gibi alanlarda kullanılmaktadır. Veldkamp tarafından [14]'de B-invaryantları (Bottema-invaryantları) olarak adlandırılan ani invaryantlar keyfi derecede hareketli katı cisme ait herhangi bir noktanın yörüngesini karakterize etmektedir [15]. Birçok araştırmacı düzlemsel, küresel veya uzaysal hareket için nokta ve doğru yörüngelerin yerel özellikleri ve ani invaryantlar arasındaki bağıntıyı araştırmak ve hareketli düzlemin sonsuz farklı pozisyonların kinematik geometrisini çalışmak üzere bu formülleri kullanmıştır [16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24]. Özellikle Veldkamp çalışmalarında klasik Burmester teorisinde B-invaryantların uygulamalarına yer vermiştir [14, 25, 26]. Ayrıca Burmester hareket eden noktaların geometrik ve cebirsel özelliklerini incelemek üzere analitik bir metot geliştirmiştir [27]. Ani hareketler için mekanizmaların analiz ve sentezinde vektörleri karmaşık sayılar ile ifade edilmesinin sağladığı kolaylıklar göz önüne alınarak da pek çok araştırma yapılmıştır [28, 29, 30, 31, 34, 35].

Diğer taraftan literatürde Lorentz düzleminde hareketler için ani invaryantlara dayalı [42, 43] gibi az sayıda çalışma olmasına rağmen bu düzlemde ani invaryantları hiperbolik sayılar ile ifade ederek Burmester teorisine uygulayan çalışmaya rastlanmamıştır. Aslında Lorentz düzleminde hareketler uzun yıllardır yoğun bir şekilde çalışılmaktadır. Örneğin bir parametreli Lorentzian hareket [36, 37]'de tanıtılmıştır. Ayrıca [38]'de Lorentz düzleminde hareketli koordinat sistemi ile pol noktaları ve [39]'da düzlemsel Lorentzian homotetik hareket için Euler-Savary formülü verilmiştir. Hiperbolik ve Lorentz düzlemlerde sikloidler ve koniklerle ilgili sonuçlar [40]'da verilmiştir. [41]'de de Lorentz düzleminde açı ölçüsü ve genel dönme kavramlarını içeren sonuçlar ortaya konmuştur. Bu veriler, Öklid ve Öklid-dışı düzlemlerde hareketleri karşılaştırma yapma imkânı vermiştir.

Bu tez çalışmasında da Lorentz düzleminde Burmester teorisinin incelenmesi hedeflenmiştir. Dolayısıyla tüm bu çalışmalar ışığında Lorentz düzleminin noktaları hiperbolik sayılar ile ifade edilmiş ve Bottema'nın ani invaryantları Lorentz düzleminde hareket için formüle edilmiştir. Bu formülasyon ile Lorentz düzlem kinematiği için bir yeni bir analitik bir metot izlenerek bir teori ortaya konmuştur.

BÖLÜM 2. TEMEL KAVRAMLAR

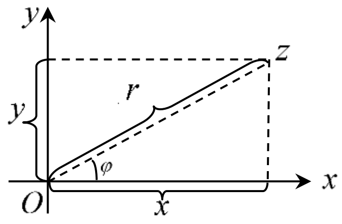
Bu bölümde tez çalışmamıza konu olan Lorentzian Burmester teorisi ile bilinen Öklidyen Burmester teorisini karşılaştırma yapmak üzere önce Öklidyen düzlemsel hareketlerin analitik incelenmesinde kullanılan karmaşık sayılar tanıtılmıştır. Daha sonra Lorentzian düzlemsel hareketleri incelemek üzere kullanılacak olan hiperbolik sayılar tanıtılmıştır. Bu bölümde verilen temel kavramların tamamı için I.M. Yaglom tarafından yayınlanan [8] kaynağından faydalanılmıştır.

2.1. Karmaşık Sayılar

Öklid düzleminde bir nokta karmaşık sayı ile tanımlanabilir. Bir noktanın Kartezyen koordinatları (x, y) ve polar koordinatları (r, φ) olmak üzere karmaşık sayı

$$z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \tag{2.1.1}$$

şeklinde gösterilir. (Şekil 2.1)



Şekil 2.1. Karmaşık sayının koordinat düzleminde gösterimi

Burada x ve y karmaşık sayının reel ve sanal kısmı olup $\operatorname{Re} z = x$ ve $\operatorname{Im} z = y$ şeklinde gösterilir. r ve φ değerlerine, sırasıyla, karmaşık sayının modülü ve argümenti denir. Karmaşık sayının modülü $|z|$ ile argümenti ise $\arg z$ şeklinde gösterilir. z sayısının modülü

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2} \text{ veya } |z| = \sqrt{z\bar{z}} \tag{2.1.2}$$

ile tanımlanır. Ayrıca $\bar{z} = x - iy$, z sayısının karmaşık eşleniğidir. Ayrıca z sayısı için

$$\operatorname{Re}\bar{z} = \operatorname{Re} z, \operatorname{Im}\bar{z} = -\operatorname{Im} z, \ |\bar{z}| = |z| \text{ ve } \arg\bar{z} = \arg z \tag{2.1.3}$$

özellikleri verilebilir.

$z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ sayısının karmaşık eşleniği

$$\bar{z} = x - iy = r(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)) = r(\cos\varphi - i\sin\varphi)$$

olarak verilir. z sayısının $\arg z$ argümenti için

$$\frac{\operatorname{Re} z}{|z|} = \cos(\arg z), \quad \frac{\operatorname{Im} z}{|z|} = \sin(\arg z), \quad \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z} = \tan(\arg z) \tag{2.1.4}$$

bağıntıları vardır. Başka bir şekliyle

$$\frac{x}{r} = \cos\varphi, \quad \frac{y}{r} = \sin\varphi, \quad \frac{y}{x} = \tan\varphi \tag{2.1.5}$$

olarak da verilir. z ve z_1 karmaşık sayıları için

$$\operatorname{Re}(z \mp z_1) = \operatorname{Re} z \mp \operatorname{Re} z_1, \quad \operatorname{Im}(z \mp z_1) = \operatorname{Im} z \mp \operatorname{Im} z_1, \tag{2.1.6}$$

$$(x + iy) \mp (x_1 + iy_1) = (x \mp x_1) + i(y \mp y_1),$$

$$|zz_1| = |z||z_1|, \quad \arg(zz_1) = \arg z + \arg z_1, \tag{2.1.7}$$

$$r(\cos\varphi + i\sin\varphi) r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) = rr_1(\cos(\varphi + \varphi_1) + i\sin(\varphi + \varphi_1))$$

ve

$$\left|\frac{z}{z_1}\right| = \frac{|z|}{|z_1|}, \quad \arg\left(\frac{z}{z_1}\right) = \arg z - \arg z_1, \tag{2.1.8}$$

$$r(\cos\varphi + i\sin\varphi)/r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) = (r/r_1)\left[\cos(\varphi-\varphi_1) + i\sin(\varphi-\varphi_1)\right]$$

bağıntıları mevcuttur. (2.1.3) ve (2.1.8) denklemlerinden

$$\overline{z+z_1} = \overline{z} + \overline{z}_1, \quad \overline{z-z_1} = \overline{z} - \overline{z}_1, \quad \overline{z.z_1} = \overline{z}.\overline{z}_1, \quad \overline{\left(\frac{z}{z_1}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z}_1} \tag{2.1.9}$$

elde edilir. Ayrıca

$$z + \overline{z} = 2\operatorname{Re} z, \quad z.\overline{z} = |z|^2, \quad z - \overline{z} = i(2\operatorname{Im} z)$$

bulunur. $z = \overline{z}$ ise z sayısı sadece reel kısımdan oluşur ve $\operatorname{Im} z = 0, \arg z \in \{0, \pi\}$ olur. Benzer şekilde $z = -\overline{z}$ ise z sayısı sadece sanal kısımdan oluşur ve $\operatorname{Re} z = 0, \arg z = \pm\frac{\pi}{2}$ olur.

Öklid düzleminde iki nokta arasındaki uzaklık iki karmaşık sayı arasındaki uzaklığa karşılık gelmektedir. z ve z_1 karmaşık sayıları için

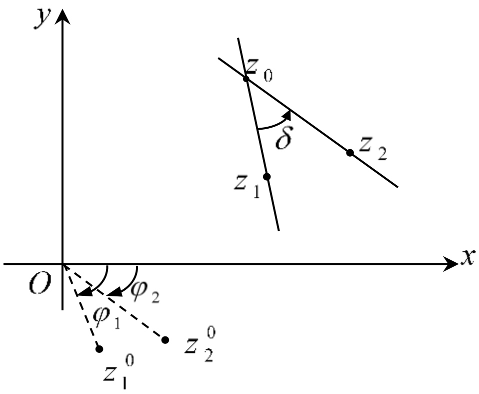
$$d_{z,z_1} = |z_1 - z| \text{ veya } d^2_{z,z_1} = (z - z_1)(\overline{z} - \overline{z}_1) \tag{2.1.10}$$

ile tanımlanır (Şekil 2.2b).

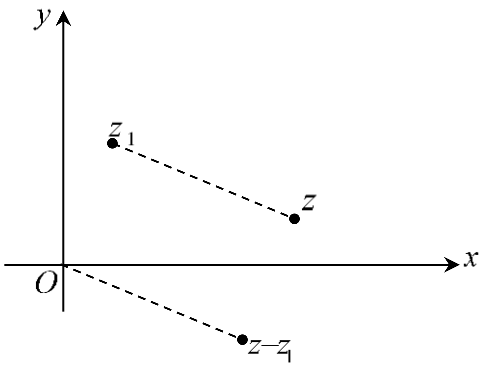
z_1 ve z_2 karmaşık sayılarını z_0 sayısına birleştiren doğrular arasındaki $\delta_{(z_0,z_1)(z_0,z_2)}$ açısı

$$\delta_{(z_0,z_1)(z_0,z_2)} = \arg(z_2, z_1; z_0) = \arg\frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0} \tag{2.1.11}$$

şeklindedir. Burada $(z_2, z_1; z_0) = \frac{(z_2 - z_0)}{(z_1 - z_0)}$ ifadesine z_2, z_1 ve z_0 üç noktanın oranı denir. (2.1.11) denkleminden $\delta_{(z_0,z_1)(z_0,z_2)} = \varphi_2 - \varphi_1$ elde edilir. Burada φ_2 ve φ_1 açıları $z_2^0 = z_2 - z_0$ ve $z_1^0 = z_1 - z_0$ karmaşık sayılarının argümentleridir (Şekil 2.2a). Burada $\delta_{(z_0,z_1)(z_0,z_2)}$ yönlü açısı (z_0, z_1) ve (z_0, z_2) yönlü doğrular arasındaki açıdır.



Şekil 2.2a. İki karmaşık sayı arasındaki açı



Şekil 2.2b. İki karmaşık sayı arasındaki uzaklık

Doğrular arasındaki açı (z_0, z_1) yönlü doğrusunun (z_0, z_2) yönlü doğrusuyla pozitif yönde çakışmasından oluşmaktadır. (z_1, z_2) doğrusu z noktalar kümesi olup

$$\arg(z, z_1; z_2) = \arg\frac{z - z_2}{z_1 - z_2} \in \{0, \pi\} \tag{2.1.12}$$

bulunur (Şekil 2.3a). Buradan

$$\operatorname{Im}(z, z_1; z_2) = \operatorname{Im}\frac{z - z_2}{z_1 - z_2} = 0 \tag{2.1.13}$$

elde edilir. Öyleyse $(z, z_1; z_2)$ ifadesi reeldir ve

$$\frac{z - z_2}{z_1 - z_2} = \frac{\overline{z} - \overline{z}_2}{\overline{z}_1 - \overline{z}_2} \tag{2.1.14}$$

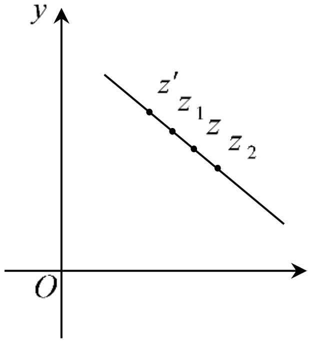
eşitliği yazılabilir. Diğer bir ifadeyle (z_1, z_2) doğrusu (2.1.14) denklemiyle verilir. (2.1.14) denklemi tekrar düzenlenirse

$$(\overline{z}_1 - \overline{z}_2)z - (z_1 - z_2)\overline{z} + (z_1\overline{z}_2 - \overline{z}_1 z_2) = 0$$

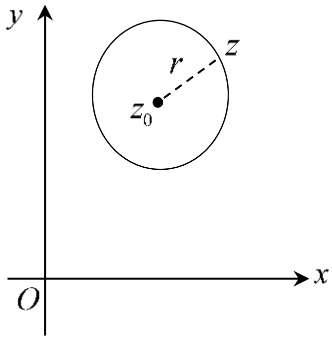
veya

$$Bz - \overline{B}\overline{z} + C = 0, \quad \operatorname{Re} C = 0 \tag{2.1.15}$$

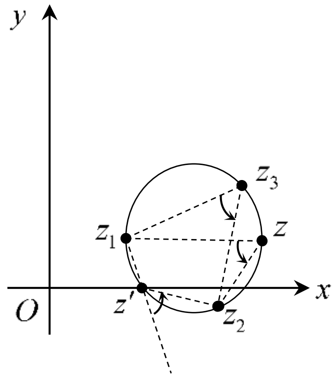
elde edilir. Burada $B = \overline{z}_1 - \overline{z}_2$, $C = z_1\overline{z}_2 - \overline{z}_1 z_2$ olup C tamamen sanaldır.



Şekil 2.3a
Doğrusal noktaların gösterimi



Şekil 2.3b
z_0 merkezli r yarıçaplı çember



Şekil 2.3c
Üç noktadan geçen çember

Diğer taraftan (2.1.15) denklemi z_1 ve z_2 noktalarından geçen bir doğru tanımlar öyle ki $B = \overline{z}_1 - \overline{z}_2$, $C = z_1\overline{z}_2 - \overline{z}_1 z_2$ dir. z_0 merkezli r yarıçaplı bir çember

$$|z - z_0| = r \text{ veya } (z - z_0)(\overline{z} - \overline{z}_0) = r^2 \tag{2.1.16}$$

denklemleri ile verilebilir (Şekil 2.3b). Böylece bir çember denklemi

$$z\overline{z} - \overline{z}_0 z - z_0\overline{z} + \left(z_0\overline{z}_0 - r^2\right) = 0$$

veya

$$az\overline{z} + bz + \overline{b}\overline{z} + c = 0, \quad \operatorname{Im} a = \operatorname{Im} c = 0 \tag{2.1.17}$$

şeklinde bulunur. Böylece $a \neq 0$ iken $\overline{z}_0 = \dfrac{-b}{a}$, $z_0\overline{z}_0 - r^2 = \dfrac{c}{a}$ olmak üzere (2.1.17) denklemi z_0 merkezli r yarıçaplı çember belirtir. z_1, z_2 ve z_3 şeklindeki üç noktadan geçen çember $\delta_{(z_3,z_1)(z_3,z_2)} - \delta_{(z,z_1)(z,z_2)} \in \{0,\pi\}$ olmak şartıyla z noktalar kümesi olarak tanımlanır (Şekil 2.3c). Aynı zamanda

$$\arg\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} - \arg\frac{z_1 - z}{z_2 - z} \in \{0,\pi\} \tag{2.1.18}$$

şeklinde yazılır. O halde (2.1.18) denkleminden

$$\operatorname{Im}(z_1, z_2; z_3, z) = \operatorname{Im}\frac{(z_1, z_2; z_3)}{(z_1, z_2; z)} = \operatorname{Im}\frac{(z_1 - z_3)/(z_2 - z_3)}{(z_1 - z)/(z_2 - z)} = 0 \tag{2.1.19}$$

bulunur. Burada $(z_1, z_2; z_3, z)$ ifadesine z_1, z_2, z_3 ve z dört noktalarının çapraz oranı denir. Böylece bir çember üzerinde z_1, z_2, z_3, z_4 dört noktasının bulunma şartı

$$\operatorname{Im}(z_1, z_2; z_3, z_4) = \operatorname{Im}\frac{(z_1 - z_3)/(z_2 - z_3)}{(z_1 - z_4)/(z_2 - z_4)} = 0 \tag{2.1.20}$$

olarak bulunur. Ayrıca z_1, z_2 ve z_3 üç noktasından geçen (2.1.19) çember denklemi

$$\frac{(z_1 - z_3)/(z_2 - z_3)}{(z_1 - z)/(z_2 - z)} = \frac{(\overline{z}_1 - \overline{z}_3)/(z_2 - \overline{z}_3)}{(\overline{z}_1 - \overline{z})/(z_2 - \overline{z})} \tag{2.1.21}$$

veya

$$Az\overline{z} + Bz - \overline{B}\overline{z} + C = 0, \quad \operatorname{Re} A = \operatorname{Re} C = 0 \tag{2.1.22}$$

şeklinde yazılır. Burada

$$\begin{aligned} A &= (z_1 - z_3)(\overline{z}_2 - \overline{z}_3) - (\overline{z}_1 - \overline{z}_3)(z_2 - z_3), \\ B &= \overline{z}_2(\overline{z}_1 - \overline{z}_3)(z_2 - z_3) - \overline{z}_1(z_1 - z_3)(\overline{z}_2 - \overline{z}_3), \\ C &= \overline{z}_1 z_2 (z_1 - z_3)(\overline{z}_2 - \overline{z}_3) - z_1\overline{z}_2(\overline{z}_1 - \overline{z}_3)(z_2 - z_3) \end{aligned} \tag{2.1.23}$$

eşitlikleri vardır.

Öklid düzleminde hareket z noktasını z' noktasına resmeden düzlem dönüşümleridir. Bu dönüşümler

$$\text{a)} \quad z' = pz + q \ \text{ veya b) } \ z' = p\overline{z} + q \quad (p\overline{p} = 1) \tag{2.1.24}$$

şeklindedir (Şekil 2.5). Burada birinci ifade direk hareketi ve ikinci ifade zıt hareketi belirtmektedir. Gerçekten z ve z_1 noktaları sırasıyla z' ve z_1' noktalarına dönüştürülürse o zaman

$$\begin{aligned} |z_1' - z'|^2 &= \big((pz_1 + q) - (pz + q)\big)\big((\overline{p}\overline{z}_1 + \overline{q}) - (\overline{p}\overline{z} + \overline{q})\big), \\ |z_1' - z'|^2 &= p\overline{p}(z_1 - z)(\overline{z}_1 - \overline{z}), \\ |z_1' - z'|^2 &= |z_1 - z|^2 \end{aligned}$$

elde edilir. Yani (2.1.24) denkleminde (a) dönüşümü iki nokta arasındaki uzaklığı korur ve

$$d_{z_1',z'} = d_{z_1,z} \tag{2.1.25}$$

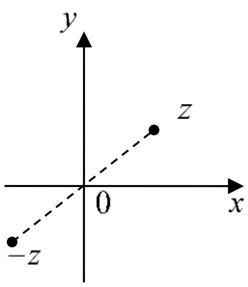
ile gösterilir. Özellikle

$$\text{a) } z' = -z \text{ ve b) } z' = \overline{z} \tag{2.1.26}$$

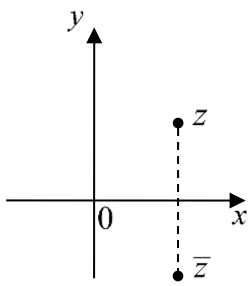
dönüşümleri sırasıyla O etrafında yarım dönmeyi (Şekil 2.4a) ve $\operatorname{Im} z = 0$ doğrusuna göre yansımayı ifade eder (Şekil 2.4b). Aynı zamanda (2.1.24) denkleminin (a) dönüşümü O başlangıç q bitiş noktasıyla belirlenen q vektörüyle O etrafında $\arg p$ açılı dönmeyi ifade etmektedir (Şekil 2.5). Sonuç olarak dönüşümler

$$\text{a) } z' = \frac{az+b}{cz+d} \text{ ve b) } z' = \frac{a\overline{z}+b}{c\overline{z}+d} \tag{2.1.27}$$

olarak gösterilir ve burada $ad - bc \neq 0$ dır.



Şekil 2.4a . Orijin etrafında dönme



Şekil 2.4b. $\operatorname{Im} z = 0$ doğrusuna göre yansıma

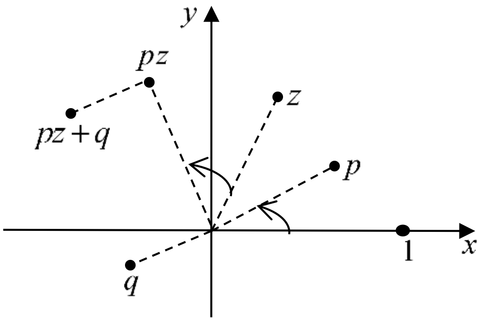
Gerçekten z_1', z_2', z_3', z_4' ve z_1, z_2, z_3, z_4 dörtlüleri için (2.1.27) denkleminin (a) dönüşümü kullanılırsa o zaman

$$\left(z_1', z_2'; z_3', z_4'\right) = \frac{\left(z_1'-z_3'\right)\big/\left(z_2'-z_3'\right)}{\left(z_1'-z_4'\right)\big/\left(z_2'-z_4'\right)},$$

$$\left(z_1', z_2'; z_3', z_4'\right) = \frac{\left(\dfrac{az_1+b}{cz_1+d} - \dfrac{az_3+b}{cz_3+d}\right)\Bigg/\left(\dfrac{az_2+b}{cz_2+d} - \dfrac{az_3+b}{cz_3+d}\right)}{\left(\dfrac{az_1+b}{cz_1+d} - \dfrac{az_4+b}{cz_4+d}\right)\Bigg/\left(\dfrac{az_2+b}{cz_2+d} - \dfrac{az_4+b}{cz_4+d}\right)},$$

$$\left(z_1', z_2'; z_3', z_4'\right) = \frac{\left(z_1 - z_3\right)/\left(z_2 - z_3\right)}{\left(z_1 - z_4\right)/\left(z_2 - z_4\right)},$$
$$\left(z_1', z_2'; z_3', z_4'\right) = \left(z_1, z_2; z_3, z_4\right)$$

elde edilir.



Şekil 2.5. z noktasının z' noktasına hareketi

Diğer bir ifadeyle (2.1.27) denklemindeki bir dönüşüm çember (veya doğru) üzerindeki dört noktayı çember (veya doğru) üzerindeki dört noktaya dönüştürür. Bu dönüşüme dairesel dönüşüm denir. Öklid düzleminde her dairesel dönüşüm (2.1.27) denkleminde (a) ve (b) formunda göstermek mümkündür.

2.2. Hiperbolik Sayılar

Hiperbolik sayılar, karmaşık sayıların Öklid düzleminde üstlendiği görevi Lorentz düzleminde yürütür. Karmaşık sayılar Öklid düzlemindeki koordinatları temsil ederken hiperbolik sayılar da Lorentz (Minkowski) düzlemindeki koordinatları temsil eder. İngiliz matematikçi W. K. Clifford (1845-1879) tarafından tanıtılan hiperbolik sayılar $z = x + jy$ şeklinde gösterilir. Burada x ve y reel sayılardır ve $j \neq \mp 1$ olmak üzere $j^2 = 1$ dir. j ifadesine hiperbolik birim denir. $z = x + jy$ hiperbolik sayının reel ve sanal kısmı, $\operatorname{Re} z = x$ ve $\operatorname{Im} z = y$ ile gösterilir.

Herhangi $z = x + jy$ ve $z_1 = x_1 + jy_1$ hiperbolik sayıları için toplama ve çıkarma işlemi

$$\left(x + jy\right) \mp \left(x_1 + jy_1\right) = \left(x \mp x_1\right) + j\left(y \mp y_1\right) \tag{2.2.1}$$

ve çarpma işlemi

$$(x+jy).(x_1+jy_1)=(xx_1+yy_1)+j(xy_1+yx_1) \tag{2.2.2}$$

olarak tanımlıdır. $z=x+jy$ ve $z_1=x_1+jy_1$ sayılarının toplam ve farkının reel ve sanal kısımları için

$$\mathrm{Re}(z\mp z_1)=\mathrm{Re}\,z\mp\mathrm{Re}\,z_1,\quad \mathrm{Im}(z\mp z_1)=\mathrm{Im}\,z\mp\mathrm{Im}\,z_1 \tag{2.2.3}$$

eşitlikleri yazılır. Ayrıca karmaşık ve hiperbolik sayılar için

$$\mathrm{Im}(zz_1)=\mathrm{Re}\,z.\mathrm{Im}\,z_1+\mathrm{Im}\,z.\mathrm{Re}\,z_1 \tag{2.2.4}$$

eşitliği vardır. Ancak karmaşık sayılar

$$\mathrm{Re}(zz_1)=\mathrm{Re}\,z.\mathrm{Re}\,z_1-\mathrm{Im}\,z.\mathrm{Im}\,z_1 \tag{2.2.5}$$

eşitliğini sağlar iken hiperbolik sayılar ise

$$\mathrm{Re}(zz_1)=\mathrm{Re}\,z.\mathrm{Re}\,z_1+\mathrm{Im}\,z.\mathrm{Im}\,z_1 \tag{2.2.6}$$

eşitliğini sağlamaktadır. $z=x+jy$ hiperbolik sayısının eşleniği

$$\overline{z}=x-jy \tag{2.2.7}$$

şeklindedir. Hiperbolik sayılar için

$$\mathrm{Re}\,\overline{z}=\mathrm{Re}\,z,\quad \mathrm{Im}\,\overline{z}=-\mathrm{Im}\,z \tag{2.2.8}$$

yazılır. Bir hiperbolik sayının eşleniği ile toplamı reeldir yani bir z sayısı için $\mathrm{Im}(z+\overline{z})=0$ ve eşleniği ile farkı sanaldır yani z sayısı için $\mathrm{Re}(z-\overline{z})=0$ olur. Ayrıca

$$z+\overline{z}=2\,\mathrm{Re}\,z,\quad z-\overline{z}=(2\,\mathrm{Im}\,z)\,j \tag{2.2.9}$$

bulunur. $z=\overline{z}$ şartı reel sayıyı ifade eder iken $z=-\overline{z}$ ise sadece sanal sayıyı ifade eder. Bu iki sayı için eşlenik çarpımı reeldir yani

$$\left(x+jy\right)\left(x-jy\right)=x^2-y^2 \tag{2.2.10}$$

şeklindedir.

$\frac{z_1}{z}$ bölme işlemi için pay ve payda $\bar{z}$ ile çarpılır. Karmaşık sayılarda ve hiperbolik sayılarda bölme işlemini karşılaştırmak istersek sırasıyla

$$\frac{x_1+iy_1}{x+iy}=\frac{\left(x_1+iy_1\right)\left(x-iy\right)}{\left(x+iy\right)\left(x-iy\right)}=\frac{\left(xx_1+yx_1y_1\right)}{x^2+y^2}+i\frac{\left(xy_1-x_1y\right)}{x^2+y^2}, \tag{2.2.11}$$

ve

$$\frac{x_1+jy_1}{x+jy}=\frac{\left(x_1+jy_1\right)\left(x-jy\right)}{\left(x+jy\right)\left(x-jy\right)}=\frac{\left(xx_1-yy_1\right)}{x^2-y^2}+j\frac{\left(xy_1-x_1y\right)}{x^2-y^2} \tag{2.2.12}$$

olduğunu görürüz. (2.2.11) ve (2.2.12) formülleri göz önüne alınırsa karmaşık sayılarda $z=0+i0$ sayısı ile ve hiperbolik sayılarda da $x=\mp y$ olacak şekilde $z=x+jy$ sayıları ile bölme yapılamaz.

z hiperbolik sayılarının $|z|$ modülü

$$|z|^2=|z\bar{z}|=\left|x^2-y^2\right| \tag{2.2.13}$$

şeklinde ifade edilir. O halde $z=x+jy$ hiperbolik sayısı için

$$|z|=\begin{cases}\mp\sqrt{x^2-y^2} & ; \quad |x|\geq|y| \\ \mp\sqrt{y^2-x^2} & ; \quad |x|\leq|y|\end{cases} \tag{2.2.14}$$

verilir. Hiperbolik sayılar, sıfır modül (yani $|z|=0$ olan z sayısı) ile bölünemez. Böyle sayılara sıfır bölen denir.

$|z|\neq 0$ olmak üzere $z=x+jy$ hiperbolik sayısının argümentini incelemek için $|x|>|y|$ ve $|y|>|x|$ durumlarını ayrı ayrı göz önüne almak gerekir. O halde;

$|x| > |y|$ ise

$$r = |z| = \mp\sqrt{x^2 - y^2} \tag{2.2.15}$$

şeklindedir. Burada x ve r 'nin işareti aynıdır. Böylece

$$\left(\frac{x}{r}\right)^2 - \left(\frac{y}{r}\right)^2 = \frac{x^2 - y^2}{r^2} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 - y^2} = 1$$

bulunur. φ sayısı için

$$\cosh\varphi = \frac{x}{r} = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|}, \quad \sinh\varphi = \frac{y}{r} = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|}, \quad \tanh\varphi = \frac{\sinh\varphi}{\cosh\varphi} = \frac{y}{x} = \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z} \tag{2.2.16}$$

elde edilir.

Diğer taraftan $|y| > |x|$ iken

$$r = |z| = \mp\sqrt{y^2 - x^2} \tag{2.2.17}$$

eşitliği vardır. Burada y ve r 'nin işareti aynıdır. Böylece

$$\left(\frac{y}{r}\right)^2 - \left(\frac{x}{r}\right)^2 = \frac{y^2 - x^2}{r^2} = \frac{y^2 - x^2}{y^2 - x^2} = 1$$

bulunur. φ sayısı için

$$\sinh\varphi = \frac{x}{r} = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|}, \quad \cosh\varphi = \frac{y}{r} = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|}, \quad \tanh\varphi = \frac{\sinh\varphi}{\cosh\varphi} = \frac{x}{y} = \frac{\operatorname{Re} z}{\operatorname{Im} z} \tag{2.2.18}$$

elde edilir. (2.2.16) ve (2.2.18) denklemleriyle tanımlanan φ sayısına z hiperbolik sayısının argümenti denir ve $\arg z$ ile gösterilir. Böylece $|z| \neq 0$ her $z = x + jy$ hiperbolik sayısı

a) $z = r(\cosh\varphi + j\sinh\varphi)$ veya b) $z = r(\sinh\varphi + j\cosh\varphi)$ (2.2.19) denklemlerinden biriyle gösterilir. Burada $r=|z|, \varphi=\arg z$ olup $|z|$ ifadesi, $z=x+jy$ hiperbolik sayısının (2.1.15) veya (2.2.17) denklemiyle gösterilen modülüdür. $\arg z$ ise (2.2.16) veya (2.2.18) denklemiyle tanımlamaktadır. (2.2.19) denkleminin (a) ifadesindeki sayılara birinci çeşit hiperbolik sayılar ve (b) ifadesindeki sayılara ikinci çeşit hiperbolik sayılar denir. Birinci çeşit $z=x+jy$ hiperbolik sayısı için $\overline{z}=x-jy$ olup

$$|\overline{z}|=|z|, \arg\overline{z}=-\arg z \tag{2.2.20}$$

formülleri elde edilir. Çünkü $z=x+jy=r(\cosh\varphi+j\sinh\varphi)$ ise $\overline{z}=x-jy=r(\cosh(-\varphi)+j\sinh(-\varphi))$ eşitliği vardır. Ancak ikinci çeşit hiperbolik sayılar için bu formüller

$$|\overline{z}|=-|z|, \arg\overline{z}=-\arg z \tag{2.2.21}$$

olarak elde edilir. Gerçekten $z=x+jy=r(\sinh\varphi+j\cosh\varphi)$ ise $\overline{z}=x-jy=-r(\sinh(-\varphi)+j\cosh(-\varphi))$ eşitliği vardır.

Benzer şekilde $z=r(\cosh\varphi+j\sinh\varphi)$ ve $z_1=r_1(\cosh\varphi_1+j\sinh\varphi_1)$ hiperbolik sayıların çarpımı

$$zz_1=rr_1(\cosh(\varphi+\varphi_1)+j\sinh(\varphi+\varphi_1))$$

şeklinde bulunur. $z=r(\sinh\varphi+j\cosh\varphi)$ ve $z_1=r_1(\sinh\varphi_1+j\cosh\varphi_1)$ ise

$$zz_1=rr_1(\cosh(\varphi+\varphi_1)+j\sinh(\varphi+\varphi_1))$$

bulunur. Diğer taraftan $z=r(\cosh\varphi+j\sinh\varphi)$ ve $z_1=r_1(\sinh\varphi_1+j\cosh\varphi_1)$ ise o zaman

$$zz_1=rr_1(\sinh(\varphi+\varphi_1)+j\cosh(\varphi+\varphi_1))$$

elde edilir. Böylece hiperbolik sayılar için de Moivre formülleri

$$|zz_1|=|z||z_1|, \quad \arg(zz_1)=\arg z+\arg z_1 \tag{2.2.22}$$

olarak verilir. Buradan görülür ki aynı tür (birinci veya ikinci) hiperbolik sayıların çarpımı birinci tür sayıyı, farklı tür hiperbolik sayıların çarpımı ikinci tür sayıyı vermektedir. (2.2.22) denkleminden

$$\frac{|z|}{|z_1|}=\frac{|z|}{|z_1|}, \quad \arg\left(\frac{z}{z_1}\right)=\arg z-\arg z_1 \qquad (2.2.23)$$

bulunur. Bununla birlikte aynı tür hiperbolik sayıların oranı birinci tür sayıyı, farklı tür hiperbolik sayıların oranı ise ikinci tür sayıyı vermektedir. Yani

$$\frac{z}{z_1}=\frac{r}{r_1}\left(\cosh\left(\varphi-\varphi_1\right)+j\sinh\left(\varphi-\varphi_1\right)\right)$$

ve

$$\frac{z}{z_1}=\frac{r}{r_1}\left(\sinh\left(\varphi-\varphi_1\right)+j\cosh\left(\varphi-\varphi_1\right)\right)$$

şeklindedir. Yukarıda bahsedilen denklemler neticesinde hiperbolik sayılar için

$$\overline{z+z_1}=\overline{z}+\overline{z}_1, \quad \overline{z-z_1}=\overline{z}-\overline{z}_1, \quad \overline{z.z_1}=\overline{z}.\overline{z}_1 \text{ ve } \overline{\left(\frac{z}{z_1}\right)}=\frac{\overline{z}}{\overline{z}_1} \qquad (2.2.24)$$

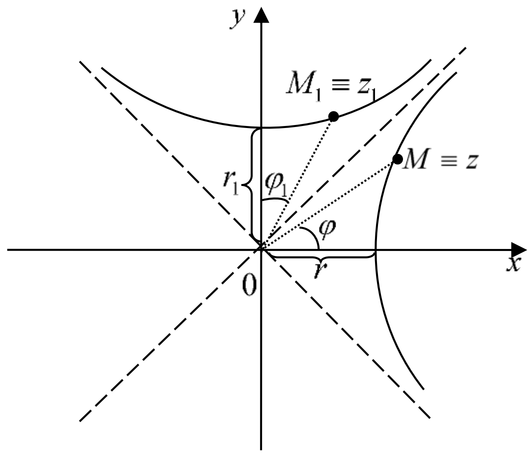
bağıntıları elde edilir.

Hiperbolik sayılar kümesinde birinci tür sayılar için $\arg z=0$ ise reel sayılar ve aynı şekilde ikinci tür sayılar için tam sanal sayılar tanımlanır.

Şimdi hiperbolik sayıların koordinat düzleminde gösterimini inceleyelim. M Lorentz düzleminde $\left(x,y\right)$ koordinatlarıyla verilen bir nokta olsun. $\overline{OM}$ Lorentzian uzunluğu (2.2.17) denklemiyle verilen r 'ye eşit olarak tanımlanır. OM birinci tür doğru üzerinde ise $\varphi=x\hat{O}M=\delta_{Ox,OM}$ veya OM_1 ikinci tür doğru üzerinde ise $\varphi_1=y\hat{O}M_1=\delta_{Oy,OM_1}$ ile gösterilsin. Lorentz düzleminde $OM\perp OM_1$ olur. $\left(r,\varphi\right)$ sayılarına M noktasının polar koordinatları denir. M noktasının

$$z = x + jy = r\left(\cosh\varphi + j\sinh\varphi\right) \text{ veya } z_1 = x_1 + jy_1 = r_1\left(\sinh\varphi_1 + j\cosh\varphi_1\right) \quad (2.2.25)$$

sayılarıyla eşitlenmesi $\varphi = x\hat{O}M$ veya $\varphi_1 = y\hat{O}M_1$ ifadesine bağlıdır (Şekil 2.6).



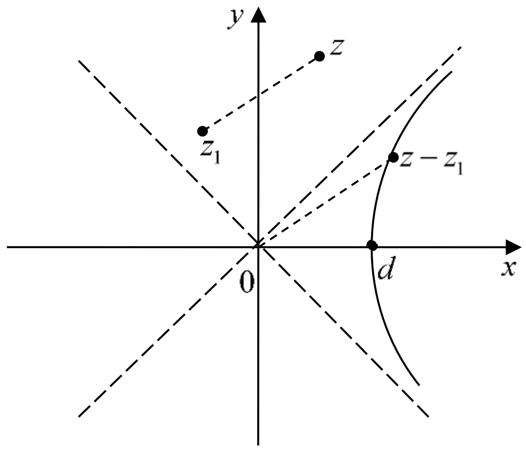
Şekil 2.6. Hiperbolik sayıların koordinat düzleminde gösterimi

Lorentz düzleminde hiperbolik sayılar kümesinin sıfır bölenleri $y = x$ ve $y = -x$ (Bu doğrulara null doğrular da denir.) doğrularının noktalarıyla ilişkilendirilir. Böylece hiperbolik sayılar yardımıyla düzlemdeki bir nokta z hiperbolik sayısı olarak tanımlanarak Lorentz düzlemi ifade edilir.

Lorentz düzlemindeki z ve z_1 iki nokta arasındaki d_{z,z_1} uzaklığı

$$d_{z,z_1} = \left|z_1 - z\right|, \quad d_{z,z_1}^2 = \left(z_1 - z\right)\left(\bar{z}_1 - \bar{z}\right) \quad (2.2.26)$$

ile tanımlanır (Şekil 2.7). Bu ifade Öklid düzleminde iki karmaşık sayı arasındaki uzaklıkla aynıdır. (2.2.17) denklemiyle yapılan modül tanımı hiperbolik sayıların $|z|$ modülünü verir.

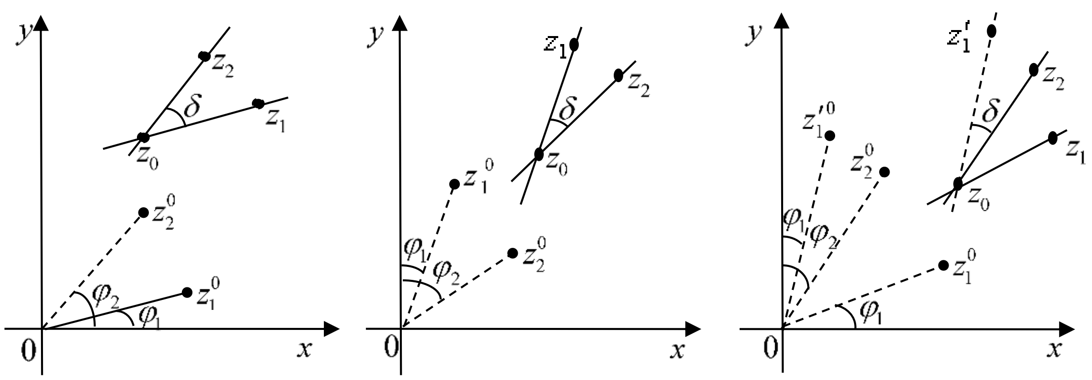


Şekil 2.7. Hiperbolik sayılar arasındaki uzaklık

z_0 ile z_1 ve z_0 ile z_2 noktalarını birleştiren (z_0, z_1) ve (z_0, z_2) doğruları arasındaki $\delta_{(z_0,z_1)(z_0,z_2)}$ açısı

$$\delta_{(z_0,z_1)(z_0,z_2)} = \arg(z_2, z_1; z_0) = \arg\frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0} \qquad (2.2.27)$$

olarak verilir. Burada $(z_2, z_1; z_0)$ ifadesine Lorentz düzleminde z_2, z_1, z_0 üç noktasının basit oranı denir. (2.2.27) denklemi $\delta_{(z_0,z_1)(z_0,z_2)} = \varphi_2 - \varphi_1$ ifadesinden elde edilir. Burada $\varphi_1 = \arg z_1^0 = \arg(z_1 - z_0)$ ve $\varphi_2 = \arg z_2^0 = \arg(z_2 - z_0)$ şeklindedir (Şekil 2.8a-c). Şekil 2.8c'de Lorentz düzleminde farklı tipteki doğrular arasındaki açının tanımı gereği $(z_0, z_1') \perp (z_0, z_1)$ şeklindedir.



Şekil 2.8a
İki spacelike doğru arasındaki açı

Şekil 2.8b
İki timelike doğru arasındaki açı

Şekil 2.8c
İki dik doğru arasındaki açı

$(z,z_1;z_2)=(z-z_2)/(z_1-z_2)$, z, z_1, z_2 noktaların basit oranı olmak üzere (z_1,z_2) doğrusu

$$\operatorname{Im}(z,z_1;z_2)=0 \tag{2.2.28}$$

ile verilen z noktalarının kümesi olarak tanımlanabildiğinden dolayı bir doğrunun denklemi

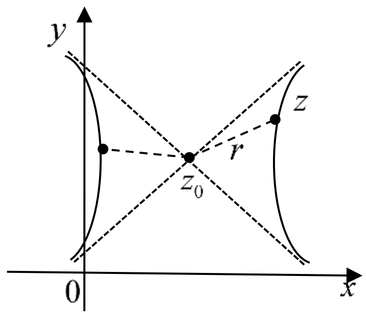
$$\frac{z-z_2}{z_1-z_2}=\frac{\overline{z}-\overline{z}_2}{\overline{z}_1-\overline{z}_2} \tag{2.2.29}$$

veya

$$Bz-\overline{B}\overline{z}+C=0, \quad \operatorname{Re} C=0 \tag{2.2.30}$$

ile verilir. z, B ve C hiperbolik sayılar olmak üzere (2.2.30) denklemi Lorentz düzleminde bir doğru belirtir. $B=\overline{z}_1-\overline{z}_2$ ve $C=z_1\overline{z}_2-\overline{z}_1z_2$ için bu doğru z_1 ve z_2 noktalarını birleştirir.

ρ yarıçaplı ve z_0 merkezli bir çemberin denklemi Lorentz düzlemlerinde gösterilebilir. $r>0$ olmak üzere Lorentz düzleminde $\rho=\pm r^2$ eşitliği vardır (Şekil 2.9).



Şekil 2.9. Lorentz düzleminde çember

Lorentz geometride çember denklemi

$$(z-z_0)(\overline{z}-\overline{z}_0)=\rho \tag{2.2.31}$$

olmak üzere bu denklem z noktalar kümesini göstermektedir. Burada z ve z_0 hiperbolik sayıları aynı tür olmalıdır. O halde Lorentz düzleminde bir çember denklemi

$$z\bar{z}-\bar{z}_0 z-z_0\bar{z}+\left(z_0\bar{z}-\rho\right)=0$$

veya

$$az\bar{z}+bz+\bar{b}\bar{z}+c=0,\quad \operatorname{Im}a=\operatorname{Im}c=0\,. \tag{2.2.32}$$

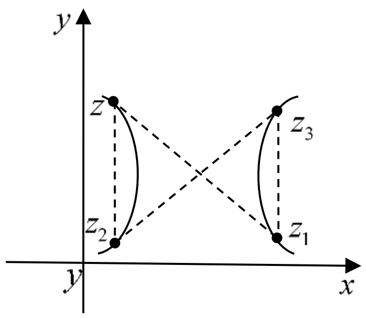
şeklinde yazılır. Burada

$$\bar{z}_0=\frac{-b}{a},\quad z_0\bar{z}_0-\rho=\frac{c}{a}$$

bağıntıları vardır. Lorentz düzlemindeki bir çember z_1, z_2, z_3 noktalarından geçer (Şekil 2.10). Ayrıca bu çember

$$\delta_{(z_3,z_1)(z_3,z_2)}=\delta_{(z,z_1)(z,z_2)}$$

olmak üzere z noktalar kümesi olarak tanımlanabilir.



Şekil 2.10. Lorentz düzleminde üç noktadan geçen çember

O halde

$$\operatorname{Im}\left(z_1,z_2;z_3,z\right)=\operatorname{Im}\frac{\left(z_1,z_2;z_3\right)}{\left(z_1,z_2;z\right)}=\operatorname{Im}\frac{\left(z_1-z_3\right)/\left(z_2-z_3\right)}{\left(z_1-z\right)/\left(z_2-z\right)}=0 \tag{2.2.33}$$

bağıntısı vardır. Lorentz düzleminde $\left(z_1,z_2;z_3,z\right)$ ifadesine dört noktanın çapraz oranı denir. Böylece üç noktayla belirlenen çember

$$\frac{(z_1-z_3)/(z_2-z_3)}{(z_1-z)/(z_2-z)}=\frac{(\overline{z}_1-\overline{z}_3)/(\overline{z}_2-\overline{z}_3)}{(\overline{z}_1-\overline{z})/(\overline{z}_2-\overline{z})} \tag{2.2.34}$$

veya

$$Az\overline{z}+Bz-\overline{B}\overline{z}+C=0, \quad \operatorname{Re}A=\operatorname{Re}C=0 \tag{2.2.35}$$

denklemi ile verilebilir. Burada A, B ve C sayıları Öklid düzleminde (2.1.23) denklemiyle verilen ifadeyle aynıdır. O halde (2.1.22) ve (2.2.35) denklemleri Öklid ve Lorentz geometride aynıdır.

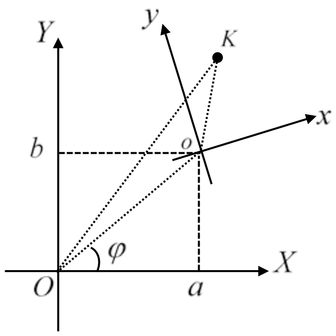
BÖLÜM 3. ÖKLİD DÜZLEMİNDE BURMESTER TEORİSİ

3.1. Öklid Düzleminde Hareket

Bu bölümde Veldkamp'ın [14] doktora tezinden faydalanarak Öklid düzlem kinematiğin esaslarıyla ilgili temel kavramlar özetlenmiştir.

3.1.1. Temel kavramlar ve gösterimler

V ve v birbirine göre hareket eden sabit ve hareketli düzlemler olsun. Hareketi matematiksel olarak tanımlamak üzere V ve v düzlemlerinin Kartezyen koordinat sistemlerini sırasıyla XOY ve xoy ile gösterilsin. v düzleminin $(0,0)$ noktası, V düzleminin XOY koordinat sistemine göre koordinatları (a,b) ile temsil edilsin (Şekil 3.1).



Şekil 3.1. Öklid düzleminde hareket

Böylece v düzleminin V düzlemine göre hareketi

$$\begin{aligned} X &= x\cos\varphi - y\sin\varphi + a \\ Y &= x\sin\varphi + y\cos\varphi + b \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

formülü ile tanımlanır. Burada a, b ve φ, t reel parametresine bağlı reel fonksiyonlardır ancak x ve y, t parametresine bağlı değildir. Yani keyfi bir $K(x,y)$ noktasının hareketli düzlemin bir noktası olması durumunda bu K noktasının sabit düzleme göre olan mutlak hızı sürüklenme hızına eşittir.

v düzleminin V düzlemine göre hareketini kompleks sayılar cinsinden ifade etmek için

$$Z = X + iY, \quad z = x + iy, \quad c = a + ib, \quad \left(i^2 = -1\right)$$

gösterimleri göz önüne alınarak (3.1.1) hareket denklemi

$$Z = ze^{i\varphi} + c \tag{3.1.2}$$

formunda da verilebilir.

v düzleminin V düzlemine göre hareketi $d\varphi/dt = \dot{\varphi}$ açısal hızının sıfırdan farklı değeri için incelenecektir ve hareketin geometrik özelliklerini araştırmak üzere $\varphi = t$ alınacaktır. Böylece v düzleminin her konumu V düzlemine göre anlık olarak karşılık gelir ve φ açısının her bir değerine bir an denir. Özel olarak $\varphi = 0$ değerine karşılık gelen konuma başlangıç konumu denir. Burada $\dot{\varphi} \neq 0$ durumunda herhangi bir konumla özel karşılaştırma yapmadan hareketin geometrik özellikleri araştırılacaktır. Bir f fonksiyonun φ ’ye göre n. türevi $f^{(n)}$ notasyonu ile gösterilirken $\varphi = 0$ değeri için f fonksiyonun φ ’ye göre n. türevi f_n $(n = 0,1,2,...)$ ile gösterilecektir.

3.1.2. Pol noktaları

(3.1.2)’de verilen hareket denkleminin φ ’ye göre $n.$ mertebeden türevi

$$Z^{(n)} = i^n ze^{i\varphi} + c^{(n)} \tag{3.1.3}$$

olur veya (3.1.2)'den $ze^{i\varphi} = Z - c$ olup bu denklem yukarıdaki denklemde yerine yazılırsa

$$Z^{(n)} = i^n \left(Z - c \right) + c^{(n)}, \quad \left(n = 0,1,2,... \right) \tag{3.1.4}$$

bulunur.

Tanım 3.1.1. v düzleminin $Z^{(n)} = 0, \quad \left(n \geq 1 \right)$ denklemini sağlayan noktası verilen bir ana karşılık gelen konum için hareketin n. polü olarak adlandırılır. Bu nokta V düzleminin n. polü adı verilen nokta ile çakışır. Her iki pol noktası P_n ile gösterilecektir. P_1 pol noktası genellikle P ile gösterilir. P noktasına mevcut konum için hareketin polü denir.

(3.1.4) denkleminde $Z^{(n)} = 0$ alındığında P_n polü

$$Z_{P_n} = c + \left(-i \right)^{n+2} c^{(n)} \tag{3.1.5}$$

olarak bulunur. Bu ifade

$$i^n \left(Z - c \right) + c^{(n)} = 0$$

denkleminin tek çözümüdür. (3.1.3) denkleminden P_n polüne karşılık gelen z 'nin z_{P_n} değeri için

$$z_{P_n} = \left(-i \right)^{n+2} e^{-i\varphi} c^{(n)} \tag{3.1.6}$$

elde edilir. (3.1.5) ve (3.1.6) denklemleri ile verilen P_n pol noktalarının φ 'ye bağlı olarak geometrik yerleri V ve v düzlemlerinin sırasıyla n. sabit ve hareketli pol eğrilerini verir. Özel olarak $n = 1$ durumunda kısaca hareketli ve sabit pol eğrileri olarak adlandırılırlar ve sırasıyla ρ_f ve ρ_m ile gösterilirler.

(3.1.5) ve (3.1.6) denklemlerinin türevleri alındığında

$$Z'_{P_n} = c' + (-i)^{n+2} c^{(n+1)} \tag{3.1.7}$$

ve

$$z'_{P_n} = (-i)^{n+3} e^{-i\varphi} \left(c^{(n)} + ic^{(n+1)}\right) \tag{3.1.8}$$

bulunur. $n=1$ için (3.1.5), (3.1.7) ve (3.1.8) denklemleri düzenlenirse

$$Z_P = c + ic', \tag{3.1.9}$$

$$Z'_P = c' + ic'', \tag{3.1.10}$$

$$z'_P = e^{-i\varphi}\left(c' + ic''\right) \tag{3.1.11}$$

eşitlikleri elde edilir. Son iki denklemden aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 3.1.1. ρ_m ve ρ_f hareketli ve sabit pol eğrilerinin her ikisinin de sadece bir noktadan ibaret olması için gerek ve yeter şart her φ için

$$c' + ic'' = 0$$

olmasıdır.

Bu diferensiyel denklemin çözümü λ ve β sabit olmak üzere $c = -\lambda i e^{i\varphi} + \beta$ olur ki $\varphi = 0$ için $c_0 = -i\lambda + \beta$ dır. Ayrıca $c' = \lambda e^{i\varphi}$ olduğundan $\varphi = 0$ için $c_1 = \lambda$ bulunur. Buradan $\beta = c_0 + ic_1$ sağlanır. Sonuç olarak

$$c = c_0 + ic_1 - ic_1 e^{i\varphi}$$

bulunur. $\varphi = 0$ için (3.1.9) denklemi $Z_{P_0} = c_0 + ic_1$ olup son denklem burada yerine yazılırsa

$$c = Z_{P_0} - ic_1 e^{i\varphi}$$

elde edilir.

Yukarıdaki denklem göz önüne alınarak (3.1.2) denklemi yeniden düzenlenirse

$$Z - Z_{P_0} = \left(z - ic_1\right)e^{i\varphi}$$

bulunur. Son denklemin normu alındığında

$$\left\|Z - Z_{P_0}\right\| = \left\|z - ic_1\right\|$$

elde edilir.

Buradan görülür ki ρ_m ve ρ_f pol eğrilerinin her ikisinin de sadece bir noktadan oluşması durumunda v düzleminin her noktasının yörüngesi bir çember belirtir ve bu çemberin merkezi sabit pol noktasıdır. Bunun anlamı hareketin sürekli bir dönme olmasıdır.

Tanım 3.1.2. ρ_m ve ρ_f pol eğrilerinin birbirlerine değme noktası her konumda P polüdür. ρ_m ve ρ_f pol eğrilerinin P noktasındaki ortak teğet ve normaline sırasıyla pol teğeti ve pol normali denir.

(3.1.10) ve (3.1.11) denklemlerine göre

$$\left\|Z'_P\right\| = \left\|z'_P\right\|$$

olur ve buradan ρ_m hareketli pol eğrisi ρ_f sabit pol eğrisi üzerinde kaymaksızın yuvarlanır. $n = 2$ için (3.1.5), (3.1.7) ve (3.1.8) denklemleri tekrar düzenlenirse

$$Z_{P_2} = c + c'' \ , \qquad (3.1.12)$$

$$Z'_{P_2} = c' + c''' , \qquad (3.1.13)$$

$$z'_{P_2} = -ie^{-i\varphi}\left(c'' + ic'''\right) \qquad (3.1.14)$$

eşitlikleri vardır.

3.1.3. Özel referans sistemleri

v hareketli ve V sabit düzlemlerinin başlangıç konumunda xoy ve XOY Kartezyen koordinatları orijinde çakışacak şekilde verilsin. Bu durumda $c_0 = 0$ olur. Ayrıca başlangıç konumunun pol noktası bu ortak orijin olsun. O zaman (3.1.9) denkleminden $c_1 = 0$ olur.

Bunlara ek olarak başlangıç konumunda pol teğeti x-ekseni olacak şekilde verilsin. Bu durumda da (3.1.10) denkleminden $a_2 = 0$ elde edilir. Sonuç olarak (3.1.12) denkleminden

$$Z_{P_{2,0}} = ib_2$$

eşitliği elde edilir. O halde başlangıç konumunun ikinci polü pol normali üzerindedir ve ordinatı b_2 olur.

Özet olarak (3.1.2) hareketini incelerken V ve v düzlemlerinde referans sistemlerini

$$c_0 = c_1 = 0, \quad c_2 = ib_2 \tag{3.1.15}$$

şeklinde seçmek mümkündür. Bu sistemler genel referans sistemleri ile karşılaştırıldığında özel referans sistemleri olarak adlandırılacaktır.

3.1.4. Bottema'nın ani invaryantları

İlk defa Bottema [13] tarafından verilen ani invaryantlar Öklid uzayında hareketin çeşitli geometrik ve kinematik özellikleri araştırmak için kullanılmıştır. Akabinde ani invaryantlar Veldkamp tarafından B-invaryantlar (Bottema-invaryantları) olarak adlandırılmıştır [14]. Bu invaryant değerler keyfi derecede hareketli katı cisme ait herhangi bir noktanın yörüngesini karakterize etmektedir [15].

Ani invaryantlar genel referans sistemlerine göre başlangıç konumunda (3.1.3) denklemi $n = 0,1,2,\dots$ için

$$\begin{aligned} X_{4n} &= x + a_{4n} \quad , \quad Y_{4n} = y + b_{4n}, \\ X_{4n+1} &= -y + a_{4n+1} \quad , \quad Y_{4n+1} = x + b_{4n+1}, \\ X_{4n+2} &= -x + a_{4n+2} \quad , \quad Y_{4n+2} = -y + b_{4n+2}, \\ X_{4n+3} &= y + a_{4n+3} \quad , \quad Y_{4n+3} = -x + b_{4n+3}, \end{aligned} \tag{3.1.16}$$

formunda verilebilir. Öklid düzleminde hareketli ve sabit düzlemin başlangıç konumunda çakışık olduğu anda ani invaryant değeri $a_0 = 0, \quad b_0 = 0$ olmaktadır. Bu çakışık orijin pol noktası olarak seçilirse $a_1 = 0, \quad b_1 = 0$ olur. İkinci mertebeden ani invaryantların özelliklerini a_2 ve b_2 belirtmektedir. Hareketli ve sabit düzlemlerin pol noktasında ortak teğeti x -ekseni olduğunda ise $a_2 = 0$ olmaktadır. Bu şekilde kurulan referans sistemi özel referans sistemleri olarak adlandırılarak genel referans sistemlerinden özel referans sistemlerine geçmek için $n = 0$ alınarak ve $a_0 = a_1 = a_2 = 0, \quad b_0 = b_1 = 0$ olduğu göz önünde bulundurularak

$$\begin{aligned} &X_0 = x, \quad X_1 = -y, \quad X_2 = -x, \quad X_3 = y + a_3, \\ &Y_0 = y, \quad Y_1 = x, \quad Y_2 = -y + b_2, \quad Y_3 = -x + b_3, \end{aligned} \tag{3.1.17}$$

elde edilir.

3.1.5.Yörünge eğriliği

v düzlemindeki (x, y) noktasının takip ettiği yörüngenin V düzleminde (X_0, Y_0) merkezli R yarıçapı eğrilik çemberi denklemi

$$(X - X_0)^2 + (Y - Y_0)^2 = R^2$$

dir. Bu denklemin birinci ve ikinci mertebeden türevleri sırasıyla

$$\begin{aligned} &(X - X_0)X' + (Y - Y_0)Y' = 0, \\ &(X')^2 + (X - X_0)X'' + (Y')^2 + (Y - Y_0)Y'' = 0, \end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu son iki denklem sırasıyla $-Y''$ ve Y' ile çarpılarak taraf tarafa toplanırsa

$$Y'\left(\left(X'\right)^2+\left(Y'\right)^2\right)+\left(X-X_0\right)\left(X''Y'-X'Y''\right)=0$$

elde edilir. Böylece

$$X-X_0=\frac{Y'\left(\left(X'\right)^2+\left(Y'\right)^2\right)}{X'Y''-X''Y'}$$

bulunur. Benzer şekilde

$$Y-Y_0=\frac{X'\left(\left(X'\right)^2+\left(Y'\right)^2\right)}{X'Y''-X''Y'}$$

elde edilir. Son iki eşitliğin kareleri toplamı

$$\left(X-X_0\right)^2+\left(Y-Y_0\right)^2=\frac{\left(\left(X'\right)^2+\left(Y'\right)^2\right)^2\left(\left(X'\right)^2+\left(Y'\right)^2\right)}{\left(X'Y''-X''Y'\right)^2}$$

olduğu görülür. Böylece eğrilik yarıçapı

$$R=\frac{\left(\left(X'\right)^2+\left(Y'\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{X'Y''-X''Y'}$$

bulunur. Sonuç olarak (x,y) noktasının yörüngesinin eğriliği için

$$\kappa=\frac{X'Y''-X''Y'}{\left(\left(X'\right)^2+\left(Y'\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \tag{3.1.18}$$

formülü elde edilir.

(3.1.17) ve (3.1.18) denklemlerinden $(x,y)\neq(0,0)$ olmak üzere özel referans sistemlerine göre eğriliği

$$\kappa_0=\frac{x^2+y^2-b_2y}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

şeklindedir. Buradan aşağıdaki sonuçlara ulaşılır.

Sonuç 3.1.2. $b_2 \neq 0$ ise başlangıç konumunda v düzleminin yörüngesi bir büküm noktasında olan orijin dışındaki noktalarının geometrik yeri

$$x^2 + y^2 - b_2 y = 0 \tag{3.1.19}$$

çemberidir.

Bu çembere büküm çemberi denir. Büküm çemberi pol noktasında pol teğetine değer, ikinci polden geçer ve çapı $|b_2|$ dir.

Büküm çemberi üzerinde olmayan V düzleminin (X, Y) noktasıyla çakışan v düzleminin (x, y) noktasının yörünge eğrilik merkezi (ξ, η) ile gösterilmek üzere

$$\xi = X - \frac{Y'\left((X')^2 + (Y')^2\right)}{X'Y'' - X''Y'}, \quad \eta = Y - \frac{X'\left((X')^2 + (Y')^2\right)}{X'Y'' - X''Y'} \tag{3.1.20}$$

şeklinde bulunur. Buradan başlangıç konumu ve özel referans sistemleri için (3.1.17) denklemi (3.1.20) denkleminde yazıldığında yörünge eğrilik merkezinin koordinatları

$$\xi = \frac{-b_2 yx}{x^2 + y^2 - b_2 y}, \quad \eta = \frac{-b_2 y^2}{x^2 + y^2 - b_2 y} \tag{3.1.21}$$

olarak bulunur. (3.1.21) denklemiyle verilen (ξ, η) noktası (x, y) noktasına ait eğrilik merkezi olarak adlandırılacaktır. Bu nokta (x, y) noktasını pol noktası ile birleştiren doğru üzerindedir. v düzleminin herhangi $(x, y) \neq (0, 0)$ noktası için (ξ, η) noktası pol noktası ile çakışık olması için gerek ve yeter şart $b_2 = 0$ olmasıdır.

Sonuç 3.1.3. $b_2 = 0$ olması için gerek ve yeter şart başlangıç konumu için v düzleminin orijin hariç bütün noktalarının yörüngelerinin eğrilik merkezinin polde olmasıdır.

Bu gibi bir konum $R-$ konum olarak adlandırılacaktır. Aksi belirtilmedikçe $R-$ konumu ele alınmayacaktır. Yani $b_2 \neq 0$ ve büküm çemberinin bir nokta olmadığı kabul edilecektir.

3.1.6. Kanonik sistemler

Bu bölümde (3.1.2) gösterimi ile verilen hareket özel referans sistemlerine göre incelenecektir. Ayrıca $R-$ konumları ihmal edilip $b_2 \neq 0$ alınacaktır. (3.1.10) ve (3.1.11) denklemlerinden ρ_f ve ρ_m pol eğrileri boyunca polün değişim oranı başlangıç konumunda $-b_2$ dir. Bu değişim oranına pol hızı denir.

Şimdi X -ekseninin (dolayısıyla x -ekseninin de) dönme yönü pozitif olarak kabul edilirse X -ekseninin dönme yönü ile pol hız vektörünün yönü aynı olur. Bunun için $b_2 < 0$ olsun. Ayrıca $-b_2$ değerini her iki sistem için birim uzunluk olarak alalım. Bu sistemlere hareketin kanonik sistemleri denir. $a_k, b_k \quad (k > 2)$ türevleri benzerlik grupları altında başlangıç konumunun geometrik invaryantlarıdır. Bu geometrik invaryantlar Bottema'nın [13] çalışmasından bu yana ani invaryantlar olarak adlandırılmaktadırlar. Bu sisteme göre (3.1.15) denkleminde özel olarak $b_2 = -1$ alındığında

$$c_0 = c_1 = 0, \quad c_2 = -i \tag{3.1.22}$$

olur. Bu durumda (3.1.19) denklemiyle verilen büküm çember denklemi

$$x^2 + y^2 + y = 0 \tag{3.1.23}$$

şeklinde yazılır. Benzer şekilde (3.1.21) denklemi tekrar düzenlenirse

$$\xi = \frac{yx}{x^2 + y^2 + y}, \quad \eta = \frac{y^2}{x^2 + y^2 + y} \tag{3.1.24}$$

elde edilir. Kanonik sistemlere göre başlangıç konumunda pol hızı birim değere sahip olur.

3.1.7. Orijinin yörüngesi

Bu bölümde başlangıç konumunda pol ile çakışan v düzleminin $(0,0)$ noktasının yörünge eğriliği incelenecektir. Bu noktanın (kısalık için orijinin) yörüngesi kanonik sisteme göre ve yeterince küçük $|\varphi|$ değeri için

$$X = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{a_n}{n!}\varphi^n, \quad Y = \frac{-1}{2}\varphi^2 + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{b_n}{n!}\varphi^n \tag{3.1.25}$$

ile verilir. Burada 3 farklı durum ele alınacaktır.

1. Durum $a_3 \neq 0$ olsun. ε yeterince küçük pozitif sayı olmak üzere $[-\varepsilon, \varepsilon]$ zaman aralığı boyunca tanımlanan σ yörüngesi için başlangıç konumunun polünde $\sigma'(0) = 0$ ve $\sigma''(0) \neq 0$ dır. $a_3 \neq 0$ olduğundan $a_2 b_3 - a_3 b_2 \neq 0$ olur. Böylece $\sigma'''(0)$ vektörü $\sigma''(0)$'a paralel değildir. Bu yörüngenin bu anda bir sivri (cusp) noktaya sahip olduğu anlamına gelir. Bu noktadaki teğet pol normalidir ve $\lim_{\varphi \to 0} |\kappa| = \infty$ olduğundan bu noktada yörüngenin eğriliği sonsuzdur.

2. Durum $a_3 = 0,\ a_4 \neq 0$ olsun. Bu durumda $a_3 = 0$ olmasından dolayı $a_2 b_3 - a_3 b_2 = 0$ olup $a_4 \neq 0$ olmasından dolayı ise $a_2 b_4 - a_4 b_2 \neq 0$ olur. Böylece eğrinin iki koluda teğet doğrusunun aynı tarafında kalır. Bu durum ise yeterince küçük $[-\varepsilon, \varepsilon]$ zaman aralığında orijinin başlangıç konum polünde bir ramphoid sivri noktasına sahip yörüngenin parçasını belirtir. Sivri noktalarda eğrilik formülü tanımsız olmakla birlikte sivri noktaya yaklaşan noktalar için eğriliğin limit değeri araştırılır yani yörüngenin eğriliği $\varphi \to 0$ iken limit yardımıyla bulunur. O halde yörüngenin eğriliğini bulmak için

$$
\begin{aligned}
X &= \frac{a_4}{4!}\varphi^4 + \frac{a_5}{5!}\varphi^5 + \frac{a_6}{6!}\varphi^6 + \frac{a_7}{7!}\varphi^7, \\
Y &= \frac{-1}{2}\varphi^2 + \frac{b_3}{3!}\varphi^3 + \frac{b_4}{4!}\varphi^4 + \frac{b_5}{5!}\varphi^5 + \frac{b_6}{6!}\varphi^6 + \frac{b_7}{7!}\varphi^7, \\
X' &= \frac{a_4}{3!}\varphi^3 + \frac{a_5}{4!}\varphi^4 + \frac{a_6}{5!}\varphi^5 + \frac{a_7}{6!}\varphi^6, \\
Y' &= -\varphi + \frac{b_3}{2}\varphi^2 + \frac{b_4}{3!}\varphi^3 + \frac{b_5}{4!}\varphi^4 + \frac{b_6}{5!}\varphi^5 + \frac{b_7}{6!}\varphi^6, \\
X'' &= \frac{a_4}{2}\varphi^2 + \frac{a_5}{3!}\varphi^3 + \frac{a_6}{4!}\varphi^4 + \frac{a_7}{5!}\varphi^5, \\
Y'' &= -1 + b_3\varphi + \frac{b_4}{2}\varphi^2 + \frac{b_5}{3!}\varphi^3 + \frac{b_6}{4!}\varphi^4 + \frac{b_7}{!}\varphi^5
\end{aligned}
$$

ifadeleri bulunup bu ifadeler (3.1.18) denkleminde yerine yazıldığında

$$
\kappa = \frac{\dfrac{a_4}{3} - \left(\dfrac{a_4 b_3}{12} - \dfrac{a_5}{8}\right)\varphi - \left(\dfrac{a_5 b_3}{24} - \dfrac{a_6}{30}\right)\varphi^2 + \left(\dfrac{a_4 b_5}{144} - \dfrac{a_5 b_4}{144} - \dfrac{a_6 b_3}{80} + \dfrac{a_7}{144}\right)\varphi^3}{\left(1 - b_3\varphi + \left(\dfrac{b_3^{\,2}}{4} - \dfrac{b_4}{3}\right)\varphi + \left(\dfrac{b_3 b_4}{6} - \dfrac{b_5}{12}\right)\varphi^3 + \left(\dfrac{a_4^{\,2}}{36} + \dfrac{b_4^{\,2}}{36} + \dfrac{b_3 b_5}{24} - \dfrac{b_6}{60}\right)\varphi^4\right)^{\frac{3}{2}}} \qquad (3.1.26)
$$

elde edilir. Burada payı A ile paydayı $(1-B)^{\frac{3}{2}}$ ile gösterelim. O halde $\kappa = \dfrac{A}{\left(\sqrt{1-B}\right)^3}$ olur. Böylce $\kappa = \dfrac{A\left(\sqrt{1+B}\right)^3}{\left(\sqrt{1-B^2}\right)^3}$ bulunur. Burada yeterince küçük B^2 ihmal edilirse $\kappa = A\left(\sqrt{1+B}\right)^3$ elde edilir. $\sqrt{1+B}$ ifadesinin Taylor açılımı

$$
\sqrt{1+B} = 1 + \frac{1}{2}B - \frac{1}{8}B^2 + \frac{1}{16}B^3 - \frac{5}{128}B^4 + \ldots
$$

olmak üzere

$$
\kappa = A\left(1 + \frac{1}{2}B - \frac{1}{8}B^2 + \frac{1}{16}B^3\right)^3
$$

bulunur. Bu ifadede A ve B değerleri yerine yazıldığında

$$\kappa = \frac{a_4}{3} + \left(\frac{5a_4b_3}{12} + \frac{a_5}{8}\right)\varphi + \left(\frac{-a_4b_3^2}{8} + \frac{a_4b_4}{6} + \frac{7a_5b_3}{48} + \frac{a_6}{30}\right)\varphi^2$$
$$+\left(\frac{7a_4b_5}{144} - \frac{a_4b_3^2}{12} - \frac{a_4b_3b_4}{24} + \frac{a_5b_4}{18} - \frac{a_5b_3^2}{16} + \frac{3a_6b_3}{80} + \frac{a_7}{144}\right)\varphi^3 + ... \tag{3.1.27}$$

elde edilir. Bu yüzden poldeki yörünge eğriliği

$$\kappa_0 = \frac{a_4}{3} \tag{3.1.28}$$

bulunur. Üstelik (3.1.27) denkleminden

$$\kappa_1 = \frac{5a_4b_3}{12} + \frac{a_5}{8}, \tag{3.1.29}$$

$$\kappa_2 = \frac{-a_4b_3^2}{4} + \frac{a_4b_4}{3} + \frac{7a_5b_3}{24} + \frac{a_6}{12}, \tag{3.1.30}$$

$$\kappa_3 = \frac{7a_4b_5}{24} - \frac{a_4b_3^2}{2} - \frac{a_4b_3b_4}{4} + \frac{a_5b_4}{3} - \frac{3a_5b_3^2}{8} + \frac{9a_6b_3}{40} + \frac{a_7}{24} \tag{3.1.31}$$

eşitlikleri de elde edilir.

3. Durum $a_3 = a_4 = 0$ olsun. Yeterince küçük ε değerleri için $[-\varepsilon, \varepsilon]$ zaman aralığında $a_n \neq 0$ koşulunu sağlayan en küçük $n > 4$ değerinin sırasıyla tek veya çift olmasına göre yörünge, polde bir sivri noktaya veya bir ramphoid sivri noktaya sahiptir. (3.1.27) denkleminde $a_4 = 0$ olup

$$\kappa = 0 + \frac{a_5}{8}\varphi + \left(\frac{7a_5b_3}{48} + \frac{a_6}{30}\right)\varphi^2 + \left(\frac{a_5b_4}{18} - \frac{a_5b_3^2}{16} + \frac{3a_6b_3}{80} + \frac{a_7}{144}\right)\varphi^3 + ...$$

bulunur. Bu denklemden

$$\kappa_0 = 0, \tag{3.1.32}$$

$$\kappa_1 = \frac{a_5}{8}, \tag{3.1.33}$$

$$\kappa_2 = \frac{7a_5b_3}{24} + \frac{a_6}{15}, \tag{3.1.34}$$

$$\kappa_3 = \frac{a_5b_4}{3} - \frac{3a_5b_3^{\ 2}}{8} + \frac{9a_6b_3}{40} + \frac{a_7}{24} \tag{3.1.35}$$

olduğu görülür.

3.1.8. Ters hareket

Orijinal hareket olarak adlandırılan v düzleminin, V düzlemine göre hareketinin tersi harekete yani V düzleminin, v düzlemine göre hareketine ters hareket denir. Ters hareket (3.1.2)'de Z sabit nokta ve z değişken nokta olarak alınarak ifade edilir.

Bu yüzden (3.1.2) denklemi kanonik sistemlere göre verilirse orijinal hareketin kanonik sistemlerinde ters hareket

$$z = (Z - c)e^{-i\varphi} \tag{3.1.36}$$

denklemi ile ifade edilir. Ters ve orijinal hareketin standart biçimleri arasındaki bağıntıyı bulalım. (3.1.36) denkleminden her iki hareketin pol vektörlerinin (hızlarının) çakıştığı kolayca görülebilir. Bu bakış açısıyla hareketin kanonik sitemleri ortak pozitif X - eksenine sahiptir. Üstelik (3.1.36) denkleminin türevleri

$$z' = -i(Z - c)e^{-i\varphi} - c'e^{-i\varphi},$$

$$z'' = -(Z - c)e^{-i\varphi} + 2ic'e^{-i\varphi} - c''e^{-i\varphi},$$

olarak elde edilir. (3.1.22) denkleminden $c_0 = c_1 = 0, \quad c_2 = -i$ kullanılarak

$$z_1 = -iZ, \quad z_2 = -Z + i$$

elde edilir ki son eşitlikler açık biçimde yazılırsa

$$x_1 + iy_1 = Y - iX\,,\;\; x_2 + iy_2 = -X + \left(-Y + 1\right) i$$

olduğu görülür. O halde

$$\begin{matrix} x_1 = Y \\ y_1 = -X \end{matrix}\;;\;\begin{matrix} x_2 = -X \\ y_2 = -Y + 1 \end{matrix}$$

eşitlikleri vardır. Buradan orijinal hareketin kanonikal sistemine göre ters hareketin büküm çemberinin denklemi

$$X^2 + Y^2 - Y = 0$$

bulunur. Ters hareketin kanonik sistemlerine göre bu çember denklemi ise

$$x^2 + y^2 + y = 0$$

şeklindedir. Böylece ters hareketin kanonik sistemleri ile orijinal hareketin kanonik sistemlerinin pol teğetine göre simetrik olduğu görülür.

Sonuç olarak ters hareket kendi kanonik sistemlerine göre

$$Z = ze^{i\varphi} + \tilde{c}, \quad \tilde{c} = -\overline{c}e^{i\varphi} \tag{3.1.37}$$

olarak ifade edilir. Burada $\overline{c}$, c ’nin kompleks eşleniğini göstermektedir. (3.1.37) denkleminden

$$\begin{aligned}
&\tilde{c} = -\overline{c}e^{i\varphi}, \\
&\tilde{c}' = -e^{i\varphi}\left(i\overline{c} + \overline{c}'\right), \\
&\tilde{c}'' = -ie^{i\varphi}\left(\overline{c}'' + 2i\overline{c}' - \overline{c}\right), \\
&\vdots \\
&\tilde{c}^{(n)} = -ie^{i\varphi}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} i^k\,\overline{c}^{(n-k)}
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece başlangıç konumunda $\overline{c}_0 = \overline{c}_1 = 0$ iken

$$\tilde{c}_n = -\sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} i^k \, \overline{c}_{n-k} \tag{3.1.38}$$

yazılır. Bu denklem

$$\tilde{c}_0 = \tilde{c}_1 = 0, \quad \tilde{c}_2 = -i \tag{3.1.39}$$

eşitliklerini verir. Ayrıca gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\tilde{c}_3 = 3 - \overline{c}_3 \, , \tilde{c}_4 = 6i - 4i\overline{c}_3 - \overline{c}_4 \, , \tilde{c}_5 = -10 + 10\overline{c}_3 - 5i\overline{c}_4 - \overline{c}_5$$

bulunur. Bu ifadeler reel ve sanal kısımlarına ayrıldığında

$$\begin{matrix} \tilde{a}_3 = -a_3 + 3 \\ \tilde{b}_3 = b_3 \end{matrix} ; \quad \begin{matrix} \tilde{a}_4 = -a_4 - 4b_3 \\ \tilde{b}_4 = -4a_3 + b_4 + 6 \end{matrix} ; \quad \begin{matrix} \tilde{a}_5 = -a_5 + 10a_3 - 5b_4 - 10 \\ \tilde{b}_5 = -5a_4 + b_5 - 10b_3 + 3 \end{matrix} \tag{3.1.40}$$

bulunur.

3.1.9. Pol noktasında hareketli pol ve sabit pol eğrilerinin eğriliği

(3.1.5) denkleminin k kez diferansiyeli alındığında $\varphi = 0$ için

$$Z_{P_n,k} = c_k + (-i)^{n+2} c_{n+k}, \quad (k = 0,1,2,...) \tag{3.1.41}$$

bulunur. Bu denklemde $n = 1$ ve $k = 1$ için

$$Z_{P,1} = c_1 + ic_2$$

elde edilir. Böylece $c_1 = 0$ ve $c_2 = -i$ değerleri için

$$Z_{P,1} = 1$$

bulunur. Benzer şekilde $n = 1$ ve $k = 2$ için $Z_{P,2} = c_2 + ic_3$ olup $c_2 = -i$ için

$$Z_{P,2} = -b_3 + (a_3 - 1)i$$

olduğu görülür. Buradan

$$X_{P,1}=1 \quad X_{P,2}=-b_3$$
$$Y_{P,1}=0 ; \quad Y_{P,2}=a_3-1$$

bulunur. Başlangıç konumunun polüyle çakışan noktada sabit pol eğrisinin eğriliği

$$\kappa_f = a_3 - 1 \tag{3.1.42}$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde (3.1.6) denkleminin k defa diferansiyeli alınarak

$$\begin{aligned}
z_{P_n} &= (-i)^{n+2} e^{-i\varphi} c^{(n)}, \\
z'_{P_n} &= (-i)^{n+2} e^{-i\varphi} \left(-ic_n + c_{n+1}\right) \\
z_{P_{n,1}} &= (-i)^{n+2} \left(-ic_n + c_{n+1}\right), \quad \varphi = 0
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
z_{P_{n,2}} &= (-i)^{n+2} \left(-c_n - 2ic_{n+1} + c_{n+2}\right), \quad \varphi = 0 \\
&\vdots \\
z_{P_n,k} &= (-i)^{n+2} \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} (-i)^l c_{n+k-l}, \quad (k = 0,1,2,\ldots)
\end{aligned}$$

bulunur. Bu denklem $n=1$ ve $k=1$ için

$$\begin{aligned}
z_{P,1} &= (-i)^3 \sum_{l=0}^{1} \binom{1}{l} (-i)^l c_{2-l}, \\
z_{P,1} &= (-i)^3 \binom{1}{0} (-i)^0 c_2 + (-i)^3 \binom{1}{1} (-i)^0 c_1, \\
z_{P,1} &= c_1 + ic_2, \quad c_1 = 0, \quad c_2 = -i, \\
z_{P,1} &= 1
\end{aligned}$$

dir. $n=1$ ve $k=2$ için

$$\begin{aligned}
z_{P,2} &= (-i)^3 \sum_{l=0}^{2} \binom{2}{l} (-i)^l c_{3-l}, \\
z_{P,1} &= i\left(-c_1 - 2ic_2 + c_3\right), \quad c_1 = 0, \quad c_2 = -i, \\
z_{P,1} &= -2i + ic_3
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $c_3 = a_3 + ib_3$ olup

$$z_{P,2} = -b_3 + i\left(a_3 - 2\right)$$

bulunur. Bu işlemler sonucunda

$$\begin{matrix} x_{P,1} = 1 \\ y_{P,1} = 0 \end{matrix}; \quad \begin{matrix} x_{P,2} = -b_3 \\ y_{P,2} = a_3 - 2 \end{matrix}$$

elde edilir. Bu denklemlerden hareketli pol eğrisinin eğriliği

$$\kappa_m = a_3 - 2 \tag{3.1.43}$$

şeklinde bulunur. (3.1.42) ve (3.1.43) denklemlerinden elde edilen

$$\kappa_f - \kappa_m = 1 \tag{3.1.44}$$

denklemi ρ_f ve ρ_m pol eğrilerinin eğrilikleri arasındaki bağıntıyı verir. Bu bağıntıda ρ_f (benzer şekilde ρ_m) pol eğrisinin eğriliğini verildiğinde a_3 bulunur ancak b_3 hakkında bir bilgi verilemez. Bu durum ρ_f ve ρ_m pol eğrilerinin eğriliklerin hareketin sonsuz küçük özelliklerini 3. mertebeye kadar tamamen karakterize edemeyeceğini göstermektedir.

3.1.10. İkinci pol noktasında ikinci sabit pol eğrisinin eğriliği

(3.1.41) denkleminden $n = 2,\ k = 1$ için

$$\begin{aligned} Z_{P_2,1} &= c_1 + \left(-i\right)^4 c_{2+1}, \\ Z_{P_2,1} &= c_1 + c_3, \quad c_1 = 0, \\ Z_{P_2,1} &= c_3 \end{aligned}$$

ve $n = 2,\ k = 2$ için

$$\begin{aligned} Z_{P_2,2} &= c_2 + \left(-i\right)^4 c_4, \\ Z_{P_2,2} &= c_2 + c_4, \quad c_2 = -i, \\ Z_{P_2,2} &= -i + c_4 \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan

$$X_{P_2,1} = a_3, \qquad Y_{P_2,1} = b_3,$$
$$X_{P_2,2} = a_4, \quad Y_{P_2,2} = b_4 - 1,$$

olduğu görülür. Bu değerler (3.1.18) denkleminde yerine yazılarak başlangıç konumunda ikinci polde ikinci sabit pol eğrisinin eğriliği

$$\kappa_{f_2} = \frac{a_3 b_4 - a_4 b_3 - a_3}{\left(a_3^{\,2} + b_3^{\,2}\right)^{\frac{3}{2}}}, \quad a_3 \neq 0, \quad b_3 \neq 0 \qquad (3.1.45)$$

olarak elde edilir. (3.1.45) denklemin sonucu olarak aşağıdaki teorem verilir.

Teorem 3.1.1. Başlangıç konumunun ikinci polünün ikinci sabit pol eğrisinin bir büküm noktasında olması için yeter ve gerek şart $a_3 \neq 0$ ve $b_3 \neq 0$ olmak üzere

$$a_3 b_4 - a_4 b_3 = a_3 \qquad (3.1.46)$$

olmasıdır.

3.2. Öklid Düzleminde Çembersel Nokta Eğrisi ve Ball Noktaları

Bu bölümde, verilen bir konumda çembersel nokta eğrisi tanıtılarak Ball noktalarının sayısı belirlenecek ve geometrik yeri gösterilecektir.

3.2.1.Çembersel nokta eğrisi

Tanım 3.2.1. Başlangıç konumunda v düzlemindeki, yörüngelerinin eğriliği sabit olan noktaların geometrik yerine çembersel nokta eğrisi veya sabit eğrilikli eğri denir ve cp ile gösterilir.

(3.1.18) denkleminin türevi

$$\kappa' = \frac{\left(X'Y''' - X'''Y'\right)\left(\left(X'\right)^2 + \left(Y'\right)^2\right) - 3\left(X'Y'' - X''Y'\right)\left(X'X'' + Y'Y''\right)}{\left(\left(X'\right)^2 + \left(Y'\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}}$$

olarak bulunur. Çembersel nokta eğrisinin denklemini elde etmek amacıyla bu denklemde $\left(X'\right)^2 + \left(Y'\right)^2 \neq 0$ olmak üzere $\kappa' = 0$ alınırsa

$$\left(\left(X'\right)^2 + \left(Y'\right)^2\right)\left(X'Y''' - X'''Y'\right) - 3\left(X'Y'' - X''Y'\right)\left(X'X'' + Y'Y''\right) = 0 \qquad (3.2.1)$$

denklemi elde edilir. Başlangıç konumunda (3.1.17)'de verilen ani invaryantlar (3.2.1) denkleminde yazıldığında

$$\left(x^2 + y^2\right)\left(-a_3x - b_3y\right) - 3\left(x^2 + y^2 - b_2y\right)b_2x = 0$$

bulunur. Kanonik sistemlere geçiş yapmak amacıyla son denklem $b_2 = -1$ için tekrar düzenlenirse

$$\left(x^2 + y^2\right)\left(a_3x + b_3y\right) - 3x\left(x^2 + y^2 + y\right) = 0, \quad \left(x, y\right) \neq \left(0, 0\right) \qquad (3.2.2)$$

elde edilir ki bu cp çembersel nokta eğrisinin denklemidir.

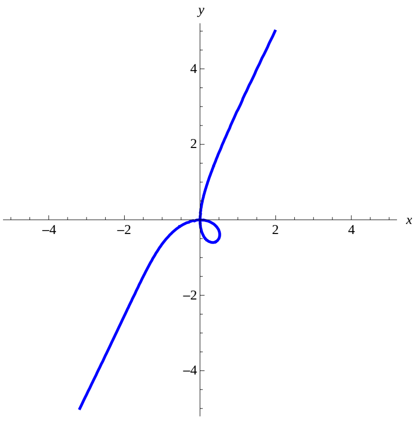
(3.1.29) denklemi göz önüne alınarak $a_3 = 0$ olması durumda aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.2.1. Orijinden farklı bir noktanın yörüngesinin çembersel nokta eğrisi olması için gerek ve yeter şart $a_3 = 0$ iken

$$10a_4b_3 + 3a_5 = 0 \qquad (3.2.3)$$

olmasıdır.

Örnek 3.2.1. $a_3 = 1$ ve $b_3 = 1$ için cp çembersel nokta eğri grafiği aşağıda gösterilmektedir.



Şekil 3.2. $a_3 = 1$ ve $b_3 = 1$ için cp çembersel nokta eğrisi

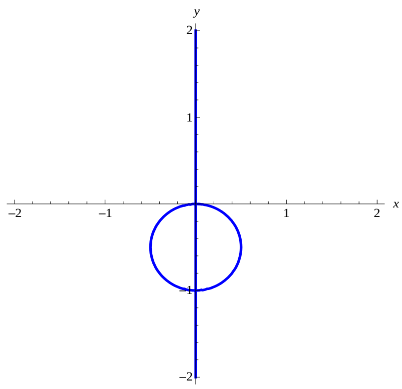
cp eğrisi polde bir düğüm (boğum noktası) noktasına sahip olup teğetleri pol teğeti ve pol normali olur. cp eğrisi üçüncü mertebeden bir eğridir ve bu eğrinin özel halleri aşağıda incelenmiştir.

1. $a_3 \neq 3, b_3 = 0$ olsun. Bu durumda (3.2.2) denkleminde $b_3 = 0$ alındığında

$$x\left(\left(a_3 - 3\right)\left(x^2 + y^2\right) - 3y\right) = 0 \qquad (3.2.4)$$

elde edilir. Bu denklem geometrik olarak cp eğrisinin merkezi pol normali üzerinde olan bir çemberi ile pol normalinden oluştuğunu ifade eder ve bu cp eğrisi Γ ile gösterilecektir.

Örnek 3.2.2. $a_3 = 1$ ve $b_3 = 0$ için cp çembersel nokta eğrisinin grafiği aşağıda gösterilmektedir.



Şekil 3.3. $a_3 = 1$ ve $b_3 = 0$ için cp çembersel nokta eğrisi

Ayrıca $b_3 = 0$ iken $a_3 = 0$ ise

$$x^2 + y^2 + y = 0$$

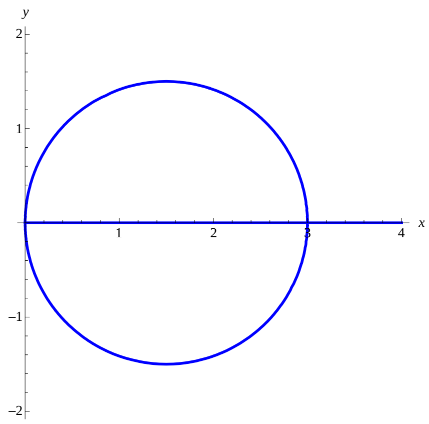
bulunur ve cp eğrisi büküm çemberine dejenere olur.

2. $a_3 = 3, b_3 \neq 0$ olsun. Bu durumda (3.2.2) denkleminde $a_3 = 3$ alındığında

$$y\left(b_3\left(x^2 + y^2\right) - 3x\right) = 0 \tag{3.2.5}$$

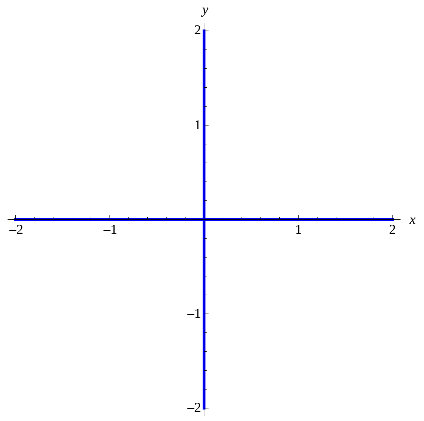
bulunur. cp eğrisinin merkezi pol teğeti üzerinde olan bir çember ile pol teğetinden oluşur ve bu cp eğrisi ve Γ_0 ile gösterilecektir.

Örnek 3.2.3. $a_3 = 3$ ve $b_3 = 1$ için cp çembersel nokta eğrisinin grafiği aşağıda gösterilmektedir.



Şekil 3.4. $a_3 = 3$ ve $b_3 = 1$ için cp çembersel nokta eğrisi

3. $a_3 = 3, b_3 = 0$ olsun. Bu durumda cp eğrisi $xy = 0$ denklemi ile verilir ve aşağıdaki şekilde de görüldüğü üzere cp eğrisi pol teğeti, pol normali ve v düzlemin sonsuzdaki doğrusundan oluşur.



Şekil 3.5. $a_3 = 0$ ve $b_3 = 0$ için cp çembersel nokta eğrisi

cp eğrisinin düğüm noktasındaki eğrilik çemberleri Γ ve Γ_0 çemberleri olur. Γ ve Γ_0 çemberlerinin yarıçapları sırasıyla $\dfrac{3}{2b_3}$ ve $\dfrac{3}{2(a_3-3)}$ olup buradan b_3 ve a_3 invaryantlarının geometrik yorumları aşağıdaki teoremde verilmiştir.

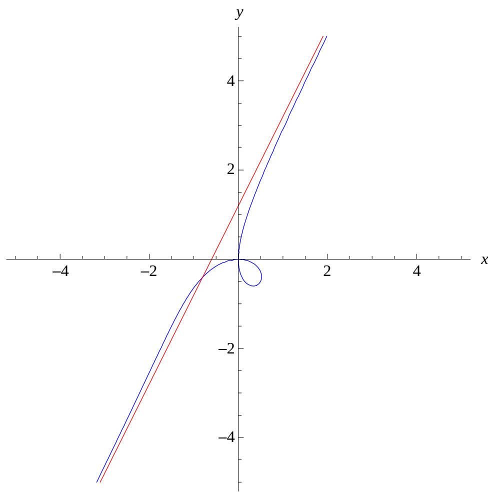
Teorem 3.2.2. b_3, cp eğrisinin pol normaline teğet olan bir kolunun eğriliğin $3/2$ katına ve a_3, cp eğrisinin pol teğetine teğet olan bir kolunun eğriliğin $3/2$ katına eşittir.

(3.2.2) denklemine kapalı fonksiyonların asimtotunu bulma metodu uygulanarak gerekli işlemler sonucu cp eğrisinin reel asimptotu

$$\left((a_3-3)^2+b_3^{\,2}\right)\left((a_3-3)x+b_3y\right)+3(a_3-3)b_3=0 \qquad (3.2.6)$$

olarak bulunur.

Örnek 3.2.4. $a_3 = 1$ ve $b_3 = 1$ için cp çembersel nokta eğrisi ve cp eğrisinin reel asiptomtotu aşağıda görülmektedir.



Şekil 3.6. *cp* çembersel nokta eğrisinin asimptotu

cp eğrisi indirgenemez ise $y = ux$ parametrik ifadesi (3.2.2) denkleminde yazılırsa

$$x = \frac{3u}{\left(1+u^2\right)\left(b_3u + a_3 - 3\right)}, \quad y = \frac{3u^2}{\left(1+u^2\right)\left(b_3u + a_3 - 3\right)} \qquad (3.2.7)$$

bulunur. (3.2.7) denklemi (3.2.6)'da yerine yazılırak elde edilen $u = \frac{b_3}{\left(3 - a_3\right)}$ parametrik değeri cp eğrisi ile asimptonunun kesişim noktasına karşılık gelir. Bu nokta S ile gösterilecektir.

$a_3 \neq 3, b_3 = 0$ durumunda (3.2.7) denkleminden

$$x = \frac{3u}{\left(a_3 - 3\right)\left(1+u^2\right)}, \quad y = \frac{3u^2}{\left(a_3 - 3\right)\left(1+u^2\right)} \qquad (3.2.8)$$

elde edilir. Bu parametrik ifade Γ çemberini ifade eder.

$a_3 = 3, b_3 \neq 0$ durumunda ise (3.2.7) denkleminden

$$x = \frac{3}{b_3\left(1+u^2\right)}, \quad y = \frac{3u}{b_3\left(1+u^2\right)} \qquad (3.2.9)$$

Γ_0 çemberinin parametrik ifadesi elde edilir.

3.2.2. Merkez nokta eğrisi

v düzleminin (x, y) noktalarına ait eğrilik merkezlerinin kanonik sistemdeki denklemi olan (3.1.24) göz önüne alınarak (3.2.2) denkleminde x ve y yok edilirse

$$\left(\xi^2+\eta^2\right)\left(a_3\xi+b_3\eta\right)-3\xi\eta=0$$

bulunur.

Böylece başlangıç konumunda v düzleminin noktalarının eğrilik merkezlerinin geometrik yeri çembersel nokta eğrisi olan orijin hariç noktaların yörüngesi

$$\left(x^2+y^2\right)\left(a_3x+b_3y\right)-3xy=0 \qquad (3.2.10)$$

denklemi ile verilen kübik bir eğridir. Bu eğriye merkez nokta eğrisi denir ve $c\tilde{p}$ ile gösterilir.

$c\tilde{p}$ eğrisi bir düğüm noktası olan pole sahip bir çembersel eğridir. Bu düğüm noktasındaki teğetleri pol teğeti ve pol normalidir. $c\tilde{p}$ eğrisi bir rasyonel eğri olduğu açıktır. $c\tilde{p}$ eğrisi için aşağıdaki sonuçlar verilebilir.

1. $a_3 \neq 3, b_3 = 0$ ise $c\tilde{p}$ eğrisi pol normali ve $\tilde{\Gamma}$ çemberinden oluşur. (3.2.10) denkleminde $b_3 = 0$ yazılırsa

$$a_3x\left(x^2+y^2\right)-3xy=0 \qquad (3.2.11)$$

elde edilir.

2. $a_3 = 3, b_3 \neq 0$ ise $c\tilde{p}$ eğrisi (3.2.5) denklemi ile verilen pol teğeti ile Γ_0 çemberinden oluşur.

$\tilde{\Gamma}$ ve Γ_0 çemberleri polde $c\tilde{p}$ eğrisinin eğrilik çemberleridir.

3. $a_3 = b_3 = 0$ ise $c\tilde{p}$ eğrisi pol teğeti, pol normali ve v düzleminin sonsuzdaki doğrusundan oluşur.

Sonuç 3.2.1. cp ve $c\tilde{p}$ eğrilerinin aynı anda aynı eğriye dejenere olması için gerek ve yeter şart $b_3 = 0$ olmasıdır.

(3.1.40) denklemi (3.2.10) denkleminde yazılırsa

$$\left(x^2+y^2\right)\left(\tilde{a}_3 x-\tilde{b}_3 y\right)-3x\left(x^2+y^2-y\right)=0 \qquad (3.2.12)$$

bulunur. Bölüm 3.1.8'de belirtildiği gibi (3.2.12) denkleminde y yerine $-y$ yazarak $c\tilde{p}$ eğrisinin denklemi ters hareketin kanonik sistemine göre

$$\left(x^2+y^2\right)\left(\tilde{a}_3 x+\tilde{b}_3 y\right)-3x\left(x^2+y^2+y\right)=0$$

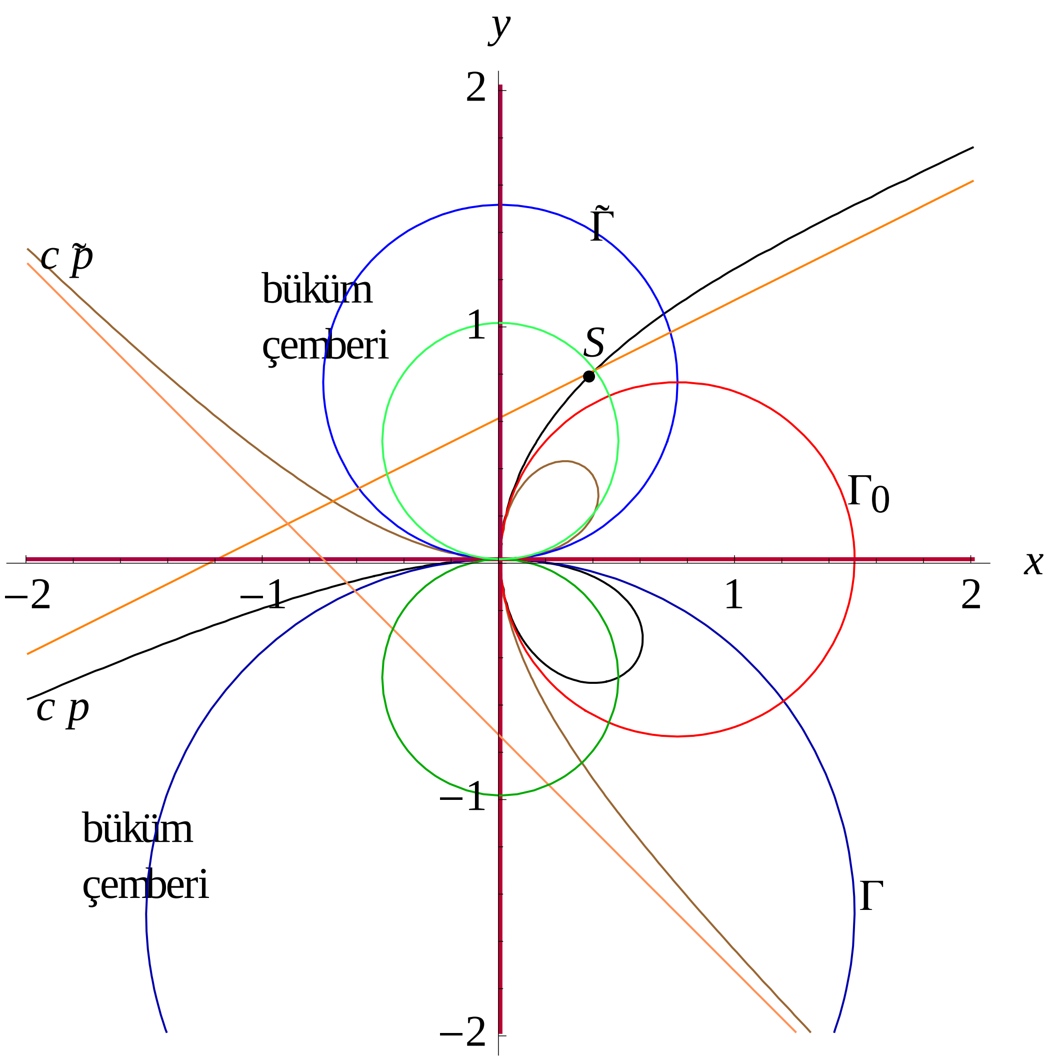
olarak elde edilir. Bu denklem $c\tilde{p}$ eğrisinin ters hareketin çembersel nokta eğrisi olduğunu gösterir. cp eğrisi de ters hareketin merkezi nokta eğrisidir.

$c\tilde{p}$ eğrisinin reel asimptotu

$$\left(a_3^{\,2}+b_3^{\,2}\right)\left(a_3 x+b_3 y\right)-3a_3 b_3=0 \qquad (3.2.13)$$

olarak bulunur.

Özel olarak $a_3 = b_3 = 2$ için cp ve $c\tilde{p}$ eğrileri, bu eğrilerin dejenere halleri ve asimptotları Şekil 3.2.6'da verilmiştir.



Şekil 3.7. cp ve $c\tilde{p}$ çembersel nokta eğrileri ve asimptotları

3.2.3. Ball noktaları

Tanım 3.2.2. Düzlemin çembersel nokta eğrisi ile büküm çemberinin kesim noktaları, Ball noktaları olarak adlandırılır. Ball noktaları Bl ile gösterilecektir.

(3.1.23) ve (3.2.2) denklemlerinin ortak çözümünden Bl noktasının koordinatları

$$\left(\frac{a_3 b_3}{a_3^2 + b_3^2}, \quad \frac{-a_3^2}{a_3^2 + b_3^2} \right) \tag{3.2.14}$$

olarak verilir.

$a_3 \neq 0$ ise pol noktası Bl noktası değildir. Buradan $a_3 \neq 0$ olduğu durumda başlangıç konumunda sadece bir Bl noktası vardır. $a_3 = 0, b_3 \neq 0$ olması durumunda ise (3.2.14) denkleminden Bl noktasının orijin olduğu direkt söylenemez. Bunun için Bölüm 3.1.7'nin irdelenmesi gerekir öyle ki $a_3 = 0, b_3 \neq 0$ iken $\kappa_0 = \kappa_1 = 0$ olması için $a_4 = a_5 = 0$ olmalıdır. O halde $a_3 = a_4 = a_5 = 0$ olduğunda Bl noktası orijin olur. Ancak $a_3 = 0, b_3 \neq 0$ olmasına rağmen $a_4 \neq 0$ ya da $a_5 \neq 0$ ise $\kappa_0 \neq 0$ ya da $\kappa_1 \neq 0$ olur ki bu konumlarda Bl noktası oluşmaz. Öyleyse $a_3 = 0, b_3 \neq 0,$ $a_4^2 + a_5^2 \neq 0$ iken Bl noktası yoktur. $a_3 = b_3 = 0$ ise çembersel nokta eğrisi büküm çemberine ve pol normaline ayrılır. Bu durumda $a_4^2 + a_5^2 \neq 0$ iken orijin hariç büküm çemberi üzerindeki herhangi bir nokta başlangıç konumunda Bl noktasıdır. Aynı zamanda $a_4 = a_5 = 0$ ise orijinde de dâhil büküm çemberinin tüm noktaları Bl noktası olur. Tüm bu durumlar aşağıdaki tabloda özetlenmiştir.

Tablo.3.1. Öklid düzleminde Ball noktalarının sınıflandırılması

Şart	Bl noktası
$a_3 \neq 0$	$\left(\dfrac{a_3 b_3}{a_3^2 + b_3^2}, \quad \dfrac{-a_3^2}{a_3^2 + b_3^2} \right)$
$a_3 = a_4 = a_5 = 0$, $b_3 \neq 0$	Orijin
$a_3 = 0, b_3 \neq 0, a_4^2 + a_5^2 \neq 0$	Hiçbiri
$a_3 = b_3 = 0$, $a_4^2 + a_5^2 \neq 0$	Orijin hariç büküm çemberin noktaları
$a_3 = a_4 = a_5 = b_3 = 0$	Büküm çemberin tüm noktaları

Sonuç olarak $a_3 \neq 0$ ise başlangıç konumunda Bl noktası cp eğrisinin (3.2.7) denklemiyle ifade edilen parametrik ifadesinde $u = -a_3 / b_3$ parametrik değeri ile gösterilir. Bu Bl noktasını orijine bağlayan doğrunun argumentinin tanjantıdır. Ayrıca (3.2.13) denkleminden $c\tilde{p}$ eğrisinin asimptotunun eğiminin $-a_3 / b_3$ olduğu göz önüne alınırsa bu doğrunun $c\tilde{p}$ eğrisinin asimptotuna paralel olduğu görülür.

3.2.4. Ters hareketin Bl noktaları

Ters hareketin başlangıç konumunda $\tilde{a}_3 \neq 0$ iken bir Bl noktası vardır. Bu hareketin kanonik sistemlerine göre çembersel nokta eğrisinin ve büküm çemberinin denklemleri sırasıyla

$$\left(x^2+y^2\right)\left(\tilde{a}_3 x-\tilde{b}_3 y\right)-3x\left(x^2+y^2-y\right)=0,$$
$$x^2+y^2-y=0$$

olup bu denklem sisteminin çözümünden Bl noktası

$$\left(\frac{\tilde{a}_3\tilde{b}_3}{\tilde{a}_3^2+\tilde{b}_3^2},\quad \frac{\tilde{a}_3^2}{\tilde{a}_3^2+\tilde{b}_3^2}\right) \tag{3.2.15}$$

olarak bulunur. (3.1.40) denklemi (3.2.15) denkleminde yerine yazıldığında orijinal hareketin kanonik sistemlerine göre koordinatları

$$\left(-\frac{\left(a_3-3\right)b_3}{\left(a_3-3\right)^2+b_3^2},\quad \frac{\left(a_3-3\right)^2}{\left(a_3-3\right)^2+b_3^2}\right) \tag{3.2.16}$$

bulunur.

(3.1.40) denkleminden $\tilde{a}_3=-a_3+3;\quad \tilde{a}_4=-a_4-4b_3;\quad \tilde{a}_5=-a_5+10a_3-5b_4-10$ olduğu göz önüne alınırsa aşağıdaki yorumlar kolayca yapılabilir.

Başlangıç konumunda ters hareketin yegâne Bl noktasının orijin olması için gerek ve yeter şart

$$a_3=3,\ a_4=-4b_3\neq 0,\ a_5=-5b_4+20 \tag{3.2.17}$$

olmasıdır.

$a_3=3, b_3=0$ iken (3.2.17) denkleminden $a_4=-4b_3\neq 0$ ve $a_5=-5b_4+20$ ifadelerinden herhangi biri sağlanmazsa ters hareketin başlangıç konumunda herhangi Bl (orijin de dahil) noktası olamaz.

Ayrıca $x^2+y^2-y=0$ çemberinin herhangi noktası ters hareketin bir Bl noktası olması için gerek ve yeter şart

$$a_3=3,\, a_4=b_3=0,\, a_5=-5b_4+20$$

olmasıdır.

3.2.5. Ek Ball Noktaları

Tanım 3.2.3. $\kappa=\kappa'=...=\kappa^{(r+1)}=0,\, \kappa^{(r+2)}\neq 0$ ile verilen bir Bl noktası r -ek Bl noktası olarak adlandırılır ve Bl_r noktası olarak gösterilir.

Başlangıç konumunda $a_3\neq 0$ iken bir Bl noktası vardır. Bu durumda aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.2.3. $a_3\neq 0$ iken Bl noktasının Bl_1 noktası olması için gerek ve yeter şart

$$a_3b_4-a_4b_3=a_3$$

olmasıdır.

İspat. (3.1.8) denkleminden $\kappa=\kappa'=\kappa''=0$ olması için gerek ve yeter şart $X_1Y_4-X_4Y_1=0$ olmasıdır. Bu ifade de (3.1.17) denklemi yazılırsa

$$x^2+y^2+a_4x+b_4y=0$$

bulunur. Bl_1 noktası (x_0,y_0) ile gösterilirse yukarıdaki ifade

$$x_0^2+y_0^2+a_4x_0+b_4y_0=0 \tag{3.2.18}$$

olur ki aynı zamanda bu nokta $x_0^2+y_0^2+y_0=0$ büküm çember üzerinde olduğundan bu denklem ile (3.2.18)'in ortak çözümünden

$$a_4x_0+(b_4-1)\,y_0=0 \tag{3.2.19}$$

elde edilir. (3.2.14) ile verilen Ball noktası, (3.2.19)'da yazılırsa

$$a_3 b_4 - a_4 b_3 = a_3 \tag{3.2.20}$$

bulunur. Bu bağıntı başlangıç konumunda $a_3 \neq 0$ iken Bl noktasının Bl_1 noktası olabilmesi için yeter ve gerek şarttır.

Başlangıç konumunda $a_3 = a_4 = a_5 = 0$ ve $b_3 \neq 0$ ise orijin yegane Bl noktasıdır. (3.1.30) denkleminden bu noktanın Bl_1 noktası olabilmesi için yeter ve gerek şart $a_6 = 0$ olmasıdır.

Diğer taraftan $a_3 = b_3 = 0$ ve $a_4^2 + a_5^2 \neq 0$ durumunda büküm çemberinin orijin hariç her noktası başlangıç konumu için bir Bl noktasıdır. (3.2.18) ve (3.2.19) denklemlerinden görülür ki; bütün bu noktalar Bl_1 noktasıdır ancak ve ancak $a_4 = 0$ iken $b_4 = 1$ ya da $a_4 \neq 0$ iken Bl_1 noktasının koordinatının

$$\left(\frac{a_4 (b_4 - 1)}{a_4^2 + (b_4 - 1)^2}, \quad \frac{-a_4^2}{a_4^2 + (b_4 - 1)^2} \right) \tag{3.2.21}$$

olmasıdır.

Ayrıca $a_3 = a_4 = a_5 = b_3 = 0$ durumunda büküm çemberinin her noktası başlangıç konumu için Bl noktasıdır. Aynı zamanda $b_4 = 1$ ise orijin hariç bütün bu noktalar Bl_1 noktalarıdır. Ek olarak orijinin Bl_1 noktası olması için $a_6 = 0$ olması gerekir. Ayrıca $b_4 \neq 1$ olmasına rağmen $a_6 = 0$ sağlanmaz ise hiçbir Bl_1 noktası yoktur. Yani $a_3 = a_4 = a_5 = b_3 = 0$ iken $b_4 \neq 1$ ve $a_6 = 0$ ise başlangıç konumunun orijini yegane Bl_1 noktasıdır.

Böylece başlangıç konumunun bir Bl_1 noktasına sahip olma şartı aşağıdaki tabloda özetlenmektedir.

Tablo.3.2. Öklid düzleminde Bl_1 noktalarının sınıflandırılması

Şart	Bl_1 noktası
$a_3 = a_3 b_4 - a_4 b_3 \neq 0$	$\left(\dfrac{a_3 b_3}{a_3^2 + b_3^2}, \quad -\dfrac{a_3^2}{a_3^2 + b_3^2} \right)$
$a_3 = b_3 = 0,\ a_4 \neq 0$	$\left(\dfrac{a_4 (b_4 - 1)}{a_4^2 + (b_4 - 1)^2}, \quad -\dfrac{a_4^2}{a_4^2 + (b_4 - 1)^2} \right)$
$a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = 0,$ $b_3^2 + (b_4 - 1)^2 \neq 0$	Orijin

3.2.6. Geometrik yorum

(3.2.2) denklemi ile verilen cp eğrisi

$$\left(x^2 + y^2\right)\left(\frac{(a_3 - 3)}{3} x + \frac{b_3}{3} y \right) - xy = 0$$

ve (3.2.10) denklemi ile verilen $c\tilde{p}$ eğrisi

$$\left(x^2 + y^2\right)\left(\frac{a_3}{3} x + \frac{b_3}{3} y \right) - xy = 0$$

olarak yazılabilir.

Diğer taraftan karşılıklı dik teğetleri olan bir düğüm noktasına sahip 3. mertebeden rasyonel çembersel bir γ eğrisi

$$(\alpha x + \beta y)\left(x^2 + y^2\right) - xy = 0 \tag{3.2.22}$$

ile verilebilir. γ indirgenemez bir eğri yani $\alpha\beta \neq 0$ olsun. Bu durumda eğer sırasıyla

$$\alpha = \frac{a_3 - 3}{3}, \quad \beta = \frac{b_3}{3} \text{ ve } \alpha = \frac{a_3}{3}, \quad \beta = \frac{b_3}{3}$$

alınırsa (3.2.22) denklemi cp ve $c\tilde{p}$ eğrilerinin kanonik sisteme göre denklemlerini ifade eder. $y = ux$ alınırsa γ eğrisinin parametrik denklemi

$$x=\frac{u}{\left(1+u^2\right)\left(\alpha+\beta u\right)},\quad y=\frac{u^2}{\left(1+u^2\right)\left(\alpha+\beta u\right)} \tag{3.2.23}$$

olarak bulunur.

O halde $\frac{-\alpha}{\beta}$ parametrik değeri γ eğrisinin sonsuzdaki noktasına karşılık gelir. (3.2.23) denkleminde $\alpha=0$ yazılırsa y -ekseni boyunca γ eğrisine teğet olan Γ_0 eğrilik çemberinin parametrik denklemi

$$x=\frac{1}{\beta\left(1+u^2\right)},\quad y=\frac{u}{\beta\left(1+u^2\right)} \tag{3.2.24}$$

olarak bulunur. Benzer şekilde (3.2.23) denkleminde $\beta=0$ yazılırsa x -ekseni boyunca γ eğrisine teğet olan Γ_1 eğrilik çemberinin parametrik denklemi

$$x=\frac{u}{\alpha\left(1+u^2\right)},\quad y=\frac{u^2}{\alpha\left(1+u^2\right)} \tag{3.2.25}$$

olarak elde edilir. Γ_0 ve Γ_1 çemberlerinin Kartezyen denklemleri sırasıyla (3.2.24) denkleminden

$$\beta\left(x^2+y^2\right)-x=0 \tag{3.2.26}$$

ve (3.2.25) denkleminden

$$\alpha\left(x^2+y^2\right)-y=0 \tag{3.2.27}$$

bulunur. γ eğrisi üzerindeki A_i $(i=1,2,3)$ noktalarının orijinden geçmeyen aynı doğru üzerinde bulunması için gerek ve yeter şart A_2A_1 ve A_2A_3 doğrularının eğimlerinin birbirine eşit olmasıdır. Bu durumda γ eğrisi üzerinde alınan

$$A_i=\left(\frac{u_i}{\left(1+u_i^2\right)\left(\alpha+\beta u_i\right)},\quad \frac{u_i^2}{\left(1+u_i^2\right)\left(\alpha+\beta u_i\right)}\right),\quad \left(i=1,2,3\right)$$

noktaları

$$\frac{\beta u_3^{\,2}u_2^{\,2}-\beta u_3u_2-\alpha\left(u_3+u_2\right)}{\beta u_3u_2\left(u_3+u_1\right)+\alpha u_3u_2-\alpha}=\frac{\beta u_2^{\,2}u_1^{\,2}-\beta u_2u_1-\alpha\left(u_2+u_1\right)}{\beta u_2u_1\left(u_2+u_1\right)+\alpha u_2u_1-\alpha}$$

bağıntısını sağlar. Böylece

$$\beta^2u_3u_2^{\,2}u_1+\alpha\beta u_2\left(u_3u_1+1\right)+\alpha^2=0$$

denkleminden

$$u_3u_2u_1=\frac{-\alpha}{\beta} \qquad \text{veya } u_2=\frac{-\alpha}{\beta}$$

bulunur. $\frac{-\alpha}{\beta}$ parametrik değeri γ eğrisinin sonsuzdaki noktasına karşılık geldiğinden $u_2\neq\frac{-\alpha}{\beta}$ olmak zorundadır. O halde γ eğrisi üzerindeki u_i $(i=1,2,3)$ parametrik değerleri ile verilen A_i $(i=1,2,3)$ noktalarının orijinden geçmeyen aynı doğru üzerinde bulunması için gerek ve yeter şart

$$u_3u_2u_1=\frac{-\alpha}{\beta} \tag{3.2.28}$$

olmasıdır.

(3.2.28) denkleminde üç noktadan biri sonsuzdaki nokta yani $u_3^*=\frac{-\alpha}{\beta}$ ise bu doğru γ eğrisinin asimptotuna paralel olur ve eğriyi u_1^* ve u_2^* parametreli iki noktada keser. Bu parametreler arasında

$$u_1^*u_2^*=1 \tag{3.2.29}$$

bağıntısı elde edilir. γ eğrisinin A_1 ve A_2 iki noktası u_1 ve u_2 parametreleri ile gösterilirse A_2A_1 doğrusunun denklemi

$$\left(\alpha\left(u_2+u_1\right)-\beta u_1u_2\left(u_1u_2-1\right)\right)x+\left(\alpha\left(u_1u_2-1\right)+\beta u_1u_2\left(u_2+u_1\right)\right)y-u_1u_2=0 \quad (3.2.30)$$

bulunur. Bu denklem düzenlenirse

$$\alpha\left(\left(u_1+u_2\right)x+\left(u_1u_2-1\right)y\right)-u_1u_2\left(\beta\left(u_1u_2-1\right)x-\beta\left(u_2+u_1\right)y+1\right)=0$$

elde edilir. Bu doğru

$$\left(u_1+u_2\right)x+\left(u_1u_2-1\right)y=0 \quad (3.2.31)$$

ve

$$\beta\left(u_1u_2-1\right)x-\beta\left(u_2+u_1\right)y+1=0 \quad (3.2.32)$$

denklemleri ile verilen birbirlerine dik iki doğrunun kesişim noktasından geçmektedir.

Orijinin, A_2A_1 doğrusuna uzaklığı

$$d=\frac{\left|u_1u_2\right|}{\left(\left(\alpha^2+\beta^2u_1^2u_2^2\right)\left(u_1^2+1\right)\left(u_2^2+1\right)\right)^{\frac{1}{2}}} \quad (3.2.33)$$

bulunur. Eğer A_3, γ eğrisinin $-u_1$ parametreli noktası ise (3.2.33) denkleminden A_2A_1 ve A_2A_3 doğruları orijinden eşit uzaklıktadır. Yani A_2A_1 ve A_2A_3 doğruları A_2O doğrusuna göre simetriktir.

3.2.7. Γ_0 ve Γ Çemberlerinin Oluşumu

u parametreli cp eğrisinin bir noktasına ait eğrilik merkezi $c\tilde{p}$ eğrisinin aynı parametreli noktası ile çakışır. A_1 ve A_2 noktaları cp eğrisi üzerinde iki nokta olsun. α_1 ve α_2 bu noktalara ait eğrilik merkezi olsun. Eğer A_1 ve A_2 noktaları sırasıyla u_1 ve u_2 parametreleri ile verilirse A_2A_1 doğrusunun denklemi (3.2.30) denkleminde

$\alpha = \dfrac{a_3 - 3}{3}$, $\beta = \dfrac{b_3}{3}$ ve $\alpha_2\alpha_1$ doğrusunun denklemi (3.2.30) denkleminde $\alpha = \dfrac{a_3}{3}$, $\beta = \dfrac{b_3}{3}$ yazılarak bulunur. Buradan A_2A_1 doğrusu gibi $\alpha_1\alpha_2$ doğrusu da birbirine dik (3.2.31) ve (3.2.32) doğrularının kesişim noktasından geçer. Burada (3.2.31) denklemi $\alpha_2\alpha_1$ ve A_2A_1 doğrularının kesiştiği Q noktasından ve P polünden geçen doğruyu ifade eder. (3.2.32) denklemi ise Q noktasından geçen PQ doğrusuna dik doğrunun denklemini ifade eder. Γ_0 çemberinin (3.2.24) denklemi ile belirlenen parametrik ifadesi (3.2.32) denkleminde yazıldığında

$$u^2 - (u_2 + u_1)u + u_1u_2 = 0 \qquad (3.2.34)$$

denklemi elde edilir. Bu denklemin kökleri u_1 ve u_2 dir. Bu dik doğrunun denklemiyle Γ_0 çemberinin kesişim noktalarının parametre değerleri bulunur. Ayrıca bu noktalar PA_1 ve PA_2 doğruları üzerindedir. Sonuç olarak Γ_0 çemberi elde edilmiş olur.

cp eğrisinin A_1 ve A_2 noktaları ve bu noktalara ait α_1 ve α_2 eğrilik merkezleri verilirse P pol teğeti bulunur. $\alpha_2\alpha_1$ ve A_2A_1 doğrularının kesişim noktası Q noktasından geçen PQ doğrusuna dik olan doğru PA_1 ve PA_2 doğruları üzerinde sırasıyla S_1 ve S_2 noktalarından geçer. Γ_0 çemberi S_1 (veya S_2) ve P noktalarından geçen çemberdir ve bu çemberin merkezi P pol teğeti üzerindedir.

Benzer bir inşa Γ çemberi için de verilebilir. Bunun için öncelikle PQ doğrusuna dik ve P polünden geçen doğruyu inceleyelim. Bu doğru denklemi (3.2.31) denkleminden eğimleri çarpımı -1 olacak ve P polünden geçecek şekilde

$$(u_1u_2 - 1)x - (u_1 + u_2)y = 0$$

bulunur. Yukarıdaki denklem ve (3.2.30) birlikte ele alınırsa bu doğru ile A_2A_1 doğrusunun R ile gösterilecek olan kesişim noktası

$$\alpha\left(\left(u_2+u_1\right)x+\left(u_1u_2-1\right)y\right)-u_1u_2=0 \qquad (3.2.35)$$

doğrusu üzerindedir. O halde R noktasından geçen doğru PQ doğrusuna paraleldir. (3.2.35) denkleminde Γ çemberinin (3.2.25)'deki parametrik değerleri yazıldığında

$$u^2-\left(u_2+u_1\right)u+u_1u_2=0$$

bulunur. Bu denklem ise önceden bulunan (3.2.34) denklemidir ve Γ çemberi ile (3.2.35)'da verilen doğrusunun kesişim noktasının parametrik ifadesidir. Bu yüzden T_1 ve T_2 kesişimleri sırasıyla PA_1 ve PA_2 doğruları üzerindedir. O halde Γ çemberi elde edilmiş olur.

3.3. Öklid Düzleminde Burmester Noktalar

Bu bölümde Öklidyen düzlem hareketinde Burmester nokta ve Ek Burmester nokta kavramı verilecektir. Bununla birlikte cp ve br eğrilerinin sonsuzda reel kesişimleri incelenecektir.

3.3.1. Burmester noktalar

Tanım 3.3.1. v düzleminin verilen bir konumunda yörüngesi sonsuzda olmayan bir reel noktası verilsin. Yörünge eğriliğinin birinci ve ikinci türevleri sıfır olan bu noktaya Burmester noktası denir ve bu nokta kısaca Br ile gösterilecektir.

Bu tanım bir Bl_1 noktasının bir Br nokta olduğunu ifade eder. Bir Br noktasında yörünge eğrilik çemberiyle en az dört nokta temaslıdır. Eğer bir nokta $\left(4+r\right)$. mertebeden temasa sahip ise ek Burmester nokta olarak adlandırılır ve Br_s ile gösterilecektir.

Bölümde 3.1.7'de gösterildiği üzere orijinin yörünge eğrilikleri için verilenler göz önüne alınırsa aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.3.1. Orijinin, başlangıç konumunda Br nokta olması için gerek ve yeter şart

$$a_3 = 0, \quad 10a_4b_3 + 3a_5 = 0, \quad -30a_4b_3^{\,2} + 40a_4b_4 + 35a_5b_3 + 8a_6 = 0 \qquad (3.3.1)$$

olmasıdır.

İspat. Tanım 3.3.1'den orijinin, başlangıç konumunda Br nokta olması için gerek ve yeter şart $\kappa_1 = 0$ ve $\kappa_2 = 0$ olmasıdır. Bu şartlar göz önüne alındığında (3.1.29) ve (3.1.30) denklemlerinden ispat kolayca görülür.

Tablo.3.2.2'den bilindiği üzere orijinin Bl_1 noktası olması için gerek ve yeter şart

$$a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = 0, \quad b_3^2 + \left(b_4 - 1\right)^2 \neq 0 \qquad (3.3.2)$$

olmasıdır.

Burmester noktasını incelemek üzere (3.2.1)'de verilen $\kappa' = 0$ eşitliği göz önüne alınarak $\kappa'' = 0$ eşitliği

$$\begin{aligned}&\left(X''Y''' - X'''Y'' + X'Y^{(4)} - X^{(4)}Y'\right)\left(\left(X'\right)^2 + \left(Y'\right)^2\right) - \left(X'Y''' - X'''Y'\right)\left(X'X'' + Y'Y''\right)\\ &-3\left(X'Y'' - X''Y'\right)\left(\left(X''\right)^2 + \left(Y''\right)^2 + X'X''' + +Y'Y'''\right) = 0\end{aligned} \qquad (3.3.3)$$

olarak elde edilir. Başlangıç konumu için (3.1.17) denklemlerine göre son denklem düzenlenirse

$$\begin{aligned}&\left(-b_3x - b_2y + a_3y - a_3b_2 - b_4y - a_4x\right)\left(x^2 + y^2\right) - \left(-b_3y - a_3x\right)b_2x\\ &-3\left(y^2 - b_2y + x^2\right)\left(-2b_2y + b_2^{\,2} - a_3y + b_3x\right) = 0\end{aligned}$$

bulunur. Burada özel olarak $b_2 = -1$ alındığında

$$\left(\left(a_4 + 4b_3\right)x - \left(4a_3 - b_4 - 5\right)y + 3\right)\left(x^2 + y^2 + y\right) - y\left(a_4x + \left(b_4 - 1\right)y\right) = 0 \qquad (3.3.4)$$

bulunur. Bu ise br ile gösterilecek olan çembersel kübik eğridir.

3.3.2. cp ve br eğrilerinin sonsuzda reel kesişimleri

cp ve br eğrilerinin sonsuzda reel kesişimlerini 4 durumda inceleyelim.

1. $(a_3-3)b_3 \neq 0$ olsun. Bu durumda cp çembersel nokta eğrisi indirgenemezdir ve

$$x=\frac{3u}{(1+u^2)(b_3u+a_3-3)}, \quad y=\frac{3u^2}{(1+u^2)(b_3u+a_3-3)}$$

parametrik denklemi ile verilir. cp çembersel nokta eğrisi $u_0=(3-a_3)/b_3$ parametre değerine karşılık sonsuzda bir noktaya sahiptir. cp ve br eğrilerinin kesişimleri için (3.2.7) ve (3.3.4) denklemlerinin ortak çözümünden uzun ve rutin işlemler sonucu

$$\begin{aligned}&b_3^2u^4+(3b_3-2a_3b_3)u^3+\left(5b_3^2-3a_3^2+3a_3+3b_4-3\right)u^2\\&+(6a_3b_3-3b_3+3a_4)u+a_3(a_3-3)=0\end{aligned} \qquad (3.3.5)$$

bulunur. Bu denklemin kökleri cp ve br eğrilerinin kesişim noktalarını verir.

$u_0=(3-a_3)/b_3$ değeri (3.3.5) denkleminde yazıldığında

$$-\frac{3(-3+a_3)\left(4a_3^2+b_3(a_4+4b_3)+3(5+b_4)-a_3(17+b_4)\right)}{b_3^2}=0$$

elde edilir. O halde u_0 değeri (3.3.5) denklemin kökü olabilmesi için

$$4a_3^2-17a_3-a_3b_4+a_4b_3+4b_3^2+3b_4+15=0 \qquad (3.3.6)$$

eşitliği sağlanmalıdır. (3.3.5) denkleminin türevi olan

$$4b_3^2u^3+3(3b_3-2a_3b_3)u^2+2\left(5b_3^2-3a_3^2+3a_3+3b_4-3\right)u+(6a_3b_3-3b_3+3a_4)=0$$

denkleminde u_0 değeri yazıldığında

$$4a_3^3-57a_3^2+192a_3+4a_3b_3^2+6a_3b_4-18b_4-27b_3^2-3a_4b_3-171=0 \qquad (3.3.7)$$

bulunur. (3.3.5) denkleminin katlı kök sayısı μ ile gösterilmek üzere u_0 ifadesi bu denkleminin $\mu \geq 2$ katlı köküdür ancak ve ancak

$$\begin{aligned} a_4 &= -\frac{4a_3^3 - 33a_3^2 + 90a_3 + 4a_3b_3^2 - 3b_3^2 - 81}{3b_3} \\ b_4 &= -\frac{4a_3^3 - 45a_3^2 + 141a_3 - 15b_3^2 + 4a_3b_3^2 - 126}{3(a_3 - 3)} \end{aligned} \tag{3.3.8}$$

denkleminin sağlanmasıdır. (3.3.5) denkleminin ikinci türevinde $u_0 = (3 - a_3)/b_3$ değeri yerine yazılırsa

$$5a_3^3 - 42a_3^2 + 117a_3 + a_3b_3^2 - 108 = 0 \tag{3.3.9}$$

elde edilir Bu eşitlik u_0 ’ın (3.3.5) denkleminin en az 3 katlı kökü olma şartıdır. (3.3.9) denklemi tekrar düzenlenirse

$$a_3b_3^2 + (5a_3 - 12)(a_3 - 3)^2 = 0$$

bulunur. Bu sadece $0 < a_3 < \frac{12}{5}$ durumunda sağlanır.

Kabul edelim ki u_0, (3.3.5) denkleminin $\mu = 4$ katlı kökü olsun. O halde $a_3 = \frac{5}{2} > \frac{12}{5}$ olup bu bir çelişkidir. Dolayısıyla u_0, (3.3.5) denkleminin en fazla 3 katlı kökü olduğunu göstermektedir.

$\mu = 1, 2$ ve 3 iken (3.3.5) denkleminin kalan kökleri sırasıyla

$$b_3(a_3 - 3)u^3 - 3(a_3 - 2)(a_3 - 3)u^2 + (5a_3b_3 - 3b_3 + 3a_4)u + a_3(a_3 - 3) = 0, \tag{3.3.10}$$

$$b_3(a_3 - 3)u^2 - (a_3 - 3)(4a_3 - 9)u + a_3b_3 = 0, \tag{3.3.11}$$

ve

$$(a_3 - 3)^2 u + a_3b_3 = 0, \tag{3.3.12}$$

denklemlerinden elde edilir. $a_3 = 0, \quad b_3 \neq 0$ ise (3.3.5) denklemi

$$b_3^2 u^4 + 3b_3 u^3 + \left(5b_3^2 + 3b_4 - 3\right)u^2 + 3\left(a_4 - b_3\right)u = 0 \qquad (3.3.13)$$

formunda yazılır. Bu durumda (3.3.6) ve (3.3.8) denklemleri sırasıyla

$$a_4 b_3 + 4b_3^2 + 3b_4 + 15 = 0 \qquad (3.3.14)$$

$$a_4 = \frac{b_3^2 + 27}{b_3}, \quad b_4 = \frac{-5b_3^2 + 42}{3} \qquad (3.3.15)$$

biçiminde elde edilir. Bu durumda $a_3 = 0$ ifadesi (3.3.9) denkleminde yazıldığında b_3 ifadesi, üç katlı kökün olması için şart olan bu denklemi sağlamaz. Bu yüzden (3.3.5) denkleminin $u_0 = \dfrac{3}{b_3}$ en fazla 2 katlı kökü olabilir. $a_3 = 0$ için (3.3.10) ve (3.3.11) denklemleri tekrar düzenlenirse

$$b_3 u^3 + 6u^2 - \left(a_4 - b_3\right)u = 0 \qquad (3.3.16)$$

ve

$$b_3 u^2 + 9u = 0 \qquad (3.3.17)$$

bulunur.

2. $a_3 = 3, \quad b_3 \neq 0$ olsun. Bu durumda (3.2.9) denklemi ile verilmiş olan *cp* eğrisi, pol teğetine ve çembere ayrılır. *cp* ve *br* eğrilerinin kesişimleri (3.3.4)'den $y = 0$ için

$$\left(a_4 + 4b_3\right)x + 3 = 0 \qquad (3.3.18)$$

elde edilir. (3.3.5) denkleminde $a_3 = 3$ için

$$b_3^2 u^3 - 3b_3 u^2 + \left(5b_3^2 + 3b_4 - 21\right)u + 3a_4 + 15b_3 = 0 \qquad (3.3.19)$$

bulunur. (3.3.18) denkleminden $x = \dfrac{-3}{(a_4 + 4b_3)}$ olup

$$a_4 + 4b_3 = 0 \tag{3.3.20}$$

ise cp ve br eğrilerinin sonsuzda ortak reel noktası vardır. Bu nokta pol teğetinin sonsuzdaki noktasıdır.

3. $a_3 \neq 3,\quad b_3 = 0$ olsun. Bu durumda da cp çembersel nokta eğrisi pol normali ve çembere ayrılır. cp çembersel nokta eğrisi pol normali ise cp ve br eğrilerinin kesişimleri (3.3.4) denkleminden $x = 0$ alınarak

$$(4a_3 - b_4 - 5)y^2 + (4a_3 - 9)y - 3 = 0 \tag{3.3.21}$$

bulunur. Genel olarak cp ve br eğrilerinin kesişim şartı olan (3.3.5) denkleminde $b_3 = 0$ alınırsa

$$(3a_3{}^2 - 3a_3 - 3b_4 + 3)u^2 - 3a_4u - a_3(a_3 - 3) = 0 \tag{3.3.22}$$

bulunur. (3.3.21) denkleminden

$$4a_3 - 9 \neq 0, \quad 4a_3 - b_4 - 5 = 0$$

olur yani

$$a_3 \neq \frac{9}{4}, \quad b_4 \neq 4 \tag{3.3.23}$$

ise pol normalinin br ile sonsuzda kesişiminin bir reel noktası vardır. Eğer

$$a_3 = \frac{9}{4}, \quad b_4 = 4 \tag{3.3.24}$$

ise bu noktalar iki defa hesaplanır.

4. $a_3 = 3$ ve $b_3 = 0$ olsun. Bu durumda cp eğrisi; pol teğeti, pol normali ve v düzlemin sonsuzdaki doğrusundan oluşur.

Ayrıca $a_3 = 3$ ve $b_3 = 0$ ise br eğrisi

$$\left(a_4 x - \left(7 - b_4\right) y\right)\left(x^2 + y^2\right) + 3x^2 - 3y^2 + 3y = 0$$

olur. Böylece $\left(x, y\right)$ Kartezyen koordinatlarından $\left(x, y, z\right)$ homojen koordinatlarına geçmek üzere son denklem $\dfrac{1}{z}$ ile çarpılır ve düzenlenirse

$$\left(a_4 x - \left(7 - b_4\right) y\right)\left(x^2 + y^2\right) + 3x^2 z - 3y^2 z + 3yz^2 = 0$$

elde edilir.

cp eğrisi sonsuzdaki doğru iken bu eğri üzerindeki noktalar $\left(m, n, 0\right)$ homojen koordinatlarına sahiptir ve böylece sonsuzdaki cp eğrisi ile yukarıda denklemi verilen br eğrisinin ortak çözümünden

$$\left(a_4 m - \left(7 - b_4\right) n\right)\left(m^2 + n^2\right) = 0$$

elde edilir. Eğer $a_4\left(b_4 - 7\right) \neq 0$ ise bu iki eğri

$$\left(7 - b_4, a_4, 0\right) \tag{3.3.25}$$

homojen koordinatları ile ifade edilen noktada kesişir.

Diğer taraftan cp eğrisi sırasıyla pol teğeti ya da pol normali ise br eğrisi ile kesişiminden oluşan noktalar $y = 0$ için

$$a_4 x + 3 = 0 \tag{3.3.26}$$

ve $x = 0$ için

$$\left(b_4 - 7\right) y^2 - 3y + 3 = 0 \tag{3.3.27}$$

bulunur.

Eğer $a_4 = 0$ ve $b_4 \neq 7$ veya $a_4 \neq 0$ ve $b_4 = 7$ ise cp ve br eğrilerinin (3.3.25) denklemine karşılık gelen sonsuzda noktaları vardır.

$z \neq 0$ iken $a_4 = 0$ ve $b_4 = 7$ olması halinde de

$$\left(a_4 x - \left(7 - b_4\right) y\right)\left(x^2 + y^2\right) + 3x^2 - 3y^2 + 3y = 0$$

denkleminden br eğrisi $\left(0,0,1\right)$ sonsuzdaki doğrusu veya $x^2 - y^2 + y = 0$ hiperbolüne ayrılır. Bu kesişimin belli noktası sadece (0,1) noktasıdır.

BÖLÜM 4. LORENTZ DÜZLEMİNDE BURMESTER TEORİSİ

4.1. Lorentz Düzleminde Hareket

Çalışmamızın orijinal kısmını oluşturan bu bölümde Lorentzian düzlemsel hareketin kinematik analizi hiperbolik sayılar ve hiperbolik trigonometri yardımıyla yapılmıştır. Bottema'nın ani invaryantları Lorentz düzleminde tanımlanarak hareketli Lorentz düzleminde alınan sabit bir noktanın sabit Lorentz düzleminde hareketi boyunca çizdiği yörüngenin eğriliği incelenmiş ve bu eğriliğin özel durumlarında oluşan Lorentzian büküm çemberi, çembersel nokta eğrisi ve merkez nokta eğrisi gibi geometrik yer eğrilerinin denklemleri tepit edilmiştir. Bu özel eğriler geometrik ve cebirsel açıdan ayrıntılı olarak incelenmiştir. Ayrıca bu eğrilerin kesim noktaları olan Ball ve Burmester noktalarının Lorentz düzleminde varlık koşulları belirlenmiştir.

4.1.1.Temel kavramlar ve gösterimler

V ve v sırasıyla sabit ve hareketli Lorentz düzlemlerini göstersin. Ayrıca V ve v düzlemlerinin birer koordinat sistemi sırasıyla sabit ve hareketli koordinat sistemi olarak adlandırılan $\{O;E_1,E_2\}$ ve $\{o;e_1,e_2\}$ Lorentz anlamında ortonormal sistemleri olsun. Bu koordinat sistemleri hareketli ve sabit Lorentz düzlemlerinin temsilcisi alınarak bu düzlemlerin birbirine göre karşılıklı hareketi incelenebilir. Her iki koordinat sistemi O ve o başlangıç noktaları çakışık iken E_1, E_2, e_1 ve e_2 vektörlerin uzay ya da zaman karakterlerinin farklı seçimlerine bağlı olarak hareketli koordinat sisteminin sabit koordinat sistemine göre Lorentzian dönmesi

$$\begin{cases} E_1 = \cosh\varphi\, e_1 + \sinh\varphi\, e_2 \\ E_2 = \sinh\varphi\, e_1 + \cosh\varphi\, e_2 \end{cases}, \quad \begin{cases} E_1 = \cosh\varphi\, e_1 - \sinh\varphi\, e_2 \\ E_2 = -\sinh\varphi\, e_1 + \cosh\varphi\, e_2 \end{cases},$$

$$\begin{cases} E_1 = -\cosh\varphi e_1 + \sinh\varphi e_2 \\ E_2 = \sinh\varphi e_1 - \cosh\varphi e_2 \end{cases}, \quad \begin{cases} E_1 = -\cosh\varphi e_1 - \sinh\varphi e_2 \\ E_2 = -\sinh\varphi e_1 - \cosh\varphi e_2 \end{cases}$$

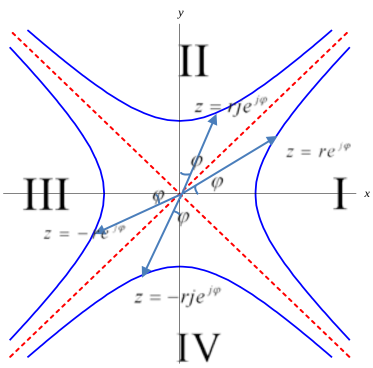
formlarından biri ile verilir. Ayrıca Lorentz düzleminin noktaları hiperbolik sayılar ile temsil edilebilir. Herhangi bir $z = x + jy \ \left(j^2 = 1,\ j \neq \mp 1\right)$ hiperbolik sayısının modülü

$$|z| = \begin{cases} \pm\sqrt{x^2 - y^2} & ; \quad |x| \geq |y| \\ \pm\sqrt{y^2 - x^2} & ; \quad |x| \leq |y| \end{cases}$$

olup $|z| = r > 0$ denklemini sağlayan Lorentz düzlemdeki bütün noktaların kümesi düzlemi dört bölgeye ayırır. Burada x ve y eksenlerinin ayırdığı alışılagelmiş çeyrek düzlemlerden farklı olarak $y = \pm x$ asimptotları ile birbirinden ayrılan I., II., III. ve IV. bölgeler bulunmaktadır. z hiperbolik sayısı sırasıyla I., II., III. veya IV. bölgelerden birinde ise

$$\begin{aligned} z &= r\left(\cosh\varphi + j\sinh\varphi\right) = re^{j\varphi}, \\ z &= r\left(\sinh\varphi + j\cosh\varphi\right) = rje^{j\varphi}, \\ z &= -r\left(\cosh\varphi + j\sinh\varphi\right) = -re^{j\varphi}, \\ z &= -r\left(\sinh\varphi + j\cosh\varphi\right) = -rje^{j\varphi} \end{aligned}$$

formlarından biri ile verilir.



Şekil 4.1. Lorentz düzleminde hareket

Tez boyunca izlenen yöntem takip edilerek her bir Lorentzian dönme için benzer sonuçlar elde edileceğinden bu çalışmada E_1 ve e_1 vektörlerinin her ikisi de uzay benzeri vektörler (yani I. Bölgede), E_2 ve e_2 vektörlerinin her ikisi de gelecek yönlendirilmiş zaman benzeri vektörler (yani II. bölgede) alınarak Lorentzian dönme matrisi

$$e^{j\varphi} = \begin{pmatrix} \cosh\varphi & \sinh\varphi \\ \sinh\varphi & \cosh\varphi \end{pmatrix}$$

olarak alınacaktır.

Böylece v düzleminin $o(0,0)$ noktası V düzlemine göre (a,b) noktası iken $a = a(t)$, $b = b(t)$ ve $\varphi = \varphi(t)$ fonksiyonları ortak bir tanım bölgesine sahip olmak üzere v düzleminin V düzlemine göre v/V gösterimi ile ifade edilen Lorentzian düzlemsel hareket

$$\begin{aligned} X &= x\cosh\varphi + y\sinh\varphi + a \\ Y &= x\sinh\varphi + y\cosh\varphi + b \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

formülü ile tanımlanır. Burada x ve y, t parametresinden bağımsız seçilerek hareketli Lorentz düzleminde alınan sabit bir noktanın sabit Lorentz düzlemine göre olan mutlak hızı sürüklenme hızına eşit kabul edilecektir.

Diğer taraftan V sabit ve v hareketli Lorentz düzlemlerinin I bölgesindeki noktalar sırasıyla $Z = X + jY$ ve $z = x + jy$ noktaları ve v düzleminin başlangıç noktası V düzlemine göre $c = a + jb$ noktası ile temsil edilsin. Böylece v düzleminin V düzlemine göre hareketinin hiperbolik sayılar cinsinden ifadesi

$$X + jY = (x + jy)(\cosh\varphi + j\sinh\varphi) + a + jb$$

ya da

$$Z = ze^{j\varphi} + c \tag{4.1.2}$$

denklemleriyle verilebilir.

v Lorentz düzleminin V Lorentz düzlemine göre hareketi $\frac{d\varphi}{dt}=\dot{\varphi}$ açısal hızının sıfırdan farklı değeri için incelenecek ve hareketin geometrik özelliklerini araştırmak üzere $\varphi=t$ alınacaktır. Böylece v düzleminin her konumu V düzlemine göre anlık olarak karşılık gelir. Özel olarak $\varphi=0$ değerine karşılık gelen konuma başlangıç konumu denir. Burada $\dot{\varphi}\neq 0$ durumunda herhangi bir konumla özel karşılaştırma yapmadan hareketin Lorentz düzleminde geometrik özellikleri araştırılacaktır. Herhangi f fonksiyonun φ'ye göre $n.$ türevi $f^{(n)}$ notasyonu ile $\varphi=0$ değeri için f fonksiyonun φ'ye göre $n.$ türevi ise f_n $(n=0,1,2,...)$ ile gösterilecektir.

4.1.2. Pol noktaları

(4.1.2)'de verilen hareket denkleminin φ'ye göre $n.$ mertebeden türevi

$$\begin{aligned} Z' &= jze^{j\varphi}+c', \\ Z'' &= j^2ze^{j\varphi}+c'', \\ &\vdots \\ Z^{(n)} &= j^n ze^{j\varphi}+c^{(n)} \end{aligned} \tag{4.1.3}$$

olur veya (4.1.2)'den $ze^{j\varphi}=Z-c$ olup bu denklem (4.1.3)'de yerine yazılırsa

$$Z^{(n)} = j^n\left(Z-c\right)+c^{(n)}, \quad \left(n=0,1,2,...\right) \tag{4.1.4}$$

bulunur.

Tanım 4.1.1. v Lorentz düzleminin $Z^{(n)}=0,\ \left(n\geq 1\right)$ denklemini sağlayan noktası verilen bir ana karşılık gelen konum için hareketin $n.$ polü olarak adlandırılır. Bu nokta V düzleminin n. polü adı verilen nokta ile çakışır. Her iki pol noktası P_n ile gösterilecektir. P_1 pol noktası genellikle P ile gösterilir. P noktasına mevcut konum için Lorentziyan hareketin polü denir.

(4.1.4) denkleminde $Z^{(n)} = 0$ alındığında $j^n\left(Z - c\right) + c^{(n)} = 0$ elde edilir. Böylece $Z = c - j^n c^{(n)}$ olup P_n polü

$$Z_{P_n} = c - j^n c^{(n)} \tag{4.1.5}$$

denklemi ile verilir. Bu ifade

$$j^n\left(Z - c\right) + c^{(n)} = 0$$

denkleminin tek çözümüdür. (4.1.3) denkleminden P_n polüne karşılık gelen z 'nin z_{P_n} değeri için

$$z_{P_n} = -j^n e^{-j\varphi} c^{(n)} \tag{4.1.6}$$

elde edilir. (4.1.5) ve (4.1.6) denklemleri ile verilen P_n pol noktalarının φ'ye bağlı olarak geometrik yerleri V ve v düzlemlerinin sırasıyla $n.$ sabit ve hareketli pol eğrilerini verir. Özel olarak $n=1$ durumunda Lorentz düzleminin sabit ve hareketli pol eğrileri olarak adlandırılırlar ve sırasıyla ρ_f ve ρ_m ile gösterilirler.

(4.1.5) ve (4.1.6) denklemlerinin türevleri alındığında

$$Z'_{P_n} = c' - j^n c^{(n+1)} \tag{4.1.7}$$

ve

$$z'_{P_n} = j^n e^{-j\varphi}\left(jc^{(n)} - c^{(n+1)}\right) \tag{4.1.8}$$

bulunur. $n=1$ için (4.1.5), (4.1.7) ve (4.1.8) denklemleri düzenlenirse

$$Z_P = c - jc' \tag{4.1.9}$$

$$Z'_P = c' - jc'' \tag{4.1.10}$$

$$z'_P = e^{-j\varphi}\left(c' - jc''\right) \tag{4.1.11}$$

elde edilir. Bu son iki formülden aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 4.1.1. ρ_f ve ρ_m sabit ve haketli pol eğrilerinin her ikisinin de sadece bir noktadan ibaret olması için gerek ve yeter şart her φ için

$$c' - jc'' = 0$$

olmasıdır.

Tanım 4.1.2. ρ_f ve ρ_m pol eğrilerinin birbirlerine değmesi durumunda bu değme noktası her konumda P polüdür. ρ_f ve ρ_m pol eğrilerinin P noktasındaki ortak teğet ve normaline sırasıyla pol teğeti ve pol normali denir.

(4.1.10) ve (4.1.11) denklemlerine göre

$$\|Z'_P\| = \|z'_P\|$$

olur ve buradan ρ_m hareketli pol eğrisi, ρ_f sabit pol eğrisi üzerinde kaymaksızın yuvarlanır. $n = 2$ için (4.1.5), (4.1.7) ve (4.1.8) denklemleri tekrar düzenlenirse

$$Z_{P_2} = c - c'', \tag{4.1.12}$$

$$Z'_{P_2} = c' - c''', \tag{4.1.13}$$

$$z'_{P_2} = e^{-j\varphi}\left(jc'' - c'''\right) \tag{4.1.14}$$

bulunur.

4.1.3. Özel referans sistemleri

Şimdiye kadar keyfi seçilen V ve v Lorentz düzlemleri başlangıç konumunda yani $\varphi = 0$ iken çakışacak şekilde verilsin. Bu durumda $c_0 = 0$ olur. Ayrıca başlangıç konumunun pol noktası orijin olsun. O zaman (4.1.9) denkleminden $c_1 = 0$ olur. Bunlara ek olarak başlangıç konumunda pol teğeti $x-$ ekseni yani uzay benzeri vektör olacak şekilde verilsin. Bu durumda da (4.1.10) denkleminden $a_2 = 0$ elde edilir. Sonuç olarak (4.1.12) denkleminden

$$Z_{P_{2,0}} = -jb_2$$

eşitliği elde edilir. O halde başlangıç konumunun ikinci polü pol normali üzerindedir ve ordinatı $-b_2$ olur.

Özet olarak (4.1.2) hareketini incelerken V ve v düzlemlerinde referans sistemlerini

$$c_0 = c_1 = 0, \quad c_2 = -jb_2 \tag{4.1.15}$$

şeklinde seçmek mümkündür. Bu sistemler genel referans sistemleri ile karşılaştırıldığında özel referans sistemleri olarak adlandırılacaktır.

4.1.4. Bottema'nın ani invaryantları

Başlangıç konumunda yani $\varphi = 0$ iken genel referans sistemlerine göre (4.1.3) denklemi

$$X_{4n} + jY_{4n} = j^{4n}(x + jy) + (a_{4n} + jb_{4n})$$

şeklinde yazılabilir ve bu denklem $j^2 = 1$ olduğu göz önüne alınarak $n = 0, 1, 2, \ldots$ için düzenlenirse

$$\begin{aligned} X_{4n} &= x + a_{4n} &, \quad Y_{4n} &= y + b_{4n}, \\ X_{4n+1} &= y + a_{4n+1} &, \quad Y_{4n+1} &= x + b_{4n+1}, \\ X_{4n+2} &= x + a_{4n+2} &, \quad Y_{4n+2} &= y + b_{4n+2}, \\ X_{4n+3} &= y + a_{4n+3} &, \quad Y_{4n+3} &= x + b_{4n+3}, \end{aligned} \tag{4.1.16}$$

formunda da verilebilir.

Genel referans sistemlerinden özel referans sistemlerine geçiş yapmak için başlangıç konumunda hareketli ve sabit Lorentz düzlemleri çakışık alınırsa $a_0 = 0$ ve $b_0 = 0$ olur. Ayrıca pol noktası orijin ile çakışık alınırsa $a_1 = 0$ ve $b_1 = 0$ olur. Hareketli ve sabit Lorentz düzlemlerinin birinci pol noktasında ρ_f ve ρ_m pol eğrilerinin ortak teğeti $x-$ ekseni alınırsa $a_2 = 0$ değerini alır.

Sonuç olarak genel referans sistemlerinden özel referans sistemlerine geçerken $a_0 = a_1 = a_2 = 0, \quad b_0 = b_1 = 0$ alınır ve herhangi mertebeye kadar hareket

$$\begin{array}{llllll} X_0 = x, & X_1 = y, & X_2 = x, & X_3 = y + a_3, & X_4 = x + a_4, & \dots \\ Y_0 = y, & Y_1 = x, & Y_2 = y + b_2, & Y_3 = x + b_3, & Y_4 = y + b_4, & \dots \end{array} \tag{4.1.17}$$

denklemleri ile karakterize edilir. Burada $b_2, a_3, b_3, a_4, b_4, ...$ değerleri Lorentz düzleminde orijinin hareketini belirleyen Lorentzian ani invaryantlar olarak adlandırılacaktır.

4.1.5. Yörünge eğriliği

v düzlemindeki bir (x, y) noktasının V düzleminde takip ettiği yörüngenin (X_0, Y_0) merkezli R yarıçaplı Lorentzian ya da hiperbolik eğrilik çemberi

$$\left|(X - X_0)^2 - (Y - Y_0)^2\right| = R^2$$

denklemi ile verilir. Bu denklemin birinci ve ikinci mertebeden türevleri sırasıyla

$$(X - X_0)X' - (Y - Y_0)Y' = 0$$

ve

$$(X')^2 + (X - X_0)X'' - (Y')^2 - (Y - Y_0)Y'' = 0$$

olur. Bu son iki denklem sırasıyla $-Y''$ ve Y' ile çarpılarak taraf tarafa toplanırsa

$$Y'\left((X')^2 - (Y')^2\right) + (X - X_0)(X''Y' - X'Y'') = 0$$

elde edilir. Böylece

$$X - X_0 = \frac{Y'\left(\left(X'\right)^2 - \left(Y'\right)^2\right)}{X'Y'' - X''Y'}$$

eşitliği bulunur. Benzer şekilde

$$Y - Y_0 = \frac{X'\left(\left(X'\right)^2 - \left(Y'\right)^2\right)}{X'Y'' - X''Y'}$$

elde edilir. Son iki eşitliğin kareleri farkı

$$\left|\left(X - X_0\right)^2 - \left(Y - Y_0\right)^2\right| = \left|\frac{\left(\left(X'\right)^2 - \left(Y'\right)^2\right)^2\left(\left(X'\right)^2 - \left(Y'\right)^2\right)}{\left(X'Y'' - X''Y'\right)^2}\right|$$

olduğu görülür. Böylece eğrilik yarıçapı

$$R = \frac{\left|\left(X'\right)^2 - \left(Y'\right)^2\right|^{\frac{3}{2}}}{\left|X'Y'' - X''Y'\right|}$$

bulunur. Sonuç olarak (x, y) noktasının V düzlemindeki yörüngesinin eğriliği için

$$\kappa = \mp \frac{X'Y'' - X''Y'}{\sqrt{\left|\left(X'\right)^2 - \left(Y'\right)^2\right|^3}} \tag{4.1.18}$$

formülü elde edilir.

(4.1.17) ve (4.1.18) denklemlerinden $(x, y) \neq (0, 0)$ olmak üzere özel referans sistemlerine göre eğrilik

$$\kappa_0 = \mp \frac{x^2 - y^2 - b_2 y}{\left|x^2 - y^2\right|^{\frac{3}{2}}}$$

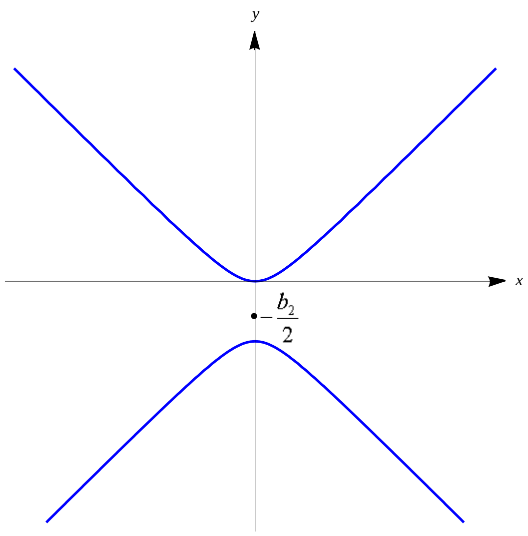
olur. Buradan aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.1.1. Başlangıç konumunda v düzleminin yörüngesi büküm noktasında olan orijin dışındaki noktalarının geometrik yeri $b_2 \neq 0$ olmak üzere

$$x^2 - \left(y + \frac{b_2}{2} \right)^2 + \left(\frac{b_2}{2} \right)^2 = 0 \tag{4.1.19}$$

Lorentzian çemberidir.

Bu Lorentzian çembere v/V Lorentzian hareketinin büküm çemberi denir. Merkezi $(0, -b_2/2)$ noktası ve çapı $|b_2|$ birim olan Lorentzian büküm çemberi pol noktasında pol teğetine değer.



Şekil.4.2. Lorentzian büküm çemberi

Lorentzian büküm çemberi üzerinde olmayan V düzleminin (X,Y) noktasıyla çakışan v düzleminin (x,y) noktasının yörünge eğrilik merkezi (ξ,η) ile gösterilirse bu koordinatlar

$$\xi = X - \frac{Y'\left((X')^2 - (Y')^2\right)}{X'Y'' - X''Y'}, \quad \eta = Y - \frac{X'\left((X')^2 - (Y')^2\right)}{X'Y'' - X''Y'} \tag{4.1.20}$$

şeklindedir. Buradan başlangıç konumu ve özel referans sistemleri için (4.1.17) denklemi (4.1.20) denkleminde yazıldığında aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.1.2. Başlangıç konumunda v düzleminin büküm noktaları ve orijin dışındaki noktalarının yörünge eğrilik merkezinin koordinatları

$$\xi = \frac{-b_2 yx}{x^2 - y^2 - b_2 y}, \quad \eta = \frac{-b_2 y^2}{x^2 - y^2 - b_2 y} \tag{4.1.21}$$

olur.

(x, y) noktasına ait eğrilik merkezi olan ve (4.1.21) denklemiyle verilen (ξ, η) noktası (x, y) noktasını pol noktası ile birleştiren doğru üzerindedir.

Sonuç 4.1.2. Başlangıç konumu için v düzleminin orijin hariç bütün noktalarının yörüngelerinin eğrilik merkezinin polde olması için gerek ve yeter şart $b_2 = 0$ olmasıdır.

Bu gibi konumlar $R-$ konum olarak adlandırılacaktır. Aksi belirtilmedikçe $R-$ konumu ele alınmayacaktır. Yani $b_2 \neq 0$ ve büküm çemberinin bir nokta olmadığı kabul edilecektir.

4.1.6. Kanonik sistemler

Bu bölümde (4.1.2) gösterimi ile verilen hareket, özel referans sistemlerine göre incelenecektir. Ayrıca $R-$ konumları ihmal edilip $b_2 \neq 0$ alınacaktır. (4.1.10) ve (4.1.11) denklemlerinden ρ_f ve ρ_m pol eğrileri boyunca polün değişim oranı başlangıç konumunda $-b_2$ kadardır. Bu değişim oranına pol hızı denir.

Şimdi $X -$ ekseninin (dolayısıyla $x -$ ekseninin de) dönme yönü pozitif olarak kabul edilirse X -ekseninin dönme yönü ile pol hız vektör yönü aynı olur. Bunun için $b_2 < 0$ olsun. Hatta özel olarak $-b_2$ değerini her iki sistem için birim uzunluk olarak alalım. Bu sistemlere hareketin kanonik sistemleri denir. Kanonik sistemlere göre başlangıç konumunda pol hızı birim değere sahip olur.

Kanonik sistemlere göre (4.1.15) denkleminde özel olarak $b_2 = -1$ alındığında

$$c_0 = c_1 = 0, \quad c_2 = j \tag{4.1.22}$$

olur. Bu durumda (4.1.19) denklemiyle verilen Lorentzian büküm çember denklemi

$$x^2 - y^2 + y = 0 \tag{4.1.23}$$

olarak elde edilir.

Benzer şekilde (4.1.21) denklemi tekrar düzenlenirse kanonik sistemlere göre yörünge eğrilik merkezinin koordinatları

$$\xi = \frac{yx}{x^2 - y^2 + y}, \quad \eta = \frac{y^2}{x^2 - y^2 + y} \tag{4.1.24}$$

olur.

4.1.7. Orijinin yörüngesi

Şu ana kadar yapılan incelemeler başlangıç konumunda pol ile çakışan, ν düzleminin $(0,0)$ noktasının yörünge eğriliği hakkında bilgi vermemektedir. Bu noktanın (kısalık için orijinin) yörüngesi kanonik sisteme göre ve yeterince küçük ε pozitif sayısı için $[-\varepsilon, \varepsilon]$ zaman aralığında

$$X = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{a_n}{n!} \varphi^n, \quad Y = \frac{-1}{2}\varphi^2 + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{b_n}{n!}\varphi^n \tag{4.1.25}$$

incelenebilir. Burada 3 farklı durum ele alınacaktır.

1. Durum $a_3 \neq 0$ olsun. Bu durumda

$$X = \frac{a_3}{3!}\varphi^3 + \frac{a_4}{4!}\varphi^4 + \frac{a_5}{5!}\varphi^5 + \frac{a_6}{6!}\varphi^6 + \frac{a_7}{7!}\varphi^7,$$
$$Y = \frac{-1}{2}\varphi^2 + \frac{b_3}{3!}\varphi^3 + \frac{b_4}{4!}\varphi^4 + \frac{b_5}{5!}\varphi^5 + \frac{b_6}{6!}\varphi^6 + \frac{b_7}{7!}\varphi^7,$$

$$X' = \frac{a_3}{2!}\varphi^2 + \frac{a_4}{3!}\varphi^3 + \frac{a_5}{4!}\varphi^4 + \frac{a_6}{5!}\varphi^5 + \frac{a_7}{6!}\varphi^6,$$
$$Y' = -\varphi + \frac{b_3}{2!}\varphi^2 + \frac{b_4}{3!}\varphi^3 + \frac{b_5}{4!}\varphi^4 + \frac{b_6}{5!}\varphi^5 + \frac{b_7}{6!}\varphi^6,$$
$$X'' = a_3\varphi + \frac{a_4}{2!}\varphi^2 + \frac{a_5}{3!}\varphi^3 + \frac{a_6}{4!}\varphi^4 + \frac{a_7}{5!}\varphi^5,$$
$$Y'' = -1 + b_3\varphi + \frac{b_4}{2!}\varphi^2 + \frac{b_5}{3!}\varphi^3 + \frac{b_6}{4!}\varphi^4 + \frac{b_7}{5!}\varphi^5$$

olduğu göz önüne alınırsa (4.1.18) denkleminden eğrilik

$$\kappa = \mp \frac{\frac{a_3}{2}\varphi^2 + \frac{a_4}{2}\varphi^3 + \left(\frac{a_5}{6} - \frac{a_4 b_3}{4} + \frac{a_3 b_4}{12}\right)\varphi^4 + \left(\frac{a_6}{30} - \frac{a_5 b_3}{12} - \frac{a_4 b_4}{12} + \frac{a_3 b_5}{24}\right)\varphi^5 + \dots}{\left|\varphi^2 + b_3\varphi^3 + \left(\frac{a_3^2}{4} - \frac{b_3^2}{4} + \frac{b_4}{3}\right)\varphi^4 + \left(\frac{a_3 a_4}{6} - \frac{b_3 b_4}{6} + \frac{b_5}{12}\right)\varphi^5 + \dots\right|^{3/2}} \quad (4.1.26)$$

bulunur. Yani başlangıç konumunun polünde orijinin yörüngesinin eğriliği tanımsız olur. Sivri noktalarda eğrilik tanımsızdır ancak sivri noktaya yaklaşan noktalar için eğriliğin limit değeri araştırılır yani yörüngenin eğriliği $\varphi \to 0$ iken limit yardımıyla bulunur. O halde yörüngenin eğriliği ε yeterince küçük pozitif sayı olmak üzere $[-\varepsilon, \varepsilon]$ zaman aralığı boyunca $\lim_{\varphi \to 0}|\kappa| = \infty$ olur. Bu orijin yörüngesinin eğriliğinin başlangıç konumunun polünde sonsuz olduğunu gösterir. Dolayısıyla, orijin yörüngesi bu noktada bir sivri (cusp) noktaya sahiptir ve teğet pol normalidir.

2. Durum $a_3 = 0,\ a_4 \neq 0$ olsun. Bu durumda da

$$X = \frac{a_4}{4!}\varphi^4 + \frac{a_5}{5!}\varphi^5 + \frac{a_6}{6!}\varphi^6 + \frac{a_7}{7!}\varphi^7,$$
$$Y = \frac{-1}{2}\varphi^2 + \frac{b_3}{3!}\varphi^3 + \frac{b_4}{4!}\varphi^4 + \frac{b_5}{5!}\varphi^5 + \frac{b_6}{6!}\varphi^6 + \frac{b_7}{7!}\varphi^7,$$
$$X' = \frac{a_4}{3!}\varphi^3 + \frac{a_5}{4!}\varphi^4 + \frac{a_6}{5!}\varphi^5 + \frac{a_7}{6!}\varphi^6,$$
$$Y' = -\varphi + \frac{b_3}{2!}\varphi^2 + \frac{b_4}{3!}\varphi^3 + \frac{b_5}{4!}\varphi^4 + \frac{b_6}{5!}\varphi^5 + \frac{b_7}{6!}\varphi^6,$$

$$X'' = \frac{a_4}{2!}\varphi^2 + \frac{a_5}{3!}\varphi^3 + \frac{a_6}{4!}\varphi^4 + \frac{a_7}{5!}\varphi^5,$$
$$Y'' = -1 + b_3\varphi + \frac{b_4}{2!}\varphi^2 + \frac{b_5}{3!}\varphi^3 + \frac{b_6}{4!}\varphi^4 + \frac{b_7}{5!}\varphi^5$$

olduğundan (4.1.18) denkleminden eğrilik

$$\kappa = \mp \frac{\frac{a_4}{3}\varphi^3 + \left(\frac{a_5}{8} - \frac{a_4 b_3}{12}\right)\varphi^4 + \left(\frac{a_6}{30} - \frac{a_5 b_3}{24}\right)\varphi^5 + \left(\frac{a_7}{144} - \frac{a_6 b_3}{80} - \frac{a_5 b_4}{144} + \frac{a_4 b_5}{144}\right)\varphi^6 + \dots}{\left| -\varphi^2 + b_3\varphi^3 + \left(-\frac{b_3^2}{4} + \frac{b_4}{3}\right)\varphi^4 + \left(-\frac{1}{6}b_3 b_4 + \frac{b_5}{12}\right)\varphi^5 + \left(\frac{a_4^2}{36} - \frac{b_4^2}{36} - \frac{b_3 b_5}{24} + \frac{b_6}{60}\right)\varphi^6 \right|^{3/2}}$$

bulunur. Yine başlangıç konumunun polünde orijinin yörüngesinin eğriliği tanımsız olur. O halde yeterince küçük $[-\varepsilon, \varepsilon]$ zaman aralığında $\lim_{\varphi \to 0} |\kappa|$ vardır ve yörünge başlangıç konumunun polünde bir ramphoid sivri noktasına sahip yörüngenin parçasını belirtir. Böylece $[-\varepsilon, \varepsilon]$ zaman aralığında yörüngenin iki kolu ramphoid sivri noktasında kesişir.

$\varphi \neq 0$ iken eğrilik

$$\kappa = \mp \frac{\frac{a_4}{3} + \left(\frac{a_5}{8} - \frac{a_4 b_3}{12}\right)\varphi + \left(\frac{a_6}{30} - \frac{a_5 b_3}{24}\right)\varphi^2 + \left(\frac{a_7}{144} - \frac{a_6 b_3}{80} - \frac{a_5 b_4}{144} + \frac{a_4 b_5}{144}\right)\varphi^3 + \dots}{\left| -1 + b_3\varphi + \left(-\frac{b_3^2}{4} + \frac{b_4}{3}\right)\varphi^2 + \left(-\frac{b_3 b_4}{6} + \frac{b_5}{12}\right)\varphi^3 + \left(\frac{a_4^2}{36} - \frac{b_4^2}{36} - \frac{b_3 b_5}{24} + \frac{b_6}{60}\right)\varphi^4 + \dots \right|^{3/2}}$$

olur ve bu ifadede paydanın mutlağı φ yeterince küçük bir sayı olduğundan

$$1 - \left(b_3\varphi + \left(-\frac{b_3^2}{4} + \frac{b_4}{3}\right)\varphi^2 + \left(-\frac{b_3 b_4}{6} + \frac{b_5}{12}\right)\varphi^3 + \left(\frac{a_4^2}{36} - \frac{b_4^2}{36} - \frac{b_3 b_5}{24} + \frac{b_6}{60}\right)\varphi^4 \right) > 0$$

olur. Burada

$$A = \frac{a_4}{3} + \left(\frac{a_5}{8} - \frac{a_4 b_3}{12}\right)\varphi + \left(\frac{a_6}{30} - \frac{a_5 b_3}{24}\right)\varphi^2 + \left(\frac{a_7}{144} - \frac{a_6 b_3}{80} - \frac{a_5 b_4}{144} + \frac{a_4 b_5}{144}\right)\varphi^3 + \dots$$

ve

$$B = b_3\varphi + \left(-\frac{b_3^2}{4} + \frac{b_4}{3}\right)\varphi^2 + \left(-\frac{b_3 b_4}{6} + \frac{b_5}{12}\right)\varphi^3 + \left(\frac{a_4^2}{36} - \frac{b_4^2}{36} - \frac{b_3 b_5}{24} + \frac{b_6}{60}\right)\varphi^4 + \dots$$

ile gösterilirse $\kappa = \dfrac{A}{\left(\sqrt{1-B}\right)^3}$ olur. Böylece $\kappa = \dfrac{A\left(\sqrt{1+B}\right)^3}{\left(\sqrt{1-B^2}\right)^3}$ bulunur ve $\varphi \to 0$ olduğundan yeterince küçük olan B^2 ihmal edilerek $\kappa = A\left(\sqrt{1+B}\right)^3$ elde edilir. $\sqrt{1+B}$ ifadesinin Taylor açılımı

$$\sqrt{1+B} = 1 + \frac{1}{2}B - \frac{1}{8}B^2 + \frac{1}{16}B^3 - \frac{5}{128}B^4 + \dots$$

olmak üzere

$$\kappa = A\left(1 + \frac{1}{2}B - \frac{1}{8}B^2 + \frac{1}{16}B^3\right)^3$$

bulunur. Bu ifadede A ve B değerleri yerine yazıldığında

$$\kappa = \frac{a_4}{3} + \left(\frac{5a_4 b_3}{12} + \frac{a_5}{8}\right)\varphi + \left(\frac{-a_4 b_3^2}{8} + \frac{a_4 b_4}{6} + \frac{7a_5 b_3}{48} + \frac{a_6}{30}\right)\varphi^2$$
$$+ \left(\frac{7a_4 b_5}{144} - \frac{a_4 b_3^2}{12} - \frac{a_4 b_3 b_4}{24} + \frac{a_5 b_4}{18} - \frac{a_5 b_3^2}{16} + \frac{3a_6 b_3}{80} + \frac{a_7}{144}\right)\varphi^3 + \dots \tag{4.1.27}$$

elde edilir. Bu yüzden başlangıç konumunun polünde orijinin yörünge eğriliği

$$\kappa_0 = \frac{a_4}{3} \tag{4.1.28}$$

bulunur. Üstelik (4.1.27) denkleminden

$$\kappa_1 = \frac{5a_4 b_3}{12} + \frac{a_5}{8} \tag{4.1.29}$$

$$\kappa_2 = \frac{-a_4 b_3^2}{4} + \frac{a_4 b_4}{3} + \frac{7a_5 b_3}{24} + \frac{a_6}{12}, \tag{4.1.30}$$

$$\kappa_3 = \frac{7a_4b_5}{24} - \frac{a_4b_3^{\,2}}{2} - \frac{a_4b_3b_4}{4} + \frac{a_5b_4}{3} - \frac{3a_5b_3^{\,2}}{8} + \frac{9a_6b_3}{40} + \frac{a_7}{24} \tag{4.1.31}$$

elde edilir.

3. Durum $a_3 = a_4 = 0$ olsun. Bu durumda yeterince küçük ε değerleri için $[-\varepsilon, \varepsilon]$ aralığında $a_n \neq 0$ ve $n > 4$ koşulunu sağlayan en küçük n değerinin tek veya çift olmasına göre yörünge, polde bir sivri nokta veya bir ramphoid sivri noktasına sahiptir. (4.1.27) denkleminde $a_4 = 0$ iken

$$\kappa = 0 + \frac{a_5}{8}\varphi + \left(\frac{7a_5b_3}{48} + \frac{a_6}{30}\right)\varphi^2 + \left(\frac{a_5b_4}{18} - \frac{a_5b_3^{\,2}}{16} + \frac{3a_6b_3}{80} + \frac{a_7}{144}\right)\varphi^3 + \ldots$$

bulunur. Bu denklemden

$$\kappa_0 = 0, \tag{4.1.32}$$

$$\kappa_1 = \frac{a_5}{8}, \tag{4.1.33}$$

$$\kappa_2 = \frac{7a_5b_3}{24} + \frac{a_6}{15}, \tag{4.1.34}$$

$$\kappa_3 = \frac{a_5b_4}{3} - \frac{3a_5b_3^{\,2}}{8} + \frac{9a_6b_3}{40} + \frac{a_7}{24} \tag{4.1.35}$$

bulunur.

4.1.8. Ters hareket

Lorentz düzlemde orijinal hareket olarak adlandırılan v düzleminin V düzlemine göre hareketinin tersi harekete, yani V düzleminin v düzlemine göre hareketine Lorentz düzleminde ters hareket denir. Bu yüzden (4.1.2) denklemi kanonik sistemlere göre verilirse orijinal hareketin kanonik sistemlerine göre ters hareket

$$z = (Z - c)e^{-j\varphi}. \tag{4.1.36}$$

denklemi ile ifade edilir. Ters ve orijinal hareketin standart biçimi arasındaki bağıntıyı bulalım. (4.1.36) denkleminden her iki hareketin pol vektörlerinin (hızları) çakıştığı kolayca görülebilir. Bu bakış açısıyla hareketin kanonik sistemleri ortak pozitif $X-$eksenine sahiptir. Üstelik (4.1.36) denkleminin türevleri

$$z' = -j\left(Z-c\right)e^{-j\varphi} - c'e^{-j\varphi},$$

$$z'' = \left(Z-c\right)e^{-j\varphi} + 2jc'e^{-j\varphi} - c''e^{-j\varphi},$$

olarak elde edilir. Başlangıç konumu için (4.1.22) denklemi kullanılarak bu son iki eşitlik

$$z_1 = -jZ, \quad z_2 = Z - j$$

olarak düzenlenir ve açık formda yazılırsa

$$\begin{aligned} x_1 + iy_1 &= -Y - jX \\ x_2 + iy_2 &= X + \left(Y-1\right)j \end{aligned}$$

olduğu görülür. Dolayısıyla

$$\begin{matrix} x_1 = -Y \\ y_1 = -X \end{matrix} ; \quad \begin{matrix} x_2 = X \\ y_2 = Y-1 \end{matrix}$$

elde edilir. Buradan orijinal hareketin kanonik sistemine göre, ters hareketin büküm çemberinin denklemi

$$X^2 - Y^2 + Y = 0$$

ve ters hareketin kanonik sistemine göre büküm çember denklemi

$$x^2 - y^2 - y = 0$$

olur. Böylece ters hareketin kanonik sistemleri orijinal hareketin kanonik sistemleri ile pol teğetine göre simetrik olduğu görülür.

Sonuç olarak ters hareket kendi kanonik sistemine göre

$$Z = ze^{j\varphi} + \tilde{c}, \quad \tilde{c} = -\overline{c}e^{j\varphi} \tag{4.1.37}$$

olarak ifade edilir. Burada $\overline{c}$, c ’nin hiperbolik eşleniğini göstermektedir.

(4.1.37) denkleminden

$$\begin{aligned}
&\tilde{c} = -\overline{c}e^{j\varphi},\\
&\tilde{c}' = -e^{j\varphi}\left(\overline{c}' + j\overline{c}\right),\\
&\tilde{c}'' = -e^{j\varphi}\left(\overline{c}'' + 2j\overline{c}' + \overline{c}\right),\\
&\vdots\\
&\tilde{c}^{(n)} = -e^{j\varphi}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} j^k \overline{c}^{(n-k)}
\end{aligned}$$

türevleri elde edilir ve başlangıç konumunda $\varphi = 0$ ve $\overline{c}_0 = \overline{c}_1 = 0$ olduğundan

$$\tilde{c}_n = -\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n}{k} j^k \overline{c}_{n-k}, \quad \left(n = 0,1,2,...\right) \tag{4.1.38}$$

yazılır. Bu denklem

$$\tilde{c}_0 = \tilde{c}_1 = 0, \quad \tilde{c}_2 = j \tag{4.1.39}$$

eşitliklerini sağlamaktadır. Ayrıca gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\tilde{c}_3 = 3 - \overline{c}_3,\ \tilde{c}_4 = 6j - 4j\overline{c}_3 - \overline{c}_4,\ \tilde{c}_5 = 10 - 10\overline{c}_3 - 5j\overline{c}_4 - \overline{c}_5$$

bulunur. Bu ifadeler reel ve sanal kısımlarına ayrıldığında ters hareketin ani invaryantları

$$\begin{matrix} \tilde{a}_3 = -a_3 + 3 \\ \tilde{b}_3 = b_3 \end{matrix}; \quad \begin{matrix} \tilde{a}_4 = -a_4 + 4b_3 \\ \tilde{b}_4 = -4a_3 + b_4 + 6 \end{matrix}; \quad \begin{matrix} \tilde{a}_5 = -a_5 - 10a_3 - 5b_4 + 10 \\ \tilde{b}_5 = -5a_4 + b_5 + 10b_3 \end{matrix} \tag{4.1.40}$$

olarak elde edilir.

4.1.9. Pol noktasında hareketli pol ve sabit pol eğrilerinin eğriliği

(4.1.5) denkleminin k kez diferansiyeli alındığında $\varphi = 0$ için

$$Z_{P_n,k} = c_k - j^n c_{n+k}, \quad \left(k = 0,1,2,\ldots\right) \tag{4.1.41}$$

bulunur. Bu denklem $n=1$ ve $k=1$ için

$$Z_{P,1} = c_1 - jc_2$$

şeklindedir. Böylece $c_1 = 0$ ve $c_2 = j$ değerleri için

$$Z_{P,1} = -1$$

bulunur. Benzer şekilde $n=1$ ve $k=2$ için $Z_{P,2} = c_2 - jc_3$ olup $c_2 = j$ için

$$Z_{P,2} = -b_3 + j\left(1 - a_3\right)$$

olduğu görülür. Buradan

$$\begin{matrix} X_{P,1} = -1 \\ Y_{P,1} = 0 \end{matrix} ; \quad \begin{matrix} X_{P,2} = -b_3 \\ Y_{P,2} = 1 - a_3 \end{matrix}$$

bulunur. Başlangıç konumunun polüyle çakışan noktada sabit pol eğrisinin eğriliği

$$\kappa_f = a_3 - 1 \tag{4.1.42}$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde (4.1.6) denkleminin k. türevi başlangıç konumunda

$$z_{P_n,k} = -j^n \sum_{s=0}^{k} \binom{k}{s} \left(-j\right)^s c_{n+k-s}, \quad \left(k = 0,1,2,\ldots\right)$$

olur. Bu denklem $n=1$ ve $k=1$ için

$$\begin{aligned} &z_{P,1} = -j \sum_{s=0}^{1} \binom{1}{s} \left(-j\right)^s c_{2-s}, \\ &z_{P,1} = c_1 - jc_2, \quad c_1 = 0, \quad c_2 = j, \\ &z_{P,1} = -1 \end{aligned}$$

dir. $n=1$ ve $k=2$ için

$$z_{P,2} = -j\sum_{l=0}^{2}\binom{2}{l}(-j)^{l}c_{3-l},$$
$$z_{P,1} = -j\left(c_1 - 2jc_2 + c_3\right), \quad c_1 = 0, \quad c_2 = j,$$
$$z_{P,1} = 2j - jc_3$$

elde edilir. Burada $c_3 = a_3 + ib_3$ olup

$$z_{P,2} = -b_3 + j\left(2 - a_3\right)$$

bulunur. Bu işlemler sonucunda

$$\begin{array}{l} x_{P,1} = -1 \\ y_{P,1} = 0 \end{array}; \quad \begin{array}{l} x_{P,2} = -b_3 \\ y_{P,2} = 2 - a_3 \end{array}$$

elde edilir. Bu denklemlerden hareketli pol eğrisinin eğriliği

$$\kappa_m = a_3 - 2 \tag{4.1.43}$$

şeklinde bulunur. (4.1.42) ve (4.1.43) denklemlerinden elde edilen

$$\kappa_f - \kappa_m = 1 \tag{4.1.44}$$

denklemi ρ_f ve ρ_m pol eğrilerinin eğrilikleri arasındaki bağıntıyı verir. Bu bağıntıda ρ_f (benzer şekilde ρ_m) pol eğrisinin eğriliği verildiğinde a_3 belirlenebilir. Ancak b_3 hakkında bir bilgi verilemez ve bu ρ_f ve ρ_m pol eğrilerinin eğriliklerin hareketin sonsuz küçük özelliklerini 3. mertebeye kadar tamamen karakterize edemeyeceğini göstermektedir.

4.1.10. İkinci pol noktasında ikinci sabit pol eğrisinin eğriliği

(4.1.41) denkleminden $n = 2,\ k = 1$ için

$$Z_{P_2,1} = c_1 + \left(-j\right)^4 c_3,$$
$$Z_{P_2,1} = c_3, \quad c_1 = 0$$

ve $n=2,\ k=2$ için

$$Z_{P_2,2}=c_2+(-j)^4 c_4,$$
$$Z_{P_2,2}=j+c_4,\quad c_2=j$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan

$$X_{P_2,1}=a_3,\qquad Y_{P_2,1}=b_3,$$
$$X_{P_2,2}=a_4,\quad Y_{P_2,2}=b_4+1,$$

olduğu görülür. Bu değerler (4.1.18) denkleminde yerine yazılarak başlangıç konumunda ikinci polde, ikinci sabit pol eğrisinin eğriliği

$$\kappa_{f_2}=\mp\frac{a_3b_4-a_4b_3+a_3}{\left|a_3^{\,2}-b_3^{\,2}\right|^{\frac{3}{2}}},\quad a_3\neq 0,\quad b_3\neq 0 \tag{4.1.45}$$

olarak elde edilir. (4.1.45) denklemin sonucu olarak aşağıdaki teorem verilir.

Teorem 4.1.3. Başlangıç konumunun ikinci polünün, ikinci sabit pol eğrisinin bir büküm noktasında olması için yeter ve gerek şart $a_3\neq 0$ ve $b_3\neq 0$ olmak üzere

$$a_4b_3-a_3b_4=a_3 \tag{4.1.46}$$

olmasıdır.

4.2. Lorentz Düzleminde Çembersel Nokta Eğrisi ve Ball Noktaları

Bu bölümde, verilen bir konumda Lorentz düzleminde çembersel nokta eğrisi tanıtılarak Ball noktalarının sayısı belirlenecek ve geometrik yeri gösterilecektir.

4.2.1. Çembersel nokta eğrisi

Tanım 4.2.1. Başlangıç konumunda ν düzlemindeki, yörüngelerinin eğriliği sabit olan noktaların geometrik yerine Lorentz düzleminde çembersel nokta eğrisi veya sabit eğrilikli eğri denir ve cp ile gösterilir.

(4.1.18) denkleminin türevi

$$\kappa' = \mp \frac{\left(X'Y''' - X'''Y'\right)\left(\left(X'\right)^2 - \left(Y'\right)^2\right) - 3\left(X'Y'' - X''Y'\right)\left(X'X'' - Y'Y''\right)}{\left|\left(X'\right)^2 - \left(Y'\right)^2\right|^{\frac{3}{2}}}$$

olarak bulunur. Çembersel nokta eğrisinin denklemini elde etmek amacıyla bu denklemde $\left(X'\right)^2 - \left(Y'\right)^2 \neq 0$ olmak üzere $\kappa' = 0$ alınırsa

$$\left(\left(X'\right)^2 - \left(Y'\right)^2\right)\left(X'Y''' - X'''Y'\right) - 3\left(X'Y'' - X''Y'\right)\left(X'X'' - Y'Y''\right) = 0 \qquad (4.2.1)$$

denklemi elde edilir. Başlangıç konumunda (4.1.17)'de verilen ani invaryantlar (4.2.1) denkleminde yazıldığında

$$\left(y^2 - x^2\right)\left(-a_3x + b_3y\right) + 3\left(-x^2 + y^2 + b_2y\right)b_2x = 0$$

bulunur. Kanonik sistemlere geçiş yapmak amacıyla son denklem $b_2 = -1$ için tekrar düzenlenirse

$$\left(x^2 - y^2\right)\left(a_3x - b_3y\right) + 3x\left(x^2 - y^2 + y\right) = 0, \quad \left(x, y\right) \neq \left(0, 0\right) \qquad (4.2.2)$$

elde edilir ki bu cp çembersel nokta eğrisinin denklemidir.

$a_3 = 0$ ve $a_4 \neq 0$ durumunda (4.1.29) denklemi göz önüne alınarak aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.2.1. Orijinden farklı bir noktanın yörüngesinin çembersel nokta eğrisi olması için gerek ve yeter şart $a_3 = 0$ ve $a_4 \neq 0$ iken

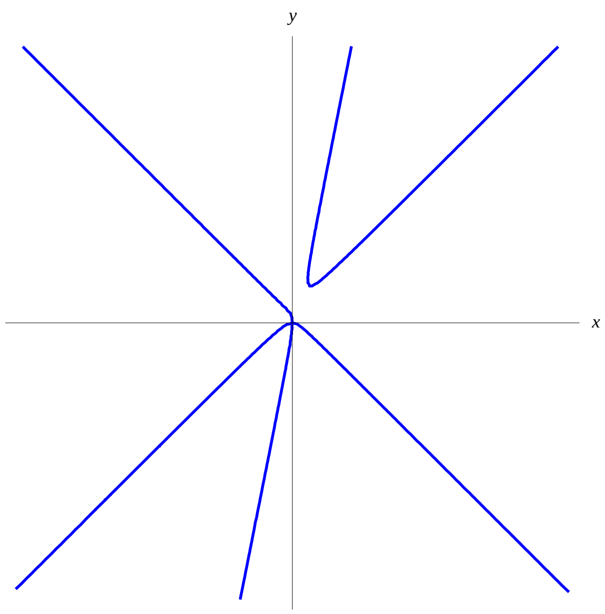
$$10a_4b_3 + 3a_5 = 0 \qquad (4.2.3)$$

olmasıdır.

Örnek 4.2.1. $a_3 = 2$ ve $b_3 = 1$ için cp çembersel nokta eğrisinin denklemi

$$\left(x^2 - y^2\right)\left(2x - y\right) + 3x\left(x^2 - y^2 + y\right) = 0$$

olup grafiği Şekil 4.3'de gösterilmektedir.



Şekil 4.3. Lorentz düzleminde $a_3 = 2$ ve $b_3 = 1$ için cp eğrisi

cp eğrisi pol noktasında bir düğüm (boğum noktası) noktasına sahip olup teğetleri pol teğeti ve pol normali olur. cp eğrisi üçüncü mertebeden bir eğridir ve bu eğrinin özel halleri aşağıda incelenmiştir.

1. $a_3 \neq -3$ ve $b_3 = 0$ olsun. Bu durumda (4.2.2) denkleminde $b_3 = 0$ alındığında

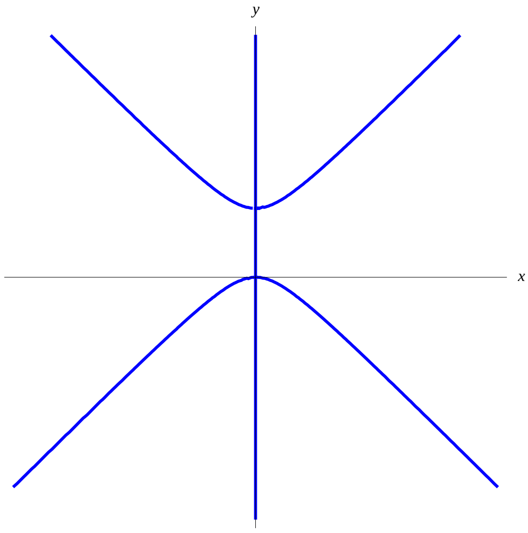
$$x\left(\left(a_3 + 3\right)\left(x^2 - y^2\right) + 3y\right) = 0 \qquad (4.2.4)$$

elde edilir. Bu denklem geometrik olarak cp eğrisinin merkezi pol normali üzerinde olan bir Lorentz çemberi ile pol normalinden oluştuğunu ifade eder ve bu cp eğrisi Γ ile gösterilecektir.

Örnek 4.2.2. $a_3 = 2$ ve $b_3 = 0$ için cp çembersel nokta eğrisinin denklemi

$$x\left(5\left(x^2-y^2\right)+3y\right)=0$$

olup grafiği Şekil 4.4’de gösterilmektedir.



Şekil 4.4. Lorentz düzleminde $a_3=2$ ve $b_3=0$ için *cp* eğrisi

Ayrıca $b_3=0$ iken $a_3=0$ ise

$$x^2-y^2+y=0$$

bulunur. Yani cp eğrisi büküm çemberine dejenere olur.

2. $a_3=-3$ ve $b_3\neq 0$ olsun. Bu durumda (4.2.2) denkleminde $a_3=-3$ alındığında

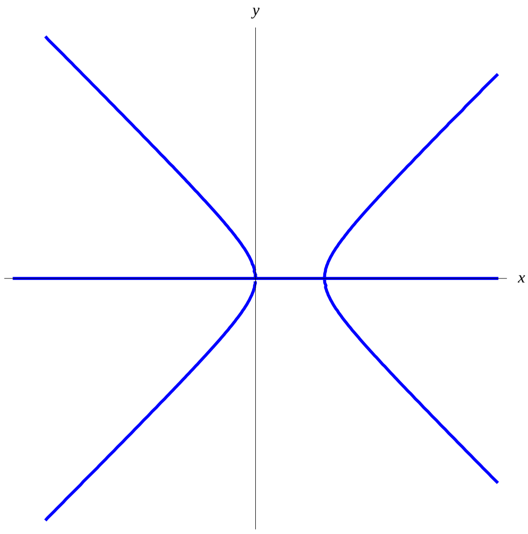
$$y\left(b_3\left(x^2-y^2\right)-3x\right)=0. \qquad (4.2.5)$$

bulunur. cp eğrisinin merkezi pol teğeti üzerinde olan bir çember ile pol teğetinden oluşur ve bu cp eğrisi ve Γ_0 ile gösterilecektir.

Örnek 4.2.3. $a_3=-3$ ve $b_3=1$ için cp çembersel nokta eğrisinin denklemi

$$y\left(\left(x^2-y^2\right)-3x\right)=0.$$

olup grafiği Şekil 4.5’de gösterilmektedir.

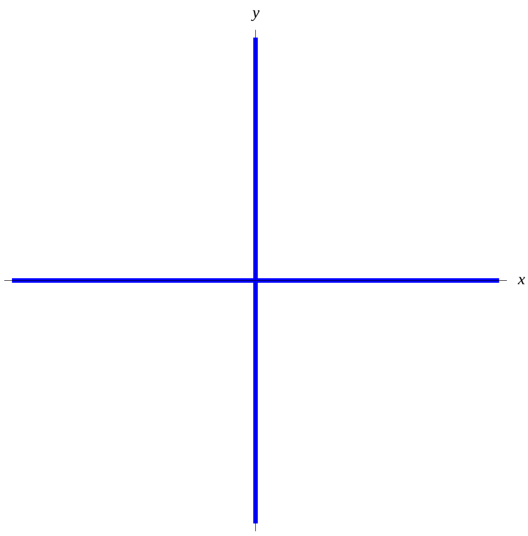


Şekil 4.5. Lorentz düzleminde $a_3 = -3$ ve $b_3 = 1$ için *cp* eğrisi

3. $a_3 = -3$ ve $b_3 = 0$ olsun. Bu durumda cp eğrisi

$$xy = 0$$

denklemi ile verilir ve aşağıdaki Şekil 4.6'da görüldüğü üzere cp eğrisi pol teğeti, pol normali ve v düzleminin sonsuzdaki doğrusundan oluşur.



Şekil 4.6. Lorentz düzleminde $a_3 = 0$ ve $b_3 = 0$ için *cp* eğrisi

(4.2.4) ve (4.2.5) denklemleri göz önüne alınarak cp eğrisinin düğüm noktasındaki Γ ve Γ_0 eğrilik çemberlerinin sırasıyla

$$-x^2+\left(y-\frac{3}{2\left(a_3+3\right)}\right)^2=\left(\frac{3}{2\left(a_3+3\right)}\right)^2 \text{ ve } \left(x-\frac{3}{2b_3}\right)^2-y^2=\left(\frac{3}{2b_3}\right)^2$$

hiperbolik ve Lorentzian çemberleri olduğu görülür. Γ_0 çemberinin yarıçapı $\frac{3}{2b_3}$ ve Γ çemberinin yarıçapı da $\frac{3}{2\left(a_3+3\right)}$ olarak bulunur. Buradan b_3 ve a_3 invaryantlarının geometrik yorumları aşağıdaki teoremde verilmiştir.

Teorem 4.2.2. a_3 ve b_3, cp eğrisinin sırasıyla pol teğetine ve pol normaline teğet olan bir kolunun eğriliğin $3/2$ katına eşittir.

cp eğrisinin reel asimptotu $y=nx+c$ olsun. Bu ifade (4.2.2) denkleminde yazıldığında

$$\begin{aligned}&c^3b_3+x\left(3c-3c^2-c^2a_3+3c^2nb_3\right)+x^2\left(3n-6cn-2cna_3-cb_3+3cn^2b_3\right)\\&+x^3\left(3-3n^2+a_3-n^2a_3-nb_3+n^3b_3\right)=0\end{aligned}$$

elde edilir. Burada 3. dereceli terim n'ye göre çözülürse $n=-1$, $n=1$ ve $n=\frac{3+a_3}{b_3}$ bulunur. Ayrıca 2. dereceli terim c'ye göre çözülürse

$$c=-\frac{3n}{-6n-2na_3-b_3+3n^2b_3}$$

bulunur. n değerleri sırasıyla c eşitliğinde yazıldığında $n=-1$ için

$$c=\frac{3}{6+2a_3+2b_3},$$

$n=1$ için

$$c=-\frac{3}{-6-2a_3+2b_3}$$

ve $n = \dfrac{3 + a_3}{b_3}$ için

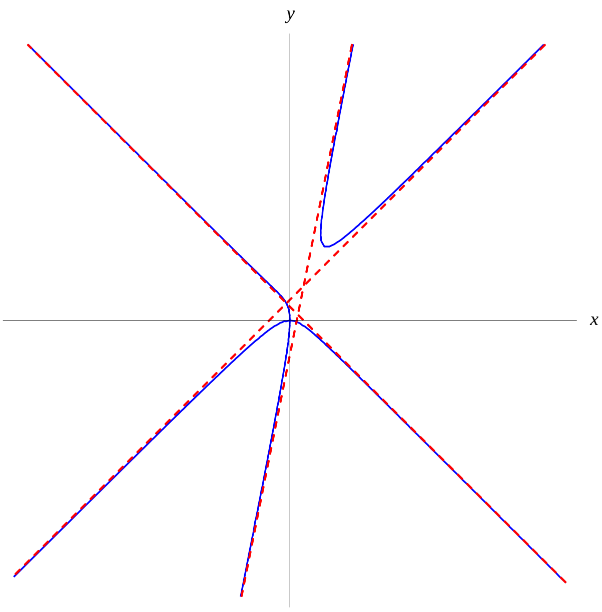
$$c = \frac{9 + 3a}{6(3 + a_3) + 2a_3(3 + a_3) - 3(3 + a_3)^2 + (b_3)^2}$$

elde edilir. c ve n değerleri asimptot denkleminde sırasıyla yazılırsa cp eğrisinin reel asimptotları

$$\begin{aligned} &2(3 + a_3 + b_3)(x + y) - 3 = 0, \\ &2(3 + a_3 - b_3)(x - y) + 3 = 0, \\ &\left((a_3 + 3)^2 - b_3^{\,2}\right)\left(b_3 y - (a_3 + 3)x\right) + 3(a_3 + 3)b_3 = 0 \end{aligned} \tag{4.2.6}$$

olarak bulunur.

Örnek 4.2.1'de verilen cp eğrisinin asimptotu aşağıda görülmektedir.



Şekil 4.7. Lorentz düzleminde *cp* eğrisi ve asimptotları

cp eğrisi indirgenemez ise $y = ux$ parametrik ifadesi (4.2.2) denkleminde yazılır ve

$$\left(x^2-u^2x^2\right)\left(a_3x-b_3ux+3x\right)+3ux^2=0,$$
$$\left(1-u^2\right)\left(a_3+3-b_3u\right)x+3u=0$$

elde edilir ve böylece

$$x=\frac{3u}{\left(u^2-1\right)\left(-b_3u+a_3+3\right)},\quad y=\frac{3u^2}{\left(u^2-1\right)\left(-b_3u+a_3+3\right)} \tag{4.2.7}$$

bulunur. (4.2.7) denklemi (4.2.6)'da yerine yazılarak elde edilen $u=\dfrac{b_3}{\left(3+a_3\right)}$ parametrik değeri cp eğrisi ile asimptotunun kesişim noktasına karşılık gelir.

$a_3\neq-3, b_3=0$ durumunda (4.2.7) denkleminden

$$x=\frac{3u}{\left(u^2-1\right)\left(a_3+3\right)},\quad y=\frac{3u^2}{\left(u^2-1\right)\left(a_3+3\right)} \tag{4.2.8}$$

elde edilir. Bu parametrik ifade Γ çemberini ifade eder.

$a_3=-3, b_3\neq0$ durumunda ise (4.2.7) denkleminden Γ_0 çemberinin parametrik ifadesi

$$x=\frac{3}{b_3\left(1-u^2\right)},\quad y=\frac{3u}{b_3\left(1-u^2\right)} \tag{4.2.9}$$

olarak elde edilir.

4.2.2. Merkez nokta eğrisi

v düzleminin $\left(x,y\right)$ noktalarının eğrilik merkezlerinin yörüngesi çembersel nokta eğrisi olan noktalarının geometrik yeri merkez nokta eğrisi olarak adlandırılır ve $\tilde{cp}$ ile gösterilir.

Eğrilik merkezlerinin kanonik sistemdeki denklemi olan (4.1.24) düzenlenirse

$$x^2 - y^2 + y = \frac{yx}{\xi}, \quad x^2 - y^2 + y = \frac{y^2}{\eta}$$

elde edilir ve buradan koordinatlar

$$x = \lambda\xi, \quad y = \lambda\eta$$

olarak alınabilir. Bu koordinatlar çembersel nokta eğrisinin denklemi olan (4.2.2)'de yerine yazılırsa $(\xi,\eta) \neq (0,0)$ olmak üzere

$$\left(\xi^2 - \eta^2\right)\left(a_3\xi - b_3\eta\right) + 3\xi\eta = 0$$

bulunur.

Böylece başlangıç konumunda $c\tilde{p}$ merkez nokta eğrisi

$$\left(x^2 - y^2\right)\left(a_3x - b_3y\right) + 3xy = 0 \tag{4.2.10}$$

denklemi ile verilen kübik bir eğridir.

$c\tilde{p}$ eğrisi bir düğüm noktası olan pole sahip bir çembersel eğridir. Bu düğüm noktasındaki teğetleri pol teğeti ve pol normalidir. Açıkça $c\tilde{p}$ eğrisi rasyonel bir eğridir. $c\tilde{p}$ eğrisi için aşağıdaki sonuçlar verilebilir.

1. $a_3 \neq 0, b_3 = 0$ ise $c\tilde{p}$ eğrisi, pol normali ve $\tilde{\Gamma}$ çemberinden oluşur. (4.2.10) denkleminde $b_3 = 0$ yazılırsa

$$a_3x\left(x^2 - y^2\right) + 3xy = 0 \tag{4.2.11}$$

elde edilir.

2. $a_3 = 0, b_3 \neq 0$ ise $c\tilde{p}$ eğrisi (4.2.5) denklemiyle verilen pol teğeti ve Γ_0 çemberinden oluşur.

$\tilde{\Gamma}$ ve Γ_0 çemberleri polde $c\tilde{p}$ eğrisinin eğrilik çemberleridir.

3. $a_3 = b_3 = 0$ ise $c\tilde{p}$ eğrisi pol teğeti, pol normali ve v düzlemin sonsuzdaki doğrusundan oluşur.

Sonuç 4.2.1. cp ve $c\tilde{p}$ eğrilerinin aynı anda aynı eğriye dejenere olması için gerek ve yeter şart $b_3 = 0$ olmasıdır.

(4.1.40) denklemini (4.2.10) denkleminde yazılırsa

$$\left(x^2 - y^2\right)\left(\tilde{a}_3 x + \tilde{b}_3 y\right) + 3x\left(x^2 - y^2 - y\right) = 0 \tag{4.2.12}$$

bulunur. Bölüm 4.1.8'de belirtildiği gibi (4.2.12) denkleminde y yerine $-y$ yazarak ters hareketin kanonik sistemine göre $c\tilde{p}$ eğrisinin denklemi

$$\left(x^2 - y^2\right)\left(\tilde{a}_3 x - \tilde{b}_3 y\right) + 3x\left(x^2 - y^2 + y\right) = 0$$

olarak elde edilir. Bu denklem $c\tilde{p}$ eğrisinin, ters hareketin çembersel nokta eğrisi olduğunu gösterir. cp eğrisi de ters hareketin merkez nokta eğrisidir.

$c\tilde{p}$ eğrisinin reel asimptotu $y = mx + c$ olsun. Bu ifade (4.2.10) denkleminde yazıldığında

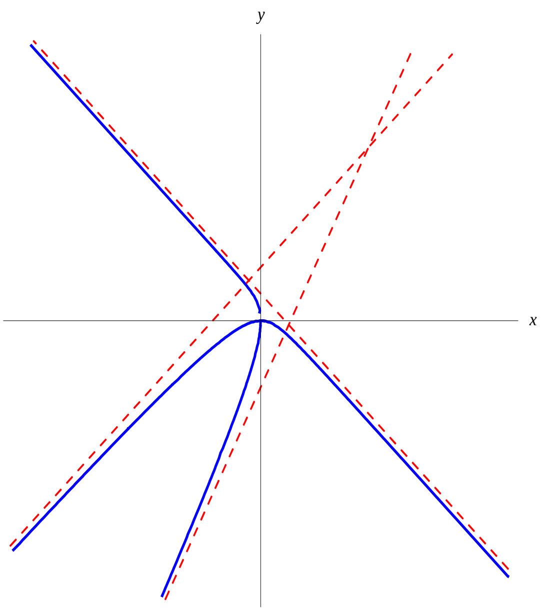
$$\begin{aligned} &c^3 b_3 + x(3c - c^2 a_3 + 3c^2 m b_3) + x^2(3m - 2cma_3 - cb_3 + 3cm^2 b_3) \\ &+ x^3(a_3 - m^2 a_3 - mb_3 + m^3 b_3) = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Burada 3. dereceli terim m'ye göre çözülürse $m = -1$, $m = 1$ ve $m = \dfrac{a_3}{b_3}$, 2. dereceli terim c'ye göre çözülürse $c = -\dfrac{3m}{-2ma_3 - b_3 + 3m^2 b_3}$ bulunur. m değerleri sırasıyla c eşitliğinde yazıldığında $m = -1$ için $c = \dfrac{3}{2a_3 + 2b_3}$, $m = 1$ için

$c=-\dfrac{3}{-2a_3+2b_3}$ ve $m=\dfrac{a_3}{b_3}$ için $c=-\dfrac{3a_3}{\left(a_3^2-b_3^2\right)}$ elde edilir. c ve m değerleri asimptot denkleminde sırasıyla yazılırsa $c\tilde{p}$ eğrisinin reel asimptotları

$$\begin{aligned}&2\left(a_3+b_3\right)\left(x+y\right)-3=0,\\&2\left(a_3-b_3\right)\left(x-y\right)+3=0,\\&\left({a_3}^2-{b_3}^2\right)\left(a_3x-b_3y\right)-3a_3b_3=0\end{aligned}\tag{4.2.13}$$

olarak bulunur. $a_3=b_3=2$ için $c\tilde{p}$ eğrileri, bu eğrilerin dejenere halleri ve asimptotları Şekil 4.8'de verilmiştir.



Şekil 4.8. Lorentz düzleminde cp ve $c\tilde{p}$ eğrileri ile asimptotları

4.2.3. Ball noktaları

Tanım 4.2.2. Lorentz düzleminde büküm çemberi ile çembersel nokta eğrisinin kesim noktaları Ball noktaları olarak adlandırılır. Ball noktaları Bl ile gösterilecektir.

$$x^2-y^2+y=0$$

ve

$$\left(x^2-y^2\right)\left(a_3x-b_3y\right)+3x\left(x^2-y^2+y\right)=0,\quad \left(x,y\right)\neq\left(0,0\right)$$

denklemleri ile verilen büküm çemberi ile çembersel nokta eğrisi denklemlerinin ortak çözümünden

$$y=\frac{a_3x}{b_3}\ \text{ve}\ x=\frac{a_3b_3}{a_3^2-b_3^2}$$

elde edilir. Sonuç olarak Bl noktasının koordinatları

$$\left(\frac{a_3b_3}{a_3^2-b_3^2},\quad \frac{a_3^2}{a_3^2-b_3^2}\right)\quad,\quad a_3\neq\mp b_3 \tag{4.2.14}$$

olarak verilir.

$a_3\neq 0$ ise pol noktası Bl noktası değildir. Buradan $a_3\neq 0$ olduğu durumda başlangıç konumunda sadece bir Bl noktası vardır.

$a_3=0, b_3\neq 0$ olması durumunda ise (4.2.14) denkleminden Bl noktasının orijin olduğu direkt söylenemez. Bunun için Bölüm 4.1.7'nin irdelenmesi gerekir öyle ki $a_3=0, b_3\neq 0$ iken $\kappa_0=\kappa_1=0$ olması için $a_4=a_5=0$ olmalıdır. O halde $a_3=a_4=a_5=0$ olduğunda Bl noktası orijin olur.

Ancak $a_3=0, b_3\neq 0$ olmasına rağmen $a_4\neq 0$ ya da $a_5\neq 0$ ise $\kappa_0\neq 0$ ya da $\kappa_1\neq 0$ olur ki bu konumlarda Bl noktası oluşmaz. Öyleyse $a_3=0, b_3\neq 0,\ a_4^2+a_5^2\neq 0$ iken Bl noktası yoktur.

$a_3=b_3=0$ ise çembersel nokta eğrisi büküm çemberine ve pol normaline ayrılır. Bu durumda $a_4^2+a_5^2\neq 0$ iken orijin hariç büküm çemberi üzerindeki herhangi bir nokta başlangıç konumunda Bl noktasıdır.

Aynı zamanda $a_3 = b_3 = 0$ iken $a_4 = a_5 = 0$ ise orijinde de dâhil büküm çemberinin tüm noktaları Bl noktası olur. Tüm bu durumlar aşağıdaki tabloda özetlenmiştir.

Tablo 4.1. Lorentz düzleminde Ball noktalarının sınıflandırılması

Şart	Bl nokta
$a_3 \neq 0$	$\left(\dfrac{a_3 b_3}{a_3^2 - b_3^2}, \dfrac{a_3^2}{a_3^2 - b_3^2}\right)$
$a_3 = a_4 = a_5 = 0$, $b_3 \neq 0$	Orijin
$a_3 = 0, b_3 \neq 0, a_4^2 + a_5^2 \neq 0$	Hiçbiri
$a_3 = b_3 = 0$, $a_4^2 + a_5^2 \neq 0$	Orijin hariç büküm çemberin noktaları
$a_3 = a_4 = a_5 = b_3 = 0$	Büküm çemberin tüm noktaları

Sonuç olarak $a_3 \neq 0$ ise başlangıç konumunda Bl noktası cp eğrisinin (4.2.7) denklemiyle ifade edilen parametrik ifadesinde $u = a_3 / b_3$ parametrik değeri ile gösterilir. Bu Bl noktasını orijine bağlayan doğrunun argumentinin tanjantıdır. Ayrıca (4.2.13) denkleminden $c\tilde{p}$ eğrisinin asimptotunun eğiminin a_3 / b_3 olduğu göz önüne alınırsa bu doğrunun $c\tilde{p}$ eğrisinin asimptotuna paralel olduğu da görülür.

4.2.4. Ters hareketin Bl noktaları

Ters hareketin başlangıç konumunda $\tilde{a}_3 \neq 0$ iken bir Bl noktası vardır. Bu hareketin kanonik sistemlerine göre çembersel nokta eğrisinin ve büküm çemberinin denklemleri sırasıyla

$$\left(x^2 - y^2\right)\left(\tilde{a}_3 x - \tilde{b}_3 y\right) + 3x\left(x^2 - y^2 + y\right) = 0,$$
$$x^2 - y^2 + y = 0$$

olur.

Bu denklem sisteminin çözümünden Bl noktası

$$\left(\frac{\tilde{a}_3\tilde{b}_3}{\tilde{a}_3^2-\tilde{b}_3^2},\quad \frac{\tilde{a}_3^2}{\tilde{a}_3^2-\tilde{b}_3^2}\right) \tag{4.2.15}$$

olarak bulunur. (4.1.40) denklemi (4.2.15) denkleminde yerine yazıldığında orijinal hareketin kanonik sistemlerine göre koordinatları

$$\left(\frac{(3-a_3)b_3}{(3-a_3)^2-b_3^2},\quad \frac{(3-a_3)^2}{(3-a_3)^2-b_3^2}\right) \tag{4.2.16}$$

bulunur.

(4.1.40) denkleminden $\tilde{a}_3=-a_3+3,\quad \tilde{a}_4=-a_4+4b_3,\quad \tilde{a}_5=-a_5-10a_3-5b_4+10$ olduğu göz önüne alınırsa aşağıdaki yorumlar kolayca yapılabilir.

Başlangıç konumunda ters hareketin yegâne Bl noktasının orijin olması için gerek ve yeter şart

$$a_3=3,\, a_4=4b_3\neq 0,\, a_5=5b_4-40 \tag{4.2.17}$$

olmasıdır.

$a_3=3$ ve $b_3=0$ iken (4.2.17) denklemin son iki denkleminden en az biri olmazsa ters hareket başlangıç konumunda herhangi Bl noktasına sahip olamaz.

Ayrıca $x^2-y^2-y=0$ çemberinin herhangi noktası ters hareketin bir Bl noktası olması için gerek ve yeter şart

$$a_3=3,\;\; a_4=b_3=0,\;\; a_5=5b_4-40$$

olmasıdır.

4.2.5. Ek Ball noktaları

Tanım 4.2.3. $\kappa = \kappa' = ... = \kappa^{(r+1)} = 0, \kappa^{(r+2)} \neq 0$ ile verilen konumun bir Bl noktası $r -$ ek Ball noktası olarak adlandırılır ve Bl_r noktası olarak gösterilir.

Başlangıç konumunda $a_3 \neq 0$ iken bir Bl noktası vardır. Bu durumda aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.2.3. $a_3 \neq 0$ iken Bl noktası Bl_1 noktası olması için gerek ve yeter şart

$$a_4 b_3 - a_3 b_4 = a_3$$

olmasıdır.

İspat. (4.1.8) denkleminden $\kappa = \kappa' = \kappa'' = 0$ olması için gerek ve yeter şart $X_1 Y_4 - X_4 Y_1 = 0$ olmasıdır. Bu denklemde (4.1.17) eşitlikleri yazılırsa

$$x^2 - y^2 + a_4 x - b_4 y = 0$$

bulunur. Bl_1 noktası (x_0, y_0) ile gösterilirse son denklem

$$x_0^2 - y_0^2 + a_4 x_0 - b_4 y_0 = 0 \qquad (4.2.18)$$

olarak düzenlenir. Aynı zamanda bu nokta $x_0^2 - y_0^2 + y_0 = 0$ büküm çemberi üzerinde olduğundan bu iki denklemin ortak çözümünden

$$a_4 x_0 + (-b_4 - 1) y_0 = 0 \qquad (4.2.19)$$

elde edilir. (4.2.14) ile verilen Ball noktası, (4.2.19)'de yazılırsa

$$a_4 b_3 - a_3 b_4 = a_3 \qquad (4.2.20)$$

bulunur. Bu bağıntı başlangıç konumunda $a_3 \neq 0$ iken Bl noktasının Bl_1 noktası olabilmesi için yeter ve gerek şarttır.

Başlangıç konumunda $a_3 = a_4 = a_5 = 0$, $b_3 \neq 0$ ise orijin yegane Bl noktasıdır. (4.1.30) denkleminden bu noktanın Bl_1 noktası olabilmesi için yeter ve gerek şart $a_6 = 0$ olmasıdır.

Diğer taraftan $a_3 = b_3 = 0$, $a_4^2 + a_5^2 \neq 0$ durumunda büküm çemberinin orijin hariç her noktası başlangıç konumu için bir Bl noktasıdır. (4.2.18) ve (4.2.19) denklemlerinden

$$x_0 = \frac{(b_4+1)\,y_0}{a_4}$$

olduğu görülür. Bu denklem (4.2.18)'de yerine yazılırsa

$$\left(\frac{(b_4+1)\,y_0}{a_4}\right)^2 - y_0^2 + a_4\left(\frac{(b_4+1)\,y_0}{a_4}\right) - b_4 y_0 = 0$$

elde edilir. Böylece

$$y_0 = \frac{a_4^{\,2}}{a_4^{\,2} - (b_4+1)^2}$$

bulunur.

O halde $a_4 = 0$ iken $b_4 = -1$ ya da $a_4 \neq 0$ iken Bl_1 noktasının koordinatları

$$\left(\frac{(b_4+1)\,a_4}{a_4^{\,2} - (b_4+1)^2},\quad \frac{a_4^{\,2}}{a_4^{\,2} - (b_4+1)^2}\right) \tag{4.2.21}$$

olur.

Ayrıca $a_3 = a_4 = a_5 = b_3 = 0$ durumunda büküm çemberinin her noktası, başlangıç konumu için Bl noktasıdır. Aynı zamanda $b_4 = -1$ ise orijin hariç bütün bu noktalar Bl_1 noktalarıdır. Ek olarak orijinin Bl_1 noktası olması için $a_6 = 0$ olması gerekir. Ayrıca $b_4 \neq -1$ olmasına rağmen $a_6 = 0$ sağlanmaz ise hiçbir Bl_1 noktası yoktur. Yani $a_3 = a_4 = a_5 = b_3 = 0$ iken $b_4 \neq -1$ ve $a_6 = 0$ ise başlangıç konumunun orijini yegane Bl_1 noktasıdır. Böylece başlangıç konumunun bir Bl_1 noktasına sahip olma şartı Tablo 4.2'de özetlenmektedir.

Tablo 4.2. Lorentz düzleminde Bl_1 noktalarının sınıflandırılması

Şart	Bl_1 noktası
$a_3 = a_4 b_3 - a_3 b_4 \neq 0$	$\left(\dfrac{a_3 b_3}{a_3^2 - b_3^2}, \dfrac{a_3^2}{a_3^2 - b_3^2} \right)$
$a_3 = b_3 = 0,\ a_4 \neq 0$	$\left(\dfrac{a_4 (b_4 + 1)}{a_4^2 - (b_4+1)^2}, \dfrac{a_4^2}{a_4^2 - (b_4+1)^2} \right)$
$a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = 0,$ $a_4^2 - (b_4+1)^2 \neq 0$	Orijin

4.2.6. Geometrik yorum

(4.2.2) denklemi ile verilen cp eğrisi

$$\left(x^2 - y^2\right)\left(\frac{(a_3+3)}{3}x - \frac{b_3}{3}y\right) + xy = 0$$

ve (4.2.10) denklemi ile verilen $c\tilde{p}$ eğrisi

$$\left(x^2 - y^2\right)\left(\frac{a_3}{3}x - \frac{b_3}{3}y\right) + xy = 0$$

olarak düzenlenebilir. 3. mertebeden Lorentzian çembersel kübik olan ve

$$(\alpha x + \beta y)\left(x^2 - y^2\right) + xy = 0 \tag{4.2.22}$$

denklemi ile verilen bir γ eğrisini göz önüne alalım. γ indirgenemez bir eğri yani $\alpha\beta \neq 0$ olsun.

Böylece sırasıyla

$$\alpha = \frac{a_3+3}{3}, \quad \beta = -\frac{b_3}{3} \text{ ve } \alpha = \frac{a_3}{3}, \quad \beta = -\frac{b_3}{3}$$

alınırsa (4.2.22) denklemi ile verilen bir γ eğrisi kanonik sisteme göre cp ve $c\tilde{p}$ eğrilerine karşılık gelir.(4.2.22) denkleminde $y = ux$ alınarak

$$x^3\left(\alpha+\beta u\right)\left(1-u^2\right)+ux^2=0$$

eşitliği yardımıyla γ eğrisinin parametrik denklemi

$$x = \frac{u}{\left(u^2-1\right)\left(\alpha+\beta u\right)}, \quad y = \frac{u^2}{\left(u^2-1\right)\left(\alpha+\beta u\right)} \tag{4.2.23}$$

olarak bulunur.

Özel olarak $-\dfrac{\alpha}{\beta}$ parametrik değeri γ eğrisinin sonsuzdaki noktasına karşılık gelir. Diğer taraftan indirgenebilir durumları incelemek üzere (4.2.23) denkleminde $\alpha = 0$ alınırsa y ekseni boyunca γ eğrisine teğet olan Γ_0 Lorentzian eğrilik çemberinin parametrik denklemi

$$x = \frac{1}{\beta\left(u^2-1\right)}, \quad y = \frac{u}{\beta\left(u^2-1\right)} \tag{4.2.24}$$

olarak bulunur. Benzer şekilde (4.2.23) denkleminde $\beta = 0$ yazılırsa x ekseni boyunca γ eğrisine teğet olan Γ_1 eğrilik çemberinin parametrik denklemi

$$x = \frac{u}{\alpha\left(u^2-1\right)}, \quad y = \frac{u^2}{\alpha\left(u^2-1\right)} \tag{4.2.25}$$

olarak elde edilir. Γ_0 ve Γ_1 çemberlerinin Kartezyen denklemlerini bulmak üzere sırasıyla (4.2.24) denkleminden

$$\begin{aligned} &\beta^2\left(x^2-y^2\right)=-\frac{1}{u^2-1}, \\ &\beta^2\left(x^2-y^2\right)=-\beta x, \\ &\beta\left(\beta\left(x^2-y^2\right)+x\right)=0 \end{aligned}$$

işlemleri sonucu

$$\beta\left(x^2-y^2\right)+x=0 \qquad (4.2.26)$$

bulunur ve benzer şekilde (4.2.25) denkleminden

$$\begin{aligned} &\alpha^2\left(x^2-y^2\right)=-\frac{u^2}{u^2-1}, \\ &\alpha^2\left(x^2-y^2\right)=-y\alpha, \\ &\alpha\left(\alpha\left(x^2-y^2\right)+y\right)=0 \end{aligned}$$

işlemleri sonucu

$$\alpha\left(x^2-y^2\right)+y=0 \qquad (4.2.27)$$

bulunur. γ eğrisi üzerindeki üç A_i $(i=1,2,3)$ noktasının orijinden geçmeyen aynı doğru üzerinde bulunması için gerek ve yeter şart A_1A_2 ve A_2A_3 doğrularının eğimlerinin birbirine eşit olmasıdır. Bu durumda γ eğrisi üzerinde alınan

$$A_i=\left(\frac{u_i}{\left(u_i^2-1\right)\left(\alpha+\beta u_i\right)},\quad \frac{u_i^2}{\left(u_i^2-1\right)\left(\alpha+\beta u_i\right)}\right),\quad \left(i=1,2,3\right)$$

noktaları için

$$\frac{\dfrac{-u_3^{\,2}}{\left(1-u_3^{\,2}\right)\left(\alpha+\beta u_3\right)}+\dfrac{u_2^{\,2}}{\left(1-u_2^{\,2}\right)\left(\alpha+\beta u_2\right)}}{\dfrac{-u_3}{\left(1-u_3^{\,2}\right)\left(\alpha+\beta u_3\right)}+\dfrac{u_2}{\left(1-u_2^{\,2}\right)\left(\alpha+\beta u_2\right)}}=\frac{\dfrac{-u_2^{\,2}}{\left(1-u_2^{\,2}\right)\left(\alpha+\beta u_2\right)}+\dfrac{u_1^{\,2}}{\left(1-u_1^{\,2}\right)\left(\alpha+\beta u_1\right)}}{\dfrac{-u_2}{\left(1-u_2^{\,2}\right)\left(\alpha+\beta u_2\right)}+\dfrac{u_1}{\left(1-u_1^{\,2}\right)\left(\alpha+\beta u_1\right)}},$$

eşitliği vardır. Buradan

$$\beta^2 u_1 u_2^{\,2} u_3+\beta\alpha\left(u_2\left(u_1u_3-1\right)\right)-\alpha^2$$

elde edilir ve bu denklem çarpanlarına ayrılırsa

$$\left(\beta u_1u_2u_3-\alpha\right)=0, \quad \left(\beta u_2+\alpha\right)=0,$$

bulunur. Bu gösterir ki

$$u_1u_2u_3=\frac{\alpha}{\beta} \quad \text{veya } u_2=-\frac{\alpha}{\beta}$$

olup $-\dfrac{\alpha}{\beta}$ parametrik değeri γ eğrisinin sonsuzdaki noktasına karşılık geldiğinden $u_2\neq-\dfrac{\alpha}{\beta}$ olmak zorundadır.

O halde γ eğrisi üzerindeki $u_i\ (i=1,2,3)$ parametrik değerleri ile verilen $A_i\ (i=1,2,3)$ noktalarının orijinden geçmeyen aynı doğru üzerinde bulunması için gerek ve yeter şart

$$u_1u_2u_3=\frac{\alpha}{\beta} \tag{4.2.28}$$

olmasıdır.

(4.2.28) denkleminde üç noktadan biri sonsuzdaki nokta yani $u_3^*=\dfrac{-\alpha}{\beta}$ ise bu doğru γ eğrisinin asimptotuna paralel olur ve eğriyi u_1^* ve u_2^* parametreli iki noktada keser. Bu parametreler arasında

$$u_1^* u_2^* = -1 \tag{4.2.29}$$

bağıntısı elde edilir.

γ eğrisinin A_1 ve A_2 noktaları u_1 ve u_2 parametreleri ile gösterilirse A_1A_2 doğrusunun denklemi

$$\left(\alpha\left(u_2+u_1\right)+\beta u_1u_2\left(u_1u_2+1\right)\right)x-\left(\alpha\left(u_1u_2+1\right)+\beta u_1u_2\left(u_2+u_1\right)\right)y+u_1u_2=0 \tag{4.2.30}$$

bulunur. Bu denklem düzenlenirse

$$\alpha\left(\left(u_1+u_2\right)x-\left(u_1u_2+1\right)y\right)-\beta u_1u_2\left(-\left(u_1u_2+1\right)x+\left(u_2+u_1\right)y-\frac{1}{\beta}\right)=0 \tag{4.2.31}$$

elde edilir. Eğer sırasıyla

$$\left(u_1+u_2\right)x-\left(u_1u_2+1\right)y=0 \tag{4.2.32}$$

ve

$$-\beta\left(u_1u_2+1\right)x+\beta\left(u_2+u_1\right)y-1=0 \tag{4.2.33}$$

denklemleri ile verilen d_1 ve d_2 doğrularının eğimleri m_{d_1} ve m_{d_2} ile gösterilirse $m_{d_1}m_{d_2}=1$ olup Lorentz anlamda diktirler. Bu (4.2.30) denklemi ile verilen doğrunun birbirlerine dik d_1 ve d_2 doğrularının kesişim noktasından geçtiğini göstermektedir.

Lorentz düzleminde bir $P\left(x_0,y_0\right)$ noktasının bir $ax+by+c=0$ doğrusuna olan uzaklığı $d=\dfrac{\left|ax_0+by_0+c\right|}{\sqrt{\left|a^2-b^2\right|}}$ olduğu göz önüne alınırsa orijinin A_1A_2 doğrusuna uzaklığı

$$d=\frac{\left|u_1u_2\right|}{\sqrt{\left|\left(-\alpha^2+\beta^2u_1^2u_2^2\right)\left(u_1^2-1\right)\left(u_2^2-1\right)\right|}} \tag{4.2.34}$$

bulunur. Eğer A_3, γ eğrisinin $-u_1$ parametreli noktası ise (4.2.34) denkleminden A_2A_1 ve A_2A_3 doğruları orijinden eşit uzaklıktadır. Yani A_2A_1 ve A_2A_3 doğruları A_2O göre simetriktir.

4.2.7. Γ_0 ve Γ çemberlerinin oluşumu

cp eğrisinin eğrilik merkezlerinin geometrik yeri $c\tilde{p}$ merkez nokta eğrisi olduğundan u parametreli cp eğrisinin bir noktasına ait eğrilik merkezi $c\tilde{p}$ eğrisinin aynı parametreli noktası ile çakışır. A_1 ve A_2 noktaları cp eğrisi üzerinde iki nokta, α_1 ve α_2 bu noktalara ait eğrilik merkezi olsun. Eğer A_1 ve A_2 noktaları, sırasıyla, u_1 ve u_2 parametreleri ile verilirse A_1A_2 doğrusunun denklemi (4.2.30) denkleminde $\alpha = \dfrac{a_3+3}{3}$, $\beta = -\dfrac{b_3}{3}$ ve $\alpha_1\alpha_2$ doğrusunun denklemi (4.2.30) denkleminde $\alpha = \dfrac{a_3}{3}$, $\beta = -\dfrac{b_3}{3}$ yazılarak bulunur. A_1A_2 ve $\alpha_1\alpha_2$ doğrularının denklemleri sırasıyla

$$\left((3+a_3)(u_1+u_2)-b_3u_1u_2(1+u_1u_2)\right)x-\left((3+a_3)(1+u_1u_2)-b_3u_1u_2(u_1+u_2)\right)y-3u_1u_2=0$$

ve

$$\left(a_3(u_1+u_2)-b_3u_1u_2(1+u_1u_2)\right)x-\left(a_3(1+u_1u_2)-b_3u_1u_2(u_1+u_2)\right)y-3u_1u_2=0$$

olur. Buradan A_1A_2 doğrusu ve $\alpha_1\alpha_2$ doğrusu birbirine Lorentz anlamda dik olan (4.2.32) ve (4.2.33) doğrularının kesişim noktasından geçer. Burada (4.2.32) denklemi $\alpha_1\alpha_2$ ve A_1A_2 doğrularının kesiştiği Q noktasından ve P polünden geçen doğruyu ifade eder. (4.2.33) denklemi ise Q noktasından geçen PQ doğrusuna Lorentz anlamda olan dik doğrunun denklemini ifade eder. $\alpha=0$ durumu incelenirse Γ_0 çemberinin (4.2.24) denklemi ile belirlenen parametrik ifadesi (4.2.33) denkleminde yazılarak

$$-\beta(u_1u_2+1)\frac{1}{\beta(u^2-1)}+\beta(u_2+u_1)\frac{u}{\beta(u^2-1)}-1=0$$

bulunur ki gerekli düzenlemeler sonucu

$$u^2-(u_2+u_1)u+u_1u_2=0 \tag{4.2.35}$$

denklemi elde edilir. Bu denklemin kökleri olan u_1 ve u_2, (4.2.33) denklemi ile verilen doğru ile Γ_0 çemberinin kesişim noktalarının parametrik değerlerini vermektedir. Ayrıca bu noktalar PA_1 ve PA_2 doğruları üzerindedir. Sonuç olarak Γ_0 çemberi elde edilmiş olur.

Benzer bir inşa Γ çemberi için de verilebilir. Bunun için öncelikle PQ doğrusuna dik P polünden geçen doğruyu inceleyelim. Bu doğru denklemi (4.2.32) denkleminden eğimleri çarpımı 1 olacak ve P polünden geçecek şekilde

$$(u_1+u_2)y-(u_1u_2+1)x=0$$

bulunur. Yukarıdaki denklem ve (4.2.30) denklemi birlikte ele alınırsa bu doğru ile A_1A_2 doğrusunun R ile gösterilecek olan kesişim noktası

$$\alpha\left((u_1+u_2)x-(u_1u_2+1)y\right)+u_1u_2=0. \tag{4.2.36}$$

doğrusu üzerindedir. O halde R noktasından geçen doğru PQ doğrusuna paraleldir. (4.2.36) denkleminde Γ çemberinin (4.2.25)'deki parametrik değerleri yazıldığında

$$u^2-(u_2+u_1)u+u_1u_2=0$$

bulunur. Bu denklem ise önceden elde edilmiş olan (4.2.35) denklemidir ve Γ çemberi ile (4.2.36) denklemi ile verilen doğrusunun kesişim noktasının parametrik ifadesidir.

4.3. Lorentz Düzleminde Burmester Noktalar

Bu bölümde Burmester nokta tanımı verilip ek Ball noktaların Burmester nokta olma koşulu incelenecektir. Ayrıca cp ve br eğrilerinin sonsuzda reel kesişim durumları verilecektir.

4.3.1. Burmester noktalar

Tanım 4.3.1. Verilen herhangi bir konumda ν Lorentz düzleminin yörüngesi sonsuzda olmayan bir noktasının yörünge eğriliğinin birinci ve ikinci türevleri sıfır ise bu noktaya Lorentz düzleminde Burmester nokta denir ve kısaca bu nokta Br ile gösterilecektir.

Bu tanım bir Bl_1 noktasının bir Br nokta olduğunu ifade eder. Bir Br noktasında yörünge eğrilik çemberiyle en az dört nokta temaslıdır. Eğer bir nokta $(4+r)$. mertebeden temasa sahip ise ek Br nokta olarak adlandırılır. En az s ekli Br nokta Br_s ile gösterilecektir.

Bölüm 4.1.7'de gösterildiği üzere orijinin yörünge eğrilikleri için (4.1.29) ve (4.1.30) denklemleri sırasıyla

$$\kappa_1 = \frac{5a_4b_3}{12} + \frac{a_5}{8} \text{ ve } \kappa_2 = \frac{-a_4b_3^2}{4} + \frac{a_4b_4}{3} + \frac{7a_5b_3}{24} + \frac{a_6}{12}$$

olup $\kappa_1 = 0$ ve $\kappa_2 = 0$ olması durumunda aşağıdaki teorem verilir.

Teorem 4.3.1. Orijinin başlangıç konumunda Br nokta olması için gerek ve yeter şart

$$a_3 = 0, \quad 10a_4b_3 + 3a_5 = 0, \quad -30a_4b_3^2 + 40a_4b_4 + 35a_5b_3 + 8a_6 = 0 \qquad (4.3.1)$$

olmasıdır.

İspat. Tanım 4.3.1'den orijinin başlangıç konumda Br nokta olabilmesi için gerek ve yeter şart yörünge eğriliğinin birinci ve ikinci türevlerinin sıfır olmasıdır. Bu nedenle (4.1.29) ve (4.1.30) denklemleri gözönüne alındığında ispatı kolayca görülür.

Ayrıca (4.31) ile (4.2.21) birlikte ele alındığında orijinin Bl_1 noktası olması için gerek ve yeter şart

$$a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = 0, \quad b_3^2 + (b_4 - 1)^2 \neq 0 \tag{4.3.2}$$

olmasıdır.

Lorentz düzleminde Burmester noktaları incelemek üzere (4.2.1) denkleminden $\kappa' = \kappa'' = 0$ olup (4.2.1) denkleminin türevleri alındığında

$$\left((X')^2 - (Y')^2\right)(X'Y''' - X'''Y') - 3(X'Y'' - X''Y')(X'X''' - Y'Y''') = 0,$$

ve

$$\begin{aligned} &\left((X')^2 - (Y')^2\right)\left(X''Y''' - X'''Y'' + X'Y^{(4)} - X^{(4)}Y'\right) \\ &-(X'Y''' - X'''Y')(X'X'' - Y'Y'') \\ &-3(X'Y'' - X''Y')\left((X'')^2 - (Y'')^2 + X'X''' - Y'Y'''\right) = 0 \end{aligned} \tag{4.3.3}$$

bulunur. Başlangıç konumu için (4.1.16) ve (4.1.17) denklemlerine göre bu denklem düzenlenirse

$$\begin{aligned} &\left(x^2 - y^2\right)\left(-b_3x + b_2y + a_3y + a_3b_2 - b_4y + a_4x\right) + \left(b_3y - a_3x\right)b_2x \\ &-3\left(x^2 - y^2 - b_2y\right)\left(2b_2y + b_2^{\,2} - a_3y + b_3x\right) = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Burada kanonik sisteme geçersek özel olarak $b_2 = -1$ alındığında

$$\left(x^2 - y^2 + y\right)\left((a_4 - 4b_3)x - (b_4 - 4a_3 - 5)y - 3\right) - y\left(a_4x - (b_4 + 1)y\right) = 0 \tag{4.3.4}$$

bulunur. Bu ise br ile gösterilecek olan çift çembersel kübik eğridir

4.3.2. cp ve br eğrilerinin sonsuzda reel kesişimleri

cp ve br eğrilerinin sonsuzda reel kesişimlerini 4 durumda inceleyelim.

1. $(a_3+3)b_3 \neq 0$ olsun. Bu durumda cp çembersel nokta eğrisi indirgenemezdir ve

$$x=\frac{3u}{(u^2-1)(-b_3u+a_3+3)},\quad y=\frac{3u^2}{(u^2-1)(-b_3u+a_3+3)}$$

parametrik denklemi ile verilir. cp çembersel nokta eğrisi $u_0=(3+a_3)/b_3$ parametre değerine karşılık sonsuzda bir noktaya sahiptir. cp ve br eğrilerinin kesişimleri için (4.2.8) ve (4.3.4) denkleminin ortak çözümünden uzun ve rutin işlemler sonucu

$$\begin{aligned}&b_3^2u^4+(3b_3+2a_3b_3)u^3+\left(-5b_3^2-3a_3^2-3a_3-3b_4-3\right)u^2\\&+(6a_3b_3+3b_3+3a_4)u-a_3(a_3+3)=0\end{aligned}\tag{4.3.5}$$

bulunur. Bu denklemin kökleri cp ve br eğrilerinin kesişim noktalarını verir. $u_0=(3+a_3)/b_3$ değeri (4.3.5) denkleminde yazıldığında

$$\frac{3(3+a_3)\left(4a_3^2+b_3(a_4-4b_3)+3(5-b_4)+a_3(17-b_4)\right)}{b_3^2}=0$$

elde edilir. O halde u_0 değeri (4.3.5) denkleminin kökü olabilmesi için

$$4a_3^2+17a_3-a_3b_4+a_4b_3-4b_3^2-3b_4+15=0\tag{4.3.6}$$

eşitliği sağlanmalıdır. (4.3.5) denkleminin türevi olan

$$4b_3^2u^3+3(3b_3+2a_3b_3)u^2-2\left(5b_3^2+3a_3^2+3a_3+3b_4+3\right)u+(6a_3b_3+3b_3+3a_4)=0$$

denkleminde u_0 değeri yazıldığında

$$4a_3^3+57a_3^2+192a_3-4a_3b_3^2-6a_3b_4-18b_4-27b_3^2+3a_4b_3+171=0\tag{4.3.7}$$

bulunur. Buradan u_0, (4.3.5) denkleminin μ kök katını göstermek üzere $\mu \geq 2$ katlı kökküdür ancak ve ancak

$$\begin{aligned} a_4 &= \frac{4a_3^3 + 33a_3^2 + 90a_3 - 4a_3b_3^2 - 3b_3^2 + 81}{3b_3} \\ b_4 &= \frac{4a_3^3 + 45a_3^2 + 141a_3 - 15b_3^2 - 4a_3b_3^2 + 126}{3(a_3 + 3)} \end{aligned} \tag{4.3.8}$$

denkleminin sağlanmasıdır. (4.3.5) denkleminin birinci türevi

$$4b_3^2u^3 + 3(3b_3 + 2a_3b_3)u^2 + 2(-5b_3^2 - 3a_3^2 - 3a_3 - 3b_4 - 3)u + (6a_3b_3 + 3b_3 + 3a_4) = 0$$

olup

$$6b_3^2u^2 + 3(3b_3 + 2a_3b_3)u - 2(5b_3^2 + 3a_3^2 + 3a_3 + 3b_4 + 3) = 0$$

ikinci türevinde $u_0 = (3 + a_3)/b_3$ değeri yerine yazılırsa

$$9a_3^2 - 5b_3^2 + 60a_3 - 3b_4 + 78 = 0$$

bulunur. Bu denklemde (4.3.8) denkleminden b_4 yerine yazılırsa

$$5a_3^3 + 42a_3^2 + 117a_3 - a_3b_3^2 + 108 = 0 \tag{4.3.9}$$

elde edilir. Bu bağıntı u_0'ın (4.3.5) denkleminin en az 3 katlı kökü olma şartıdır. (4.3.9) denklemi tekrar düzenlenirse

$$\begin{aligned} &-a_3b_3^2 + 5a_3^3 + 30a_3^2 + 45a_3 + 12a_3^2 + 72a_3 + 108 = 0, \\ &-a_3b_3^2 + 5a_3(a_3^2 + 6a_3 + 9) + 12(a_3^2 + 6a_3 + 9) = 0, \\ &-a_3b_3^2 + (5a_3 + 12)(a_3^2 + 6a_3 + 9) = 0, \\ &a_3b_3^2 - (5a_3 + 12)(a_3 + 3)^2 = 0 \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\frac{(5a_3 + 12)}{a_3} = \frac{b_3^2}{(a_3 + 3)^2} > 0$$

olup $\dfrac{\left(5a_3+12\right)}{a_3}>0$ dir. Bu sadece $a_3<-\dfrac{12}{5}$ ve $0<a_3$ durumunda sağlanır.

Kabul edelim ki $\mu=4$ olsun. (4.3.5) denkleminin 3. türevi

$$12b_3^{\,2}u+3\left(3b_3+2a_3b_3\right)=0$$

olup u_0 bu denklemde yazıldığında $a_3=-\dfrac{5}{2}$ bulunur ve görüldüğü gibi $a_3=-\dfrac{5}{2}>-\dfrac{12}{5}$ dir. Bu yüzden (4.3.5) denkleminin u_0'ın çok katlı kökü en fazla 3 olur. $\mu=1,2$ ve 3 iken (4.3.5) denkleminin kalan köklerini bulmak için sırasıyla aşağıdaki işlemler yapılır.

(4.3.5) denklemi $b_3u-3-a_3=0$ ifadesine bölündüğünde bölüm

$$u^3b_3^2+\frac{(6b_3^2+3a_3b_3^2)}{b_3}u^2+\frac{(15b_3+12a_3b_3-5b_3^3-3b_3b_4)}{b_3}u$$
$$+\frac{51a_3+12a_3^2+3a_4b_3-12b_3^2+a_3b_3^2-9(-5+b_4)-3a_3b_4}{b_3}$$

bulunur. (4.3.6) denkleminden

$$b_4\left(a_3+3\right)=4a_3^{\,2}+17a_3+a_4b_3-4b_3^{\,2}+15,$$
$$b_4=4a_3+5+\frac{b_3\left(a_4-4b_3\right)}{\left(a_3+3\right)}$$

olup bu b_4 değeri bölüm denkleminde yazılırsa

$$b_3\left(a_3+3\right)u^3+3\left(a_3+3\right)\left(a_3+2\right)u^2-\left(3b_3+5a_3b_3+3a_4\right)u+a_3\left(a_3+3\right)=0 \qquad (4.3.10)$$

elde edilir.

(4.3.5) denklemi $\left(b_3u-3-a_3\right)^2=0$ ifadesine bölündüğünde bölüm

$$b_3u^2+(9+4a_3)u+\frac{4a_3^2-5b_3^2+21a_3+27}{b_3}$$

bulunur. (4.3.8) denkleminden b_4 değeri bölümde yazıldığında

$$b_3\left(a_3+3\right)u^2+\left(a_3+3\right)\left(4a_3+9\right)u-a_3b_3=0 \tag{4.3.11}$$

elde edilir.

(4.3.5) denklemi $\left(b_3u-3-a_3\right)^3=0$ ifadesine bölündüğünde bölüm

$$b_3u+5a_3+12$$

bulunur. Bu denklemde $5a_3+12=\dfrac{a_3b_3^2}{\left(a_3+3\right)^2}$ ifadesi yazıldığında

$$\left(a_3+3\right)^2u+a_3b_3=0 \tag{4.3.12}$$

elde edilir. Bu işlemler sonucunda $\mu=1,2$ ve 3 iken (4.3.5) denkleminin kalan kökleri sırasıyla (4.3.10), (4.3.11) ve (4.3.12) denklemlerinden elde edilir.

$a_3=0, \quad b_3\neq 0$ ise (4.3.5) denklemi

$$b_3^2u^4+3b_3u^3+\left(5b_3^2+3b_4-3\right)u^2+3\left(a_4-b_3\right)u=0 \tag{4.3.13}$$

formunda yazılabilmektedir. Bu durumda (4.3.6) ve (4.3.8) denklemlerinde $a_3=0$ yazıldığında bu denklemler sırasıyla

$$a_4b_3-4b_3^2-3b_4+15=0 \tag{4.3.14}$$

$$\begin{aligned} a_4&=\frac{-b_3^2+27}{b_3} \\ b_4&=\frac{-5b_3^2+42}{3} \end{aligned} \tag{4.3.15}$$

biçiminde elde edilir. $a_3 = 0$ değeri (4.3.9) denkleminde yazıldığı durumda b_3, bu denklemi doğrulamaz. Bu yüzden (4.3.5) denkleminin $u_0 = \dfrac{3}{b_3}$ en fazla 2 katlı kökü olabilir. $a_3 = 0$ için (4.3.10) ve (4.3.11) denklemleri tekrar düzenlenirse

$$3b_3u^3 + 18u^2 - 3(b_3 + a_4)u = 0 \tag{4.3.16}$$

ve

$$3b_3u^2 + 27u = 0 \tag{4.3.17}$$

bulunur.

2. $a_3 = -3,\quad b_3 \neq 0$ olsun. Bu durumda (4.2.9) denklemi ile verilmiş olan cp eğrisi pol teğetine ve çembere ayrılır. cp ve br eğrilerinin kesişimleri (4.3.4) denkleminden $y = 0$ için

$$x^2\left(\left(a_4 - 4b_3\right)x - 3\right) = 0$$

$$\left(a_4 - 4b_3\right)x - 3 = 0 \tag{4.3.18}$$

elde edilir. (4.3.5) denkleminde $a_3 = -3$ için

$$b_3{}^2u^3 - 3b_3u^2 - \left(5b_3{}^2 + 3b_4 + 21\right)u + 3a_4 - 15b_3 = 0 \tag{4.3.19}$$

bulunur. (4.3.18) denkleminden $x = \dfrac{3}{a_4 - 4b_3}$ olup

$$a_4 - 4b_3 = 0 \tag{4.3.20}$$

ise cp ve br eğrilerinin sonsuzda ortak reel nokta vardır. Bu nokta pol teğetinin sonsuzdaki noktasıdır.

3. $a_3 \neq -3, \quad b_3 = 0$ olsun. Bu durumda cp çembersel nokta eğrisi pol normali ve çembere ayrılır. cp ve br eğrilerinin kesişimleri (4.3.4) denkleminden $x = 0$ için

$$\left(b_4 - 4a_3 - 5\right) y^2 + \left(4a_3 + 9\right) y - 3 = 0. \tag{4.3.21}$$

ve (3.3.5) denkleminde $b_3 = 0$ için

$$\left(3a_3{}^2 + 3a_3 + 3b_4 + 3\right) u^2 - 3a_4 u + a_3\left(a_3 + 3\right) = 0 \tag{4.3.22}$$

bulunur. (4.3.21) denkleminden

$$4a_3 \neq -9, \quad b_4 = 4a_3 + 5 \neq -4 \tag{4.3.23}$$

ise pol normalinin br ile sonsuzda kesişiminin bir reel noktası vardır. Eğer

$$a_3 = -\frac{9}{4}, \quad b_4 = -4 \tag{4.3.24}$$

ise bu noktalar iki defa hesaplanır.

4. $a_3 = -3, \quad b_3 = 0$ olsun. Bu durumda cp eğrisi pol teğeti, pol normali ve v düzleminin sonsuzdaki doğrusundan oluşur.

br eğrisinin (4.3.4) denkleminde $a_3 = -3, b_3 = 0$ ise

$$\left(x^2 - y^2 + y\right)\left(a_4 x - \left(7 + b_4\right) y - 3\right) - y\left(a_4 x - \left(b_4 + 1\right) y\right) = 0$$

olup gerekli düzenlemeler sonucunda

$$\left(x^2 - y^2\right)\left(a_4 x - \left(7 + b_4\right) y\right) - 3x^2 - 3y^2 - 3y = 0$$

olur. Böylece (x, y) Kartezyen koordinatlarından (x, y, z) homojen koordinatlarına geçmek için son denklem $\dfrac{1}{z}$ ile çarpılır ve düzenlenirse

$$\left(x^2 - y^2\right)\left(a_4 x - \left(7 + b_4\right) y\right) - 3x^2 z - 3y^2 z - 3yz^2 = 0$$

elde edilir. cp eğrisi sonsuzdaki doğru iken bu eğri üzerindeki noktalar $(m,n,0)$ homojen koordinatlara sahiptir. Böylece sonsuzdaki cp eğrisi ile yukarıda verilen br eğrisinin ortak çözümünden

$$\left(m^2-n^2\right)\left(a_4m-\left(7+b_4\right)n\right)=0$$

elde edilir. Eğer $a_4\left(b_4+7\right)\neq 0$ ise br ve cp eğrileri

$$\left(7+b_4,a_4,0\right) \tag{4.3.25}$$

homojen koordinatları ile ifade edilen noktada kesişir.

Diğer taraftan cp eğri pol teğeti ve pol normalinden oluşuyor ise br eğrisiyle kesişiminden oluşan noktalar $y=0$ için

$$x^2\left(a_4x-3\right)=0,$$

$$a_4x-3=0 \tag{4.3.26}$$

olur ve $x=0$ için

$$\left(b_4+7\right)y^2-3y-3=0 \tag{4.3.27}$$

bulunur.

$a_4=0, b_4\neq -7$ iken ve ayrıca $a_4\neq 0, b_4=-7$ iken cp ve br eğrilerinin sonsuzda iki noktası vardır.

$z\neq 0$ iken $a_4=0, b_4=-7$ olması halinde

$$\left(x^2-y^2\right)\left(a_4x-\left(7+b_4\right)y\right)-3x^2-3y^2-3y=0$$

br eğrisi sonsuzda $(0,0,1)$ doğruya veya bu denklemden elde edilen $x^2+y^2+y=0$ çemberine ayrılır. Bu kesişimin belli noktası (4.3.27) denkleminden $b_4=-7$ için $y=-1$ olup sadece $(0,-1)$ noktasıdır.

BÖLÜM 5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmadaki orijinal kısım Bölüm 4'de verilmiş olup üç alt bölüm halinde düzenlenmiştir. Bu bölümün ilk alt bölümü olan 4.1'de Lorentz düzleminde hareketle ilgili temel kavramlar, pol noktaları, özel referans sistemi, Bottema'nın ani invaryantları, yörünge eğriliği, kanonik sistem, orijinin yörüngesi, ters hareket, pol noktasında hareketli ve sabit pol eğrilerin eğrilikleri ve ikinci pol noktasında ikinci sabit pol eğrisinin eğriliği verilmiştir. Alt Bölüm 4.2'de Lorentz düzleminde çembersel nokta eğrisi, merkez nokta eğrisi, Ball noktaları, ters hareketin Ball noktaları, ek Ball noktaları incelenmiş, çembersel nokta eğrisi ve merkez nokta eğrisinin özel durumlarda oluşan çemberler araştırılarak bu eğrilerin geometrik yorumları yapılmıştır. Son alt Bölüm 4.3'de ise Lorentz düzleminde Burmester nokta tanımı verilerek çembersel nokta eğrisi ve çembersel kübik eğrinin sonsuzda reel kesişimleri incelenmiştir. Bu inceleme neticesinde elde edilen Burmester noktalarının sayısı ve geometrik yeri belirtilmiştir.

Bu çalışmada elde edilen orijinal bulgu ve sonuçlar afin Cayley-Klein düzlemlerinde hareketler için de araştırılabilir.

KAYNAKLAR

[1] Jacobs, H. R., Geometry, Freeman, San Francisco, 1974.

[2] Kagan, V. F., Lobachevsky (Russian). Izdat. Akad Nauk SSSR, Moscow–Leningrad, 1948.

[3] Riemann, B., Über Die Hypothesen, Welche Der Geometrie Zu Grunde Liegen, Springer, Berlin, [German], 1923.

[4] Klein, F., Über Die Sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie. Gesammelte Math Abhi: 254-305, 311-343, 344-350, 353-383, 1921.

[5] Klein, F., Vorlesungen über Nicht-Euklidische Geometrie, Springer, Berlin, 1928.

[6] Weyl, H., Space, Time, Matter, Dover, New York, 1950.

[7] Klein, F., Vergleichende Betrachtungen über Neure Geometrische Forschungen. Gesammelte Mathematische Abhandlungen, Vol. I, 1921, pp. 460-497. (English version is found in Sommerville, D. M. Y., Bibliography of Non-Euclidean Geometry, 2nd Ed., Chelsea, New York, 1970.)

[8] Yaglom, I. M., A Simple Non-Euclidean Geometry and its Physical Basis (Springer, New York, 1979).

[9] Klein, F., Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert, Springer, Berlin, [German], 1926.

[10] Sandor, G. N., Freudenstein, F., Higher-Order Plane Motion Theories in Kinematic Synthesis, ASME J. Eng. Ind.; 89 (2): 223–230, 1967.

[11] Freudenstein, F., Sandor, G. N., On the Burmester Points of a Plane, Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, Series E, Vol. 83, March, 41–49, 1961.

[12] Bottema, O., On the Determination of Burmester Points for Five Distinct Positions of a Moving Plane, Advanced Science Seminar on Mechanisms, Yale University, July 6-August 3, 1963.

[13] Bottema, O., On Instantaneous Invariants. Proceedings of the International Conference for Teachers of Mechanisms. New Haven (Ct): Yale University; P. 159–164, 1961.

[14] Veldkamp, G.R., Curvature Theory in Plane Kinematics [Doctoral Dissertation]. Groningen: T.H. Delft. 1963.

[15] Bottema, O., Roth, B., Theoretical Kinematics. New York, Dover; 1990.

[16] Freudenstein, F., Higher Path-Curvature Analysis in Plane Kinematics. ASME J. Eng. Ind., 87:184–190, 1965.

[17] Kirson, Y., Yang, A., Instantaneous Invariants of Three-Dimensional Kinematics. ASME J. Appl. Mech. 45:409–414, 1978.

[18] Koetsier, T., From Kinematically Generated Curves to Instantaneous Invariants: Episodes in the History of Instantaneous Planar Kinematics. Mech. Mach. Theory, 21:489–498, 1986.

[19] Lu, D. M., On Explicit Equations of the Burmester Curves for the PPP-P Case in Spherical Motion. J. Franklin Inst., 335:1467–1476, 1998.

[20] McCarthy, J., Roth, B., Instantaneous Properties of Trajectories Generated by Planar, Spherical, and Spatial Rigid Body Motions. ASME J. Mech. Des., 104:39–51, 1982.

[21] McCarthy, J, Ravani, B., Differential Kinematics of Spherical and Spatial Motions Using Kinematic Mapping. ASME J. Appl. Mech., 53:15–22, 1986.

[22] Roth, B., On the Advantages of Instantaneous Invariants and Geometric Kinematics. Mech. Mach. Theory, 89:5–13, 2015.

[23] Roth, B, Yang, A. T., Application of Instantaneous Invariants to the Analysis and Synthesis of Mechanisms. ASME J. Eng. Ind., 99:97–103, 1977.

[24] Yang, A.T, Pennock, G. R, Hsia, L.M., Instantaneous Invariants and Curvature Analysis of a Planar Four-Link Mechanism. ASME J. Mech. Des., 116:1173–1176, 1994.

[25] Veldkamp, G. R., Some Remarks on Higher Curvature Theory. J. Manuf. Sci. Eng., 89: 84–86, 1967.

[26] Veldkamp, G. R., Canonical Systems and Instantaneous Invariants in Spatial Kinematics. J. Mech., 2: 329–388, 1967.

[27] Wolford, J. C., An Analytical Method for Locating the Burmester Points for Five Infinitesimally Separated Positions of the Coupler Plane of a Four-Bar Mechanism. ASME J. Appl. Mech., 27:182–186, 1960.

[28] Drábek, K., Weitere Äquiforme Analogien Zu Geschwindigkeiten Der Ebenen Kongruenten Bewegungen [Further Equiform Analogies to Velocities of Plane Congruent Motions]. Beiträge Algebra Geom., 20:47–58, 1985.

[29] Hartenberg, R.S, Denavit, J., Kinematic Synthesis of Linkages. New York (Ny): Mcgraw-Hill, 1964.

[30] Sandor, G. N., A General Complex Number Method for Plane Kinematic Synthesis with Applications [PhD. Thesis]. New York (Ny): Columbia University, 1959.

[31] Sandor, G N, Erdman, A.G, Hunt, L., Raghavacharyulu, E., New Complex-Number Forms of the Euler–Savary Equation in a Computer-Oriented Treatment of Planar Path-Curvature Theory for Higher-Pair Rolling Contact. ASME J. Mech. Des., 104:227–232, 1982.

[32] Cayley, A., A Sixth Memoir Upon Quantics, Phil. Trans. R. Soc. London, 1859-Cp. Collected Math. Papers, Vol. 2, Cambridge, 1889.

[33] Minkowski, H., Die Grundgleichungen Fr Die Elektromagnetischen Vorgange In Bewegten Körpern, Nachr. Kgl. Ges. Wiss. Göttingen, 53–111, 1908.

[34] Yaglom, I. M., Complex Numbers in Geometry, Academic Press, New York, 1968.

[35] Harkin, A. A., Harkin, J. B., The Geometry of Generalized Complex Numbers. Mathematics Magazine, 118–129, April 2004.

[36] Ergüt M., Aydın A .P., Bildik N., The Geometry of the Canonical Relative System and One-Parameter Motions in 2-Lorentzian Space. J. of Firat Uni., 3(1), 113–122, 1988.

[37] Ergin A. A., On the One-Parameter Lorentzian Motion. Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser. A1 Math. Stat. 40, 59–66, 1991.

[38] Tutar A., Kuruoğlu N., Düldül M., On the Moving Coordinate System and Pole Points on the Lorentzian Plane. Int. J. of Appl. Math., 7(4), 439–445, 2001.

[39] Güngör M. A., Pirdal A.Z., Tosun M., Euler-Savary Formula for the Lorentzian Planar Homothetic Motions. Int. J. Math. Comb. 2, 102–111, 2010.

[40] Horváth Á. G., Constructive Curves in Non-Euclidean Planes. Stud. Univ. Zilina, 28, 13–42, 2016.

[41] Balestro V., Horváth Á. G., Martını H., Angle Measures, General Rotations, and Roulettes in Normed Planes. Anal. Math. Phys., 7(4), 549-575, 2017.

[42] Eren K., Ersoy, S., Burmester Theory in Cayley–Klein Planes with Affine Base, J. Geom. 109(3):45, 2018.

[43] Eren K., Ersoy, S., Cardan Positions in the Lorentzian Plane, Honam Mathematical J. 40 (1), 185–196, 2018.

ÖZGEÇMİŞ

Kemal EREN, 02.10.1981 tarihinde Ordu'nun Kabataş ilçesinde doğdu. İlköğrenimini Ordu'nun Kabataş ilçesi Kabataş İlkokulunda, ortaokulu Ordu'nun Kabataş ilçesi Kabataş Ortaokulunda, ortaöğrenimini Gümüşhane M. Ç. Anadolu Öğretmen Lisesinde tamamladı. 1997 yılında Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik Öğretmenliği Bölümünde başladığı lisans eğitimini 2001 yılında tamamladı. 2001-2003 öğretim yıllarında Ordu'nun Gölköy İlçesi Karahasan İlköğretim Okulunda, 2004-2006 öğretim yıllarında Ordu'nun Kabataş İlçesi Osman Özyurt İlköğretim Okulunda, 2007-2014 öğretim yıllarında Ordu'nun Kabataş İlçesi Kabataş Anadolu Lisesinde, 2014-2016 yılında Ordu'nun Fatsa İlçesi Lokman Hekim Mesleki ve Teknik Anadolu Lisesinde Matematik Öğretmeni olarak çalıştı. 2016 yılında Ordu'nun Fatsa Fen Lisesine Matematik Öğretmeni olarak atandı. Halen, aynı okulda Matematik Öğretmeni olarak görev yapmaktadır. Sakarya Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Geometri Bilim Dalında 2010 yılında başladığı yüksek lisans eğitimini 2012 yılında tamamladı. 2014-2015 eğitim-öğretim yılında Sakarya Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Geometri Bilim Dalında doktora eğitimine başladı. Kemal EREN evli ve iki çocuk babasıdır.