T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

k –TRIDIAGONAL TOEPLITZ MATRİSLERİN PERMANENTLERİ

DOKTORA TEZİ

Ahmet Zahid KÜÇÜK

Enstitü Anabilim Dalı	:	**MATEMATİK**
Enstitü Bilim Dalı	:	**CEBİR VE SAYILAR TEORİSİ**
Tez Danışmanı	:	**Prof. Dr. Mehmet ÖZEN**

Mayıs 2019

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

k –TRIDIAGONAL TOEPLITZ MATRİSLERİN PERMANENTLERİ

DOKTORA TEZİ

Ahmet Zahid KÜÇÜK

Enstitü Anabilim Dalı	**:**	**MATEMATİK**
Enstitü Bilim Dalı	**:**	**CEBİR VE SAYILAR TEORİSİ**

Bu tez 03/05/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği/oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr.
Ayşe NALLI
Jüri Başkanı

Prof. Dr.
Mehmet ÖZEN
Üye

Doç. Dr.
Metin YAMAN
Üye

Doç. Dr.
Murat SARDUVAN
Üye

Dr. Öğr. Üye.
Murat DÜZ
Üye

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

Ahmet Zahid KÜÇÜK

03.05.2019

TEŞEKKÜR

Beni öğrenciliğe kabul eden, çalışmalarımın bu noktaya gelmesinde büyük emeği olan, öğrencilerine saygıyla yaklaşan kıymetli hocam Prof. Dr. Mehmet ÖZEN'e çok teşekkür ederim. Tez izleme süreçlerindeki yönlendirmeleri ve önemli katkılarından dolayı, değerli hocalarım Doç. Dr. Metin YAMAN ve Dr. Öğr. Üyesi Murat DÜZ'e çok teşekkür ederim. Ayrıca Arş. Gör. Halit İNCE'ye de katkıları için teşekkür ederim.

Akademik hayatı, yanında tanıdığım, ilkokul çağımdan bu ana kadar çalışmalarımın her safhasında tecrübe ve teşvikleriyle yol gösteren, gayretlendiren, gerçek bir akademisyen olan kıymetli babama çok teşekkür ederim. Hep sarf ettiği emekleri ve hiç esirgemediği dualarıyla her zaman arkamızdaki güç olan kıymetli anneme çok teşekkür ederim. Bilhassa doktora çalışmalarımın yoğunlaştığı süreçlerde sabırla beni gayretlendiren ve yüklerimden kurtararak rahat bir çalışma ortamına kavuşturan sevgili eşime çok teşekkür ederim. Son birkaç senedir, doktoramın bitmesi için dua ettiğini ve artık bilgisayardan başımı kaldırıp onunla oyun oynamamı beklediğini söyleyip duran sevgili kızım Elif Şifa'cığıma da sabrı ve duaları için teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\lceil a \rceil$	:a sayısından büyük olan en küçük tamsayı (a sayısı için üst sınır)
$\lfloor a \rfloor$	:a sayısından küçük olan en büyük tamsayı (a sayısı için alt sınır)
A^T	:A matrisinin transpozu olan matris
$\mathbb{C}$	:Kompleks sayılar kümesi
$\binom{n}{r}$	:n tane elemanın r li kombinasyonlarının sayısı
$det(A)$	:Kare formlu $A_{n\times n}$ matrisinin determinantı
$Per(A)$	:Kare formlu $A_{n\times n}$ ve dikdörtgen formlu $A_{m\times n}$ matrislerinin permanenti

ÖZET

Anahtar Kelimeler: Permanent, k-tridiagonal matris, Toeplitz matris, Chebyshev polinomları, Rekürans bağıntısı, Laplace açılımı.

Bu tez, Toeplitz yapılı k-tridiagonal matrislerin permanentleri üzerinedir. Bu çalışma ile, aynı zamanda hem band matris hem de dairesel (circulant) matris yapısına haiz olan, k $-$tridiagonal Toeplitz matrislerin permanentleri için gerek rekürsif yapıda ve gerekse rekürsif olmayan yapıda formüller elde edilmeye çalışılmıştır.

Bu tez esas olarak altı bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde, permanent fonksiyonu geniş biçimde tanıtılmış, tez çalışmasında kullanılacak matris ailesi ve onunla ilişkili bazı matris yapılarından bahsedilmiştir. İkinci bölümde konu ile ilgili literatür taraması verilmiştir.

Üçüncü bölümde, k-tridiagonal Toeplitz matrislerin (ana köşegen bandı değişkene bağlı olan ve diğer bandları da kompleks birimi barındıran) bir özel türünün permanentleri ile ortogonal polinomlar ailesinin önemli üyelerinden biri olan Chebyshev polinomları arasında tespit edilen ilişkiler sunulmuştur.

Dördüncü bölümde, genel k-tridiagonal Toeplitz matrislerin permanentleri üzerine yapılan çalışmalar neticesinde elde edilen rekürsif formüller sunulmuştur. Ayrıca, bu rekürsif formüllere dayalı oluşturulan bir algoritma da bu bölümde verilmiştir.

Beşinci bölümde, genel k-tridiagonal Toeplitz matrislerin permanentleri için, bir önceki bölümde verilen rekürsif ilişkiler kullanılarak elde edilen kombinasyonel yapıda formüller sunulmuştur.

Altıncı bölümde, önceki bölümlerde elde edilen rekürsif sonuçlar üzerinden bazı yorumlamalar yapılmış ve tez çalışması neticesinde oluşan açık problemler vurgulanmıştır.

Tez çalışmasında yer bulan rekürsif bulgular, permanentler üzerinde Laplace açılımı (Laplace expansion) kullanılarak elde edilmiştir. Elde edilen bulguların ispatları için indüksiyon prensibi ve kombinasyonel yaklaşımlar denenmiştir.

THE PERMANENTS OF k –TRIDIAGONAL TOEPLITZ MATRICES

SUMMARY

Keywords: Permanent, k-tridiagonal matrix, Toeplitz matrix, Chebyshev polynomials, Recurrence relations, Laplace expansion.

This thesis is based on the permanents of k-tridiagonal matrices with Toeplitz structure. In this study, both recursive and non-recursive combinatorial formulas for permanents of k-tridiagonal Toeplitz matrices, which have structured both the circulant and the band matrix, were tried to be obtained.

This thesis mainly divided into six chapters. The first chapter covers the discussion of permanent function of the matrix family and its associated matrix structures. In the second chapter, a literature review on the subject is given.

In the third chapter, the relationships between the permanents of a special kind of k-tridiagonal Toeplitz matrices (the main diagonal band with variable and the other bands include complex unit) and Chebyshev polynomials, which are important members of the orthogonal polynomials family, are presented.

In the fourth chapter, the general state of k-tridiagonal Toeplitz matrices are studied and the recursive formulas obtained for these permanent are given. There is given also an algorithm based on these recursive formulas.

The fifth chapter presents the combinational formulas obtained by using the recursive relations given in the previous chapter for the general state of the k-tridiagonal Toeplitz matrices.

In the last chapter, some interpretations have been made on the obtained results, and some of problems that arise out of this study are emphasized.

The recursive relations appeared in this study are obtained by applying Laplace expansion on the permanents. Both the induction principle and combinatorial approximation are tested to prove those findings.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Bir matrisin satırlarının, sütunlarının veya genel olarak elemanlarının yerlerini değiştirmek ya da bunlardan bazılarını matristen çıkartmak için matris fonksiyonları kullanılır. Matrisler, matris fonksiyonları ile işlenip bir sayıya, bir vektöre veya mertebesi öncekilerden daha küçük olan başka matrislere dönüştürebilir. Bir matrisin; determinantı, permanenti, tersi, rankı, izi, transpozu gibi birçok matris fonksiyonu mevcuttur. Şüphesiz ki, matris fonksiyonlarından en çok bilineni ve üzerinde diğerlerine göre daha çok çalışma yapılmış olanı determinant fonksiyonudur. Uygulamalara zengin katkılar sunmuş olan determinant fonksiyonuna yapısal olarak çok benzeyen bir matris fonksiyonu daha vardır ki bu permanent fonksiyonudur. Permanent fonksiyonunu ilk kez tanıtanlar, 1812 - 1815 yıllları arasında birbirinden bağımsız olarak verdikleri çalışmalarla Jacques P. M. Binet [1] ve Augustin L. Cauchy [2]'dir. Binet [1], $m \times n$ mertebeli bir matrisin permanentini, bu matrisin $m = 2,3,4$ formlarındaki durumları için tanımlamış ve bununla birlikte bazı özdeşlikler vermiştir. Cauchy [2], simetrik fonksiyonlar ailesinin özel bir alt sınıfı olarak değerlendirdiği permanent fonksiyonunu "*fonctions symétriques permanente*" tabirini kullanarak tanıtmıştır. J. Horner [3], permanent fonksiyonu için "*conterminant*" tabirini kullanmış ve bir A matrisinin permanentini

$$|\overline{\mathbf{A}}$$

şeklinde bir sembol ile göstermiştir. J. Hammond [4], permanent için "*alternate determinant*" tabirini kullanmış ve kare formlu bir $A = [a_{ij}]$ matrisinin permanentinin,

$$\prod_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$$

ifadesiyle temsil edilen polinomun katsayılarından elde edilebileceğini göstermiştir. Permanent tabirinin sadece kare matrisler üzerinde kullanılmasını teklif eden T. Muir [5], determinant ile permanentin birbirine benzeyen bazı özelliklerini göstermiş ve kare formlu bir A matrisinin permanentini

$$\begin{matrix} + & & + \\ | & A & | \end{matrix}$$

şeklinde sembolize etmiştir. Bahsi geçen matris fonksiyonu için "permanent" tabiri ilk kez A. L. Cauchy tarafından kullanılmış olsa da bu fonksiyon için günümüzde de kullanılan bu tabirin kalıcı hale gelmesi T. Muir'e dayandırılmaktadır.

Ortaya çıktığı ilk yıllarda fazlaca ilgi görmemiş olan permanent fonksiyonu üzerine yapılan çalışmalar, son altmış yılda artan bir ilgiyle çoğalmıştır. Bu ilerlemedeki en büyük etken; 1926 yılında Van der Waerden [6] tarafından verilen, "double stochastic matrislerin permanentlerinin minumumlarının belirlenmesi problemi"nin, bundan yaklaşık elli yıl sonra iki ayrı matematikçi tarafından çözülmesi olayıdır [7]. Uzun yıllar çözülemeyen bu ünlü problemin farklı ispatlarının yapılmış olması, bu alanda çalışan matematikçileri cesaretlendirmiştir. Ortaya çıktığı ilk dönemlerden itibaren permanent fonksiyonu üzerine yapılan çalışmalar, H. Minc tarafından [8]'de verilen bibliyografya ile hızlıca izlenebilir.

1.1. Permanent Fonksiyonu

1.1.1. Permanent fonksiyonunun tanımı

Binet [1], permanent fonksiyonunu, $m \leq 4$ için $m \times n$ mertebeli matrisler üzerinden tanımlamıştır. Binet'in verdiği tanımlamaya göre, $m \leq n$ olmak üzere $m \times n$ mertebeli bir matrisin permanenti, herhangi ikisi aynı satır ya da aynı sütunda bulunmayan m adet elemanın mümkün olan bütün çarpımlarının toplanması sonucunda elde edilen değerdir. Bu tarife göre, örneğin $2 \times n$ mertebeli bir A matrisinin permanenti

$$Per(A) = \sum_{s \neq t} a_{1s} a_{2t} \tag{1.1}$$

şeklinde ifade edilebilir [8]. Buradan hareketle, $m \leq n$ olmak üzere $m \times n$ mertebeli bir $A = [a_{ij}]$ matrisinin permanenti en genel halde

$$Per(A) = \sum_{\sigma} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{m\sigma(m)} \tag{1.2}$$

şeklinde ifade edilmiştir [8]. (1.2) eşitliğindeki toplam sembolü, $\{1,2,\ldots,m\}$ kümesinden $\{1,2,\ldots,n\}$ kümesine tanımlı tüm bire-bir fonksiyonları kapsayan σ kümesi üzerinde tanımlıdır.

Esasında (1.2) eşitliği permanent fonksiyonunun dikdörtgen formlu matrisler için tanımıdır. Permanent fonksiyonunun kare formlu matrisler üzerinden farklı bir notasyonla tanımlanması da aşağıdaki gibidir:

Tanım 1.1. Elemanları bir $\mathcal{F}$ cisminde tanımlı, n mertebeli bir $A = [a_{ij}]$ matrisinin permanenti

$$Per(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)} \tag{1.3}$$

şeklindedir. Burada σ, $\{1,2,\ldots,n\}$ tamsayılarının tüm permütasyonlarını ihtiva eden S_n simetrik gurubunun elemanlarını temsil etmektedir [9].

Burada bir hususa dikkat çekmek gerekmektedir. Konu ile ilgili literatürde permanent fonksiyonu tanımlanırken kare formlu matrisler üzerinden tanımlama yapılacaksa bunun için yaygın olarak $per(A)$ temsili tercih edilmektedir. Bu tez çalışmasında bu göz ardı edilmiş, simgeler kısmında da belirtildiği gibi, gerek kare gerekse dikdörtgen formu matrislerin permanentleri için $Per(A)$ temsili kullanılmıştır.

Permanenti tanımlayan (1.2) ve (1.3) eşitliklerinin yanında, bir matrisin permanentini elde etmek için kullanılan bazı rekürsif formüller de mevcuttur. Bunlardan ilki, permanent fonksiyonu ile alakalı kombinatoriyal yorumlar içermesi açısından da önemli bir referans kaynak olan [10]'da H. J. Ryser tarafından verilen formüldür. Ryser'in permanent için verdiği bu rekürsif formül (bakınız: [10], sayfa 26), Binet [1] tarafından verilen permanent tanımı üzerinden gidilerek ve "inclusion-exclusion" (bakınız: [10], sayfa 16-28) prensibi temel alınarak üretilmiştir. H. Minc, [11]'de, Ryser'in permanent formülünün çıkarılışını ayrıntılı biçimde ve nümerik örnekler eşliğinde anlatmış, ayrıca Ryser'in permanent formülü üzerinde bazı düzenlemeler yapıp bunu öncekinden farklı ve daha kısa bir temsille (bakınız: [11], eşitlik (2)) yazmıştır.

Yine permanentler için bir diğer rekürsif formül de H. Minc [11]'in verdiği ve Binet'in permanent tanımlamasının bir genelleştirmesi olarak duyurduğu formüldür (bakınız: [11], eşitlik (7)). H. Minc bu rekürsif formül üzerinden giderek permanentler için bir açık formül elde etmeye çalışmıştır.

1.1.2. Permanent fonksiyonunun uygulamaları

Permanentler üzerine çalışan matematikçilerin bir kısmı, sadece cebirsel denklikler veya eşitsizlikler elde etmek ve bunlar üzerinden çeşitli ispatlar yapmak amacını taşırken, diğer bir kısmı da bazı fiziksel uygulamalarını araştırmak üzerine yoğunlaşmışlardır.

Permanent fonksiyonunun uygulamalarına daha çok Kombinatorik alanında rastlanmaktadır. Kombinatoriyal matematik, esas olarak, elemanların kümeler halinde terkiplenerek incelenmesinden oluşur. Bu alanda iki temel soru üzerinde durulur. Bunlardan ilki terkiplerin varlığı problemi, ikincisi ise terkiplerin sayısı problemidir. İkinci problemde, eğer önceden tasarlanmış bir terkip varsa problemi çözmek kolaydır. Fakat, tasarlanmış bir yapı olmadan terkiplerin kesin sayısını tespit etmek zordur. İşte buradaki zorluğu çözmek için permanentten faydalanılmaktadır [12]. Buna dair bir uygulama olarak, referans [12]'de aşağıdaki örnek gösterilmiştir:

Kenar uzunluğu 1cm olan kareler ile kenar uzunlukları 1cm×2cm olan dikdörtgenler kullanılarak kenar uzunluğu 4cm olan bir kare elde edilmek istensin. Bu iş için, önceden 6 kare ve 5 dikdörtgen kullanılsın şeklinde bir tasarım şartı verilirse problemi çözmek kolaydır. Fakat bu şart verilmeden, kenar uzunluğu 4 cm olan büyük karenin içerisine yapılacak farklı yerleştirmelerin kesin sayısını hesaplamak gerçekten zor olacaktır. Problemin bu aşamasında permanent fonksiyonu devreye girecektir. Konuya ait detay ve başka uygulamalar için, referans [12]'nin dördüncü bölümü incelenebilir.

Permanent fonksiyonun Kombinatorik alanındaki uygulamalarından birisi de referans [13]'te yer alan, Latin dikdörtgenleri olarak bilinen $r \times n$ mertebeli matrislerden, $(r+1) \times n$ mertebeli yeni bir latin dikdörtgeni elde etme problemidir. Elemanlarının $\{1,2,\ldots,n\}$ kümesinden seçilmesi ve herhangi bir satır ya da sütununda aynı elemanın iki kez kullanılmaması şartları altında, $r \times n$ mertebeli bir dikdörtgen matrise yeni bir satır yazılması işinin kaç değişik şekilde yapılabileceği sorusu esas problemi teşkil eder. Bu problemin çözümleri, yani mümkün olan satır eklemelerinin sayısı, satır ve sütunları üzerinde belli bir düzene göre 0 ve 1 sayılarının konumlandırılmasıyla oluşan $n \times n$ mertebeli $(0,1)$ matrislerinin permanentleri ile eşleşmektedir.

Referans [14], permanent fonksiyonunun Olasılık ve İstatistik alanındaki uygulamaları üzerine geniş bir araştırma niteliğindedir. Bu çalışmada yer bulan uygulamalardan birisi; bir paranın atılması deneyine ait olasılık dağılım fonksiyonunun, elemanları bu deneye ait ihtimallerden oluşan bir matrisin permanenti cinsinden ifade edilmesi üzerinedir.

Permanent fonksiyonunun uygulamalarının görülebileceği bir diğer alan Graf Teori'dir. Örneğin, referans [15]'in dördüncü bölümünde yer bulan uygulamalardan birisi; iki parçalı (bipartite) graflarda mükemmel eşleşmelerin (perfect matchings) sayısının, bu grafın komşuluk (adjacency) matrisinin permanenti ile sayılabildiği üzerinedir.

Permanent fonksiyonu ile ilgili uygulamalara Matematik alanı dışında da rastlamak mümkündür. Kuantum Fiziği alanına ait bir çalışma olan [16]'da, kutupsal alan operatörlerinin tüm beklenti değerlerinin, bir özel matrisin permanentleri ile eşleştiği gösterilmiştir.

1.1.3. Permanent hesabı

Permanent tanımı ile determinant tanımı arasındaki tek fark, (1.3) eşitliği ile verilen permanent tanımlamasından da gözlenebileceği gibi, permanent tanımlamasında bulunmayan $(-1)^n$ çarpanıdır. Terimlerin işaretlerini belirleyen bu çarpanın determinantta bulunması zannedilenin aksine kolaylığa yol açarken, permanentte bulunmaması ise permanent hesaplamalarında zorluğa neden olmaktadır. Bu durum, hesaplama karmaşıklığı teorisi (*computational complexity theory*) alanında çalışan araştırmacıların üzerinde durduğu önemli problemlerden birisi olmuştur. Örneğin determinant hesabı Gauss eliminasyon yöntemi ile polinomal zamanda sonuç veriyorken, permanent hesabı için bu yöntem (ve benzer diğer yöntemler) polinomal zamanda sonuç vermez [17].

Permanentler üzerine yapılan çalışmalar, tanımlamaları birbirine çok benzer olan determinantlar üzerine yapılmış olan çalışmalara göre sayıca daha azdır. Bunun nedenlerinden birisi de permanentler üzerinde her tür elemanter matris işleminin yapılamıyor olmasıdır. Örneğin, iki satırı aynı olan bir permanentin sonucunun her zaman sıfır olması beklenmez [18]. Determinant için, $det(A.B) = det(A).det(B)$ şeklinde verilen basit çarpım kuralı permanent için geçerli değildir [19]. Permanent fonksiyonu, bir satırın bir skalerle çarpılıp başka bir satıra eklenmesi işlemi altında değişmeli değildir [19]. Bütün bu sonuçlar, permanentin hesaplanması için kullanılabilecek yöntemleri oldukça kısıtlamaktadır. Permanent fonksiyonunun temel özellikleri, bu konu üzerine yapılmış önemli araştırma makalelerinden biri olan referans [18] üzerinden incelenebilir.

Permanent hesaplamalarında, determinant hesabında da yapıldığı gibi, permanenti hesaplanacak olan bir matrisin permanenti kolay hesaplanabilen başka bir matrise indirgenmesi yöntemi sıklıkla denenir. Tam da bu işe yarayan ve determinant hesabından da iyi bilinen *Laplace açılımı (Laplace expansion)* metodu, permanentler üzerinde de kullanılabilirdir [20]. Matrislerin permanentleri üzerinde kullanılan *Laplace açılımı*, determinantları üzerinde kullanılan şekliyle eş bir yapıya sahip olup aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.

Tanım 1.2. $i = 1,2,\dots,m$ ve $j = 1,2,\dots,n$ olmak üzere, $m \times n$ mertebeli $A = \left[a_{ij}\right]$ matrisinin i. satırı ile j. sütununun silinmesiyle elde edilen $(m-1) \times (n-1)$ mertebeli matris $A(i,j)$ ile gösterilsin. Buna göre,

$$Per(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} Per(A(i,j)) \tag{1.4}$$

şeklinde tanımlanan işleme permanentin i. satırına göre Laplace açılımı denir. Eğer $m = n$ olursa, permanentin i. sütununa göre de bir Laplace açılımı mevcut olur [19]. Permanent üzerinde Laplace açılımı işlemi, esasında, (1.2) ile verilen permanent tanımının da bir direkt sonucudur.

Üstte verilen tarife göre, örneğin 4×4 mertebeli $A = \left[a_{ij}\right]$ matrisinin permanenti üzerinde, bu matrisin ilk satırı boyunca Laplace açılımı uygulanması sonucunda

$$\begin{aligned} Per\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} &= a_{11} Per\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \\ &\quad + a_{12} Per\begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \\ &\quad + a_{13} Per\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{bmatrix} \\ &\quad + a_{14} Per\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{1.5}$$

eşitliği elde edilir.

1.2. Bazı Yapılandırılmış Matrisler

Elemanlarının dizilişleri üzerinden bu dizilişleri ifade eden bir formülizasyon çıkarılması mümkün olan kare formlu matrislere yapılandırılmış matrisler denir [21]. Matrisler üzerinde gözlenen bu yapılar, her bir matrisin kendine has özelliklerinin teşkil ettiği matematiksel modelin Lineer Cebir dilinde yazılmasından ibaret olan ifadelerdir [22]. $n \times n$ mertebeli bir yapılandırılmış matris, ifade edildiği yapı sayesinde, n^2 den çok daha az sayıda girdi ile tanımlanabilmektedir. Yapılandırılmış matrislere örnek olarak Toeplitz, Henkel, Vandermonde, Cauchy, Hessenberg, dairesel ve band matrisler gösterilebilir. Burada ismi zikredilen özel yapılı matrisler, referans [23]'ün 30 ila 38 numaralı sayfaları arasındaki kısımdan da incelenebilir.

1.2.1. Toeplitz matris

Yapılandırılmış matrislerin en önemli türlerinden birisi olan Toeplitz matrisler, diferansiyel ve integral denklemlerin çözümlerinde, sinyal ve görüntü işlemede, ihtimal hesaplarında, istatistikte ve fizikteki bazı metodlarda kullanılmaktadır.

Tanım 1.3. $n \times n$ mertebeli bir $A = [a_{ij}]$, $(i, j = 1, \dots, n)$ matrisinin elemanları

$$a_{ij} = a_{i-j} \tag{1.6}$$

kuralına uygun dizilmişse, bu A matrisine Toeplitz matris denir [24].

Bu tanımlamaya göre, örneğin 5×5 mertebeli bir Toeplitz matris

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} & a_{-4} \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} \\ a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix} \tag{1.7}$$

formundadır. $2n-1$ adet bağımsız elemandan oluşan $n \times n$ mertebeli $A = [a_{ij}]$ Toeplitz matrisinin ana köşegen bandı ve buna paralel bandlarının her biri, kendi içinde aynı değere sabitlenmiştir. Bu sebeple bu formdaki matrisler için, örneğin [25]'te olduğu gibi, "constant-diagonals" isimlendirmesi de kullanılmaktadır.

Tanım 1.4. Eğer $n \times n$ mertebeli bir $A = [a_{ij}]$, $(i, j = 1, \dots, n)$ matrisinin elemanları

$$a_{ij} = a_{|i-j|} \tag{1.8}$$

kuralına uygun dizilmişse, o zaman bu A matrisi bir simetrik Toeplitz matristir [24].

Bu tanımlamaya göre, örneğin 5×5 mertebeli bir simetrik Toeplitz matris

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_1 & a_0 & a_1 & a_2 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & a_1 \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix} \tag{1.9}$$

formundadır.

1.2.2. Dairesel (Circulant) matris

Toeplitz matrisin yaygın bir özel türü olan dairesel matrisler, görüntü işlemede, nümerik analizde, bilhassa periyodik sınır değer problemlerinin nümerik çözümlerinde uygulamaları bulunan bir matris türüdür.

Tanım 1.5. $n \times n$ mertebeli bir $A = [a_{ij}]$, $(i, j = 1, \dots, n)$ matrisinin elemanları

$$a_{ij} = a_{j-i+1\ (mod\ n)} \tag{1.10}$$

kuralına uygun dizilmişse, bu A matrisine dairesel (circulant) matris denir [26].

Bu tanımlamaya göre, örneğin 5×5 mertebeli bir dairesel matris

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ a_5 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_4 & a_5 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_4 & a_5 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_1 \end{bmatrix} \tag{1.11}$$

formundadır. Bu formdaki matrislerde herhangi bir satır, bunun üstündeki satırı oluşturan elemanların dairesel bir hareketle birer sağa kaydırılması suretiyle elde edilmektedir. O halde bir dairesel matris, esasen, sadece ilk satırının dairesel hareketi neticesinde oluşturulabileceğinden sadece ilk satırının elemanları kullanılarak temsil edilebilirdir.

1.2.3. Band matris

Tanım 1.6. $n \times n$ mertebeli bir $A = [a_{ij}], (i, j = 1, \dots, n)$ matrisinin elemanlarından bazıları $a_{ij} = 0$ şartını sağlıyor olsun. Eğer, bu sıfırlı elemanların yerlerini belirten indisler için

$$|i - j| > k > 0 \tag{1.12}$$

olacak şekilde bir k tamsayısı mevcutsa, o zaman bu A matrisine band matris denir [27]. Buradaki k değerine, matrisin band aralığı veya band genişliği (bandwidth) denir.

Band matrislerin birçok yaygın alt türü, o türlere ait özel isimlendirmelerle anılır. Bunlardan en çok karşılaşılanları “tridiagonal”, “pentadiagonal”, “heptadiagonal" isimlendirilmeleriyle kullanılan formlardır. (1.12) ile verilen şartta, örneğin $k = 2$ seçilmesiyle oluşacak matris

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & 0 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ 0 & a_{24} & a_{34} & a_{44} & a_{45} \\ 0 & 0 & a_{35} & a_{45} & a_{55} \end{bmatrix} \tag{1.13}$$

formundadır. Bu matris için örneğin [28]'de, "pentadiagonal" tabiri kullanılmıştır.

1.2.4. Tridiagonal matris

Tanım 1.7. $n \times n$ mertebeli $A = [a_{ij}]$ matrisi bir tridiagonal matris ise,

$|i - j| > 1$ iken $a_{ij} = 0$ dır [29].

Bu tanımlamaya göre $A = [a_{ij}]$ tridiagonal matrisi,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & & \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0 & \\ & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & 0 & a_{n-1n-2} & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ 0 & & & & 0 & a_{nn-1} & a_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n} \tag{1.14}$$

formundadır. Tridiagonal matrisler için, "Continuant" [30] matris ve "Jacobi" [31] matrisi isimlendirmelerinin kullanıldığı da görülmektedir.

Tridiagonal matrisler, Matematik ve ilişkili birçok alanda sıkça karşılaşılan matris yapılarındandır. Örneğin, İstatistik alanındaki çalışmalarda kullanılan tahminleme yöntemlerindeki araçlardan birisi olan eşdeğişkenlik (kovaryans) matrisi, bir tridiagonal matristir [32].

1.2.5. *k*-tridiagonal matris

Band matrisler içerisinde, üç bandı dışındaki tüm bandları sıfırlardan müteşekkil olan matrisler göz önüne alınsın. Bu matrislerin sıfırdan farklı üç bandından birisi ana köşegen bandı olsun. Diğer ikisi ise, ana köşegen bandına göre simetrik konumda yerleştirilmiş ve aralarına sıfırlı bandların girmesiyle ana köşegenden k adım ileriye taşınmış bandlar olsun. Yani, bu matrislerin, örneğin ilk satır ve ilk sütunundaki elemanlarının yerleşimleri sırasıyla

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} \; 0 \cdots 0 \; a_{1,k+1} \; 0 \; \cdots 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{1,1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_{k+1,1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1.15}$$

şeklinde olsun. Bu tarif ile kurulmaya çalışılan yapıdaki matrisler "*k-tridiagonal*" isimlendirmesiyle anılırlar ve aşağıdaki form ile temsil edilirler:

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \vdots & 0 & b_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & a_{n-k} & \ddots & \vdots & \ddots & b_{n-k} \\ c_1 & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & c_2 & \ddots & \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & 0 & a_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & c_{n-k} & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{bmatrix}_{n\times n} \tag{1.16}$$

Bu matrisler referans [33]'de "tridiagonal matrislerin bir genelleştirmesi" olarak tanıtılmıştır. (1.16) formundaki bu matris ailesi için daha çok kabul gören *k-tridiagonal* isimlendirmesinin kullanımının hemen hemen ilk kez görüldüğü çalışmalar, [33], [34], [35] ve [36] referanslarıyla verilenlerdir.

Tanım 1.8. $n \times n$ mertebeli

$$T_n^{(k)} = [t_{ij}], (i, j = 1,2, \dots, n) \tag{1.17}$$

matrisinin elemanları

$$t_{ij} = \begin{cases} a_i & , \quad i = j \\ b_i & , \quad i - j = -k \\ c_j & , \quad i - j = k \\ 0 & , \quad diğer \end{cases} \tag{1.18}$$

kuralına uygun dizilmiş ise, $T_n^{(k)}$ matrisine *k-tridiagonal* matris denir [37].
Tanımlamaya göre, $k = 1$ seçildiğinde oluşacak $T_n^{(1)}$ matrisleri *1-tridiagonal* matris, $k = 2$ seçildiğinde oluşacak $T_n^{(2)}$ matrisleri *2-tridiagonal* matris, $k = 3$ seçildiğinde oluşacak $T_n^{(3)}$ matrisleri *3-tridiagonal* matris, vb. şeklinde isimlendirilirler. Bu tez çalışması içerisinde $T_n^{(1)}$ formundaki matrisler için, *1-tridiagonal* tabiri kullanılmayıp bunun yerine kısaca *tridiagonal* tabiri kullanılacaktır.

(1.16) formundaki matrisleri göstermek için tercih edilen $T_n^{(k)}$ notasyonu, hem matrisin mertebesini hem de matrisin band aralığını aynı anda göstermek için tercih edilmiştir. (1.16) formu ile verilen *k-tridiagonal* yapısının matris üzerinde görülebilmesi için, k ve n değerleri arasındaki $1 \leq k < n$ sıralamasının korunması gerekir. Aksi taktirde, yani $k \geq n$ olması durumunda, $T_n^{(k)}$ matrisleri köşegen matris halini alır.

k-tridiagonal matrisler bilhassa mühendislik bilimlerinde uygulamaları olan matris yapılarındandır. Örneğin, enerji alanında bir çalışma olan [38]'de, bir ısı değiştiricisi devresindeki hücrelerin etkenliklerini temsil eden etkenlik matrisinin *6-tridiagonal* olarak adlandırılan formda (yani (1.18) e göre $T_n^{(6)}$ ile temsil edilen formda) olduğu görülmektedir.

1.2.6. k-tridiagonal Toeplitz matris

(1.18) ile verilen tanımlamada sıfırdan farklı bandları temsil eden rastgele sayı dizileri, her $i, j = 1,2, \dots, n$ değeri için $a_i = a$, $b_i = b$ ve $c_j = c$ olarak belirlenmiş olsun. Bu belirleme ile *k-tridiagonal* matrise Toeplitz yapısı kazandırılmış olur. Bu sayede oluşacak matrisler

$$T_n^{(k)}(a,b,c) = \begin{bmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & 0 & \vdots & 0 & b & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & a & \ddots & \vdots & \ddots & b \\ c & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & c & \ddots & \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & 0 & a & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & c & 0 & \cdots & 0 & a \end{bmatrix}_{n\times n} \tag{1.19}$$

formundadır. Referans [39]'de "tridiagonal matrislerin bir ailesi" tabiriyle tanıtılan bu matrisler, bu tez çalışması boyunca *k-tridiagonal Toeplitz* matris olarak anılacaktır. Buna göre, örneğin $T_n^{(1)}(a,b,c)$ matrisi için *tridiagonal Toeplitz*, $T_n^{(2)}(a,b,c)$ matrisi için *2-tridiagonal Toeplitz* ve $T_n^{(3)}(a,b,c)$ matrisi için *3-tridiagonal Toeplitz* tabiri kullanılacaktır. *k-tridiagonal Toeplitz* matrisler, aynı zamanda hem "band" matris hem de "dairesel" matris yapısına haizdirler.

Tanım 1.9. $a, b, c \in \mathbb{C}$ olmak üzere, elemanları

$$t_{ij} = \begin{cases} a & , \quad i = j \\ b & , \quad i - j = -k \\ c & , \quad i - j = k \\ 0 & , \quad di\breve{g}er \end{cases} \tag{1.20}$$

kuralına uygun şekilde dizilmiş olan

$$T_n^{(k)}(a,b,c) = \left[t_{ij}\right] \tag{1.21}$$

matrislerine *k-tridiagonal Toeplitz* matris denir.

k-tridiagonal Toeplitz formundaki matrisleri farklı alanlardaki çalışmalarda görmek mümkündür. Senkronize robotik ağların iletişimi problemlerini konu alan bir çalışma olan [40]'da, dinamik sistemlerin *tridiagonal Toeplitz* matrisler yardımıyla tanımlanması durumunda bu sistemlerin yakınsama oranlarının nasıl değişeceği tartışılmıştır. Dahası, görüntü işlemede kullanılan filtreleme algoritmalarını konu alan bir çalışma olan [41], kontrol teoride kablosuz iletişim ağı uygulamaları üzerine bir çalışma olan [42], ve moleküler biyolojide mRNA nın hassaslığı üzerine bir çalışma olan [43], bahsi geçen aileye mensup matrislerin kullanıldığı alanlara örnek gösterilebilecek diğer bazı çalışmalardır.

BÖLÜM 2. LİTERATÜR TARAMASI

Burada sunulacak literatür taramasında, öncelikli olarak, k-tridiagonal matris ailesinin özel veya genel türlerinin permanentleri üzerine yapılmış olan çalışmalara yer verilmiştir. Bunun yanında, k-tridiagonal matris ailesine mensup matrislerin determinantları veya tersleri üzerine olan bazı çalışmalara da atıf yapılmıştır. Bundan maksat, bu tez çalışması ile sunulanlar değerlendirilirken yalnızca permanentleri üzerinde çalışılan matris ailesi göz önünde bulundurulmayıp, aynı zamanda tez çalışmasının bulguları ile benzer türde bulgulara sahip çalışmalarla da değerlendirilebileceğinin düşünülmüş olmasıdır.

[44]'te,

$$F_n(\alpha,\beta,\gamma)=\begin{bmatrix} \beta & \gamma & & & 0 \\ \alpha & \beta & \gamma & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & & & \alpha & \beta \end{bmatrix}_{n\times n}$$

şeklinde sembolize edilen *tridiagonal Toeplitz* matrisin permanenti için

$$f_n=\beta f_{n-1}+\alpha\gamma f_{n-2}$$

rekürsif formülü verilmiştir. f_n, $F_n(\alpha,\beta,\gamma)$ matrisinin permanentini göstermek üzere bu reküransın başlangıç şartları $f_0=1$, $f_1=\beta$ ve $f_2=\beta^2+\alpha\gamma$ dır.

[45]'te,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & & & 0 \\ a_1 & 1 & 1 & & \\ & a_2 & 1 & 1 & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & & & a_{n-1} & 1 \end{bmatrix}_{n\times n}$$

şeklindeki *tridiagonal* matrisin permanenti için bazı özdeşlik ve eşitlikler verilmiş, ayrıca bu matrisin permanentleri ile Fibonacci sayıları arasındaki ilişkiler üzerine çalışılmıştır.

[46]'da,

$$\begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & & & & \\ c_{1,2} & c_{2,2} & c_{2,3} & & & \\ & c_{2,3} & c_{3,3} & c_{3,4} & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & c_{n-1,n} \\ & & & & c_{n,n-1} & c_{n,n} \end{bmatrix}$$

formuyla verilen simetrik yapılı genel *tridiagonal* matrisin permanentleri ile, aynı formda olup ve ana köşegen elemanları $(-c_{1,1}, -c_{2,2}, -c_{3,3}, \dots, -c_{n,n})$ şeklinde dizilen diğer bir matrisin permanentleri arasındaki ilişki sunulmuştur. Aynı çalışmada, tamsayı elemanlı bazı özel *tridiagonal* matrislerin permanentleri ile Fibonacci ve Lucas sayı dizilerinin elemanları da karşılaştırılmıştır.

[47]'de,

$$H(a,b,c) = \begin{bmatrix} a & 0 & b & 0 & & 0 \\ 0 & a & 0 & b & \ddots & \\ c & 0 & a & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ & \ddots & \ddots & 0 & a & 0 \\ 0 & & 0 & c & 0 & a \end{bmatrix}_{n\times n}$$

ile temsil edilen *2-tridiagonal Toeplitz* matrisin, $H(a,b,-c)$ ve $H(a,-b,c)$ formlarının permanentlerinin birbirine eşit olduğu vurgulanmış, ayrıca bu iki matrisin permanentleri için, matrislerin mertebesini gösteren n değerinin tek veya çift olma durumlarına göre ayrılmış iki rekürsif temsil verilmiştir.

[48]'de,

$$\begin{bmatrix} \alpha+\beta & \beta & & & 0 \\ -\alpha & \alpha+\beta & \beta & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -\alpha & \alpha+\beta & \beta \\ 0 & & & -\alpha & \alpha+\beta \end{bmatrix}_{n\times n}$$

formuna uygun *tridiagonal Toeplitz* matrislerin permanentleri ikinci dereceden rekürans bağıntısı ile temsili verilmiş ve bu permanentler Binet formülü ile ifade edilmiştir.

[49]'da,

$$\begin{bmatrix} c_1 & c_2 & & & & 0 \\ 1 & c_1 & c_2 & & & \\ & 1 & c_1 & c_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & c_2 & c_2 \\ 0 & & & & 1 & c_1 \end{bmatrix}_{n\times n}$$

ve $i^2 = -1$ olmak üzere

$$\begin{bmatrix} c_1 & -ic_2 & & & & \\ i & c_1 & -ic_2 & & & \\ & i & c_1 & -ic_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & i & c_1 & -ic_2 \\ & & & & i & c_1 \end{bmatrix}$$

formlarındaki *tridiagonal Toeplitz* matrislerin permanentleri ile genelleştirilmiş Fibonacci polinomları arasındaki ilişkiler verilmiştir.

[50]'de,

$$\begin{bmatrix} 2s & t & & & & \\ 1 & 2s & t & & & \\ & 1 & 2s & t & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 2s & t \\ & & & & 1 & 2s \end{bmatrix}$$

formuna uygun tridiagonal matrislerin permanentleri ile Pell sayı dizileri arasındaki ilşkiler gösterilmiştir.

[51]'de,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & & & & 0 \\ 1 & -1 & 2 & & & \\ & 1 & 1 & 2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 1 & 2 \\ 0 & & & & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

şeklindeki *tridiagonal* matrisin permanentlerinin Jacobstal sayıları ile ilişkisi gösterilmiştir.

[52]'de,

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{x} & & & 0 \\ x & 1 & \frac{1}{x} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & x & 1 & \frac{1}{x} \\ 0 & & & x & 1 \end{bmatrix}_{n\times n}$$

ve $i^2 = -1$ olmak üzere

$$\begin{bmatrix} 1 & i & & & 0 \\ -i & 1 & i & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -i & 1 & i \\ 0 & & & -i & 1 \end{bmatrix}_{n\times n}$$

formlarındaki *tridiagonal* matrislerin permanentlerinin Fibonacci sayı dizileri cinsinden temsilleri elde edilmiştir.

[53]'te, elemanları kompleks sayılardan da seçilebilen ve üst köşegen ile alt köşegen bandlarının elemanları arasında $\delta_k . \varepsilon_k = 1$ kısıtı bulunan,

$$\begin{bmatrix} x^r & \varepsilon_1 & & & & \\ \delta_1 & x^{1-r} & \varepsilon_2 & & & \\ & \delta_2 & 1 & \varepsilon_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \delta_{n-2} & 1 & \varepsilon_{n-1} \\ & & & & \delta_{n-1} & 1 \end{bmatrix}_{n\times n}$$

formundaki *tridiagonal* matrislerin $r = 0$ ya da $r = 1$ seçilmesi durumlarındaki formlarının permanentleri, katsayıları Fibonacci sayılarından oluşan bir polinom dizisi cinsinden ifade edilmiştir.

[54]'te, elemanları arasında kompleks sayılar da bulunan bazı *tridiagonal* matrislerin permanentleri yardımıyla, negatif indisli Fibonacci ve Pell sayılarının bir genelleştirmesi olan $G_{-n} = -AG_{-n+1} + G_{-n+2}$ reküransı üzerinden elde edilen bazı yeni rekürsif özdeşliklerin ispatları yapılmıştır.

[36]'da, genel *k-tridiagonal Toeplitz* matrislerin permanentleri için, LU ayrışımı üzerinden gidilerek elde edilen bir rekürsif algoritma sunulmuştur.

[55]'te, hem genel *k-tridiagonal* matrislerin permanentleri için hem de bu matrislerin bir özel formu olan simetrik yapılı *k-tridiagonal Toeplitz* matrislerin permanentleri için birer rekürsif algoritma elde edilmiştir. [55]'te verilen bu algoritmaların, sadece

tamsayı elemanlı matrislerin permanentleri üzerinde çalıştığı aynı çalışmada belirtilmiştir.

[56]’da,

$$
T_{n(k)}^{(k)} = \begin{bmatrix}
a_1 & 0 & \dots & 0 & b_1 & & & & & 0 \\
0 & a_2 & 0 & \dots & 0 & b_2 & & & & \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\
0 & \ddots & \ddots & a_k & \ddots & \ddots & \ddots & b_k & & \\
c_1 & 0 & \dots & 0 & a_1 & 0 & \dots & 0 & b_1 & \\
 & c_2 & 0 & \dots & 0 & a_2 & 0 & \dots & 0 & \ddots \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\
 & & & c_k & \ddots & \ddots & \ddots & a_k & \ddots & \vdots \\
 & & & & c_1 & 0 & \dots & 0 & a_1 & 0 \\
0 & & & & & \ddots & 0 & \dots & 0 & \ddots
\end{bmatrix}_{n \times n}
$$

formu ile gösterilen genel *k-tridiagonal k-Toeplitz* matrisin permanentleri için

$$
perT_{n(k)}^{(k)} = \prod_{\iota=0}^{k-1} u_{|\bar{\iota}|}
$$

şeklinde bir temsil elde edilmiştir. Buradaki $u_{|\bar{\iota}|}$ çarpanları, başlangıç şartları $u_{-1} = 0$ ve $u_0 = 1$ olan $u_n = a_\iota u_{n-1} + b_\iota c_\iota u_{n-1}$ rekürans bağıntısından türetilmektedir.

Sıradaki üç atıf, Hessenberg tipi matrislerin (bakınız: referans [23], sayfa 35) permanentleri üzerine yapılmış olan çalışmalardandır.

[57]’de, Hessenberg tipi matrislerin permanentleri ile determinantları arasındaki ilişkiler, [58]’de, alt Hessenberg matrislerin bazı türlerinin permanentleri, genelleştirilmiş Lucas ve genelleştirilmiş Fibonacci sayıları arasındaki ilişkiler, [59]’da üst Hessenberg matrislerin bazı özel türlerinin permanentleri ile Jacobsthal sayı dizisinin elemanları arasındaki ilişkiler gösterilmiştir.

Literatür taramasının bundan sonraki kısmında verilecek atıfların gösterdiği çalışmalar permanent dışındaki matris fonksiyonlarıyla alakalı olsa da, bu çalışmalardaki bulguların tez çalışmamız neticesinde elde edilen bulgularla tür olarak benzerlik arzetmesi nedeniyle bunlara burada yer verilmiştir.

Bunlardan ilki, bu tez çalışmasının önemli motivasyonlarından biri olan, k *−tridiagonal Toeplitz* matrislerin determinantlarının konu edildiği referans [39]'dur. [39]'da, "tridiagonal matrislerin bir ailesi" tabiri kullanılarak tanıtılan k *−tridiagonal Toeplitz* matrislerin determinantları için rekürsif formüller çıkarılmış ve bazı genelleştirmeler elde edilmiştir.

[31]'de, genel *tridiagonal* matrisin determinantlarını temsil eden rekürans bağıntısı yardımıyla, aynı matrisin tersi için bir hesaplama algoritması elde etmiştir.

[60]'ta, genel *tridiagonal* matrisin determinantı ile ortogonal polinomlar ailesini temsil eden ikinci dereceden bir rekürans bağıntısı arasında tespit edilen ilişki gösterilmiştir. Ayrıca, determinantları Legendre, Hermit, Laguerre ve Chebyshev polinomlarını veren bazı matrisler üzerinden bu ilişki örneklendirilmiştir.

[61]'de, *tridiagonal Toeplitz* matrisin tersi, ikinci tip Chebyshev polinomları cinsinden formülize edilmiştir.

[25]'te, bazı genel *tridiagonal* matrislerin determinantları ve tersleri için rekürsif ilişkiler elde edilmiştir. Bu çalışmada göze çarpan sonuçlardan birisi, genel *2-tridiagonal Toeplitz* matrisin determinatının ikinci tip Chebyshev polinomları cinsinden temsilidir.

BÖLÜM 3. *k*-TRIDIAGONAL TOEPLITZ MATRİSLERİN BİR ÖZEL TÜRÜNÜN PERMANENTLERİ İLE CHEBYSHEV POLİNOMLARI ARASINDAKİ İLİŞKİLER

Ana köşegen bandı değişkene bağlı olan ve diğer bandları da kompleks birimi $\left(i = \sqrt{-1}\right)$ barındıran bir özel k-tridiagonal Toeplitz matrisin permanentleri ile ortogonal polinomlar ailesinin önemli üyelerinden biri olan Chebyshev polinomları arasında tespit edilen ilişkilerin sunulacağı bu bölüm, bu tez çalışmasının başlangıç noktasını teşkil etmektedir. Bu bölümde sunulacak çalışmalar, [62] numaralı referans ile verilen makale ile yayımlanmıştır.

3.1. Chebyshev Polinomları

Ortogonal polinomlar ailesinin önemli üyelerinden biri olan Chebyshev polinomları, Matematikte ve Mühendislik bilimlerinde olduğu kadar diğer bilim dallarında da uygulamaları bulunan bir matematiksel araçtır. Bilhassa optimizasyon problemlerinde denenen yaklaşımlarda ve tahminleme algoritmalarında Chebyshev polinomlarının kullanımı oldukça yaygındır. Kısmi diferansiyel denklemlerinin çözümleri için polinomal yaklaşım temelli bir metodun denendiği [63] ve iletişim ağları topolojisinde ağlar arasındaki bağlantılar üzerine çalışan algoritmaların tasarlanmasının konu edildiği [64], Chebyshev polinomlarının kullanıldığı çalışmalardan bazılarıdır. Chebyshev polinomlarının İstatistik alanındaki uygulamalarına bir örnek olarak gösterilebilecek [32] de, rassal değişkenlerden oluşan bir örneklemdeki tahminlere ait parametreleri hesaplamak için kullanılan (ve en küçük kareler yöntemine dayalı tahminleme yapan) bir lineer tahmincinin varyansının, Chebyshev polinomları cinsinden temsil edildiği görülmektedir.

Lie cebiri üzerinde tanımlanmış Cartan matrisi olarak anılan bir matrisin karakteristik polinomunun Chebyshev polinomları cinsinden ifade edildiği [65] ve bir grafın dallanma sayılarını veren bağıntının Chebyshev polinomları yardımıyla elde edilmesinin konu edildiği [66], Chebyshev polinomlarının uygulamalarına Lineer Cebir alt alanının içerisinden verilebilecek örneklerdendir. Tez çalışmasının bu bölümde yapılan çalışma da Chebyshev polinomlarının Lineer Cebir alanındaki uygulamaları arasında değerlendirilebilecek niteliktedir.

Chebyshev polinomlarının pek çok türü vardır Uygulamalarda daha çok karşılaşılan iki türü, $T_n(x)$ ile gösterilen birinci tip Chebyshev polinomu ve $U_n(x)$ ile gösterilen ikinci tip Chebyshev polinomudur.

Tanım 3.1. Değişkeni

$$x = cos\theta \tag{3.1}$$

olmak üzere,

$$T_n(x) = cos(n\theta) \tag{3.2}$$

şeklinde tanımlanan polinoma birinci tip Chebyshev polinomu,

$$U_n(x) = \frac{sin(\,n+1)\theta}{sin\,\theta} \tag{3.3}$$

şeklinde tanımlanan polinoma ikinci tip Chebyshev polinomu denir [67]. Buradaki n değeri, bu trigonometrik polinomların derecesi, belirtir.

Chebyshev polinomlarının bu tez çalışmasında kullanılan türü $U_n(x)$ olduğundan, burada sadece onunla ilgili temel bilgiler verilerek devam edilecektir.

Temel trigonometri bilgileriyle yazılabilen

$$
\begin{aligned}
&sin\, 1\theta = sin\, \theta, \\
&sin\, 2\theta = 2\, sin\, \theta\, cos\, \theta, \\
&sin\, 3\theta = sin\, \theta\, (4cos^2\, \theta - 1), \\
&sin\, 4\theta = sin\, \theta\, (8cos^3\, \theta - 4\, cos\, \theta), \cdots
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

eşitliklerinin (3.3) ile verilen tanımlamada kullanılmasıyla elde edilecek polinom dizisisinin ilk birkaç terimi aşağıda gösterilmiştir.

$$
\begin{aligned}
&U_0(x) = 1, \\
&U_1(x) = 2x, \\
&U_2(x) = 4x^2 - 1, \\
&U_3(x) = 8x^3 - 4x, \\
&U_4(x) = 1 - 12x^2 + 16x^4, \\
&U_5(x) = 6x - 32x^3 + 32x^5, \\
&U_6(x) = -1 + 24x^2 - 80x^4 + 64x^6.
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

Yine temel trigonometri bilgileriyle yazılabilen ve toplamı çarpıma dönüştüren

$$sin\, \alpha + sin\, \beta = 2\, cos\frac{\alpha - \beta}{2} sin\frac{\alpha + \beta}{2}$$

özdeşliği üzerinde $\alpha = (n + 1)\theta$ ve $\beta = (n - 1)\theta$ yazmak suretiyle

$$sin(n+1)\theta + sin(n-1)\theta = 2cos\theta sin(n\theta) \tag{3.6}$$

özdeşliği elde edilir. (3.6) eşitliğinin her iki yanının $sin\,\theta$ ile bölünmesiyle oluşacak eşitlik üzerinde (3.1) ve (3.3) ile verilenlerin birlikte kullanılmasıyla

$$U_n(x) = 2xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x) \ , \ \ n = 2,3,\ldots \tag{3.7}$$

rekürsif eşitliği elde edilir. $U_0 = 1$ ve $U_1 = 2x$ terimleri bu reküransın başlangıç şartları olarak kabul edilir. Bu rekürans bağıntısı, ikinci tip Chebyshev polinomlarını üreten en etkin metot olarak değerlendirilir. Chebyshev polinomlarının ikinci tipi olan $U_n(x)$ polinomları, bu tez çalışması boyunca, *Chebyshev U* olarak anılacaktır.

3.2. *k*-Tridiagonal Toeplitz Matrislerin Bir Özel Türünün Permanentleri İle *Chebyshev U* Polinomları Arasındaki İlişkiler

(1.19) ile görülen formdaki k-tridiagonal Toeplitz matrisin ana köşegen bandı $a = 2x$ ve buna paralel olan diğer iki bandı da $b = c = i$, $(i^2 = -1)$ olarak belirlenmiş olsun. Bu seçimlerle birlikte, simetrik yapılı $n \times n$ mertebeli

$$T_n^{(k)}(2x,i,i) = \begin{bmatrix} 2x & 0 & \ldots & 0 & i & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 2x & 0 & \ldots & 0 & i & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & 0 \\ i & 0 & \ldots & 0 & 2x & 0 & \ldots & 0 & i \\ 0 & i & \ddots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \cdots & 0 & 2x & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & i & 0 & \ldots & 0 & 2x \end{bmatrix}_{n\times n} \tag{3.8}$$

matrisleri elde edilmiş olur. Böylece,

$$T_n^{(k)}(2x,i,i) = [t_{rj}] \tag{3.9}$$

olmak üzere

$$t_{rj} = \begin{cases} 2x, & r = j \\ i, & |r-j| = k \\ 0, & diğer \end{cases} \tag{3.10}$$

ve $r, j = 1,2, \dots, n$ dir. Simetrik yapılı $T_n^{(k)}(2x, i, i)$ matrislerinin örneğin ilk satırı üzerindeki elemanların yerleşimi [$2x \underbrace{0 \ \cdots \ 0 \ i}_{k\ adet} \ 0 \ \cdots \ 0$] şeklindedir.

Tezin bu bölümünde, (3.8) ile görülen $T_n^{(k)}(2x, i, i)$ matrislerin permanentleri ile *Chebyshev U* polinomları arasında tespit edilen ilişkiler sunulacaktır. Bu ilişkiler, matrislerin permanentlerinin hesaplanması işini kolaylaştırmak adına çok önemlidir. Çünkü bir polinomun üzerinden gidilerek yapılacak hesaplamalar, girdileri arasında kompleks birim de bulunan $T_n^{(k)}(2x, i, i)$ matrislerinin permanentleri üzerinden gidilerek yapılacak hesaplamalardan çok daha kısa sürede tamamlanmaktadır.

Bu tez çalışması boyunca, (3.8) formundaki $T_n^{(k)}(2x, i, i)$ matrislerinin permanentlerini göstermek için $Per\left(T_n^{(k)}\right)$ notasyonu kullanılacaktır. $T_n^{(k)}(2x, i, i)$ matrislerinin ilk birkaç k ve n değeri için permanentlerinin sonuçları, tez kaynakçasından sonra gelen Ekler bölümünde görülebilir. Şimdi, bu bölüme ait esas sonuçları verelim.

Teorem 3.2. $i^2 = -1$ olmak üzere,

$$T_n^{(1)} = \begin{bmatrix} 2x & i & & & 0 \\ i & 2x & i & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & i & 2x & i \\ 0 & & & i & 2x \end{bmatrix}_{n\times n} \tag{3.11}$$

matrisinin permanentleri için

$$Per\left(T_n^{(1)}\right) = U_n(x). \tag{3.12}$$

İspat: Teoremin ispatı n ye göre tümevarım ile yapılacaktır.

$n = 3$ için

$$Per\left(T_3^{(1)}\right) = -4x + 8x^3 = U_3(x) \tag{3.13}$$

olup (3.12) eşitliği doğrudur.

(3.12) eşitliği k için doğru olsun, yani

$$Per\left(T_k^{(1)}\right) = U_k(x). \tag{3.14}$$

O halde, (3.12) eşitliğinin $k + 1$ için de doğru olduğu, yani

$$Per\left(T_{k+1}^{(1)}\right) = U_{k+1}(x) \tag{3.15}$$

olduğu gösterilmelidir. Bunun için önce $Per(T_{k+1}^{(1)})$ permanenti, birinci satırına göre Laplace açılımı uygulanarak yazılsın. Böylece,

$$Per\left(T_{k+1}^{(1)}\right) =$$
$$2xPer\begin{bmatrix} 2x & i & & & 0 \\ i & 2x & i & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & i & 2x & i \\ 0 & & & i & 2x \end{bmatrix}_{k\times k} + iPer\begin{bmatrix} i & i & & & 0 \\ 0 & 2x & i & & \\ 0 & i & 2x & i & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & & & i & 2x \end{bmatrix}_{k\times k} \tag{3.16}$$

eşitliği elde edilir. (3.16) eşitliğinin sağ yanının ilk terimindeki matris $T_k^{(1)}(2x, i, i)$ formunda olup bunun permanenti yerine (3.14) eşitliği gereği $U_k(x)$ yazılırsa

$$Per\left(T_{k+1}^{(1)}\right) = 2xU_k(x) + iPer\begin{bmatrix} i & i & & & 0 \\ 0 & 2x & i & & \\ 0 & i & 2x & i & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & & & i & 2x \end{bmatrix}_{k\times k} \tag{3.17}$$

eşitliği elde edilir. (3.17) eşitliğinin sağ yanının ikinci terimindeki matris $T_k^{(1)}(2x,i,i)$ formunu sağlamadığından, bu matrisin permanentine birinci sütunu boyunca tekrar Laplace açılımı uygulansın. Bu işlemle birlikte

$$Per\left(T_{k+1}^{(1)}\right) = 2xU_k(x) + i^2 Per\begin{bmatrix} 2x & i & & & 0 \\ i & 2x & i & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & i & 2x & i \\ 0 & & & i & 2x \end{bmatrix}_{(k-1)\times(k-1)} \tag{3.18}$$

eşitliği elde edilir. (3.18) eşitliğinde katsayısı i^2 olan matris $T_{k-1}^{(1)}(2x,i,i)$ formunda olduğundan

$$Per\left(T_{k+1}^{(1)}\right) = 2xU_k(x) - Per\left(T_{k-1}^{(1)}\right) \tag{3.19}$$

yazılır. (3.19) eşitliğinde $Per(T_{k-1}^{(1)})$ yerine, (3.14) eşitliği gereği $U_{k-1}(x)$ yazılırsa

$$Per\left(T_{k+1}^{(1)}\right) = 2xU_k(x) - U_{k-1}(x) \tag{3.20}$$

eşitliği elde edilir. (3.20) eşitliğinin sağ yanı, Chebyshev U polinomlarının rekürsif tanımı olan (3.7) eşitliği gereği $U_{k+1}(x)$ terimine eşit olduğundan

$$Per\left(T_{k+1}^{(1)}\right) = U_{k+1}(x)$$

yazılır ki bu istenendir.■

Teorem 3.3. $i^2 = -1$ olmak üzere,

$$T_n^{(2)} = \begin{bmatrix} 2x & 0 & i & & & & 0 \\ 0 & 2x & 0 & i & & & \\ i & 0 & 2x & 0 & i & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & i & 0 & 2x & 0 & i \\ & & & i & 0 & 2x & 0 \\ 0 & & & & i & 0 & 2x \end{bmatrix}_{nxn} \tag{3.21}$$

matrisinin permanenti için

$$Per\left(T_n^{(2)}\right) = \sum_{r=0}^{\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor} U_{n-2r}(x) \tag{3.22}$$

eşitliği doğrudur. Burada $U_0(x) = 1$ olup $s < 0$ iken $U_s(x) = 0$ kabul edilmiştir.

İspat: Teoremin ispatı n ye göre tümevarım ile yapılacaktır.

$n = 5$ için

$$Per\left(T_5^{(2)}\right) = Per\begin{bmatrix} 2x & 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 2x & 0 & i & 0 \\ i & 0 & 2x & 0 & i \\ 0 & i & 0 & 2x & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & 2x \end{bmatrix} = 32x^5 - 24x^3 + 4x \tag{3.23}$$

olur. Öte yandan, (3.22) eşitliğinin sağ yanında $n = 5$ yazılıp (3.5) ile verilen terimler kullanılırsa

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^{3} U_{5-2r}(x) &= U_5(x) + U_3(x) + U_1(x) + U_{-1}(x) \\ &= (32x^5 - 32x^3 + 6x) + (8x^3 - 4x) + 2x \\ &= 32x^5 - 24x^3 + 4x \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Bu sonuca göre (3.22) eşitliği $n = 5$ için doğrudur.

Şimdi, (3.22) eşitliğinin n için doğru olduğunu kabul edilsin ve bu kabulü kullanılarak (3.22) eşitliğinin $n + 1$ için de doğru olduğu gösterilsin. O halde, gösterilmesi gereken eşitlik aşağıdaki olacaktır:

$$Per\left(T_{n+1}^{(2)}\right) = \sum_{r=0}^{\left\lfloor \frac{n+2}{2} \right\rfloor} U_{n+1-2r}(x) \tag{3.24}$$

(3.24) eşitliğinin doğruluğunu göstermek üzere, ilk olarak, $Per(T_{n+1}^{(2)})$ ilk sütununa göre Laplace açılımı uygulanarak yazılsın. Bu sayede

$$Per\left(T_{n+1}^{(2)}\right) = 2xPer\left(T_{n}^{(2)}\right) + iPer\begin{bmatrix} 0 & i & & & & & 0 \\ 2x & 0 & i & & & & \\ i & 0 & 2x & 0 & i & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & i & 0 & 2x & 0 & i \\ & & & i & 0 & 2x & 0 \\ 0 & & & & i & 0 & 2x \end{bmatrix}_{n\times n} \tag{3.25}$$

eşitliği elde edilir. (3.25) eşitliği, bu eşitliğin sağ yanının ikinci teriminde görülen permanente ilk satırı boyunca Laplace açılımı uygulanırak yeniden yazılırsa

$$Per\left(T_{n+1}^{(2)}\right) = 2xPer\left(T_{n}^{(2)}\right) + i^2Per\begin{bmatrix} 2x & i & & & & & & 0 \\ i & 2x & 0 & i & & & & \\ 0 & 0 & 2x & 0 & i & & & \\ & i & 0 & 2x & 0 & i & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & i & 0 & 2x & 0 & i \\ & & & & i & 0 & 2x & 0 \\ 0 & & & & & i & 0 & 2x \end{bmatrix}_{n-1\times n-1} \tag{3.26}$$

eşitliği elde edilir. (3.26) eşitliği, bu eşitliğin sağ yanının ikinci teriminde görülen permanente ilk satırı boyunca Laplace açılımı uygulanarak yeniden yazılırsa

$$Per\left(T_{n+1}^{(2)}\right) = 2xPer\left(T_{n}^{(2)}\right) - 2xPer\left(T_{n-2}^{(2)}\right) - iPer\begin{bmatrix} i & 0 & i & & & & 0 \\ 0 & 2x & 0 & i & & & \\ 0 & 0 & 2x & 0 & i & & \\ & i & 0 & 2x & 0 & i & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & i & 0 & 2x & 0 \\ 0 & & & & i & 0 & 2x \end{bmatrix}_{n-2\times n-2} \tag{3.27}$$

eşitliğine ulaşılır. Son olarak, (3.27) eşitliği, sağ yanının üçüncü teriminde görülen permanente ilk sütunu boyunca Laplace açılımı uygulanarak yeniden yazılırsa

$$Per\left(T_{n+1}^{(2)}\right) = 2xPer\left(T_{n}^{(2)}\right) - 2xPer\left(T_{n-2}^{(2)}\right) - i^2Per\begin{bmatrix} 2x & 0 & i & & & 0 \\ 0 & 2x & 0 & i & & \\ i & 0 & 2x & 0 & i & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & i & 0 & 2x & 0 \\ 0 & & & i & 0 & 2x \end{bmatrix}_{n-3\times n-3} \tag{3.28}$$

eşitliği elde edilir. (3.28) eşitliğinin son teriminde açık halde görülen matris *2-tridiagonal Toeplitz* formuna indirgenmiştir. O halde (3.28) eşitliği

$$Per\left(T_{n+1}^{(2)}\right) = 2xPer\left(T_{n}^{(2)}\right) - 2xPer\left(T_{n-2}^{(2)}\right) + Per\left(T_{n-3}^{(2)}\right) \tag{3.29}$$

şeklinde yazılır. Şimdi, buradaki tümevarım ispatının adımlarından biri olarak doğruluğu kabul edilen (3.22) eşitliği kullanılarak, (3.29) eşitliği yeniden yazılsın. O halde,

$$Per\left(T_{n+1}^{(2)}\right) = 2x\left(\sum_{r=0}^{\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor} U_{n-2r}(x) - \sum_{r=0}^{\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor} U_{n-2-2r}(x)\right) + \sum_{r=0}^{\left\lfloor\frac{n-2}{2}\right\rfloor} U_{n-3-2r}(x). \quad (3.30)$$

İspatın bundan sonraki kısmı, (3.30) eşitliğindeki üst sınırları oluşturan n değişkeninin tek veya çift olması durumlarına göre ayrı ayrı incelenmesi suretiyle devam ettirilecektir.

n çift olsun. Bu durumda (3.30) eşitliği

$$Per\left(T_{n+1}^{(2)}\right) = 2x\left(\sum_{r=0}^{\frac{n}{2}} U_{n-2r}(x) - \sum_{r=0}^{\frac{n}{2}-1} U_{n-2-2r}(x)\right) + \sum_{r=0}^{\frac{n}{2}-1} U_{n-3-2r}(x) \quad (3.31)$$

şeklinde yazılır. Toplam sembolleri üzerinden gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$Per\left(T_{n+1}^{(2)}\right) = 2xU_n(x) + U_{n-3}(x) + \cdots + U_1(x) + U_{-1}(x) \quad (3.32)$$

eşitliği elde edilir. Şimdi, (3.32) eşitliğinin sağ yanına $\pm U_{n-1}(x)$ terimleri eklensin.

$$Per\left(T_{n+1}^{(2)}\right) = 2xU_n(x) - \boldsymbol{U_{n-1}(x)} + \boldsymbol{U_{n-1}(x)} + U_{n-3}(x) + \cdots + U_{-1}(x) \quad (3.33)$$

(3.33) eşitliğinin sağ yanının ilk iki terimi yerine, eşitlik (3.7) gereği, $U_{n+1}(x)$ yazılırsa

$$Per\left(T_{n+1}^{(2)}\right) = U_{n+1}(x) + U_{n-1}(x) + U_{n-3}(x) + \cdots + U_1(x) + U_{-1}(x) \quad (3.34)$$

eşitliğine ulaşılır. (3.34) eşitliğinin sağ yanı toplam sembolü ile düzenlenirse

$$Per\left(T_{n+1}^{(2)}\right) = \sum_{r=0}^{\frac{n}{2}+1} U_{n+1-2r}(x) \quad (3.35)$$

yazılır. n çift tamsayı iken, $\frac{n}{2}+1=\left\lfloor\frac{n}{2}+1\right\rfloor=\left\lfloor\frac{n+2}{2}\right\rfloor$ eşitliğinin daima doğru olduğu açıktır. Buna göre (3.35) ifadesindeki üst sınır yerine $\left\lfloor\frac{n+2}{2}\right\rfloor$ ifadesi getirilerek yazılırsa

$$Per\left(T_{n+1}^{(2)}\right)=\sum_{r=0}^{\left\lfloor\frac{n+2}{2}\right\rfloor}U_{n+1-2r}(x)$$

elde edilir. Böylece, n değişkeninin çift tamsayı olması durumunda (3.24) eşitliğinin doğru olduğu görülmüş olur.

n tek olsun. Bu durumda eşitlik (3.30),

$$Per\left(T_{n+1}^{(2)}\right)=2x\left(\sum_{r=0}^{\frac{n+1}{2}}U_{n-2r}(x)-\sum_{r=0}^{\frac{n-1}{2}}U_{n-2-2r}(x)\right)+\sum_{r=0}^{\frac{n-1}{2}}U_{n-3-2r}(x) \qquad (3.36)$$

şeklinde olup buradan da

$$Per\left(T_{n+1}^{(2)}\right)=2xU_n(x)+U_{n-3}(x)+\cdots+U_0(x)+U_{-2}(x) \qquad (3.37)$$

eşitliği elde edilir. Teoremin ifadesinde verilen başlangıç şartlarına göre $U_{-2}(x)=0$ olacağından dikkate alınmayabilir. Bu aşamadan sonra (3.37) eşitliği üzerinde yapılacak düzenlemeler, (3.32) eşitliğinden (3.33) eşitliğine ve (3.33) eşitliğinden (3.34) eşitliğine geçişleri sağlayan düzenlemelerin aynısı olacaktır. O halde, n değerinin tek olması durumunda (3.37) eşitliğinin sağ yanı (sıfıra eşit olan $U_{-2}(x)$ terimi hariç tutularak) toplam sembolü ile düzenlenirse,

$$Per\left(T_{n+1}^{(2)}\right)=\sum_{r=0}^{\frac{n+1}{2}}U_{n+1-2r}(x) \qquad (3.38)$$

şeklinde olur. n tek tamsayı iken, $\frac{n+1}{2} = \left\lfloor \frac{n+2}{2} \right\rfloor$ eşitliği daima doğru olduğu açıktır. Buna göre (3.38) eşitliğindeki üst sınır yerine $\left\lfloor \frac{n+2}{2} \right\rfloor$ ifadesi getirilerek yazılırsa

$$Per\left(T_{n+1}^{(2)}\right) = \sum_{r=0}^{\left\lfloor \frac{n+2}{2} \right\rfloor} U_{n+1-2r}(x)$$

elde edilir. Böylece (3.24) eşitliğinin, n değişkeninin tek tamsayı olması durumunda da doğru olduğu görülmüştür.■

Sonuç 3.4. $U_n(x)$, Chebyshev U polinomunlarının n. sini göstermek üzere

$$U_n(x) = Per\left(T_n^{(2)}\right) - Per\left(T_{n-2}^{(2)}\right). \tag{3.39}$$

İspat: İlk olarak (3.22) eşitliğini göz önüne alalım. (3.22) eşitliğinde n yerine $n-2$ yazılarak

$$Per\left(T_{n-2}^{(2)}\right) = \sum_{r=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} U_{n-2-2r}(x) \tag{3.40}$$

elde edilir. (3.22) eşitliği ile (3.40) eşitliği taraf tarafa çıkarılırsa,

$$Per\left(T_n^{(2)}\right) - Per\left(T_{n-2}^{(2)}\right) = \sum_{r=0}^{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor} U_{n-2r}(x) - \sum_{r=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} U_{n-2-2r}(x) \tag{3.41}$$

elde edilir. (3.41) eşitliğinin sağ yanındaki ilk terimin üst sınırındaki $\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$ ifadesinin yerine buna eşit olan $1 + \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ ifadesi yazılarak (3.41) yeniden düzenlenirse

$$Per\left(T_n^{(2)}\right) - Per\left(T_{n-2}^{(2)}\right) = U_n(x) + \sum_{r=0}^{\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor} U_{n-2r-2}(x) - \sum_{r=0}^{\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor} U_{n-2r-2}(x) \quad (3.42)$$

elde edilir. (3.42) eşitliğinin sağ yanı $U_n(x)$ terimini bırakır, bu da istenendir.■

Konjektür (Conjecture) 3.5. $i^2 = -1$ olmak üzere

$$T_n^{(3)} = \begin{bmatrix} 2x & 0 & 0 & i & & & & & 0 \\ 0 & 2x & 0 & 0 & i & & & & \\ 0 & 0 & 2x & 0 & 0 & i & & & \\ i & 0 & 0 & 2x & 0 & 0 & i & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & i & 0 & 0 & 2x & 0 & 0 & i \\ & & & i & 0 & 0 & 2x & 0 & 0 \\ & & & & i & 0 & 0 & 2x & 0 \\ 0 & & & & & i & 0 & 0 & 2x \end{bmatrix}_{nxn} \quad (3.43)$$

matrisinin permanenti ile Chebyshev U polinomları arasında aşağıdaki ilişkiler mevcuttur:

$5 \geq n \geq 3$ için

$$Per\left(T_{2n}^{(3)}\right) = U_0(x) + 3U_2(x) + \sum_{r=0}^{n-2} (r+1) U_{2n-2r}(x), \quad (3.44)$$

$n \geq 6$ için

$$Per\left(T_{2n}^{(3)}\right) = U_0(x) + 3U_2(x) + 5U_4(x) + \sum_{r=0}^{n-3} (r+1) U_{2n-2r}(x), \quad (3.45)$$

$6 \geq n \geq 4$ için

$$Per\left(T_{2n+1}^{(3)}\right) = 2U_1(x) + 4U_3(x) + \sum_{r=0}^{n-2} (r+1) U_{2n+1-2r}(x), \quad (3.46)$$

$n \geq 7$ için

$$Per\left(T_{2n+1}^{(3)}\right) = 2U_1(x) + 4U_3(x) + 6U_5(x) + \sum_{r=0}^{n-3}(r+1)U_{2n+1-2r}\,(x)\,. \qquad (3.47)$$

Yukarıda, Teorem 3.2, Teorem 3.3, ve Konjektür 3.5 ile sunulan bulguların dışında, $T_n^{(k)}(2x,i,i)$ matrislerinin $k \geq 4$ olması durumundaki formlarının permanentleri üzerine de çalışılmış fakat bu permanentlerin *Chebyshev U* polinomları cinsinden temsilleri için düzenli formüller çıkarılamamıştır. Bu nedenle de $T_n^{(k)}(2x,i,i)$ matrislerinin permanentlerinin *Chebyshev U* polinomları cinsinden temsillerinin k için bir genelleştirmesine de ulaşılamamıştır. Bu durum, bir açık problem olarak burada duyurulmaktadır.

3.3. Chebyshev Polinomlarının, *k*-tridiagonal Toeplitz Matrislerinin Bir Özel Türünün Permanentleri Cinsinden Temsilleri

Tezin bu kısmında bir önceki kısımda yapılanın aksine, *Chebyshev U* polinomlarının, $T_n^{(k)}(2x,i,i)$ matrislerinin permanentleri cinsinden temsillerinin mevcut olup olmadığı araştırılacaktır.

Lemma 3.6. $n \geq 2$ olmak üzere

$$Per\left(T_n^{(1)}\right) = 2xPer\left(T_{n-1}^{(1)}\right) - Per\left(T_{n-2}^{(1)}\right) \qquad (3.48)$$

reküransı, $Per\left(T_0^{(1)}\right) = 1$ ve $Per\left(T_1^{(1)}\right) = 2x$ başlangıç şartları altında doğrudur.

İspat: (3.12) eşitliği ile *Chebyshev U* polinomlarını tanımlayan (3.7) eşitliğinin birlikte kullanılmasıyla, (3.48) eşitliği kolayca görülür. ∎

Lemma 3.6'dan yola çıkılarak, $k > 1$ durumundaki $T_n^{(k)}(2x,i,i)$ matrislerinin permanentleri için, başka hangi k değerlerinde (3.48) benzeri rekürsif temsiller edilebileceği üzerinde çalışılmıştır. Bu amaçla yapılan çalışma neticesinde elde edilen bulguların bir kısmının ispatı verilecek, bir kısmı da Konjektür olarak ispatsız şekilde yazılacaktır. Aşağıda sunulacak olan bu ilişkiler, tezin dördüncü bölümünde sunulacak ($T_n^{(k)}(2x,i,i)$ matrislerinin genelleştirilmiş şekli olan) $T_n^{(k)}(a,b,c)$ matrislerinin permanentleri için elde edilen ilişkilerin ispatlanmasıyla doğrulanmış olacaktır.

Lemma 3.7. $n = tek$ pozitif tamsayı olmak üzere

$$Per\left(T_n^{(2)}\right) = 2xPer\left(T_{n-1}^{(2)}\right) - Per\left(T_{n-2}^{(2)}\right) \tag{3.49}$$

reküransı mevcut olup başlangıç şartları $Per\left(T_{-1}^{(2)}\right) = 0$, $Per\left(T_0^{(2)}\right) = 1$, $Per\left(T_1^{(2)}\right) = 2x$ ve $Per\left(T_2^{(2)}\right) = 4x^2$ dir.

İspat: İspat, n ye göre tümevarım kullanılarak yapılacaktır.

Bunun için önce, (3.49) eşitliğinin $n = 3$ için doğru olduğu gösterilsin. Gösterilmesi gereken eşitlik aşağıdaki gibidir:

$$Per\left(T_3^{(2)}\right) = 2xPer\left(T_2^{(2)}\right) - Per\left(T_1^{(2)}\right). \tag{3.50}$$

Teorem 3.3 ile verilen (3.22) eşitliği $n = 3$ için düzenlenirse

$$Per\left(T_3^{(2)}\right) = \sum_{r=0}^{2} U_{3-2r}(x) = U_3(x) + U_1(x) + U_{-1}(x) \tag{3.51}$$

elde edilir. (3.51) eşitliğinin sağ yanı, (3.5) ile görülen *Chebyshev U* polinomunun terimlerinden uygun olanlarının yerlerine yazılmasıyla, $(8x^3 - 2x)$ ifadesine eşit olur. Burada, yine (3.5)'ten $Per\left(T_2^{(2)}\right) = 2x^2$ ve $Per\left(T_1^{(2)}\right) = 2x$ olduğu göz önünde bulundurulursa

$$Per\left(T_3^{(2)}\right) = 8x^3 - 2x = 2xPer\left(T_2^{(2)}\right) - Per\left(T_1^{(2)}\right)$$

eşitliği elde edilir, ki bu istenendir. Bu durumda (3.49) eşitliği $n = 3$ için doğrudur.

(3.49) eşitliği, $r \geq 0$ olmak üzere $n = 2r + 3$ için doğru olsun. Bu kabule göre

$$Per\left(T_{2r+3}^{(2)}\right) = 2xPer\left(T_{2r+2}^{(2)}\right) - Per\left(T_{2r+1}^{(2)}\right) \tag{3.52}$$

eşitliği yazılır. O halde (3.49) eşitliğinin, n den sonra gelen tek sayı $(n + 2)$ için de doğru olduğu gösterilmelidir. Bu durumda ulaşılmak istenen eşitlik

$$Per\left(T_{2r+5}^{(2)}\right) = 2xPer\left(T_{2r+4}^{(2)}\right) - Per\left(T_{2r+3}^{(2)}\right) \tag{3.53}$$

olacaktır.

Teorem 3.3' ün ispatı esnasında kullanılan adımlar neticesinde ortaya çıkan ve (3.29) ile numaralandırılmış olan

$$Per\left(T_{n+1}^{(2)}\right) = 2xPer\left(T_{n}^{(2)}\right) - 2xPer\left(T_{n-2}^{(2)}\right) + Per\left(T_{n-3}^{(2)}\right)$$

eşitliği göz önüne alınsın. (3.29) eşitliği, aynı zamanda, $T_n^{(2)}$ matrisinin permanentleri için bir reküranс bağıntısıdır. $n \geq 3$ için, bu reküransın başlangıç şartları $Per\left(T_{-1}^{(2)}\right) = 0$, $Per\left(T_{0}^{(2)}\right) = 1$ ve $Per\left(T_{2}^{(2)}\right) = 4x^2$ şeklindedir. Şimdi, (3.29) eşitliğinde $n = 2r + 4$ yazılsın. Böylece

$$Per\left(T_{2r+5}^{(2)}\right) = 2xPer\left(T_{2r+4}^{(2)}\right) - 2xPer\left(T_{2r+2}^{(2)}\right) + Per\left(T_{2r+1}^{(2)}\right) \tag{3.54}$$

eşitliği elde edilir. Bu son eşitliğin sağ yanının son iki teriminin yerine, (3.52) eşitliği göz önünde bulundurularak, $\left(-Per\left(T_{2r+3}^{(2)}\right)\right)$ ifadesi yazılırsa istenen elde edilmiş olur.

Lemma 3.6 ve Lemma 3.7'den hareketle, $Per\left(T_n^{(k)}\right)$ permanentleri için aşağıdaki genelleştirmeye ulaşılmıştır:

Konjektür 3.8. $T_n^{(k)}(2x, i, i)$ matrislerinin permanentleri için,

$$n = 1 + k(r + 1) \tag{3.55}$$

olması koşuluyla

$$Per\left(T_n^{(k)}\right) = 2xPer\left(T_{n-1}^{(k)}\right) - Per\left(T_{n-2}^{(k)}\right) \tag{3.56}$$

reküransı doğrudur. Burada $r \geq 0$ ve $k \geq 1$ dir.

(3.55) koşulu altında (3.56) ile verilen reküzans bağıntısı kullanılırken, önce matrislerin band açıklığını gösteren k değeri atanmalı, ardından $n = 1 + k(r + 1)$ koşuluna göre matrislerin mertebesini temsil eden n değerleri hesaplanmalıdır. Bu durumda, (3.56) reküransını sağlayan permanentler için;

$k = 1$ seçilmesiyle $\left\{Per\left(T_2^{(1)}\right), Per\left(T_3^{(1)}\right), Per\left(T_4^{(1)}\right), Per\left(T_5^{(1)}\right), \ldots\right\}$,

$k = 2$ seçilmesiyle $\left\{Per\left(T_3^{(2)}\right), Per\left(T_5^{(2)}\right), Per\left(T_7^{(2)}\right), Per\left(T_9^{(2)}\right), \ldots\right\}$,

$k = 3$ seçilmesiyle $\left\{Per\left(T_4^{(3)}\right), Per\left(T_7^{(3)}\right), Per\left(T_{10}^{(3)}\right), Per\left(T_{13}^{(3)}\right), \ldots\right\}$

şeklindeki diziler ortaya çıkar. Bu örneklem diziler üzerinden de izlenebileceği üzere, $n = 1 + k(r + 1)$ koşulu altında çalışan (3.56) reküransının, $k > 1$ iken her ardışık n mertebesi için sağlamayacağı açıktır. Buradan hareketle, $T_n^{(k)}(2x, i, i)$ matrislerinin permanentleri için ardışık n pozitif tamsayılarının tümü için sağlanan başka bir reküzans bağıntısı olup olmadığı üzerine devam eden çalışmalarımız neticesinde, aşağıda Konjektür olarak verilen reküzans bağıntısı elde edilmiştir.

Konjektür 3.9. $n \geq k+1$ olmak üzere

$$Per\left(T_n^{(k)}\right) = 2xPer\left(T_{n-1}^{(k)}\right) - Per\left(T^{(k-1)}_{n-1-\left\lfloor\frac{n-1}{k}\right\rfloor}\right) Per\left(T^{(1)}_{\left\lfloor\frac{n-1}{k}\right\rfloor-1}\right) \tag{3.57}$$

rekürsif bağıntısı doğrudur. Bu reküransın başlangıç şartları, s tamsayı olmak üzere, $0 \leq s \leq k$ için $Per\left(T_s^{(k)}\right) = (2x)^s$ şeklindedir.

Burada Konjektür 3.8 ve Konjektür 3.9 ile verilen ilişkiler, tezin bu bölümündeki çalışmaların yayımlandığı [62] numaralı referans ile verilen makale ile duyurulduktan sonra, bu ilişkilerin doğruluğu C. M. da Fonseca [68] tarafından ispatlanmıştır.

Şimdi bu son kısımda, Konjektür 3.8 ile verilen (3.56) eşitliği ve Konjektür 3.9 ile verilen (3.57) eşitlikleri birlikte kullanılarak yeni bir temsil elde edilmeye çalışılacaktır. Bunun için önce (3.56) ve (3.57) rekürsif eşitlikleri taraf tarafa çıkarılsın.

$$Per(T_{n-2}^{(k)}) = Per\left(T^{(k-1)}_{n-1-\left\lfloor\frac{n-1}{k}\right\rfloor}\right) Per\left(T^{(1)}_{\left\lfloor\frac{n-1}{k}\right\rfloor-1}\right) \tag{3.58}$$

(3.56) eşitliğiyle birlikte verilen $n = k(r+1)+1$ koşulu, elde edilen (3.58) eşitliği için de geçerli bir koşuldur. O halde (3.58) eşitliği, $r \geq 0$ olmak üzere, $n = k(r+1)+1$ koşulu göz önünde bulundurularak düzenlenir ve yeniden yazılırsa

$$Per\left(T_{k(r+1)-1}^{(k)}\right) = Per\left(T_{(k-1)(r+1)}^{(k-1)}\right) Per\left(T_r^{(1)}\right) \tag{3.59}$$

eşitliği elde edilir. (3.59) eşitliği aşağıdaki gibi yazılsın:

$$Per\left(T_r^{(1)}\right) = \frac{Per\left(T_{k(r+1)-1}^{(k)}\right)}{Per\left(T_{(k-1)(r+1)}^{(k-1)}\right)} \tag{3.60}$$

(3.60) eşitliğinin sol yanı, Teorem 3.2 gereği, *Chebyshev U* polinomları ile eşleştiğinden,

$$U_r(x) = \frac{Per\left(T_{k(r+1)-1}^{(k)}\right)}{Per\left(T_{(k-1)(r+1)}^{(k-1)}\right)} \tag{3.61}$$

şeklinde yazılır. Böylece *Chebyshev U* polinomlarının, $T_n^{(k)}(2x, i, i)$ matrislerinin permanentleri cinsinden temsil edilebileceği sonucuna ulaşılmıştır.

Örnek 3.10: Bu örnekte, (3.61) ile verilen eşitliğin kullanılması suretiyle *Chebyshev U* polinomlarının elde edilmesi açık olarak gösterilecektir.

(3.61) eşitliğinde $k = 3$ alınırsa,

$$U_r(x) = \frac{PerT_{3r+2}^{(3)}}{PerT_{2r+2}^{(2)}} \tag{3.62}$$

eşitliği yazılır. Buradan, $r = \{0,1,2,3,4\}$ olmak üzere,

$$U_0(x) = \frac{PerT_2^{(3)}}{PerT_2^{(2)}},$$

$$U_1(x) = \frac{PerT_5^{(3)}}{PerT_4^{(2)}},$$

$$U_2(x) = \frac{PerT_8^{(3)}}{PerT_6^{(2)}},$$

$$U_3(x) = \frac{PerT_{11}^{(3)}}{PerT_8^{(2)}},$$

$$U_4(x) = \frac{PerT_{14}^{(3)}}{PerT_{10}^{(2)}}$$

oranları elde edilir. Benzer şekilde, (3.61) eşitliğinde $k = 4$ alınırsa,

$$U_r(x) = \frac{PerT_{4r+3}^{(4)}}{PerT_{3r+3}^{(3)}} \tag{3.63}$$

eşitliği yazılır. Buradan, $r = \{0,1,2,3,4\}$ olmak üzere,

$$U_0(x) = \frac{PerT_3^{(4)}}{PerT_3^{(3)}},$$

$$U_1(x) = \frac{PerT_7^{(4)}}{PerT_6^{(3)}},$$

$$U_2(x) = \frac{PerT_{11}^{(4)}}{PerT_9^{(3)}},$$

$$U_3(x) = \frac{PerT_{15}^{(4)}}{PerT_{12}^{(3)}},$$

$$U_4(x) = \frac{PerT_{19}^{(4)}}{PerT_{15}^{(3)}}$$

oranları elde edilir. Bu oranların pay ve paydalarında bulunan permanentlerin değerleri yerlerine yazıldıkça, *Chebyshev U* polinom dizisinin terimleri elde edilecektir.

BÖLÜM 4. GENEL *k*-TRIDIAGONAL TOEPLITZ MATRİSLERİN PERMANENTLERİ İÇİN REKÜRSİF FORMÜLLER

4.1. Tridiagonal Toeplitz, *2*-tridiagonal Toeplitz, *3*-tridiagonal Toeplitz Matrislerin Genel Hallerinin Permanentleri İçin Rekürsif Formüller

Tanım: $\left\{T_n^{(k)}(a,b,c)\right\}$ matris ailesinin permanentleri

$$P_n^{(k)} = Per\left(T_n^{(k)}(a,b,c)\right) = Per\left(\left[t_{ij}\right]_{nxn}\right) \tag{4.1}$$

şeklinde gösterilsin, öyle ki burada

$$t_{ij} = \begin{cases} a, & i = j \\ b, & i = j-k \\ c, & i = j+k \\ 0, & diğer \end{cases} \tag{4.2}$$

şeklindedir.

Aşağıdaki Lemma ile görülen rekürsif formül, H. Minc [44] tarafından verilmiştir.

Lemma 4.1. [44]

$$P_n^{(1)} = Per\begin{bmatrix} a & b & & & \\ c & a & b & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & c & a & b \\ & & & c & a \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

formundaki tridiagonal Toeplitz matrisin permanenti için

$$P_n^{(1)} = aP_{n-1}^{(1)} + bcP_{n-2}^{(1)} \tag{4.4}$$

olur. $n \geq 2$ olmak üzere, bu reküransın başlangıç şartları $P_0^{(1)} = 1$, $P_1^{(1)} = a$ dır.

H. Minc, (4.4) ile görülen rekürsif formülünün ispatını, “Permanente, ilk sütunu boyunca Laplace açılımı uygulanırsa istenen elde edilir” ifadesiyle vermiştir. H. Minc tarafından kullanılan bu doğrudan ispat mantığı, ilerideki kısımda genel *3-tridiagonal Toeplitz* matrisin permanenti için verilecek rekürsif formülün ispatındaki mantığın da temelini teşkil eder.

Teorem 4.2.

$$P_n^{(2)} = Per\begin{bmatrix} a & 0 & b & & & & 0 \\ 0 & a & 0 & b & & & \\ c & 0 & a & 0 & b & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & c & 0 & a & 0 & b \\ & & & c & 0 & a & 0 \\ 0 & & & & c & 0 & a \end{bmatrix}_{nxn} \tag{4.5}$$

formundaki $2-$*tridiagonal Toeplitz* matrisinin permanenti için

$$P_n^{(2)} = aP_{n-1}^{(2)} + abcP_{n-3}^{(2)} + b^2c^2P_{n-4}^{(2)} \tag{4.6}$$

olur. $n \geq 3$ için bu reküransın başlangıç şartları $P_0^{(2)} = 1$, $P_1^{(2)} = a$, $P_2^{(2)} = a^2$ ve $P_3^{(2)} = a^3 + abc$ dir. Bu formül her $a, b, c \in \mathbb{C}$ için sağlanır.

İspat: Teoremin ispatı, permanentler üzerinde Laplace açılımı kullanılarak yapılacaktır.

$P_n^{(2)}$ permanentine ilk sütunu boyunca Laplace açılımı uygulansın. Bu işlemle

$$P_n^{(2)} = aP_{n-1}^{(2)} + cPer\begin{bmatrix} 0 & b & & & & 0 \\ a & 0 & b & & & \\ c & 0 & a & 0 & b & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & c & 0 & a & 0 & b \\ & & & c & 0 & a & 0 \\ 0 & & & & c & 0 & a \end{bmatrix}_{n-1\times n-1} \tag{4.7}$$

eşitliği elde edilir. (4.7) eşitliğinin sağ yanının ikinci terimindeki permanente birinci satırı boyunca Laplace açılımı uygulanırsa

$$P_n^{(2)} = aP_{n-1}^{(2)} + bcPer\begin{bmatrix} a & b & & & & & & 0 \\ c & a & 0 & b & & & & \\ 0 & 0 & a & 0 & b & & & \\ & c & 0 & a & 0 & b & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & c & 0 & a & 0 & b \\ & & & & c & 0 & a & 0 \\ 0 & & & & & c & 0 & a \end{bmatrix}_{n-2\times n-2} \tag{4.8}$$

elde edilir. (4.8) eşitliğinin sağ yanının ikinci terimindeki permanente birinci satırına göre Laplace açılımı uygulanırsa

$$\begin{aligned} P_n^{(2)} &= aP_{n-1}^{(2)} + abcP_{n-3}^{(2)} \\ &+ b^2cPer\begin{bmatrix} c & 0 & b & & & & & 0 \\ 0 & a & 0 & b & & & & \\ 0 & 0 & a & 0 & b & & & \\ & c & 0 & a & 0 & b & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & c & 0 & a & 0 & b \\ & & & & c & 0 & a & 0 \\ 0 & & & & & c & 0 & a \end{bmatrix}_{n-3\times n-3} \end{aligned} \tag{4.9}$$

eşitliği elde edilir. Son olarak, (4.9) eşitliğinin sağ yanının üçüncü terimindeki permanente ilk sütununa göre Laplace açılımı uygulanırsa

$$
P_n^{(2)} = aP_{n-1}^{(2)} + abcP_{n-3}^{(2)}
$$

$$
+ b^2c^2 Per\begin{bmatrix}
a & 0 & b & & & & 0 \\
0 & a & 0 & b & & & \\
c & 0 & a & 0 & b & & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & c & 0 & a & 0 & b \\
 & & & c & 0 & a & 0 \\
0 & & & & c & 0 & a
\end{bmatrix}_{n-4\times n-4} \tag{4.10}
$$

eşitliği elde edilir. (4.10) eşitliğinin sağ yanının son terimindeki $(n-4)\times(n-4)$ mertebeli permanent *2-tridiagonal Toeplitz* formunda olup bunun yerine $P_{n-4}^{(2)}$ yazılırsa istenen elde edilmiş olur.■

Teorem 4.3.

$$
P_n^{(3)} = Per\begin{bmatrix}
a & 0 & 0 & b & & & & & 0 \\
0 & a & 0 & 0 & b & & & & \\
0 & 0 & a & 0 & 0 & b & & & \\
c & 0 & 0 & a & 0 & 0 & b & & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & c & 0 & 0 & a & 0 & 0 & b \\
 & & & c & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\
 & & & & c & 0 & 0 & a & 0 \\
0 & & & & & c & 0 & 0 & a
\end{bmatrix}_{nxn} \tag{4.11}
$$

formundaki *3-tridiagonal Toeplitz* matrisin permanenti için

$$
P_n^{(3)} = aP_{n-1}^{(3)} + bcP_{\lceil \frac{n}{3} \rceil - 2}^{(1)} P_{n-\lceil \frac{n}{3} \rceil}^{(2)} \tag{4.12}
$$

eşitliği doğrudur. $n \geq 4$ için bu reküransın başlangıç şartları $P_3^{(3)} = a^3$, $P_2^{(2)} = a^2$, $P_1^{(1)} = a$ ve $P_0^{(1)} = 1$ dir. Bu formül her $a, b, c \in \mathbb{C}$ için sağlanır.

İspat: Teoremin ispatı, permanentler üzerinde Laplace açılımı kullanılarak yapılacaktır. İspat esnasında, $P_n^{(2)}$ için verilen teoremin ispatında yapıldığı gibi, her bir adım sonrasında ortaya çıkan matrislerin tümü açık olarak yazılmayacaktır. Bunun yerine, uygulanacak Laplace açılımı adımları bir prosedür halinde verilecektir.

Birinci adım:

$P_n^{(3)}$ permanentine, ilk satırına göre Laplace açılımı uygulansın. Elde edilen ifade

$$P_n^{(3)} = aP_{n-1}^{(3)} + bP\left(T_{n-1}^{(*)}\right) \tag{4.13}$$

şeklinde gösterilsin. Buradaki $P\left(T_{n-1}^{(*)}\right)$ notasyonu, ilk adımdan sonra ortaya çıkan ve fakat $P_n^{(3)}$ formuna uymayan

$$\begin{bmatrix}
0 & a & 0 & b & & & & & & & & & 0 \\
0 & 0 & a & 0 & b & & & & & & & & \\
c & 0 & 0 & 0 & 0 & b & & & & & & & \\
0 & c & 0 & a & 0 & 0 & b & & & & & & \\
 & 0 & c & 0 & a & 0 & 0 & b & & & & & \\
 & & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & b & & & & \\
 & & & c & 0 & 0 & a & 0 & 0 & b & & & \\
 & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\
 & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & & & & & c & 0 & 0 & a & 0 & 0 & b \\
 & & & & & & & c & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & c & 0 & 0 & a & 0 \\
0 & & & & & & & & & c & 0 & 0 & a
\end{bmatrix}_{n-1\times n-1} \tag{4.14}$$

alt matrisin permanentini temsil etmektedir.

İkinci adım:

$P\left(T_{n-1}^{(*)}\right)$ permanentine, ilk sütunu boyunca Laplace açılımı uygulansın. Elde edilen ifade

$$P_n^{(3)} = aP_{n-1}^{(3)} + bcP\left(T_{n-2}^{(\triangleright)}\right) \tag{4.15}$$

şeklinde gösterilsin. Buradaki $P\left(T_{n-2}^{(\rhd)}\right)$ notasyonu, ikinci adımdan sonra oluşan fakat $P_n^{(3)}$ formuna uymayan $(n-2)\times(n-2)$ mertebeli alt matrisin permanentini temsil etmektedir.

Kalan adımlar:

Prosedürün bundan sonraki adımları, $P\left(T_{n-2}^{(\rhd)}\right)$ ve bundan türeyecek alt matrislerin permanentlerinin $(3+2i)$. satırlarına Laplace açılımı uygulanması suretiyle devam edecektir. Buradaki i döngüsü, $i=1,2,3,\ldots,\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil-2$ şeklindedir. Buna göre ilk olarak, $P\left(T_{n-2}^{(\rhd)}\right)$ permanentine *beşinci* satırı boyunca Laplace açılımı uygulanır. Bu adımdan sonra ortaya çıkan $(n-3)\times(n-3)$ mertebeli permanentlere *yedinci* satırları boyunca Laplace açılımı uygulanır. Bu adımdan sonra ortaya çıkan $(n-4)\times(n-4)$ mertebeli permananetlere *dokuzuncu* satırları boyunca Laplace açılımı uygulanır. Prosedür, toplamda uygulanan Laplace açılımı adımlarının sayısı $\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil$ e eşit olana kadar bu şekilde devam ettirilir. Prosedürün son adımı sonrasında ortaya çıkan $\left(n-\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil\right)\times\left(n-\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil\right)$ mertebeli permanentlerin tümününün *2-tridiagonal Toeplitz* formuna dönüştüğü görülecektir ki bunlar $P_{n-\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil}^{(2)}$ şeklinde gösterilir. Son adımdan sonra elde edilen ifadede, ortaya çıkan terimlerdeki $P_{n-\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil}^{(2)}$ permanentlerinin paranteze alınarak düzenlenmesiyle, bu permanentlerin a, b ve c değişkenlerine bağlı katsayılarından bir polinomal ifade oluşacaktır. Bu polinomal ifadenin de, $\left(\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil-2\right)\times\left(\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil-2\right)$ mertebeli *tridiagonal Toeplitz* matrisin permanenti ile yani $P_{\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil-2}^{(1)}$ ile eşleştiği kolayca görülür. Böylece, (4.15) eşitliğinde $P\left(T_{n-2}^{(\rhd)}\right)$ notasyonu ile temsil edilen permanentin yerine, (4.15) eşitliğinden itibarenki adımlar neticesinde, $\left(P_{\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil-2}^{(1)}\right)\left(P_{n-\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil}^{(2)}\right)$ çarpımı yazılabilecektir, bu da isteneni verir. ■

Uyarı 4.4. Teorem 4.3'ün ispatının son kısmında bahsi geçen a, b ve c değişkenlerine bağlı polinomal ifadenin, $\left(\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil-2\right)\times\left(\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil-2\right)$ mertebeli *tridiagonal Toeplitz* matrislerin permanentleri ile eşleşmesi, beşinci bölümdeki Teorem 5.1 yardımıyla görülebilir. Tezin, içinde bulunduğumuz dördüncü bölüm sadece rekürsif bağıntılara ayrıldığı için, konu bütünlüğünün bozulmaması nedeniyle Teorem 5.1 ifadesi bu bölümde verilmemiştir.

Şimdi, Teorem 4.3'ün ispatını teşkil eden prosedürü açıklayan bir örnek verelim.

Örnek 4.5. Bu örnekte, 19×19 mertebeli genel *3-tridiagonal Toeplitz* matrisin permanenti üzerinden gidilerek, Teorem 4.3'ün ispatını teşkil eden prosedürün adımları daha açık biçimde izah edilecektir.

Adım 1:

$P_{19}^{(3)}$, birinci satırı boyunca genişletilir. Elde edilen ifade

$$P_{19}^{(3)} = aP_{18}^{(3)} + bP\left(T_{18}^{(*)}\right) \tag{4.16}$$

şeklinde gösterilsin. Buradaki $P\left(T_{18}^{(*)}\right)$ notasyonu, ilk adımdan sonra ortaya çıkan ve fakat (4.11) ile gösterilen forma uymayan matrisin permanenti temsil etmektedir.

Adım 2:

$P\left(T_{18}^{(*)}\right)$, birinci sütunu boyunca genişletilir. Elde edilen ifade

$$P_{19}^{(3)} = aP_{18}^{(3)} + bcP\left(T_{17}^{(\triangleright)}\right) \tag{4.17}$$

şeklinde gösterilsin. Buradaki $P\left(T_{17}^{(\triangleright)}\right)$ notasyonu, ikinci adımdan sonra ortaya çıkan ve fakat (4.11) ile gösterilen forma uymayan matrisin permanenti temsil etmektedir.

Prosedür, $P\left(T_{17}^{(\triangleright)}\right)$ permanenti ile bu permanentten türeyecek alt permanentlerin $(3 + 2i)$. satırlarına Laplace açılımı uygulanması suretiyle devam edecektir. Buradaki

i döngüsü, $k = 3$ ve $n = 19$ değerleri için $i = 1,2,3,\dots,\left\lceil\frac{19}{3}\right\rceil - 2$ şeklinde sınırlıdır. Prosedürün ilk iki adımından sonraki adımlarında, matrislerin hangi satırları boyunca Laplace açılımı uygulanacağı bu döngü sayesinde tespit edilir. Buna göre, sırasıyla 5., 7., 9., 11.,13. satırlar boyunca Laplace açılımı uygulanmalıdır. Aşağıda, her yeni Laplace açılımı işlemi sonrasında ortaya çıkacak matrisler açık olarak gösterilmeyecek, bunun yerine bu matrislerin permanentlerini temsilen sadece onların katsayıları yazılacaktır.

Adım 3:

$P\left(T_{17}^{(\triangleright)}\right)$, 5. satırı boyunca genişletilir. Oluşan 16×16 lık permanentlerin katsayıları sırasıyla bca, b^2c şeklindedir.

Adım 4:

Önceki adımdan sonra ortaya çıkan bütün permanentler 7. satırları boyunca genişletilir. Ortaya çıkan 15×15 lik permanentlerin katsayıları sırasıyla bca^2, b^2ca, b^2c^2, b^3c ifadeleridir.

Adım 5:

Önceki adımdan sonra ortaya çıkan bütün permanentler 9. satırları boyunca genişletilir. Ortaya çıkan 14×14 lük permanentlerin katsayıları sırasıyla $bca^3, b^2ca^2, b^2c^2a\,, b^3ca\,, b^2c^2a\,, b^3c^2, b^4c$ ifadeleridir.

Adım 6:

Önceki adımdan sonra ortaya çıkan bütün permanentler 11. satırları boyunca genişletilir. Ortaya çıkan 13×13 lük permanentlerin katsayıları sırasıyla $bca^4, b^2ca^3, b^2c^2a^2, \boxed{b^3ca^2}\,, b^2c^2a^2, b^3c^2a\,, \boxed{b^4ca}\,, b^2c^2a^2, b^3c^2a\,, b^3c^3, \boxed{b^4c^2}\,,$ $\boxed{b^5c}$ ifadeleridir.

Altıncı adımdan sonra ortaya çıkan 13×13 mertebeli matrislerden bazılarının satırlarından veya sütunlarından herhangi birinin tamamen sıfırlanmış olduğu gözlemlenmiştir. Bu sebeple bu matrislerin permanentlerinin sonuçları sıfır olacaktır.

Bu sıfırlanan permanentler, altıncı adımdan sonra oluşan katsayıları gösteren üstteki dizgede kutu içerisine alınarak gösterilmiştir. Dolayısıyla, üstteki dizgede kutu içerisinde olan katsayılar, yedinci adımdan sonraki katsayılar arasındaki sıfır ile gösterilenlerdir.

Adım 7:

Önceki adımdan sonra ortaya çıkan bütün permanentler 13. satırları boyunca genişletilir. Ortaya çıkan 12×12 lik permanentlerin katsayıları sırasıyla $bca^5, b^2c^2a^3, b^2c^2a^3, 0\,, b^2c^2a^3, b^3c^3a, 0\,, b^2c^2a^3\,, b^3c^3a\,, b^3c^3a\,, 0, 0$ ifadeleridir. Yedinci adımdan sonra ortaya çıkan 12×12 lik matrislerin tümünün $T_{12}^{(2)}(a,b,c)$ formuna indirgenmiş olduğu gözlemlenecektir. Esasen, prosedür de yedinci adımda son bulur. Çünkü, toplamda uygulanan adımların sayısı $\left\lceil \frac{19}{3} \right\rceil$ sayısına ulaşmıştır. Buna göre (4.17) eşitliğindeki $P\left(T_{17}^{(\triangleright)}\right)$ yerine

$$P\left(T_{17}^{(\triangleright)}\right) = bca^5P_{12}^{(2)} + b^2c^2a^3P_{12}^{(2)} + b^2c^2a^3P_{12}^{(2)} + b^2c^2a^3P_{12}^{(2)} + b^3c^3aP_{12}^{(2)} + b^2c^2a^3P_{12}^{(2)} + b^3c^3aP_{12}^{(2)} + b^3c^3aP_{12}^{(2)}$$

ifadesi yazılacaktır. Buna göre, (4.17) eşitliği düzenlenerek tekrar yazılırsa

$$P_{19}^{(3)} = aP_{18}^{(3)} + bc(a^5 + 4a^3bc + 3ab^2c^2)P_{12}^{(2)} \tag{4.18}$$

şekline dönüşür. Bu son eşitlikte $P_{12}^{(2)}$ permanentinin katsayısı olan polinomal ifade $P_5^{(1)}$ permanentinin sonucu ile eşleşmektedir. (Bu eşleşmeyi sınamak için lütfen Teorem 5.1'e bakınız.) Böylece (4.18) eşitliği

$$P_{19}^{(3)} = aP_{18}^{(3)} + bcP_5^{(1)}P_{12}^{(2)} \tag{4.19}$$

şeklinde yazılabilecektir.

4.2. Genel *k*-Tridiagonal Toeplitz Matrislerin Permanentleri İçin Rekürsif Fomüller

Teorem 4.6. $n \geq k+1$ olmak üzere

$$P_n^{(k)} = aP_{n-1}^{(k)} + bcP_{\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil - 2}^{(1)} P_{n-\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil}^{(k-1)} \tag{4.20}$$

rekürsif formülü doğrudur. Burada $0 \leq s \leq k$ için $P_s^{(k)} = a^s$ ve $a, b, c \in \mathbb{C}$.

İspat: Bu teoremin ispatı, $P_n^{(3)}$ için verilen rekürsif formülü tanıtan Teorem 4.3'ün ispatına benzer şekilde verilecektir. Yani burada, Teorem 4.6 için yapılacak ispat için, Teorem 4.3'ün ispatını teşkil eden prosedürün adımlarının $P_n^{(k)}$ permanentine uyarlanması yeterli olacaktır.

İlk olarak $P_n^{(k)}$ permanentine, birinci satırı boyunca Laplace açılımı uygulansın. Bu durumda elde edilen eşitlik $P_n^{(k)} = aP_{n-1}^{(k)} + bP\left(T_{n-1}^{(*)}\right)$ şeklinde gösterilsin. Ardından $P\left(T_{n-1}^{(*)}\right)$ permanentine, birinci sütunu boyunca Laplace açılımı uygulansın. Bu durumda elde edilen eşitlik $P_n^{(k)} = aP_{n-1}^{(k)} + bcP\left(T_{n-2}^{(\rhd)}\right)$ ile gösterilsin. Prosedürün bundan sonraki adımları, $P\left(T_{n-2}^{(\rhd)}\right)$ ve bundan türeyecek alt matrislerin $\big(k+i.(k-1)\big)$. satırlarına Laplace açılımı uygulanmasından ibarettir. Laplace açılımı uygulanan adım sayısı, birinci adımdan itibaren toplamda $\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$ adet olduğunda prosedür son bulur. Son adımdan sonra ortaya çıkan permanentlerin tümünün, *(k-1)-tridiagonal Toeplitz* formuna indirgenmiş matrislerin permanentleri olduğu görülür ki bunlar $P_{n-\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil}^{(k-1)}$ şeklinde gösterilirler. Son adımdaki ifade, terimlerde bulunan $P_{n-\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil}^{(k-1)}$ permanentlerinin parantezine alınarak düzenlenmesiyle, bu permanentlerin katsayılarından a, b, c değişkenlerine bağlı bir polinomal ifade oluşacaktır. Bu polinomal ifadenin $P_{\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil - 2}^{(1)}$ ile eşleştiği görülür. Böylece, son adımla birlikte, $P\left(T_{n-2}^{(\rhd)}\right)$

notasyonu ile temsil edilen permanentin yerine $\left(P^{(1)}_{\left\lceil\frac{n}{k}\right\rceil-2}\right)\left(P^{(k-1)}_{n-\left\lceil\frac{n}{k}\right\rceil}\right)$ çarpanı yazılabilecektir. Bu durumda istenen elde edilmiş olur.■

Bu bölümde bu kısıma kadarki çalışmalardan elde edilen sonuçlar, [69] numaralı referans ile verilen makale ile yayımlanmıştır.

Şimdi, *k-tridiagonal Toeplitz* matrislerin permanentleri için, (4.20) ile verilen rekürsif formülden farklı yeni bir rekürsif formül verilecektir. Bu formül ve ispatına geçmeden önce, formülün ispatı içerisinde kullanılacak olan bazı geçişler aşağıdaki Lemma'lar ile verilecektir.

Lemma 4.7. $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\lfloor -a \rfloor = -\lceil a \rceil \tag{4.21}$$

eşitliği doğrudur.

İspat: $x \in \mathbb{N}$ ve $0 \leq r < 1$ olmak üzere $a = x + r$ olsun. Buna göre, (4.21) eşitliğinin sol yanı

$$\lfloor -a \rfloor = \lfloor -x - r \rfloor = -x + \lfloor -r \rfloor = -x - 1 \tag{4.22}$$

ve (4.21) eşitliğinin sağ yanı da

$$-\lceil a \rceil = -\lceil x + r \rceil = -x - \lceil r \rceil = -x - 1 \tag{4.23}$$

olacağından, (4.21) eşitliği doğrudur.■

Lemma 4.8. Eğer $n \leq k$ ise

$$P_n^{(k)} = a^n \tag{4.24}$$

dır. Burada $P_0^{(0)} = 1$ kabul edilmiştir.

İspat: (1.20) ile verilen tanımlamaya göre, $n \times n$ mertebeli $T_n^{(k)}(a,b,c) = [a_{ij}]$, $(i,j = 1,\ldots,n)$ matrisinin sıfırdan farklı elemanları ya a_{ii}, ya $a_{i(k+1)}$ ya da $a_{(k+1)j}$ konumundaki elemanlardır. $n \leq k$ durumu göz önüne alınırsa, oluşacak matrislerin mertebece en büyüğü $T_k^{(k)}(a,b,c)$ şeklinde sembolize edilecek matristir. $a_{i(k+1)}$ ve $a_{(k+1)j}$ konumlarındaki elemanların $T_k^{(k)}(a,b,c)$ ile gösterilen formdaki matrislerin içinde bulunamayacağı açıktır. $T_k^{(k)}(a,b,c)$ matrislerinin $n \leq k$ durumundaki görünümünde, sadece ana köşegen bandı üzerindeki elemanlar mevcut olacak yani bunlar birer köşegen matristen ibaret olacaktır. Görünümü

$$\begin{bmatrix} a & & & 0 \\ & a & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a \end{bmatrix}$$

şeklinde olan bu matrislerin permanentleri $Per\left(T_k^{(k)}\right)$ ile temsil edilsin. $Per\left(T_k^{(k)}\right)$ üzerinde, her seferinde birinci satırlar boyunca Laplace açılımı uygulanarak elde edilecek permanentler arasındaki ilişki

$$Per\left(T_k^{(k)}\right) = aPer\left(T_{k-1}^{(k-1)}\right) = \cdots = a^{k-1}Per\left(T_1^{(1)}\right) = a^k Per\left(T_0^{(0)}\right) \qquad (4.25)$$

eşitliği ile gösterilsin. (4.25) te, son adımından sonra elde edilen $a^k Per\left(T_0^{(0)}\right)$ ifadesi a^k ya eşit olur ki bu istenendir. ■

Teorem 4.9. $n \geq k$ olmak üzere

$$P_n^{(k)} = a^n + bc \sum_{i=0}^{n-k-1} a^{n-k-1-i}\, P_{\left\lfloor \frac{i}{k} \right\rfloor}^{(1)} . P_{i+k+\left\lfloor -\frac{i+1}{k} \right\rfloor}^{(k-1)} \qquad (4.26)$$

rekürsif eşitliği doğrudur. Burada, her k ve n değeri için $P_0^{(k)} = 1$, $P_n^{(0)} = 1$ kabul edilecektir.

İspat: İspat n ye göre indüksiyon kullanılarak yapılsın.

$n = 2$ olsun. $n \geq k$ koşuluna göre, $2 \geq k$ olup $k = 1$ değerini alır. Buna göre, (4.26) eşitliğinin sağ yanında $n = 2$ ve $k = 1$ yazılarak

$$a^2 + bc\sum_{i=0}^{0} a^{-i}\, P_{\lfloor i \rfloor}^{(1)} P_{i+1+\lfloor -i-1 \rfloor}^{(0)} = a^2 + bcP_0^{(1)}P_0^{(0)} = a^2 + bc \tag{4.27}$$

sonucu elde edilir. Diğer taraftan

$$P_2^{(1)} = Per\begin{bmatrix} a & b \\ c & a \end{bmatrix}_{2\times 2} = aPer[a]_{1\times 1} + bPer[c]_{1\times 1} = a^2 + bc$$

olduğu da açıktır. Bu durumda (4.26) eşitliği $n = 2$ için doğrudur.

Şimdi, (4.26) eşitliğinin n için doğru olduğu kabul edilsin ve (4.26) eşitliğinin $n + 1$ için de doğru olduğu gösterilsin. Buna göre, gösterilmesi gereken eşitlik

$$P_{n+1}^{(k)} = a^{n+1} + bc\sum_{i=0}^{n-k} a^{n-k-i}\, P_{\left\lfloor \frac{i}{k} \right\rfloor}^{(1)}\, P_{i+k+\left\lfloor -\frac{i+1}{k} \right\rfloor}^{(k-1)} \tag{4.28}$$

şeklindedir.

$P_{n+1}^{(k)}$ permanenti, (4.20) eşitliğine göre

$$P_{n+1}^{(k)} = aP_n^{(k)} + bcP_{\left\lceil \frac{n+1}{k} \right\rceil - 2}^{(1)}\, P_{n+1-\left\lceil \frac{n+1}{k} \right\rceil}^{(k-1)} \tag{4.29}$$

şeklinde yazılır. Bu eşitliğin sağ yanının ilk terimindeki $P_n^{(k)}$ yerine, n için doğruluğunu (tümevarımın bir adımı olarak) kabul ettiğimiz (4.26) eşitliği kullanılarak

$$a\left(a^n + bc\sum_{i=0}^{n-k-1} a^{n-k-1-i}\, P^{(1)}_{\left\lfloor\frac{i}{k}\right\rfloor}\, P^{(k-1)}_{i+k+\left\lfloor-\frac{i+1}{k}\right\rfloor}\right) + \; bcP^{(1)}_{\left\lceil\frac{n+1}{k}\right\rceil-2}\, P^{(k-1)}_{n+1-\left\lceil\frac{n+1}{k}\right\rceil} \qquad (4.30)$$

ifadesi yazılır ve buradan da

$$P^{(k)}_{n+1} = a^{n+1} + bc\sum_{i=0}^{n-k-1} a^{n-k-i}\, P^{(1)}_{\left\lfloor\frac{i}{k}\right\rfloor}\, P^{(k-1)}_{i+k+\left\lfloor-\frac{i+1}{k}\right\rfloor} + bcP^{(1)}_{\left\lceil\frac{n+1}{k}\right\rceil-2}\, P^{(k-1)}_{n+1-\left\lceil\frac{n+1}{k}\right\rceil} \qquad (4.31)$$

eşitliği elde edilir.

Şimdi, (4.31) eşitliğinin sağ yanında, permanentleri temsil etmede kullanılan indisleri aşağıdaki fonksiyonlarla ifade edelim:

$k \geq 1$ olmak üzere,

$$h(n) = \left\lceil\frac{n+1}{k}\right\rceil, \qquad (4.32)$$

$$f(i) = \left\lfloor\frac{i}{k}\right\rfloor, \qquad (4.33)$$

$$g(i) = i + k + \left\lfloor-\frac{i+1}{k}\right\rfloor. \qquad (4.34)$$

Bu fonksiyonlar;

$$h(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n < k \\ 2, & k \leq n < 2k \\ 3, & 2k \leq n < 3k \\ \vdots & \vdots \end{cases}, \qquad (4.35)$$

$$f(i)=\begin{cases}0, & 0\le i<k\\ 1, & k\le i<2k\\ 2, & 2k\le i<3k\\ \vdots & \vdots\end{cases}, \tag{4.36}$$

$$g(i)=\begin{cases}i+k-1, & 0\le i<k\\ i+k-2, & k\le i<2k\\ i+k-3, & 2k\le i<3k\\ \vdots & \vdots\end{cases} \tag{4.37}$$

şeklinde tanımlanabilir. (4.31) eşitliği, f, g ve h fonksiyonlarıyla ifade edilerek yeniden yazılsın.

$$P_{n+1}^{(k)}=a^{n+1}+bc\sum_{i=0}^{n-k-1}a^{n-k-i}\,P_{f(i)}^{(1)}\,P_{g(i)}^{(k-1)}+bcP_{h(n)-2}^{(1)}\,P_{n+1-h(n)}^{(k-1)}. \tag{4.38}$$

(4.38) eşitliğinin sağ yanında $bcP_{h(n)-2}^{(1)}P_{n-h(n)}^{(k-1)}$ terimindeki indisler f ve g fonksiyonları cinsinden ifade edilebilirse, o zaman bu terim önündeki toplam grubunun içine dahil edilebilir hale gelecektir. Buna göre, (4.38) eşitliğinin daha açık olarak yazılmasıyla oluşan

$$\begin{aligned}P_{n+1}^{(k)}=a^{n+1}+bc\Big(&a^{n-k}P_{f(0)}^{(1)}P_{g(0)}^{(k-1)}+a^{n-k-1}P_{f(1)}^{(1)}P_{g(1)}^{(k-1)}+\cdots\\ &+aP_{f(n-k-1)}^{(1)}P_{g(n-k-1)}^{(k-1)}\Big)+bcP_{h(n)-2}^{(1)}P_{n+1-h(n)}^{(k-1)}\end{aligned} \tag{4.39}$$

(4.39) eşitliği üzerinden de kolayca izlenebileceği gibi, son terimin indisler için

$$f(n-k)=h(n)-2\,, \tag{4.40}$$

$$g(n-k)=n+1-h(n) \tag{4.41}$$

eşitliklerinin birlikte sağlandığı gösterilirse, (4.39) eşitliğinin son terimi, öndeki toplam gurubuyla aynı ifadede temsil edilebilecektir.

(4.33) e göre

$$f(n-k) = \left\lfloor \frac{n-k}{k} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor - 1 = f(n) - 1 \tag{4.42}$$

olur. Diğer yandan, f ve h fonksiyonlarını açıklayan (4.35) ve (4.36) tariflerine göre, aynı aralıklarda $f(n) = h(n) - 1$ olup bu ilişki (4.42) eşitliğinde yerine yazılırsa $f(n-k) = h(n) - 2$ eşitliğine ulaşılır ki bu (4.40) eşitliğidir.

(4.34) e göre

$$g(n-k) = n + \left\lfloor -\frac{n-k+1}{k} \right\rfloor = n + 1 + \left\lfloor -\frac{n+1}{k} \right\rfloor \tag{4.43}$$

yazılır. (4.43) eşitliğindeki $\left\lfloor -\frac{n+1}{k} \right\rfloor$ ifadesinin yerine Lemma 4.7 gereği $\left(-\left\lceil \frac{n+1}{k} \right\rceil\right)$ yazılır ki bu ifade (4.32) ile verilen $h(n)$ fonksiyonunun ta kendisidir. Böylece (4.43) eşitliği $g(n-k) = n + 1 - h(n)$ şekline dönüşür ki bu (4.41) eşitliğidir.

(4.40) ve (4.41) ile verilen şartlar sağlatıldığına göre, (4.39) eşitliğindeki son terim yerine $bcP_{h(n)-2}^{(1)} P_{n-h(n)}^{(k-1)}$ terimi yazılabilir. Buna göre (4.39) eşitliği

$$\begin{aligned} P_{n+1}^{(k)} = a^{n+1} + bca^{n-k} P_{f(0)}^{(1)} P_{g(0)}^{(k-1)} + a^{n-k-1} P_{f(1)}^{(1)} P_{g(1)}^{(k-1)} + \cdots \\ + aP_{f(n-k-1)}^{(1)} P_{g(n-k-1)}^{(k-1)} + P_{f(n-k)}^{(1)} P_{g(n-k)}^{(k-1)} \end{aligned} \tag{4.44}$$

halini alır ki bu da

$$P_{n+1}^{(k)} = a^{n+1} + bc \sum_{i=0}^{n-k} a^{n-k-i} P_{f(i)}^{(1)} P_{g(i)}^{(k-1)} \tag{4.45}$$

şeklinde temsil edilir. Böylece ispat tamamlanmıştır.■

4.3. Bir Alternatif İspat

Bu kısımda, k-tridiagonal Toeplitz matrisin permanenti için (4.20) eşitliği ile verilen

$$P_n^{(k)} = aP_{n-1}^{(k)} + bcP_{\left\lceil\frac{n}{k}\right\rceil-2}^{(1)} P_{n-\left\lceil\frac{n}{k}\right\rceil}^{(k-1)}$$

rekürsif formülünün doğruluğunu göstermek amacıyla yeni ve öncekinden farklı bir ispat denenecektir. Bu alternatif ispatı yapmak için, (4.26) ile verilen rekürsif formül ile birlikte f, g ve h fonksiyonlarına ait tanımlamalar kullanılacaktır.

İspat (Teorem 4.6): İspat, n ye göre indüksiyon ile yapılsın.

$n = 2$ olsun. Bu durumda, Teorem 4.6'nın ifadesinde bulunan $n \geq k + 1$ şartına göre $k = 1$ olacaktır. Buna göre (4.20) eşitliğinde $n = 2$ ve $k = 1$ yazılarak

$$P_2^{(1)} = aP_1^{(1)} + bcP_0^{(1)} P_0^{(0)} \tag{4.46}$$

elde edilir. Yine (4.20) rekürsif formülü için verilmiş olan başlangıç şartları yardımıyla (4.46) nın doğruluğunu görmek kolaydır.

(4.20) eşitliği $n = r$ için doğru olsun ki bu

$$P_r^{(k)} = aP_{r-1}^{(k)} + bcP_{\left\lceil\frac{r}{k}\right\rceil-2}^{(1)} P_{r-\left\lceil\frac{r}{k}\right\rceil}^{(k-1)} \tag{4.47}$$

şeklinde yazılır. Buradan hareketle, (4.20) eşitliğinin $n = r + 1$ için de doğru olduğunu gösterilmelidir. O halde gösterilmesi gereken

$$P_{r+1}^{(k)} = aP_r^{(k)} + bcP_{\left\lceil\frac{r+1}{k}\right\rceil-2}^{(1)} P_{r+1-\left\lceil\frac{r+1}{k}\right\rceil}^{(k-1)} \tag{4.48}$$

eşitliğidir. (4.26) eşitliğine göre

$$P_{r+1}^{(k)} = a^{r+1} + bc\sum_{i=0}^{r-k} a^{r-k-i}\, P_{\left\lfloor\frac{i}{k}\right\rfloor}^{(1)}\, P_{i+k+\left\lfloor-\frac{i+1}{k}\right\rfloor}^{(k-1)} \tag{4.49}$$

yazılır. Bu eşitlik te, (4.33) ve (4.34) ile tanıtılan f ve g fonksiyonlarının tarifleri göz önünde bulundurularak

$$P_{r+1}^{(k)} = a^{r+1} + bc\sum_{i=0}^{r-k} a^{r-k-i}\, P_{f(i)}^{(1)}\, P_{g(i)}^{(k-1)} \tag{4.50}$$

şeklinde yazılır. (4.50) eşitliğini daha açık yazılacak olursa

$$\begin{aligned} P_{r+1}^{(k)} = a^{r+1} &+ bca^{r-k}P_{f(0)}^{(1)}\, P_{g(0)}^{(k-1)} + bca^{r-k-1}P_{f(1)}^{(1)}P_{g(1)}^{(k-1)} \\ &+ bca^{r-k-2}P_{f(2)}^{(1)}\, P_{g(2)}^{(k-1)} + \cdots + bca^{r-2k+1}P_{f(k-1)}^{(1)}\, P_{g(k-1)}^{(k-1)} \\ &+ bca^{r-2k}P_{f(k)}^{(1)}\, P_{g(k)}^{(k-1)} + bca^{r-2k-1}P_{f(k+1)}^{(1)}\, P_{g(k+1)}^{(k-1)} + \cdots \\ &+ bcaP_{f(r-k-1)}^{(1)}\, P_{g(r-k-1)}^{(k-1)} + bcP_{f(r-k)}^{(1)}\, P_{g(r-k)}^{(k-1)} \end{aligned} \tag{4.51}$$

eşitliği elde edilir. Şimdi, (4.51) eşitliğinin sağ yanının *ilk* terimi göz önüne alınsın. Lemma 4.8.'e göre $P_k^{(k)} = a^k$ olduğundan

$$a^{r+1} = a^{r-k+1}P_k^{(k)} \tag{4.52}$$

yazılır. Şimdi de (4.51) eşitliğinin sağ yanının *ikinci* terimi olan $bca^{r-k}P_{f(0)}^{(1)}\, P_{g(0)}^{(k-1)}$ ifadesi göz önüne alınsın Bu terimin indisler için, (4.32) ile görülen $h(n)$ fonksiyonu yardımıyla,

$$f(0) = h(k) - 2\,, \tag{4.53}$$

$$g(0) = k + 1 - h(k) \tag{4.54}$$

ilişkileri kurulabilir. O halde (4.52), (4.53) ve (4.54) ilişkilerine göre, (4.50) eşitliğinin sağ yanının ilk iki terimi

$$a^{r-k}\left(aP_k^{(k)}+bcP_{h(k)-2}^{(1)}\,P_{k+1-h(k)}^{(k-1)}\right) \tag{4.55}$$

şeklinde düzenlenebilir. Yine (4.20) eşitliği ve $h(n)$ fonksiyonuna göre, (4.55) ifadesi

$$a^{r-k}\,P_{k+1}^{(k)} \tag{4.56}$$

ifadesine eşittir. Bu sayede, (4.51) eşitliği, sağ yanının ilk iki teriminin yerine $a^{r-k}\,P_{k+1}^{(k)}$ ifadesi getirilerek yeniden yazılırsa

$$\begin{aligned} P_{r+1}^{(k)} = a^{r-k}\,P_{k+1}^{(k)} &+ bca^{r-k-1}P_{f(1)}^{(1)}P_{g(1)}^{(k-1)} + bca^{r-k-2}P_{f(2)}^{(1)}\,P_{g(2)}^{(k-1)} \\ &+\cdots+bca^{r-2k+1}P_{f(k-1)}^{(1)}\,P_{g(k-1)}^{(k-1)}+bca^{r-2k}P_{f(k)}^{(1)}\,P_{g(k)}^{(k-1)} \\ &+bca^{r-2k-1}P_{f(k+1)}^{(1)}\,P_{g(k+1)}^{(k-1)}+\cdots+bcaP_{f(r-k-1)}^{(1)}\,P_{g(r-k-1)}^{(k-1)} \\ &+bcP_{f(r-k)}^{(1)}\,P_{g(r-k)}^{(k-1)} \end{aligned} \tag{4.57}$$

şeklini alır. Şimdi bu (4.57) eşitliğinin sağ yanının ilk teriminden sonraki terimlerindeki permanentlerin dizisini $P_{f(\varepsilon)}^{(1)}P_{g(\varepsilon)}^{(k-1)}$ ile gösterelim. $\varepsilon=1,2,3,\dots,r-k$ olmak üzere

$$f(\varepsilon)=h(k+\varepsilon)-2$$

$$g(\varepsilon)=k+1-h(k+\varepsilon)$$

eşitliklerine göre, $P_{f(\varepsilon)}^{(1)}P_{g(\varepsilon)}^{(k-1)}$ çarpımını temsilen $P_{h(k+\varepsilon)-2}^{(1)}P_{k+1-h(k+\varepsilon)}^{(k-1)}$ çarpımı yazılabilir. Buna göre (4.57) eşitliğinin ilk iki teriminin toplamı

$$a^{r-k}\,P_{k+1}^{(k)}+bca^{r-k-1}P_{h(k+1)-2}^{(1)}P_{k+1-h(k+1)}^{(k-1)}$$

şeklinde olup bu ifade de parantezle düzenlenerek

$$a^{r-k-1}\left(aP_{k+1}^{(k)}+bcP_{h(k+1)-2}^{(1)}P_{k+1-h(k+1)}^{(k-1)}\right) \tag{4.58}$$

şeklinde yazılır. Burada da (4.20) eşitliği ve h fonksiyonu göz önünde bulundurularak, (4.58) ifadesinin yerine

$$a^{r-k-1}P_{k+2}^{(k)} \tag{4.59}$$

yazılabilir. Buna göre, (4.57) eşitliği

$$\begin{aligned}P_{r+1}^{(k)}=a^{r-k-1}P_{k+2}^{(k)}&+\cdots+bca^{r-2k+1}P_{f(k-1)}^{(1)}\,P_{g(k-1)}^{(k-1)}\\&+bca^{r-2k}P_{f(k)}^{(1)}P_{g(k)}^{(k-1)}+bca^{r-2k}P_{f(k)}^{(1)}\,P_{g(k)}^{(k-1)}\\&+bca^{r-2k-1}P_{f(k+1)}^{(1)}\,P_{g(k)+1}^{(k-1)}+\cdots\\&+bcaP_{f(r-k-1)}^{(1)}\,P_{g(r-k-1)}^{(k-1)}+bcP_{f(r-k)}^{(1)}\,P_{g(r-k)}^{(k-1)}\end{aligned} \tag{4.60}$$

şekline dönüşür. Yukarıda anlatmaya çalıştığımız bu dönüştürme işlemi, oluşan her yeni eşitliğin sağ yanındaki ilk iki terime uygulanarak devam ettirilirse, en sonunda

$$P_{r+1}^{(k)}=aP_{r}^{(k)}+bcP_{h(r)-2}^{(1)}\,P_{r+1-h(r)}^{(k-1)} \tag{4.61}$$

eşitliğine ulaşılacaktır ki bu da $h(n)$ fonksiyonunun tanımına göre

$$P_{r+1}^{(k)}=aP_{r}^{(k)}+bcP_{\left\lceil\frac{r+1}{k}\right\rceil-2}^{(1)}\,P_{r+1-\left\lceil\frac{r+1}{k}\right\rceil}^{(k-1)}$$

şeklinde temsil edilir. Böylece istenen elde edilmiştir. ■

4.4. Bir Rekürsif Algoritma: *k*-tridiagonal Toeplitz Matrislerin Permanent Hesabı

GİRDİ: n : Matrisin mertebesi; k : Matrisin band aralığı; $a, b, c \in \mathbb{C}$: Matrisin girdileri

ÇIKTI : $P_n^{(k)}$: $T_n^{(k)}(a, b, c)$ matrislerinin permanentleri

Procedure $Perm(k, n)$

    if $n = -1$

        return 0

    else if $k \geq n$ then

        return a^n

    else if $k = 1$ then

        return $aPerm(1, n-1) + bcPerm(1, n-2)$

    else if $k = 2$ then

        if $n \geq 3$ then

            return

$$aPerm(2, n-1) + abcPerm(2, n-3) + b^2c^2Perm(2, n-4)$$

        end if

    else if $k \geq 3$ then

        return

$$aPerm(k, n-1) + bc\left(Perm\left(1, \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil - 2\right)\right)\left(Perm\left(k-1, n - \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil\right)\right)$$

    end if

end procedure

BÖLÜM 5. GENEL *k*-TRIDIAGONAL TOEPLITZ MATRİSLERİN PERMANENTLERİ İÇİN KOMBİNASYONEL FORMÜLLER

Bu bölümde, $P_n^{(k)}$ permanentleri için dördüncü bölümde sunulan rekürsif formüllerden faydalanılarak, rekürsif olmayan (açık) formüller elde edilmesi amacıyla yapılan çalışmalar sonucunda ulaşılan kombinasyonel yapılı formüller sunulacaktır. Bu bölümdeki çalışmalar, [69] numaralı referans ile verilen makale ile yayımlanmıştır.

Teorem 5.1. $n \times n$ formundaki *tridiagonal Toeplitz* matrisin permanenti için

$$P_n^{(1)} = a^{\frac{1-(-1)^n}{2}} \sum_{r=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \binom{n-r}{r} (a^2)^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - r} (bc)^r \tag{5.1}$$

dir.

İspat: İspat, n ye göre tümevarım kullanılarak yapılacaktır.

$n = 2$ için, (5.1) eşitliğinin sağ yanı

$$P_2^{(1)} = a^{\frac{1-(-1)^2}{2}} \sum_{r=0}^{1} \binom{2-r}{r} (a^2)^{1-r} (bc)^r = \binom{2}{0} a^2 + \binom{1}{1} bc = a^2 + bc \tag{5.2}$$

sonucunu verir. Öte yandan, (4.4) eşitliği ve onun başlangıç şartları kullanılarak

$$P_2^{(1)} = aP_1^{(1)} + bcP_0^{(1)} = a^2 + bc$$

sonucununa ulaşılır. Bu sonuçlara göre, (5.1) eşitliği $n = 2$ için doğrudur.

Şimdi, (5.1) eşitliğinin n için doğru olduğu kabul edilip, $(n + 1)$ için de doğru olduğu gösterilmelidir. O halde, gösterilmesi gereken

$$P_{n+1}^{(1)} = a^{\frac{1-(-1)^{n+1}}{2}} \sum_{r=0}^{\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor} \binom{n+1-r}{r} (a^2)^{\left\lfloor\frac{n+1}{2}-r\right\rfloor} (bc)^r. \tag{5.3}$$

eşitliğidir.

Öncelikle, (4.4) eşitliği $(n + 1)$ göre yazılırsa

$$P_{n+1}^{(1)} = a. P_n^{(1)} + bcP_{n-1}^{(1)} \tag{5.4}$$

olur. (5.4) eşitliğinin sağ yanındaki permanentler, n için doğruluğu kabul edilen (5.2) eşitliği kullanılarak yazılırsa

$$\begin{aligned} P_{n+1}^{(1)} = a&\left(a^{\frac{1-(-1)^n}{2}} \sum_{r=0}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor} \binom{n-r}{r} (a^2)^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor - r} (bc)^r \right) \\ &+ bc\left(a^{\frac{1-(-1)^{n-1}}{2}} \sum_{r=0}^{\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor} \binom{n-1-r}{r} (a^2)^{\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor - r} (bc)^r \right) \end{aligned} \tag{5.5}$$

elde edilir. Buradaki $\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$ ve $\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor$ ifadelerinin sonuçları, n değişkeninin tek veya çift olması durumları göz önüne alınacak olsa da burada sadece bunlardan birisi için ispat devam ettirilecektir.

n tek olsun. Bu durumda, $\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor = \frac{n-1}{2}$ ve $\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor = \frac{n-1}{2}$ eşitliklerinin yazılabileceğini görmek kolaydır. Buna göre (5.5) eşitliği,

$$P_{n+1}^{(1)} = a^2 \sum_{r=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n-r}{r} a^{n-1-2r}(bc)^r + bc \sum_{r=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n-1-r}{r} a^{n-1-2r}(bc)^r \qquad (5.6)$$

halini alır. (5.6) eşitliği, toplam sembollerinin açılımları yapılarak yeniden düzenlenirse

$$\begin{aligned} P_{n+1}^{(1)} = \binom{n}{0} a^{n+1} &+ \left(\binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{0}\right) a^{n-1}bc \\ &+ \left(\binom{n-2}{2} + \binom{n-2}{1}\right) a^{n-3}(bc)^2 + \cdots \\ &+ \left(\binom{\frac{n+1}{2}}{\frac{n-1}{2}} + \binom{\frac{n+1}{2}}{\frac{n-3}{2}}\right) a^2(bc)^{\frac{n-1}{2}} + (bc)^{\frac{n+1}{2}}. \end{aligned} \qquad (5.7)$$

eşitliği elde edilir. (5.7) eşitliği, kombinasyon işleminin

$$\binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} = \binom{n+1}{r} \qquad (5.8)$$

özelliği kullanılarak düzenlenirse

$$\begin{aligned} P_{n+1}^{(1)} = (a^2)^{\frac{n+1}{2}} &+ \binom{n}{1} (a^2)^{\frac{n-1}{2}} bc + \binom{n-1}{2} (a^2)^{\frac{n-3}{2}} (bc)^2 + \cdots \\ &+ \binom{\frac{n+3}{2}}{\frac{n-1}{2}} a^2(bc)^{\frac{n-1}{2}} + (bc)^{\frac{n+1}{2}} \end{aligned} \qquad (5.9)$$

elde edilir. Bu son haldeki (5.9) eşitliği de

$$P_{n+1}^{(1)} = a^{\frac{1-(-1)^{n+1}}{2}} \sum_{r=0}^{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor} \binom{n+1-r}{r} (a^2)^{\left\lfloor \frac{n+1}{2} - r \right\rfloor} (bc)^r \tag{5.10}$$

şeklinde yazılabilir. Böylece, n değişkeninin tek sayı olması durumunda, (5.3) eşitliğinin doğru olduğu gösterilmiştir. n değişkeninin çift sayı olması durumunda istenen eşitlik benzer şekilde kolayca gösterebilir. ■

Teorem 5.2. $n \times n$ formundaki 2-*tridiagonal Toeplitz* matrisin permanenti için

$$P_n^{(2)} = a^n + bc \sum_{i=0}^{n-3} a^{n-3-i} P_{\left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor}^{(1)} P_{\left\lfloor \frac{i+1}{2} \right\rfloor + 1}^{(1)}. \tag{5.11}$$

İspat: Bu ispat n ye göre tümevarım kullanılarak yapılacaktır.

$n = 3$ için, (5.11) eşitliğinin sağ yanı ile

$$a^3 + bc \sum_{i=0}^{0} a^{-i} P_{\left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor}^{(1)} P_{\left\lfloor \frac{i+1}{2} \right\rfloor + 1}^{(1)} = a^3 + bcP_0^{(1)} P_1^{(1)} = a^3 + bca \tag{5.12}$$

sonucu elde edilir. Öte yandan, (4.4) eşitliği ve Lemma 4.8(4.4) kullanılarak

$$P_3^{(2)} = aP_2^{(2)} + abcP_0^{(2)} + b^2c^2P_{-1}^{(2)} = a^3 + abc \tag{5.13}$$

sonucu elde edilir. Böylece, (5.11) eşitliğinin $n = 3$ için doğru olduğu görülür.

(5.11) eşitliği $n = r$ için doğru olsun. Yani

$$P_r^{(2)} = a^r + bc \sum_{i=0}^{r-3} a^{r-3-i} P_{\left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor}^{(1)} P_{\left\lfloor \frac{i+1}{2} \right\rfloor + 1}^{(1)}. \tag{5.14}$$

O halde, (5.11) eşitliğinin $n = r + 1$ için de doğru olduğu gösterilmelidir. Yani gösterilmesi gereken eşitlik

$$P_{r+1}^{(2)} = a^{r+1} + bc\sum_{i=0}^{r-2} a^{r-2-i} P_{\lfloor\frac{i}{2}\rfloor}^{(1)} P_{\lfloor\frac{i+1}{2}\rfloor+1}^{(1)} \tag{5.15}$$

eşitliğidir.

Bunun için ilk olarak, (4.20) eşitliğinde $k = 2$ ve $n = r + 1$ yazılsın. O halde

$$P_{r+1}^{(2)} = aP_r^{(2)} + bcP_{\lceil\frac{r+1}{2}\rceil-2}^{(1)} P_{r+1-\lceil\frac{r+1}{2}\rceil}^{(1)}. \tag{5.16}$$

(5.16) eşitliğinin sağ yanının ilk terimindeki $P_r^{(2)}$ permanenti, (5.14) eşitliğine göre yazılırsa

$$P_{r+1}^{(2)} = a\left(a^r + bc\sum_{i=0}^{r-3} a^{r-3-i} P_{\lfloor\frac{i}{2}\rfloor}^{(1)} P_{\lfloor\frac{i+1}{2}\rfloor+1}^{(1)}\right) + bcP_{\lceil\frac{r+1}{2}\rceil-2}^{(1)} P_{r+1-\lceil\frac{r+1}{2}\rceil}^{(1)} \tag{5.17}$$

elde edilir. Her r tamsayısı için,

$$\left\lceil\frac{r+1}{2}\right\rceil - 2 = \left\lceil\frac{r-2}{2}\right\rceil \tag{5.18}$$

ve

$$r - \left\lceil\frac{r+1}{2}\right\rceil = \left\lceil\frac{r-1}{2}\right\rceil \tag{5.19}$$

eşitliklerininin yazılabileceğini görmek kolaydır. O halde, (5.18) ve (5.19) eşitlikleri göz önünde bulundurularak, (5.17) eşitliğinin sağ yanının son terimindeki

$P^{(1)}_{\left\lceil\frac{r+1}{2}\right\rceil-2}\,P^{(1)}_{r+1-\left\lceil\frac{r+1}{2}\right\rceil}$ ifadesi yerine $P^{(1)}_{\left\lceil\frac{r-2}{2}\right\rceil}\,P^{(1)}_{\left\lceil\frac{r-1}{2}\right\rceil+1}$ ifadesi yazılabilir. (5.17) eşitliği, daha açık halde

$$P^{(2)}_{r+1} = a^{r+1} + bc\left(a^{r-2}P^{(1)}_0 P^{(1)}_1 + \cdots + aP^{(1)}_{\left\lceil\frac{r-3}{2}\right\rceil}P^{(1)}_{\left\lceil\frac{r-2}{2}\right\rceil+1} + P^{(1)}_{\left\lceil\frac{r-2}{2}\right\rceil}P^{(1)}_{\left\lceil\frac{r-1}{2}\right\rceil+1}\right) \tag{5.20}$$

şeklinde yazılır. (5.20) eşitliğindeki parantez içerisinde bulunan ifade

$$\sum_{i=0}^{r-2} a^{r-2-i}P^{(1)}_{\left\lfloor\frac{i}{2}\right\rfloor}P^{(1)}_{\left\lfloor\frac{i+1}{2}\right\rfloor+1} \tag{5.21}$$

ifadesiyle ile temsil edilebilir. Bu durumda (5.20) eşitliği

$$P^{(2)}_{r+1} = a^{r+1} + bc\sum_{i=0}^{r-2} a^{r-2-i}P^{(1)}_{\left\lfloor\frac{i}{2}\right\rfloor}P^{(1)}_{\left\lfloor\frac{i+1}{2}\right\rfloor+1}$$

şekline dönüşür, bu da gösterilmek istenendir.■

Uyarı 5.3. Genel *2*-tridiagonal Toeplitz matrisin permanenti için (5.11) ile verilen rekürsif ilişki, esasında ve aynı zamanda (5.1) ile verilen formül benzeri kombinasyonel yapıda bir açık formüldür. Çünkü, (5.11) eşitliği içerisindeki, n değişkeninden bağımsız olan $P^{(1)}_{\left\lfloor\frac{i}{2}\right\rfloor}$ ve $P^{(1)}_{\left\lfloor\frac{i+1}{2}\right\rfloor+1}$ çarpanlarının yerine, (5.1) eşitliği kullanılarak kombinasyonel yapıdaki karşılıkları yazılabilir. Bu sayede, $P^{(2)}_n$ için, rekürsif olmayan

$$P^{(2)}_n = a^n + bca^{n-2}\sum_{i=0}^{n-3} a^{\frac{-2i-(-1)^{\alpha}-(-1)^{\beta}}{2}}\sum_{n=0}^{\left\lfloor\frac{\alpha}{2}\right\rfloor}\binom{\frac{\alpha}{2}-r}{r}(a^2)^{\left\lfloor\frac{\alpha}{2}\right\rfloor-r}(bc)^r\sum_{n=0}^{\left\lfloor\frac{\beta}{2}\right\rfloor}\binom{\frac{\beta}{2}-r}{r}(a^2)^{\left\lfloor\frac{\beta}{2}\right\rfloor-r}(bc)^r \tag{5.22}$$

formülizasyonu elde edilir ki burada $\alpha = \left\lfloor\frac{i}{2}\right\rfloor$ ve $\beta = \left\lfloor\frac{i+1}{2}\right\rfloor + 1$ dir.

BÖLÜM 6. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışması, üçüncü bölümde tanıtılan özel türdeki *k-tridiagonal Toeplitz* formlu $T_n^{(k)}(2x,i,i)$ matrislerin permanentleri ile *Chebyshev U* polinomları arasındaki eşleşmelerin fark edilmesi üzerine yapılan çalışmalarla başlamıştır. Permanentler ile polinomlar arasındaki bu eşleşmeler gerçekten önemlidir çünkü bu permanentleri birer polinom halinde temsil etmek hesaplamalarının alacağı zamanı çok daha aza indirmek anlamına gelir. Zira, elemanları arasında imajiner ($i=\sqrt{-1}$) sayılar da bulunabilen matrislerin permanentlerinin hesaplanması işi, bilgisayar üzerinden bazı hesaplama araçları kullanılarak yapılsa dahi (bilhassa bu matrislerin mertebeleri büyüdükçe) oldukça fazla zaman almaktadır. Bu amaçla yola çıkılarak önce $T_n^{(k)}(2x,i,i)$ matrislerinin permanentleri üzerinde çalışılmış ardından bu matrislerin genelleştirilmiş hali olan $T_n^{(k)}(a,b,c)$ ile temsil edilen genel *k-tridiagonal Toeplitz* matrislerin permanentlerine bakılmıştır.

Genel *k-tridiagonal Toeplitz* matrislerin permanentleri, ilk olarak, elde edilen rekürsif yapıdaki sonuçlar üzerinden yorumlanmıştır. Tezin dördüncü bölümünde sunulan bu rekürsif sonuçlar göstermiştir ki, band aralığı k olan permanentler k değerinden daha küçük band aralığına sahip matrislerin permanentleri cinsinden temsil edilmekte ve hesaplanabilmektedirler. Bu rekürsif ilişkiler sayesinde, permanentleri hesaplanacak olan matrislerin, permanentleri daha kolay hesaplanabilen başka matrislere indirgenmesi sağlanmıştır. Bu çalışmadaki rekürsif bulgular, determinant hesaplamalarında da sıkça başvurulan bir prosedür olan indirgeme yöntemine, permanent fonksiyonu üzerinden verilen bir uygulama niteliği taşımaktadır. Tezin dördüncü bölümünde sunulan bu rekürsif formüllerin kullanılmasıyla, genel *k-tridiagonal Toeplitz* matrislerin permanentlerinin açık formüllerle (yani rekürsif yapıda olmayan formüllerle) temsil edilip edilemeyeceği üzerine yapılan çalışmaların neticeleri tezin beşinci bölümünü oluşturmuştur. Bu çalışmalar neticesinde $k = 1$ ve $k = 2$ durumları için kombinasyonel yapıda açık formüller üretilebilmiştir.

Şimdi, üstte verilen genel yorumlamalara ilaveten burada birkaç özel sonuca daha vurgu yapalım ve bu tez çalışması neticesinde ortaya çıkan ve üzerinde çalışılabilecek bazı açık problemleri göz önüne serelim.

$Per\left(T_n^{(3)}\right)$ üzerinde yeteri kadar Laplace açılımı uygulandıktan sonra görülmüştür ki *3-tridiagonal Toeplitz* matrisin permanentleri için birer fark denklemi olan (3.48) ve (3.49) eşitlikleri tarzında rekürsif ilişkiler elde edilemez. Daha açık bir ifadeyle, $Per\left(T_n^{(3)}\right)$ permanentlerini, (3.48) ve (3.49) eşitliklerinde olduğu gibi, sadece $Per\left(T_{n-i}^{(3)}\right)_{(i=1,2,3,\ldots,n-1)}$'ler cinsinden yazmak mümkün değildir. Dolayısıyla $k \geq 3$ durumundaki tüm $Per\left(T_n^{(k)}\right)$ permanentleri için de durum böyledir. Burada vurgulanan sonucun doğruluğunu daha iyi anlatabilmek için bir örnek verelim.

Örneğin, (3.56) eşitliğinde $k = 3$ seçilsin. Buna göre $n = 3r + 4$ olacağından

$$Per\left(T_{3r+4}^{(3)}\right) = 2xPer\left(T_{3r+3}^{(3)}\right) - Per\left(T_{3r+2}^{(3)}\right)$$

eşitliği yazılır. Buradan da, örneğin $r = 0,1,2,3$ değerleri için,

$$Per\left(T_4^{(3)}\right) = 2xPer\left(T_3^{(3)}\right) - Per\left(T_2^{(3)}\right),$$

$$Per\left(T_7^{(3)}\right) = 2xPer\left(T_6^{(3)}\right) - Per\left(T_5^{(3)}\right),$$

$$Per\left(T_{10}^{(3)}\right) = 2xPer\left(T_9^{(3)}\right) - Per\left(T_8^{(3)}\right),$$

$$Per\left(T_{13}^{(3)}\right) = 2xPer\left(T_{12}^{(3)}\right) - Per\left(T_{11}^{(3)}\right)$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitliklerin herbirindeki üç terimden herhangi birisinin, diğer eşitliklerde bulunmadığı görülmektedir. Bu durumda, örneğin, $Per\left(T_5^{(3)}\right)$ veya $Per\left(T_6^{(3)}\right)$ permanentleri, mertebeleri daha küçük olan $Per\left(T_4^{(3)}\right), Per\left(T_3^{(3)}\right)$ ve $Per\left(T_2^{(3)}\right)$ permanentleri cinsinden ifade edilemezler. Bu sebeple, $Per\left(T_n^{(3)}\right)$ için ardışık tüm n değerlerinde sağlayan, örneğin (3.49) benzeri, bir fark denklemi yazılamayacaktır.

Üçüncü bölümde sunulan bulgular üzerinden devam edilerek, üzerinde çalışılan özel *k-tridiagonal Toeplitz* $T_n^{(k)}(2x, i, i)$ matrislerinin permanentlerinin Chebyshev polinomları cinsinden yazılışları için bir genelleştirme elde edilmesi, bir açık problem olarak duyurulmuştur.

Beşinci bölümde $P_n^{(1)}$ ve $P_n^{(2)}$ için üretilen formüller rekürsif olmayan yapıdadır. Kombinasyonel yapılı bu formüller birer açık formül olarak değerlendirilebilir. Band genişlikleri $k = 1$ ve $k = 2$ olan *k-tridiagonal Toeplitz* matrislerin permanentleri için üretilen bu formüller üzerinden $P_n^{(k)}$ için bir genel formül elde edilmesi bir başka açık problem olarak duyurulmaktadır.

KAYNAKLAR

[1] Binet, J. P. M., Mémoire sur un système de formules analytiques et leur application à des considérations géométriques. Journal l'École Polytech., 9: 280-354, 1813.

[2] Cauchy, A. L., Mémoire sur les fonctions qui ne peuvent obtenir que deux valeurs égales et de signes contraires par suite des transpositions opérées entre les variables qu'elles renferment. Journal l'Ecole Polytech., 10(17): 90–169, 1815.

[3] Horner, J., Notes On Determinants. Q. J. Pure Appl. Math., 8: 157–162, 1866.

[4] Hammond, J., Question 6001. Educ. Times., 32: 179, 1879.

[5] Muir, T., On a Class of Permanent Symmetric Functions., Proc. R. Soc. Edinburgh, 11: 409–418, 1882.

[6] Van der Waerden, B. L., Aufgabe 45., Jahresbericht der Dtsch. Math., 35: 117, 1926.

[7] Van Lint, J. H., The Van der Waerden Conjecture: Two Proofs In One Year., Math. Intell., 4(2): 72–77, 1982.

[8] Minc, H., Permanents-Encyclopedia of Mathematics and its Applications, V 6. Addison-Wesley, 1-224, 1978.

[9] Marcus, M., May, F. C., The Permanent Function, Can. J. Math., 14: 177–189, 1962.

[10] Ryser, H. J. , Combinatorial Mathematics. The Mathematical Association of America, John Wiley & Sons, New Jersey, 1-154, 1963.

[11] Minc, H., Evaluation of Permanents, Proc. Edinburgh Math. Soc., 22(1): 27-32, 1979.

[12] McMillan, R. D., The Permanent Function. Oklahoma State University Library No: 724964, Doktora Tezi, 1969.

[13] Nijenhuis, A., Wilf, H., Combinatorial Algorithms for Computers and Calculators. 2. Baskı, Academic Press, New York, 1-302, 1978.

[14] Bapat, R. B., Permanents in Probability and Statistics, Linear Algebra Appl., 127(C): 3–25, 1990.

[15] Kozen, D. C., Counting Bipartite Matchings in The Design and Analysis of Algorithms. Springer, New York, 144–150, 1992.

[16] Scheel, S., Permanents in Linear Optical Networks. arXiv: quant-ph/0406127, 2004.

[17] Filmus, F., Permanent Is Hard To Compute Even On A Good Day, 2012.

[18] M. Marcus and H. Minc, Permanents, American Mathematical Monthly, 72(6), 577-591, 1965.

[19] Brualdi, R. A., Ryser, H. J., Combinatorial Matrix Theory. 1. Baskı, Cambridge University Press, Canada, 198-290, 1991.

[20] King, B. W., Parker, F. D., A Fibonacci Matrix and The Permanent Function. Fibonacci Quarterly, 7: 539–544, 1969.

[21] Takahashi, R. Structured Matrices and The Algebra of Displacement Operators, HMC Senior Theses No: 45, 2013.

[22] Bini, D. A., Matrix Structures and Applications. Les cours du CIRM, 4(1):1-45, 2014.

[23] Horn, R. A., Johnson C. R., Matrix Analysis, 2. Baskı, Cambridge University Press, New York, 30-38, 2013.

[24] Roebuck, P. A., Barnett, S., A Survey of Toeplitz and Related Matrices, Int. J. Syst. Sci., 9(8): 921–934, 1978.

[25] Wituła, R., Słota, D., On Computing The Determinants and Inverses of Some Special Type of Tridiagonal and Constant-Diagonals Matrices, Appl. Math. Comput., 189: 514–527, 2007.

[26] P. J. Davis, Circulant Matrices. John Wiley & Sons, New-York, 1979.

[27] M. Schwartz, Efficiently Computing The Permanent and Hafnian of Some Banded Toeplitz Matrices, Linear Algebra Appl., 430: 1364–1374, 2009.

[28] Sweet, R. A. , A Recursive Relation for Determinant of A Pentadiagonal Matrix. Tehcnical Report No: 68-16, Cornell University, 1968.

[29] Cullum, J. K., Willoughby, R. A., Lanczos Algorithms for Large Symmetric Eigenvalue Computations. SIAM: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1-184, 2002.

[30] Aitken, C., Determinants and Matrices. 3. Baskı, Interscience Publishers, New York, 1944.

[31] Usmani, R. A., Inversion of Jacobi's tridiagonal matrix," Comput. Math. with Appl., 27(8): 59–66, 1994.

[32] Kamps, U., Chebyshev Polynomials and Least Squares Estimation Based on One-Dependent Random Variables. Linear Algebra Appl., 112: 217-230, 1989.

[33] Sogabe, T., El-Mikkawy, M., Fast Block Diagonalization of k-tridiagonal Matrices. Appl. Math. Comput., 218(6): 2740-2743, 2011.

[34] El-Mikkawy, M., Sogabe, T., A New Family of k-Fibonacci Numbers. Appl. Math. Comput., 215(12): 4456-4461, 2010.

[35] Yalçıner, A., The LU Factorizations and Determinants of the k-tridiagonal Matrices. Asian-European J. Math., 4(1): 187-197, 2011.

[36] Asci, M., Tasci, D., El-Mikkawy, M., On Determınants and Permanents Of k-tridiagonal Toeplitz Matrices. Util. Math., 89: 97-106, 2012.

[37] Borowska, J., Łacińska, L., Eigenvalues of 2-tridiagonal Toeplitz Matrix. J. Appl. Math. Comput. Mech., 14(4): 11-17, 2015.

[38] Kayabaşı, E., Kolukısa, M., Kurt, H., Static Simulation of Heat Exchanger Circuit of Cumene Production. Acad. Platf. J. Eng. Sci., 3(2): 26-32, 2015.

[39] Bergum, G. E., Hoggatt, V. E., A Family Of Tridiagonal Matrices. Fibonacci Q., 16(3): 285-288, 1978.

[40] Martinez, S., Bullo, F., Cortes, J., Frazzoli, E., On Synchronous Robotic Networks - Part I: Models, Tasks and Complexity. IEEE Trans. Automat. Contr., 52(12): 2199-2213, 2007.

[41] Jain, A. K. , Partial Differential Equations and Fnite Difference Methods in Image Processing. Part II: Image restoration. IEEE Transaction on Automatic Control, 23(5): 817-834, 1978.

[42] Fontanelli, D., Palopoli, L., Passerone, R., On The Global Convergence of a Class of Distributed Algorithms For Maximizing The Coverage of a WSN. Proc. IEEE Conf. Decis. Control, 7885–7890, 2009.

[43] Poker, G., Margaliot, M., Tuller, T., Sensitivity of mRNA Translation. Sci. Rep., 5(1), 2015.

[44] HMinc, H., On Permanents of Circulants. Pacific J. Math., 42(2): 477–484, 1972.

[45] Lehmer, D. H., Fibonacci And Related Sequences In Periodic Tridiagonal Matrices. Fibonacci Quart, 13, 150-158, 1975.

[46] Kılıç, E., Taşçı, D., On The Permanents Of Some Tridiagonal Matrices With Applications To The Fibonacci and Lucas Numbers. The Rocky Mountain Journal of Mathematics, 37: 1953-1969, 2007.

[47] Kilic, E., On a Constant-Diagonals Matrix. Appl. Math. Comput., 204(1): 184-190, 2008.

[48] Kilic, E., Tasci, D., On The Second Order Linear Recurrences By Tridiagonal Matrices. Ars Comb., 91: 11-18, 2009.

[49] Kaygısız, K., Sahin, A., Determinant and Permanent of Hessenberg Matrix and Fibonacci Type Numbers. Gen. Math. Notes, 9(2): 32-41, 2012.

[50] Güleç, H. H., Pell Matris Dizileri ve Özellikleri. Doktora Tezi, 2014.

[51] Yılmaz, F., Bozkurt, D., The Adjacency Matrix of One Type of Directed Graph and the Jacobsthal Numbers and Their Determinantal Representation. J. Appl. Math., 2012, 2012.

[52] Jina, P. Trojovsky, J., On Permanents of Some Tridiagonal Matrices Connected With Fibonacci Numbers. Int. J. Pure Appl. Math, 97(1): 79–87, 2014

[53] Matoušova, P., Trojovsky, I., On a Sequence of Tridiagonal Matrices, Whose Permanents are Related to Fibonacci and Lucas Numbers. 105(4): 715–721, 2015.

[54] Yaşar, M., Genelleştirilmiş Fibonacci Sayı Dizileriyle İlgili Bazı Özdeşliklerin Laplace Açılımı İle İspatları. Doktora Tezi, 2014.

[55] Sogabe, T., Yılmaz, F., A Note On A Fast Breakdown-Free Algorithm for Computing The Determinants and The Permanents of k-tridiagonal Matrices. Appl. Math. Comput., 249: 98-102, 2014.

[56] Kırklar, E., Yılmaz, F., A Note On k-Tridiagonal k-Toeplitz Matrices. Alabama J. Math., 39: 2–5, 2015.

[57] Da Fonseca, C. M., An Identity Between The Determinant and The Permanent of Hessenberg-Type Matrices. Czechoslov. Math. J., 61(4): 917–921, 2011.

[58] Öcal, A. A., Tuglu, N., Altinişik, E., On The Representation of k-Generalized Fibonacci and Lucas Numbers. Appl. Math. Comput, 170(1): 584–596, 2005.

[59] Öteleş, A., Karatas, Z. Y., Zangana, D. O. M., Jacobsthal Numbers and Associated Hessenberg Matrices. J. Integer Seq., 21(2): 1–10, 2018.

[60] Al-Hassan, Q., An algorithm for computing Inverses of Tridiagonal Matrices With Applications. Soochow Journal of Mathematics, 31(3), 449-466, 2005.

[61] Da Fonseca C. M., Petronilho, J., Explicit Inverses of Some Tridiagonal Matrices. Linear Algebra Appl., 325: 7–21, 2001.

[62] Küçük A. Z., Düz, M., Relationships Between The Permanents of A Certain Type of k-tridiagonal Symmetric Toeplitz Matrix and The Chebyshev Polynomials. J. Appl. Math. Comput. Mech., 16(1): 75-86, 2017.

[63] Caporale G. M., Cerrato, M., Using Chebyshev Polynomials to Approximate Partial Differential Equations. CESifo Work. Pap. No:2308, 2008.

[64] Montijano, E., Montijano, J. I., Sagues, C., Chebyshev Polynomials in Distributed Consensus Applications. IEEE Transactions on Signal Processing 61(3): 693-706, 2013.

[65] Damianou, P. A., On The Characteristic Polynomial Of Cartan Matrices and Chebyshev Polynomials. arXiv:1110.6620, 2011.

[66] Boesch, F. T., Prodinger, H., Spanning Tree Formulas and Chebyshev Polynomials. Graphs Comb, 2(1): 191–200, 1986.

[67] Mason, J. C. , Handscomb, D. C., Chebyshev Polynomials. Chapman & Hall/Crc, 1-20, 2003.

[68] Da Fonseca, C. M., On Some Conjectures Regarding Tridiagonal Matrices. J. Appl. Math. Comput. Mechanics, 17(4): 13–17, 2018.

[69] Küçük, A. Z., Özen, M., İnce, H., Recursive and Combinational Formulas for Permanents of General k-tridiagonal Toeplitz Matrices. Filomat, 33(1): 307–317, 2019.

EKLER

EK 1: Bu ek, $T_n^{(k)}(2x,i,i)$ matrislerinin $k=1{,}2{,}3$ durumlarında oluşan formlarının ilk birkaç n mertebesi için permanentlerinin sonuçları göstermektedir.

$T_n^{(1)}(2x,i,i)$ matrislerinin $n=1{,}2{,}3{,}4{,}5$ mertebeli olanlarının permanentleri:

$$Per\left(T_1^{(1)}\right)=Per[2x]=2x,$$

$$Per\left(T_2^{(1)}\right)=Per\begin{bmatrix}2x & i\\ i & 2x\end{bmatrix}=4x^2-1,$$

$$Per\left(T_3^{(1)}\right)=Per\begin{bmatrix}2x & i & 0\\ i & 2x & i\\ 0 & i & 2x\end{bmatrix}=8x^3-4x,$$

$$Per\left(T_4^{(1)}\right)=Per\begin{bmatrix}2x & i & 0 & 0\\ i & 2x & i & 0\\ 0 & i & 2x & i\\ 0 & 0 & i & 2x\end{bmatrix}=16x^4-12x^2+1,$$

$$Per\left(T_5^{(1)}\right)=Per\begin{bmatrix}2x & i & 0 & 0 & 0\\ i & 2x & i & 0 & 0\\ 0 & i & 2x & i & 0\\ 0 & 0 & i & 2x & i\\ 0 & 0 & 0 & i & 2x\end{bmatrix}=32x^5-32x^3+6x,$$

$T_n^{(2)}(2x,i,i)$ matrislerinin $n = 1,2,3,4,5$ mertebeli olanlarının permanentleri:

$$Per\left(T_1^{(2)}\right) = Per[2x] = 2x,$$

$$Per\left(T_2^{(2)}\right) = Per\begin{bmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2x \end{bmatrix} = 4x^2,$$

$$Per\left(T_3^{(2)}\right) = Per\begin{bmatrix} 2x & 0 & i \\ 0 & 2x & 0 \\ i & 0 & 2x \end{bmatrix} = 8x^3 - 2x,$$

$$Per\left(T_4^{(2)}\right) = Per\begin{bmatrix} 2x & 0 & i & 0 \\ 0 & 2x & 0 & i \\ i & 0 & 2x & 0 \\ 0 & i & 0 & 2x \end{bmatrix} = 16x^4 - 8x^2 + 1,$$

$$Per\left(T_5^{(2)}\right) = Per\begin{bmatrix} 2x & 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 2x & 0 & i & 0 \\ i & 0 & 2x & 0 & i \\ 0 & i & 0 & 2x & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & 2x \end{bmatrix} = 32x^5 - 24x^3 + 5x.$$

$T_n^{(3)}(2x,i,i)$ matrislerinin $n = 1,2,3,4,5$ mertebeli olanlarının permanentleri:

$$Per\left(T_1^{(3)}\right) = Per[2x] = 2x,$$

$$Per\left(T_2^{(3)}\right) = Per\begin{bmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2x \end{bmatrix} = 4x^2,$$

$$Per\left(T_3^{(3)}\right) = Per\begin{bmatrix} 2x & 0 & 0 \\ 0 & 2x & 0 \\ 0 & 0 & 2x \end{bmatrix} = 8x^3,$$

$$Per\left(T_4^{(3)}\right) = Per\begin{bmatrix} 2x & 0 & 0 & i \\ 0 & 2x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2x & 0 \\ i & 0 & 0 & 2x \end{bmatrix} = 16x^4 - 4x^2,$$

$$Per\left(T_5^{(3)}\right) = Per\begin{bmatrix} 2x & 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 2x & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 2x & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 2x & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 & 2x \end{bmatrix} = 32x^5 - 16x^3 + 2x.$$

ÖZGEÇMİŞ

Ahmet Zahid KÜÇÜK, 03.03.1978 de Konya'da doğdu. İlk, orta ve lise eğitimini Denizli'de tamamladı. 1994 yılında Selçuk Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünde başlayan lisans eğitimini, 1998 yılında tamamladı. 1999-2001 yılları arasında Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstirüsü Matematik A.B.D. da yüksek lisans eğitimini tamamladı. 1998-2010 yılları arasında MEB bünyesinde ve özel eğitim kurumlarında Matematik öğretmeni olarak görev yaptı. 2010 yılından bu yana, Karabük Üniversitesi Eskipazar Meslek Yüksekokulu bünyesinde Öğretim Görevlisi kadrosunda eğitim-öğretim faaliyetlerine devam etmektedir. Evli ve iki çocuk babasıdır.