T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENEL LİNEER RASGELE ETKİ MODELLERİ ALTINDA ÖN TAHMİN EDİCİLERİN KOVARYANS MATRİS KARŞILAŞTIRMASI

DOKTORA TEZİ

Melek ERİŞ BÜYÜKKAYA

Enstitü Anabilim Dalı	**:**	**MATEMATİK**
Enstitü Bilim Dalı	**:**	**UYGULAMALI MATEMATİK**
Tez Danışmanı	**:**	**Doç. Dr. Nesrin GÜLER**

Haziran 2019

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENEL LİNEER RASGELE ETKİ MODELLERİ ALTINDA ÖN TAHMİN EDİCİLERİN KOVARYANS MATRİS KARŞILAŞTIRMASI

DOKTORA TEZİ

Melek ERİŞ BÜYÜKKAYA

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Enstitü Bilim Dalı : UYGULAMALI MATEMATİK

Bu tez 11/06/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. **Müjgan TEZ** **Jüri Başkanı**	**Prof. Dr.** **Halim ÖZDEMİR** **Üye**	**Prof. Dr.** **Bahaddin SİNSOYSAL** **Üye**
Doç. Dr. **Nesrin GÜLER** **Üye**	**Doç. Dr.** **Mahpeyker ÖZTÜRK** **Üye**	

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

Melek ERİŞ BÜYÜKKAYA

11.06.2019

TEŞEKKÜR

Lisansüstü eğitimim boyunca değerli bilgi ve deneyimlerinden yararlandığım, her konuda bilgi ve desteğini almaktan çekinmediğim, araştırmanın planlanmasından yazılmasına kadar tüm aşamalarında yardımlarını esirgemeyen, teşvik eden, aynı titizlikte beni yönlendiren değerli danışman hocam Doç. Dr. Nesrin GÜLER'e teşekkürlerimi sunarım.

Anlayış ve yardımlarını esirgemeyen Prof. Dr. Halim ÖZDEMİR'e, her zaman yanımda olan annem, babam ve sevgili eşim Abdurrahman BÜYÜKKAYA'ya teşekkür ederim.

Doktora öğrenimim süresince 2211-A Yurt İçi Doktora Burs Programı kapsamında sağladığı destekten ötürü TÜBİTAK Bilim İnsanı Destekleme Daire Başkanlığı birimine teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$A^{\perp}$	: A matrisinin dik tümleyeni
A^{+}	: A matrisinin Moore-Penrose genelleştirilmiş tersi
A^{-1}	: A matrisinin tersi
A'	: A matrisinin transpozu
$A, B, C, ...$	: Matrisler
$Cov(.)$	: Kovaryans operatörü
$E(.)$	: Beklenen değer operatörü
I_m	: $m \times m$ boyutlu birim matris
$i_{+}(A)$	: A matrisinin pozitif inertiası
$i_{-}(A)$	: A matrisinin negatif inertiası
$i_{\pm}(A)$	: A matrisinin birlikte pozitif ve negatif inertiaları
P_A, F_A, E_A	: Dik izdüşüm matrisleri
$r(A)$	: A matrisinin rankı
$\Re(A)$	: A matrisinin sütun uzayı
$\mathbb{R}^{n\times 1}$	: n boyutlu reel vektörler kümesi
$\mathbb{R}^{m\times n}$	: $m \times n$ boyutlu reel matrisler kümesi
$x, y, z, ...$	: Vektörler
(a_{ij})	: Elemanları a_{ij} olan matris
$[A \quad B]$	: Parçalanmış matris
■	: İspat sonu

ÖZET

Anahtar kelimeler: BLUE, BLUP, genel lineer rasgele etki modeli, inertia, kovaryans matris, rank.

Bu çalışmada, rasgele etkilerin ilişkili ve matrislerin tam ranklı olması varsayımları üzerine herhangi bir kısıtlama olmaksızın hem sabit hem de rasgele etkileri içeren bir genel lineer rasgele etki modeli ve onun iki alt modeli ele alınmıştır. Bu üç model altında, ortak olan bilinmeyen parametre vektörlerinin ön tahmin edicileri farklı cebirsel ifadelere sahiptir. Ön tahmin edicilerin bu modeller altında farklı özelliklere ve performanslarına sahip olmalarından dolayı, ön tahmin edicilerin karşılaştırılması problemi istatistiksel çalışmaların temel konulardan biridir. Bilinmeyen parametrelerin en iyi lineer yansız ön tahmin\tahmin edicilerinin (BLUP\BLUE'larının) kovaryans matrisleri, minimum kovaryans matris yapısına dayanan tanımlarından dolayı diğer tip yansız ön tahmin\tahmin ediciler ile bir karşılaştırma ölçütü olarak kullanılmaktadır. Çalışmada bir genel lineer rasgele etki modeli ve onun iki alt modeli altında, sabit ve rasgele etkilerin bir genel lineer fonksiyonunun BLUP\BLUE'ların kovaryans matrislerinin karşılaştırılması problemi göz önüne alınmıştır. Matris rankı ve inertia formüllerini içeren bir yaklaşım kullanılarak, sabit ve rasgele etkilerin bir genel lineer fonksiyonun BLUP\BLUE'larının kovaryans matrislerinin karşılaştırılmasında çeşitli eşitlik ve eşitsizlikler verilmiştir.

İlk bölümde, bir genel lineer rasgele etki modeli ve bu modelin alt modelleri tanıtılmış ve bu modeller altında parametre tahmini ile ilgili kısa bir literatür taraması yapılmıştır. Bazı temel kavram ve teoremler ikinci bölümde verilmiştir. Üçüncü bölümde, genel lineer rasgele etki modellerinde ön tahmin\tahmin edilebilme, BLUP ve BLUE ile ilgili matris denklemleri, ön tahmin\tahmin edicilerin analitik ifadeleri ve özellikleri ele alınmıştır. Dördüncü bölümde, ele alınan model ve onun alt modelleri için sabit ve rasgele etkilerin genel lineer fonksiyonunun BLUP'ının kovaryans matrisinin karşılaştırılması ile ilgili bazı eşitlik ve eşitsizlikler verilmiştir. Ayrıca sabit etkilerin genel lineer fonksiyonun BLUE'larının kovaryans matrisleri için karşılaştırmalar yapılmıştır. Bu karşılaştırmalar için matris rank ve inertia yöntemi kullanılmıştır. Son bölüm ise, sonuç ve önerilerden oluşmaktadır.

COVARIANCE MATRIX COMPARISON OF PREDICTORS UNDER GENERAL LINEAR RANDOM EFFECT MODELS

SUMMARY

Keywords: BLUE, BLUP, general linear random effects model, inertia, covariance matrix, rank.

In this study, a general linear random effects model that includes both fixed and random effects and its two sub-sample models are considered without making any restrictions on correlation of random effects and any full rank assumptions. Predictors of joint unknown parameter vectors under these three models have different algebraic expressions. Because of having different properties and performances under these models it is one of the main subject of statistical studies to make comparison of predictors. Covariance matrices of best linear unbiased predictors\best linear unbiased estimators (BLUPs\BLUEs) of unknown parameters are used as a criterion to compare with other types unbiased predictors due to their definition of minimum covariance matrices structure. The comparison problem of covariance matrices of BLUPs\BLUEs for a general linear function of fixed effects and random effects under the general linear random effects model and its two sub-sample models is considered in the study. Variety of equalities and inequalities are given in the comparison of covariance matrices of BLUPs\BLUEs of a general linear function of fixed effects and random effects under the models by using an approach consisting matrix rank and inertia formulas.

In the first chapter, a genel linear random effects model and its sub-sample models have been introduced and short literature information has been given about prediction of parameters under these models. Some fundamental concepts and theorems have been considered in the second chapter. In the third chapter, prediction\estimation in general linear random effects model, matrix equations related to BLUP and BLUE, and analytical expressions of predictors and their properties are discussed, respectively. In the fourth chapter, some equality and inequalities related to the comparison of the covariance matrix of the BLUP of the general linear function of fixed and random effects are given for the considered model and its sub-models. In addition, the comparisons of the covariance matrices of the BLUEs of the general linear function of fixed effects are made. Matrix rank and inertia method are used for the comparisons. The last chapter consists of conclusion and proposals.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

İstatistiksel modellerin önemli bir parçası olan ve veri analizinde istatistiksel çıkarımlar yapmak için yaygın olarak kullanılan bir genel lineer rasgele etki modeli,

$$\beta = A\alpha + \gamma$$

olmak üzere,

$$\mathcal{M}: y = X\beta + \varepsilon = \mathrm{XA}\alpha + X\gamma + \varepsilon \tag{1.1}$$

olarak tanımlanır. Ayrıca

$$\mathcal{M} = \{y, \mathrm{XA}\alpha + X\gamma, D, R, K\}$$

gösterimi ile ifade edilebilir. Bu model, $y \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ gözlenebilir rasgele vektörünün beklenen değeri $E(y) = \mathrm{XA}\alpha$ ve varyans-kovaryans matrisi $Cov(y) = XDX' + XK + K'X' + R$ kabul edilerek, matrisler üzerinde herhangi bir rank varsayımı ile ilgili kısıtlama olmaksızın ve rasgele etkilerin ilişkili olması kabulü ile birlikte genel durumlara karşılık gelir.

(1.1) modelindeki y, X ve ε

$$\mathcal{M}: \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}\beta + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}(A\alpha + \gamma) + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

olarak yazılabilir. Buradan (1.1) modelinin, iki alt genel lineer rasgele etki modeli

$$\mathcal{M}_1: y_1 = X_1\beta + \varepsilon_1 = X_1(A\alpha + \gamma) + \varepsilon_1, \tag{1.3}$$

ve

$$\mathcal{M}_2: y_2 = X_2\beta + \varepsilon_2 = X_2(A\alpha + \gamma) + \varepsilon_2, \tag{1.4}$$

elde edilir. Burada $y_i \in \mathbb{R}^{n_i \times 1}$, $X_i \in \mathbb{R}^{n_i \times p}$ ve $\varepsilon_i \in \mathbb{R}^{n_i \times 1}$, $n = n_1 + n_2, i = 1{,}2$'dir.

Lineer rasgele etki modellerinde ele alınan temel konulardan biri bilinmeyen parametreler vektörlerinin tahmin problemidir. Alt modeller ve tam modeller yapı olarak benzemelerine rağmen içerdikleri bazı farklılıklardan dolayı, bu modeller altında ele alınan ortak bilinmeyen parametrelerin ön tahmin edicileri farklılık gösterir. Tahminler için özellikle, istatistiksel ve matematiksel açıdan basit ve optimal özelliklere sahip en iyi lineer yansız ön tahmin ediciler (best linear unbiased predictors-BLUPs) olarak bilinen tahmin ediciler kullanılır. BLUP'lar bilinmeyen parametrelerin yansız ön tahmin edicileri arasında Löwner sıralamasına göre en küçük kovaryans matrisine sahip olan tahmin ediciler olarak tanımlanır. BLUP'ların kovaryans matrisleri, diğer tip yansız ön tahmin edicilerin kovaryans matrisleri ile Löwner sıralamasına göre bir karşılaştırma kriteri olarak kullanılır.

Alt modeller, $\mathcal{M}$ tam modelinden, özellikle bazı gözlemlerin çıkarılması ile elde edilen modellerdir. Diğer taraftan $\mathcal{M}$ tam modeli ise $\mathcal{M}_1$ ve $\mathcal{M}_2$ alt modellerine yeni gözlemler eklenmesi ile elde edilen modellerdir. Bu durumda bu üç model, eklenen veya silinen gözlemlerin olduğu durumlarda ayrı ayrı ele alınabileceği gibi eşzamanlı sonuçlar çıkarmak için de kullanılabilir. Bu modeller yapı olarak benzemelerine rağmen içerdikleri bazı farklılıklardan dolayı modellerdeki ortak bilinmeyen parametrelerin ön tahmin edicileri farklı ifade, özellik ve performanslara sahiptir. Bu nedenle çalışmada, $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}_1$ ve $\mathcal{M}_2$ modelleri altında ortak bilinmeyen parametrelerin BLUP'larının kovaryans matrislerinin karşılaştırmaları ele alınmıştır. Öncelikle modeller altında bilinmeyen parametrelerin bir genel lineer fonksiyonunun BLUP'ının kovaryans matrisi ile diğer tip yansız ön tahmin edicilerinin kovaryans matrisleri için bazı eşitlikler ve eşitsizlikler verilmiştir. Daha sonra sırasıyla tam model ile alt model ve iki alt model altında bilinmeyen parametrelerin bir genel lineer fonksiyonun BLUP'larının kovaryans matrislerinin karşılaştırmaları için benzer eşitlikler ve eşitsizlikler verilmiştir. Bu karşılaştırmalar yapılırken matrislerin bazı rank ve inertia formülleri kullanılmıştır. Çünkü matris cebirindeki rank ve inertialar ile ilgili bazı formüller, tahmin edicilerin karşılaştırılması ve onların istatistiksel özelliklerinin belirlenmesinde elde edilen, matrislerin Moore-Penrose genelleştirilmiş terslerini de içeren karmaşık matris denklemlerini basitleştirmek için kullanılan önemli araçlardır.

Genel lineer rasgele etki modeli altında tüm bilinmeyen parametrelerin lineer kombinasyonu, ilk olarak Tian (2015a)'da formüle edilmiştir. Ayrıca, bu çalışmada genel lineer rasgele etki modeli altında tüm bilinmeyen parametreler vektörünün BLUP'ı için analitik bir formül verilmiş ve temel BLUP denklemi, bir kısıtlı kuadratik matris değerli fonksiyonun optimizasyon probleminin çözülmesi vasıtasıyla elde edilmiştir. Gelecek gözlemlerle genel lineer rasgele etki modelleri altında genel lineer kombinasyonların lineer tahminleri üzerine bazı sonuçlarda, Tian (2015b) tarafından elde edilmiştir. Tüm bilinmeyen parametrelerin lineer kombinasyonlarının ön tahmin edicileri üzerine çalışmalar için Drygas (1975), Henderson (1975), Harville (1976), Pfeffermann (1984), Robinson (1991), Searle (1997), Jiang (1997), Toutenburg ve Shalabh (2000), Liu ve arkadaşları (2008), Lu ve arkadaşları (2015) ve Gan ve arkadaşları (2017) çalışmaları örnek olarak verilebilir. Lineer rasgele etki modeli $\mathcal{M}$ ve onun alt modelleri $\mathcal{M}_1$ ve $\mathcal{M}_2$ altında, bilinmeyen parametre vektörlerinin lineer kombinasyonunun BLUP'ının istatistiksel ve cebirsel özellikleri ile ilgili detaylı çalışma Tian ve Jiang (2016a)'da verilmiştir. Simetrik matrislerin rank ve inertiaları ile simetrik matrislerin Löwner sıralaması ve inertiaları arasındaki ilişkiler üzerine detaylı bilgi Tian (2010, 2012), Puntanen ve arkadaşları (2011) ve Tian ve Jiang (2016b) çalışmalarından görülebilir. Tahmin/ön tahmin edicilerin kovaryans matrisinin, matris rank ve inertia yöntemiyle karşılaştırılması ile ilgili sonuçlar için Tian ve Guo (2016) ve Tian (2017a, 2017b) çalışmalarına bakılabilir. Ayrıca konu ile ilgili daha fazla kaynak olarak Rao (1975), Haslett ve Puntanen (2010a, 2010b ,2011, 2013), Liu ve Wang (2013), Arendacká ve

Puntanen (2015), Haslett ve arkadaşları (2015) ve Hou ve Jiang (2018) çalışmaları verilebilir.

BÖLÜM 2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde, çalışmanın diğer bölümlerinde kullanılacak bazı tanımlar ve ispatsız olarak bazı teoremler verilecektir.

2.1. Matris Cebiri ile İlgili Bazı Temel Bilgiler

Tanım 2.1.1. $c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n = 0$ olacak şekilde tümü birden sıfır olmayan $c_1, c_2, \dots, c_n$ skalerleri varsa, $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ vektörlerinin kümesine lineer bağımlıdır, aksi takdirde lineer bağımsızdır denir (Magnus ve Neudecker, 1988).

Tanım 2.1.2. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $a_1, a_2, \dots, a_n$ sütunlarına sahip olan bir matris olsun. $x' = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ vektörü için $Ax = x_1a_1 + x_2a_2 + \cdots + x_na_n$ ifadesi A matrisinin sütunlarının bir lineer kombinasyonunu gösterir. A matrisinin sütunlarının lineer kombinasyonu olarak ifade edilebilen tüm vektörlerin kümesine A matrisinin sütun uzayı denir ve $\Re(A) = \{y \in \mathbb{R}^{n\times 1}: y = Ax, x \in \mathbb{R}^{n\times 1}\}$ şeklinde ifade edilir. $\Re(A)$, A matrisinin sütunları tarafından üretilir (Venit ve Bishop, 1985; Sengupta ve Jammalamadaka, 2003).

Tanım 2.1.3. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrisinin $a_1', a_2', \dots, a_n'$ satırları tarafından üretilen $\mathbb{R}^{n\times 1}$'in alt uzayına A matrisinin satır uzayı denir. A matrisinin satır uzayı $\Re(A')$ olarak gösterilir (Sengupta ve Jammalamadaka, 2003).

Tanım 2.1.4. Aşağıdaki özellikleri sağlayan bir matrise satır indirgenmiş eşelon biçimdedir denir (Venit ve Bishop, 1985).

a. Tüm elemanları sıfır olmayan herhangi bir satırda, sıfırdan farklı ilk eleman 1'dir (Bu eleman 1 baş elemanı olarak adlandırılır).

b. 1 baş elemanını içeren herhangi bir sütundaki diğer tüm elemanlar sıfırdır.

c. Sıfırdan farklı eleman içeren herhangi iki satırda, daha büyük numaralı satırın 1 baş elemanı daha sağda bulunur.

d. Sadece sıfır elemanlarından ibaret olan herhangi bir satır, sıfırdan farklı eleman içeren diğer satırlardan daha aşağıdadır.

Tanım 2.1.5. Matrisler için kullanılan elementer matris işlemleri aşağıdaki gibidir (Seber, 2008).

a. Bir satırı (veya sütunu) sıfır olmayan bir skaler ile çarpmak.

b. İki satırın (veya sütunun) yerini değiştirmek.

c. Bir satırın (veya sütunun) yerine bu satır (veya sütun) ile diğer bir satırın(sütunun) bir katının toplamını yazmak.

Teorem 2.1.6. $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ matrisi, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ matrisinin satır indirgenmiş eşelon biçimi olsun. A matrisinin satır uzayı ile B matrisinin satır uzayı aynıdır (Venit ve Bishop, 1985).

Tanım 2.1.7. A matrisinin sütun uzayının boyutuna A matrisinin sütun rankı, satır uzayının boyutuna ise A matrisinin satır rankı denir. Bir A matrisinin satır indirgenmiş eşelon biçimindeki sıfırdan farklı satırlarının sayısına A matrisinin rankı denir ve $r(A\ )$ ile gösterilir (Venit ve Bishop, 1985).

Teorem 2.1.8. Bir $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ matrisinin satır rankı, sütun rankı ve rankı eşittir (Venit ve Bishop, 1985).

Tanım 2.1.9. A ve B $m \times n$ boyutlu matrisler olsun. Eğer B matrisi, A matrisinin elementer satır veya sütun işlemleri tarafından elde edilirse, A matrisi B matrisine denktir denir (Seber, 2008).

Teorem 2.1.10. A matrisi B matrisine denk ise $r(A) = r(B)$'dir (Seber, 2008).

Tanım 2.1.11. A bir $m \times n$ boyutlu matris olsun. $Ax = \lambda x$ olacak şekildeki sıfırdan farklı bir $x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ varsa, λ skalerine A matrisinin özdeğeri, x vektörüne ise λ özdeğerine ilişkin bir özvektör denir (Harville, 1997).

Tanım 2.1.12. Bir $A = A' \in \mathbb{R}^{m\times m}$ matrisinin inertiası

$$In(A) = \{i_+(A), i_-(A), i_0(A)\}$$

olarak tanımlanır (Tian, 2010). $i_+(A)$, $i_-(A)$ ve $i_0(A)$, sırasıyla A matrisinin katlılıkları göz önünde bulundurularak matrisin pozitif, negatif ve sıfır olan özdeğerlerinin sayısını gösterir.

Teorem 2.1.13. $A = A' \in \mathbb{R}^{m\times m}$ olsun. A matrisinin pozitif inertiası ile negatif inetiasının toplamı, A matrisinin rankını verir. Yani

$$r(A) = i_+(A) + i_-(A) \tag{2.1}$$

dır (Tian, 2010).

2.2. Kuadratik Formlar ve İlgili Bazı Tanımlar

Tanım 2.2.1. $y = (y_i) \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ vektörü ve simetrik bir $A = \left(a_{ij}\right) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ matrisi için,

$$Q(y) = y'Ay = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} y_i y_j a_{ij}$$

ifadesi, $y_1, y_2, \dots, y_n$ elemanlarının bir kuadratik formudur. Burada A matrisine bu kuadratik formun matrisi denir. Kuadratik form vasıtasıyla aşağıdaki tanımlar verilebilir (Graybill, 1969; Sengupta ve Jammalamadaka, 2003).

a. $\forall\, y \neq 0$ için $y'Ay > 0$ ise A pozitif tanımlıdır.

b. $\forall\, y \neq 0$ için $y'Ay < 0$ ise A negatif tanımlıdır.

c. $\forall\, y$ için $y'Ay \geq 0$ ise A pozitif yarı-tanımlıdır.

d. $\forall\, y$ için $y'Ay \leq 0$ ise A negatif yarı-tanımlıdır.

Tanım 2.2.2. A ve B simetrik matrisleri için $A \succcurlyeq B$ ifadesinde ‘‘$\succcurlyeq$’’ ile gösterilen kısmi sıralama Löwner sıralaması olarak tanımlanır (Bhatia, 2007).

A uygun boyutlu simetrik matris olsun. A matrisinin pozitif tanımlı, pozitif yarı-tanımlı, negatif tanımlı, negatif yarı-tanımlı matris olduğu, Löwner sıralamasına göre sırasıyla $A \succ 0$, $A \succcurlyeq 0$, $A \prec 0$ ve $A \preccurlyeq 0$ eşitsizlikleri ile gösterilir. A ve B aynı boyutlu simetrik iki matris olduğunda $A - B$ matrisinin pozitif tanımlı, pozitif-yarı tanımlı, negatif tanımlı, negatif yarı-tanımlı olduğu, Löwner sıralamasına göre sırasıyla $A \succ B$, $A \succcurlyeq B$, $A \prec B$ ve $A \preccurlyeq B$ eşitsizlikleri ile gösterilir.

Tanım 2.2.3. A ve B pozitif yarı-tanımlı matrisleri için $B - A$ pozitif yarı-tanımlı ise Löwner sıralamasına göre A, B den küçüktür denir. $A \preccurlyeq B$ veya $B \succcurlyeq A$ ile gösterilir. Eğer $B - A$ pozitif tanımlı ise, bu durumda A matrisine kesinlikle B matrisinden küçüktür denir. $A \prec B$ veya $B \succ A$ ile gösterilir (Sengupta ve Jammalamadaka, 2003).

Teorem 2.2.4. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrisi r ranklı pozitif yarı-tanımlı bir matristir ancak ve ancak $A = RR'$ olacak şekilde r ranklı $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrisi vardır (Seber, 1977).

2.3. Parçalanmış Matrisler

Tanım 2.3.1. Bir kümenin parçalanmasına benzer olarak bir matrisin parçalanması, orjinal matrisin her bir elemanının, parçalanışın yalnız ve yalnız bir alt matrisine düşecek şekilde karşılıklı ayrık alt matrislere ayrılmış halidir. Örneğin, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ matrisi için

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

ifadesi, A matrisinin bir parçalanışıdır. Burada $m_1 + m_2 = m$ ve $n_1 + n_2 = n$ olmak üzere $A_{11} \in \mathbb{R}^{m_1 \times n_1}$, $A_{12} \in \mathbb{R}^{m_1 \times n_2}$, $A_{21} \in \mathbb{R}^{m_2 \times n_1}$ ve $A_{22} \in \mathbb{R}^{m_2 \times n_2}$'dir. Yukarıda verilen matrisin transpozu

$$A' = \begin{bmatrix} A'_{11} & A'_{12} \\ A'_{21} & A'_{22} \end{bmatrix}$$

şeklindedir (Seber, 2008).

2.4. Bir Matrisin Moore-Penrose Genelleştirilmiş Tersi

Teorem 2.4.1. A $m \times n$ boyutlu matrisi için, aşağıdaki dört şartı sağlayan tek bir G $n \times m$ boyutlu matrisi vardır. Bu G matrisi A matrisinin Moore-Penrose genelleştirilmiş tersidir ve $G = A^+$ ile gösterilir (Harville, 1997).

a. $AGA = A$ (yani G, A'nın genelleştirilmiş tersidir),
b. $GAG = G$ (yani A, G'nın genelleştirilmiş tersidir),
c. $(AG)' = AG$ (yani AG simetriktir),
d. $(GA)' = GA$ (yani GA simetriktir).

Teorem 2.4.2. Eğer $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ matris ise, $A^+ \in \mathbb{R}^{n \times m}$ matristir (Harville, 1997).

Teorem 2.4.3. $(A')^+ = (A^+)'$ 'dir (Harville, 1997).

2.5. Lineer Denklem Sistemleri

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{k \times t}$ ve $C \in \mathbb{R}^{m \times t}$ bilinen matrisler olmak üzere,

$$AXB = C \tag{2.2}$$

matris denklem sistemi ele alınsın. Bu durumda aşağıdakiler verilebilir.

Tanım 2.5.1. (2.2) matris denklem sistemini sağlayan en az bir $X \in \mathbb{R}^{n\times k}$ matrisi varsa, sistem tutarlıdır denir. Aksi takdirde sistem tutarsızdır (Graybill, 1969).

Teorem 2.5.2. (2.2) matris denklem sisteminin tutarlı olmasının gerek ve yeter şartı $\Re(C) \subset \Re(A)$ ve $\Re(C') \subset \Re(B')$ olmasıdır (Graybill, 1969).

Teorem 2.5.3. (2.2) matris denklem sistem tutarlı ise uygun boyutlu herhangi U ve V matrisleri için

$$X = A^{+}CB^{+} + (I - A^{+}A)U + V(I - BB^{+})$$

ile verilen X matrisi, (2.2) matris denkleminin genel çözümüdür (Graybill, 1969).

Sonuç 2.5.4. (2.2) matris denklem sistemi tutarlı ise $X = A^{+}CB^{+}$, (2.2) denklem sistemi için bir çözümdür (Graybill, 1969).

(2.2) matris denkleminde B yerine I birim matrisi alınırsa, $AX = C$ lineer denklem sistemi elde edilir. Böylece Teorem 2.5.3'ün daha özel durumu olarak aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 2.5.5. $AX = C$ lineer matris denklemi tutarlıdır $\Leftrightarrow r[A \quad C] = r(A)$ veya denk olarak, $AA^{+}C = C$'dir. Bu durumda, denklemin genel çözümü $X = A^{+}C + (I - A^{+}A)U$ olarak yazılabilir. Burada U keyfi bir matristir (Penrose, 1955).

2.6. İzdüşüm Matrisleri

Tanım 2.6.1. Her $u, v \in S$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ için $au + bv \in S$ olacak şekilde sonlu sayıda vektörlerin boş kümeden farklı bir S kümesi bir vektör uzayıdır (Sengupta ve Jammalamadaka, 2003).

Tanım 2.6.2. S_1 ve S_2 vektör uzayları olsun. S_1 vektör uzayındaki her vektör S_2 vektör uzayındaki tüm vektörlere dik ise S_1 ve S_2 vektör uzayları birbirine diktir denir ve $S_1 \perp S_2$ ile gösterilir (Sengupta ve Jammalamadaka, 2003).

Tanım 2.6.3. S_1 ve S_2 vektör uzayları olsun. $u \in S_1$ ve $v \in S_2$ olmak üzere $u + v$ formundaki tüm vektörleri içeren vektör uzayına bu iki vektör uzayının toplamı denir ve bu toplam $S_1 + S_2$ ile gösterilir. Eğer S_1 ve S_2 vektör uzayları birbirine dikse, bu durumda $S_1 + S_2$ ile gösterilen toplam $S_1 \oplus S_2$ şeklinde ifade edilir (Sengupta ve Jammalamadaka, 2003).

Tanım 2.6.4. Eğer $S_1 \oplus S_2 = \mathbb{R}^{n\times 1}$ ise S_1 ve S_2 alt uzaylarına birbirinin dik tümleyenleri denir ve $S_1 = S_2^{\perp}$ (veya $S_2 = S_1^{\perp}$) şeklinde gösterilir. Bir S vektör uzayı için $\left(S^{\perp}\right)^{\perp} = S$'dir (Sengupta ve Jammalamadaka, 2003).

Tanım 2.6.5. S vektör uzayı olmak üzere her $v \in S$ için $Pv = v$ ve $Pv \in S$ ise P matrisine bir izdüşüm matrisi denir. Her izdüşüm matrisi bir idempotent matristir (Sengupta ve Jammalamadaka, 2003).

Tanım 2.6.6. P matrisi, S vektör uzayının bir izdüşüm matrisi olmak üzere $I - P$ matrisi $S^{\perp}$ vektör uzayının bir izdüşüm matrisi ise, bu durumda P matrisine S vektör uzayının bir dik izdüşüm matrisi denir (Sengupta ve Jammalamadaka, 2003).

Teorem 2.6.7. Herhangi bir A matrisi için AA^{+} matrisi $\Re(A)$ için bir dik izdüşüm matrisidir (Tian, 2010).

Teorem 2.6.8. $\Re(AA^{+}) = \Re(A)$ ve $\Re(I - AA^{+}) = \Re(A)^{\perp}$'dir (Sengupta ve Jammalamadaka, 2003).

Teorem 2.6.9. $P_A = AA^{+}$, $E_A = A^{\perp} = I_m - AA^{+}$ ve $F_A = I_n - A^{+}A$ matrisleri sırasıyla $\Re(A)$, $\Re(A)^{\perp}$ ve $\Re(A')^{\perp}$ üzerine dik izdüşüm matrisleridir (Sengupta ve Jammalamadaka, 2003).

Teorem 2.6.10. Uygun boyutlu A ve B matrisleri için,

a. $B'A = 0 \Leftrightarrow \Re(B) = \Re(A)^{\perp}$,

b. $\Re(B) \subseteq \Re(A) \Leftrightarrow \Re(B)^{\perp} \subseteq \Re(A)^{\perp}$,

dir (Sengupta ve Jammalamadaka, 2003).

2.7. Rasgele Vektörler ve Matrislerle İlgili Bazı Temel Bilgiler

Rasgele vektör, elemanları rasgele değişkenler olan vektör ve benzer şekilde rasgele matris ise, elemanları rasgele değişkenler olan matristir. Rasgele vektör ve matrislerle ilgili bazı temel kavram ve teoremler aşağıda verilmektedir. Bu tanım ve teoremler ile ilgili detaylı bilgi için örneğin, Seber (1977) ve Puntanen ve arkadaşları (2011) kaynaklarına bakılabilir.

Tanım 2.7.1. $Z = (z_{ij})$ $m \times n$ boyutlu rasgele bir matris olmak üzere, Z matrisinin beklenen değeri $E(Z) = \left(E(z_{ij})\right)$'dir.

Teorem 2.7.2. Z rasgele bir matris, A, B ve C bilinen uygun boyutlu matrisler olmak üzere, $E(AZB + C) = AE(Z)B + C$'dir.

Teorem 2.7.3. A ve B uygun boyutlu matrisler, X ve Y uygun boyutlu rasgele matrisler olmak üzere, $E(AX + BY) = AE(X) + BE(Y)$'dir.

Tanım 2.7.4. x rasgele değişkeninin varyansı,

$$Var(x) = \sigma_x^2 = E(x - \mu)^2$$

dir. Burada, $\mu = E(x)$'dir.

Tanım 2.7.5. x ve y rasgele vektörleri arasındaki kovaryans,

$$Cov(x, y) = \sigma_{xy} = E(x - \mu)(y - v)'$$

dir. Burada $\mu = E(x)$, $v = E(y)$'dir. Özel olarak,

$$Cov(x, x) = Cov(x) = E(x - \mu)(x - \mu)'$$

dır.

Teorem 2.7.6. $A \in \mathbb{R}^{k\times m}$ ve $B \in \mathbb{R}^{p\times n}$ bilinen matrisler, X ve Y rasgele matrisler olsun. Bu durumda $Cov(AX, BY) = ACov(X, Y)B'$ dir.

2.8. Rank ve İnertia Özellikleri

Bu bölümde matrislerin rank ve inertiaları ile ilgili bazı temel sonuçlar verilecektir. Bu sonuçların ranklar ile ilgili detaylı bilgisi için Marsaglia ve Styan (1974) ve rank-inertia ilişkisi ve inertia özellikleri için Tian (2010, 2017b) kaynaklarına bakılabilir.

Teorem 2.8.1. $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ veya $A = A', B = B' \in \mathbb{R}^{m\times m}$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler söylenebilir.

a. $A = B \Leftrightarrow r(A - B) = 0$,
b. $A - B$ tersinirdir $\Leftrightarrow r(A - B) = m$,
c. $A \succ B \Leftrightarrow i_+(A - B) = m$,
d. $A \prec B \Leftrightarrow i_-(A - B) = m$,
e. $A \succcurlyeq B \Leftrightarrow i_-(A - B) = 0$,
f. $A \preccurlyeq B \Leftrightarrow i_+(A - B) = 0$.

Teorem 2.8.2. $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times k}$ ve $C \in \mathbb{R}^{l\times n}$ olsun. Bu durumda

$$r[A \quad B] = r(A) + r(E_A B) = r(B) + r(E_B A), \tag{2.3}$$

$$r\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} = r(A) + r(CF_A) = r(C) + r(AF_C), \tag{2.4}$$

$$r\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = r(B) + r(C) + r(E_BAF_C), \tag{2.5}$$

dır. Özellikle

a) $r[A \quad B] = r(A) \Leftrightarrow \Re(B) \subseteq \Re(A) \Leftrightarrow AA^{+}B = B \Leftrightarrow E_AB = 0,$

b) $r\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} = r(A) \Leftrightarrow \Re(C') \subseteq \Re(A') \Leftrightarrow CA^{+}A = C \Leftrightarrow CF_A = 0,$

c) $r[A \quad B] = r(A) + r(B) \Leftrightarrow \Re(A) \cap \Re(B) = \{0\} \Leftrightarrow \Re[(E_AB)'] = \Re(B')$
$\Leftrightarrow \Re[(E_BA)'] = \Re(A'),$

d) $r\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} = r(A) + r(C) \Leftrightarrow \Re(A') \cap \Re(C') = \{0\} \Leftrightarrow \Re(CF_A) = \Re(C)$
$\Leftrightarrow \Re(AF_C) = \Re(A),$

e) $r\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = r(B) + r(C) \Leftrightarrow E_BAF_C = 0,$

f) $\Re(A) \cap \Re(B) = \{0\}$ ve $\Re(A') \cap \Re(B') = \{0\}$ ise $r[A + B] = r(A) + r(B),$

dır.

Teorem 2.8.3. $A = A' \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $B = B' \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ve $Q \in \mathbb{R}^{m\times n}$ olsun. Bu durumda

$$i_{\pm}(A^{+}) = i_{\pm}(A), \tag{2.6}$$

$$i_{\pm}(-A) = i_{\mp}(A), \tag{2.7}$$

$$i_{\pm}\begin{bmatrix} A & B \\ B' & D \end{bmatrix} = i_{\mp}\begin{bmatrix} -A & B \\ B' & -D \end{bmatrix} = i_{\pm}\begin{bmatrix} A & -B \\ -B' & D \end{bmatrix}, \tag{2.8}$$

$$i_{\pm}\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} = i_{\pm}(A) + i_{\pm}(B), \tag{2.9}$$

$$i_{+}\begin{bmatrix} 0 & Q \\ Q' & 0 \end{bmatrix} = i_{-}\begin{bmatrix} 0 & Q \\ Q' & 0 \end{bmatrix} = r(Q), \tag{2.10}$$

dır.

Teorem 2.8.4. $A = A' \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ve $D = D' \in \mathbb{R}^{n\times n}$ olsun. Bu durumda

$$i_{\pm}\begin{bmatrix} A & B \\ B' & 0 \end{bmatrix} = r(B) + i_{\pm}(E_B A E_B), \tag{2.11}$$

$$r\begin{bmatrix} A & B \\ B' & 0 \end{bmatrix} = 2r(B) + r(E_B A E_B), \tag{2.12}$$

$$i_{\pm}\begin{bmatrix} A & B \\ B' & D \end{bmatrix} = i_{\pm}(A) + i_{\pm}\begin{bmatrix} 0 & E_A B \\ B'E_A & D - B'A^{+}B \end{bmatrix}, \tag{2.13}$$

$$A \succcurlyeq 0 \text{ ise } i_{+}\begin{bmatrix} A & B \\ B' & 0 \end{bmatrix} = r[A \quad B], \tag{2.14}$$

$$A \succcurlyeq 0 \text{ ise } i_{-}\begin{bmatrix} A & B \\ B' & 0 \end{bmatrix} = r(B), \tag{2.15}$$

$$A \succcurlyeq 0 \text{ ise } r\begin{bmatrix} A & B \\ B' & 0 \end{bmatrix} = r[A \quad B] + r(B), \tag{2.16}$$

$$\mathfrak{R}(B) \subseteq \mathfrak{R}(A) \text{ ise } i_{\pm}\begin{bmatrix} A & B \\ B' & D \end{bmatrix} = i_{\pm}(A) + i_{\pm}(D - B'A^{+}B), \tag{2.17}$$

dır.

Teorem 2.8.5. $A = A' \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $B \in \mathbb{R}^{q\times n}$, $D = D' \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $P \in \mathbb{R}^{q\times m}$ ve $\mathfrak{R}(A) \subseteq \mathfrak{R}(P')$ ve $\mathfrak{R}(B) \subseteq \mathfrak{R}(P)$ olsun. $M = \begin{bmatrix} -A & P' & 0 \\ P & 0 & B \\ 0 & B' & D \end{bmatrix}$ olmak üzere,

$$i_{\pm}(D - B'(P')^{+}AP^{+}B) = i_{\pm}(M) - r(P), \tag{2.18}$$

ve

$$r(D - B'(P')^{+}AP^{+}B) = r(M) - 2r(P), \tag{2.19}$$

dır. Böylece,

$$B'(P')^{+}AP^{+}B = D \Leftrightarrow \ r(M) = 2r(P),$$
$$B'(P')^{+}AP^{+}B \succcurlyeq D \Leftrightarrow \ i_{+}(M) = r(P),$$
$$B'(P')^{+}AP^{+}B \preccurlyeq D \ \Leftrightarrow \ i_{-}(M) = r(P),$$

dir.

BÖLÜM 3. GENEL LİNEER RASGELE ETKİ MODELLERİ ALTINDA TAHMİN

3.1. Genel Lineer Rasgele Etki Modeli Altında BLUP

Genel bir lineer rasgele etki modeli

$$\mathcal{M}: \;\; y = X\beta + \varepsilon, \tag{3.1}$$

olarak ifade edilir. Burada $y \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ gözlenebilir rasgele vektör, $X \in \mathbb{R}^{n\times p}$ keyfi ranklı bilinen matris ve $\varepsilon \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ rasgele hatalar vektörüdür. $A \in \mathbb{R}^{p\times k}$ keyfi ranklı, bilinen matris, $\alpha \in \mathbb{R}^{k\times 1}$ sabit fakat bilinmeyen parametre vektörü ve $\gamma \in \mathbb{R}^{p\times 1}$ rasgele değişkenler vektörü olmak üzere (3.1)'deki $\beta \in \mathbb{R}^{p\times 1}$ bilinmeyen rasgele vektörü

$$\beta = A\alpha + \gamma \tag{3.2}$$

dır. (3.1) ve (3.2)'den genel lineer rasgele etki modeli aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\mathcal{M}: \;\; y = XA\alpha + X\gamma + \varepsilon = \hat{X}\alpha + X\gamma + \varepsilon. \tag{3.3}$$

Burada $XA = \hat{X}$'dır. (3.3) modelinde,

$$E\begin{bmatrix}\gamma\\ \varepsilon\end{bmatrix} = 0 \text{ ve } Cov\begin{bmatrix}\gamma\\ \varepsilon\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D & K\\ K' & R\end{bmatrix} := \Sigma \tag{3.4}$$

kabul edilmektedir. Burada $D \in \mathbb{R}^{p\times p}$, $K \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ olmak üzere, $\Sigma \in \mathbb{R}^{(n+p)\times(n+p)}$ matrisi pozitif yarı-tanımlı simetrik matristir. Böylece (3.3) modeli altında,

$E(y) = \hat{X}\alpha,$

$Cov(y) = XDX' + XK + K'X' + R := V$

olarak elde edilir. Burada, $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrisi pozitif yarı-tanımlı simetrik matristir. Ayrıca bu matris $\tilde{X} = [X \quad \mathrm{I_n}]$ olmak üzere

$$V = [X \quad \mathrm{I}_n]\begin{bmatrix} D & K \\ K' & R \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X' \\ \mathrm{I_n} \end{bmatrix} = \tilde{X}\Sigma\tilde{X}' \tag{3.5}$$

olarakta yazılabilir. Çalışma boyunca genel lineer rasgele etki modelinin tutarlı yani, 1 olasılıkla

$$y \in \Re[\hat{X} \quad V] \tag{3.6}$$

olduğu kabul edilmektedir (Rao, 1973).

(3.3) modeli altında, sabit ve rasgele etkilerin bir genel lineer fonksiyonu aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\phi = F\alpha + G\gamma + H\varepsilon. \tag{3.7}$$

Burada $F \in \mathbb{R}^{s\times k}$, $G \in \mathbb{R}^{s\times p}$ ve $H \in \mathbb{R}^{s\times n}$'dır. (3.3) ve (3.7) altında, $J = [G \quad H]$ olmak üzere, $E(\phi)$, $Cov(\phi)$ ve $Cov(\phi, y)$ sırasıyla,

$$E(\phi) = F\alpha, \tag{3.8}$$

$$Cov(\phi) = [G \quad H]\begin{bmatrix} D & K \\ K' & R \end{bmatrix}\begin{bmatrix} G' \\ H' \end{bmatrix} = J\Sigma J', \tag{3.9}$$

ve

$$Cov(\phi, y) = [G \quad H]\begin{bmatrix} D & K \\ K' & R \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X' \\ \mathrm{I_n} \end{bmatrix} = J\Sigma\tilde{X}' := C, \tag{3.10}$$

dır.

$\mathcal{M}$ modeli altında ϕ lineer fonksiyonunun tahmin edilebilir olmasının gerek ve yeter koşulu

$$\Re(F') \subseteq \Re(\hat{X}') \tag{3.11}$$

yani $A_0\hat{X} = F$ olacak şekilde en az bir A_0 matrisinin mevcut olmasıdır (Tian, 2015a; Tian 2017b).

Eğer $E(A_0y - \phi) = 0$ olacak şekilde $A_0 \in \mathbb{R}^{s\times n}$ matrisi varsa, (3.7)'de verilen ϕ vektörü (3.3) modeli altında ön tahmin edilebilirdir (Puntanen ve ark., 2011). ϕ, (3.3) modeli altında ön tahmin edilebilir olduğunda, Löwner sıralamasına göre,

$$E(A_0y - \phi) = 0 \text{ ve } Cov(A_0y - \phi) = min \tag{3.12}$$

olacak şekilde A_0 matrisi mevcut ise, A_0 lineer istatistiği, (3.3) modeli altında ϕ'nin En İyi Lineer Yansız Ön Tahmin Edicisi (BLUP) olarak tanımlanır ve

$$A_0y = BLUP_{\mathcal{M}}(\phi) = BLUP_{\mathcal{M}}(F\alpha + G\gamma + H\varepsilon) \tag{3.13}$$

ile gösterilir. BLUP tanımı ilk olarak Goldberger (1962) tarafından yapılmıştır. (3.7) bilinmeyen parametreler vektöründe $G = 0$ ve $H = 0$ olursa, (3.13)'deki BLUP denklemi, $\mathcal{M}$ altında $F\alpha$ için En İyi Lineer Yansız Tahmin Edicisi (BLUE) olarak ifade edilir ve

$$A_0y = BLUE_{\mathcal{M}}(F\alpha) \tag{3.14}$$

olarak gösterilir. Belirtmek gerekir ki (3.11) ile verilen ifade, aynı zamanda $F\alpha$'nın $\mathcal{M}$ modeli altında tahmin edilebilir parametrik fonksiyon olması için gerek ve yeter koşuldur (Alalouf ve Styan, 1979; Tian ve ark., 2008).

Teorem 3.1.1. (Temel BLUP denklemi) (3.7)'de verilen ϕ, (3.3) modeli altında ön tahmin edilebilir olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} & E(A_0 y - \phi) = 0 \text{ ve } Cov(A_0 y - \phi) = min \\ & \Leftrightarrow A_0[\hat{X} \quad V\hat{X}^{\perp}] = [F \quad C\hat{X}^{\perp}]. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Buna göre A_0'ın çözümü ve buna karşılık gelen $BLUP_{\mathcal{M}}(\phi)$,

$$BLUP_{\mathcal{M}}(\phi) = A_0 y = ([F \quad C\hat{X}^{\perp}][\hat{X} \quad V\hat{X}^{\perp}]^{+} + U[\hat{X} \quad V\hat{X}^{\perp}]^{\perp})y \tag{3.16}$$

ile verilir. Burada $U \in \mathbb{R}^{s \times n}$ keyfi bir matristir.

Teorem 3.1.1 için örneğin Haslett ve arkadaşları (2015) ve Tian (2015a) kaynaklarına bakılabilir. (3.16)'da verilen denklem temel BLUP denklemi olarak bilinir. Bu denklem tutarlıdır yani

$$[F \quad C\hat{X}^{\perp}][\hat{X} \quad V\hat{X}^{\perp}]^{+}[\hat{X} \quad V\hat{X}^{\perp}] = [F \quad C\hat{X}^{\perp}] \tag{3.17}$$

dır. Teorem 3.1.1'de ele alınan ifadeler için aşağıdakiler sağlanır. Bu özellikler için ayrıca Tian (2017b) kaynağına bakılabilir.

a. $r[\hat{X} \quad V\hat{X}^{\perp}] = r[\hat{X} \quad \mathrm{V}]$, $\Re[\hat{X} \quad V\hat{X}^{\perp}] = \Re[\hat{X} \quad \mathrm{V}]$ ve $\Re(\hat{X}) \cap \Re(V\hat{X}^{\perp}) = \{0\}$.

b. A_0 tektir $\Leftrightarrow r[\hat{X} \quad \mathrm{V}] = n$.

c. $BLUP_{\mathcal{M}}(\phi)$, 1 olasılıkla tektir $\Leftrightarrow$ (3.3) tutarlıdır yani (3.6) sağlanır.

$BLUP_{\mathcal{M}}(\phi)$, (3.16)'daki gibi olsun. Bu durumda $W = [\hat{X} \quad V\hat{X}^{\perp}]$ olmak üzere, aşağıdaki eşitlikler Teorem 3.1.1 ve Teorem 2.7.6'dan kolayca elde edilir.

$$Cov\big(BLUP_{\mathcal{M}}(\phi)\big) = ([F \quad C\hat{X}^{\perp}]W^{+})\tilde{X}\Sigma\tilde{X}'([F \quad C\hat{X}^{\perp}]W^{+})'. \tag{3.18}$$

$$Cov(BLUP_{\mathcal{M}}(\phi), \phi) = ([F \quad C\hat{X}^{\perp}]W^{+})C'. \tag{3.19}$$

$$\begin{aligned} &Cov(\phi) - Cov\big(BLUP_{\mathcal{M}}(\phi)\big) \\ &= J\Sigma J' - [F \quad C\hat{X}^{\perp}]W^{+}\tilde{X}\Sigma\tilde{X}'(W^{+})' \ [F \quad C\hat{X}^{\perp}]'. \end{aligned} \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned} &Cov(\phi - BLUP_{\mathcal{M}}(\phi)) \\ &= \big(J - [F \quad C\hat{X}^{\perp}]W^{+}\tilde{X}\big)\Sigma\big(J - [F \quad C\hat{X}^{\perp}]W^{+}\tilde{X}\big)'. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Ayrıca ϕ bilinmeyen parametreler vektöründe $G = 0$ ve $H = 0$ alındığında, $\mathcal{M}$ modeli altında $F\alpha$'nın BLUE'su (3.16)' dan

$$A_0 y = BLUE_{\mathcal{M}}(F\alpha) = ([F \quad 0][\hat{X} \quad V\hat{X}^{\perp}]^{+} + U[\hat{X} \quad V\hat{X}^{\perp}]^{\perp})y \tag{3.22}$$

olarak elde edilir.

3.2. İki Alt Genel Lineer Rasgele Etki Modeli Altında BLUP'lar

(3.1) modelindeki y, X ve ε

$$\mathcal{M}: \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}\beta + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}(A\alpha + \gamma) + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix}, \tag{3.23}$$

olarak yazılabilir. Böylece, (3.3) modelinin, iki alt genel lineer rasgele etki modeli

$$\mathcal{M}_1: y_1 = X_1\beta + \varepsilon_1 = X_1(A\alpha + \gamma) + \varepsilon_1, \tag{3.24}$$

ve

$$\mathcal{M}_2: y_2 = X_2\beta + \varepsilon_2 = X_2(A\alpha + \gamma) + \varepsilon_2, \tag{3.25}$$

elde edilir. Burada $y_i \in \mathbb{R}^{n_i \times 1}$, $X_i \in \mathbb{R}^{n_i \times p}$ ve $\varepsilon_i \in \mathbb{R}^{n_i \times 1}$, $n = n_1 + n_2, i = 1{,}2$'dir. (3.24) ve (3.25) modelleri, (3.3) modelinin dönüştürülmüş modelleri olup, bu modeller sırasıyla

$$T_1 = [I_{n_1} \quad 0] \text{ ve } T_2 = [0 \quad I_{n_2}], \tag{3.26}$$

dönüşüm matrisleri tarafından elde edilir. $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}_1$ ve $\mathcal{M}_2$ modelleri için, rasgele vektörlerin beklenen değer ve kovaryans matrisleri üzerindeki genel varsayımlar (3.4)'den

$$E\begin{bmatrix} \gamma \\ \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix} = 0 \text{ ve } Cov\begin{bmatrix} \gamma \\ \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D & K_{11} & K_{12} \\ K'_{11} & R_{11} & R_{12} \\ K'_{12} & R'_{12} & R_{22} \end{bmatrix} = \Sigma \tag{3.27}$$

olarak yazılabilir. Burada $\Sigma \in \mathbb{R}^{(n+p)\times(n+p)}$ pozitif yarı-tanımlı bilinen matristir. (3.27) varsayımları altında, y ve y_i için beklenen değer ve kovaryans matrisleri

$$E(y_i) = \hat{X}_i\alpha, \tag{3.28}$$

$$Cov(y_i) = \widetilde{X}_i\Sigma\widetilde{X}_i' := V_i, \tag{3.29}$$

ve

$$Cov(y_i, y) = \widetilde{X}_i\Sigma\widetilde{X}', \tag{3.30}$$

olarak elde edilir. Burada

$$\hat{X}_i = X_iA, \; i = 1{,}2, \tag{3.31}$$

$$\widetilde{X} = [X \quad I_{n_1+n_2}] = \begin{bmatrix} \widetilde{X}_1 \\ \widetilde{X}_2 \end{bmatrix} \text{ ve } \widetilde{X}_i = [X_i \quad T_i], \; i = 1{,}2, \tag{3.32}$$

dır. Çalışmada ele alınan modellerin tümü tutarlı kabul edilmektedir. (3.6) sağlandığında yani $\mathcal{M}$ modeli tutarlı olduğunda, $\mathcal{M}_1$ ve $\mathcal{M}_2$ alt modelleri de tutarlıdır (Tian, 2017c).

İki alt genel lineer rasgele etki modeli altında tüm bilinmeyen parametrelerin tahmin/ön tahmin edicileri ile ilgili bazı genel sonuçlar elde etmek için, aşağıda verilen sabit ve rasgele etkilerin genel lineer fonksiyonu göz önüne alınabilir.

$$\phi_i = F\alpha + G\gamma + H_i\varepsilon_i, \, i = 1,2. \tag{3.33}$$

$\mathcal{M}$, $\mathcal{M}_1$ ve $\mathcal{M}_2$ modelleri altında (3.33) ile ilgili elde edilecek genel sonuçlar için (3.33),

$$\phi_i = F\alpha + G\gamma + H_iT_i\varepsilon, \, i = 1,2 \tag{3.34}$$

olarak ele alınabilir. Burada $E(\phi_i) = F\alpha$ olup, $F \in \mathbb{R}^{s\times k}$, $G \in \mathbb{R}^{s\times p}$ ve $H_i \in \mathbb{R}^{s\times n_i}$' dir. $J_i = [G \quad H_iT_i]$, $i = 1,2$ olmak üzere (3.27)'deki varsayımlardan

$$Cov(\phi_i) = J_i\Sigma J_i', \tag{3.35}$$

$$Cov(\phi_i, y) = J_i\Sigma\tilde{X}' \coloneqq D_i, \tag{3.36}$$

ve

$$Cov(\phi_i, y_i) = J_i\Sigma\tilde{X}_i' \coloneqq C_i, \tag{3.37}$$

elde edilir.

$\mathcal{M}_i$ modelleri altında ϕ_i lineer fonksiyonunun tahmin edilebilir olmasının gerek ve yeter koşulu

$$\Re(F') \subseteq \Re\left(\hat{X}_i'\right), \tag{3.38}$$

yani $A_0\hat{X}_i = F$ olacak şekilde en az bir A_0 matrisinin mevcut olmasıdır. Aynı koşul $\mathcal{M}$ modeli altında ϕ_i lineer fonksiyonunun tahmin edilebilir olmasının gerek ve yeter koşulu olduğu açıktır.

$E(A_0 y_i - \phi_i) = 0$ olacak şekilde $A_0 \in \mathbb{R}^{s\times n_i}$ için $A_0 y_i$ lineer istatistiği varsa, (3.34)'deki ϕ_i'nin $\mathcal{M}_i$ modeli altında ön tahmin edilebilir olduğu söylenebilir. Bu durumda Löwner sıralamasına göre

$$Cov(A_0 y_i - \phi_i) = min \text{ ve } E(A_0 y_i - \phi_i) = 0,\ i = 1,2, \qquad (3.39)$$

olacak şekilde $A_0 y_i$ varsa, $A_0 y_i$ lineer istatistiği ϕ_i'nin BLUP'ı olarak tanımlanır ve

$$A_0 y_i = BLUP_{\mathcal{M}_i}(\phi_i) = BLUP_{\mathcal{M}_i}(F\alpha + G\gamma + H_i T_i \varepsilon) \qquad (3.40)$$

ile gösterilir. $G = 0$ ve $H_i = 0$ ise, (3.40)'daki BLUP denklemi,

$$A_0 y_i = BLUE_{\mathcal{M}_i}(F\alpha) \qquad (3.41)$$

olarak yazılır.

Teorem 3.2.1. (Temel BLUP denklemi) (3.34)'de verilen ϕ_i, $\mathcal{M}_i$ modeli altında ön tahmin edilebilir olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} &E(A_0 y_i - \phi_i) = 0 \text{ ve } Cov(A_0 y_i - \phi_i) = min \\ &\Leftrightarrow A_0[\hat{X}_i \quad V_i\hat{X}_i^{\perp}] = \begin{bmatrix} F & C_i\hat{X}_i^{\perp} \end{bmatrix} \end{aligned} \qquad (3.42)$$

dır. Buna göre (3.42)'deki denklemin genel çözümü ve buna karşılık gelen $BLUP_{\mathcal{M}_i}(\phi_i)$,

$$BLUP_{\mathcal{M}_i}(\phi_i) = A_0 y_i = ([F \quad C_i\hat{X}_i^{\perp}][\hat{X}_i \quad V_i\hat{X}_i^{\perp}]^{+} + U[\hat{X}_i \quad V_i\hat{X}_i^{\perp}]^{\perp})y_i \qquad (3.43)$$

ile verilir. Burada $U \in \mathbb{R}^{s\times n_i}$ keyfi bir matristir.

Teorem 3.2.2'nin ispatı için ayrıca Tian ve Jiang (2016a) makalesine bakılabilir. (3.43)'de verilen denklem temel BLUP denklemidir ve bu denklem tutarlıdır yani

$$[F \quad C_i\hat{X}_i^{\perp}][\hat{X}_i \quad V_i\hat{X}_i^{\perp}]^{+}[\hat{X}_i \quad V_i\hat{X}_i^{\perp}] = [F \quad C_i\hat{X}_i^{\perp}] \tag{3.44}$$

dır. Ayrıca, aşağıda verilen özelikler sağlanır (Tian ve Jiang, 2016a).

a. $r[\hat{X}_i \quad V_i\hat{X}_i^{\perp}] = r[\hat{X}_i \quad V_i]$, $\Re[\hat{X}_i \quad V_i\hat{X}_i^{\perp}] = \Re[\hat{X}_i \quad V_i]$ ve $\Re(\hat{X}_i) \cap \Re(V_i\hat{X}_i^{\perp}) = \{0\}$.

b. A_0 tektir $\Leftrightarrow r[\hat{X}_i \quad V_i] = n$.

c. $BLUP_{\mathcal{M}_\mathrm{i}}(\phi_i)$, 1 olasılıkla tektir $\Leftrightarrow$ (3.24) ve (3.25) tutarlıdır yani $y \in \Re[\hat{X}_i \quad V_i]$ sağlanır.

$BLUP_{\mathcal{M}_\mathrm{i}}(\phi_i)$, (3.43)'deki gibi olsun. Bu durumda $W_i = [\hat{X}_i \quad V_i\hat{X}_i^{\perp}]$ olmak üzere Teorem 3.2.1 ve Teorem 2.7.6'dan aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$Cov\left(BLUP_{\mathcal{M}_i}(\phi_i)\right) = ([F \quad C_i\hat{X}_i^{\perp}]W_i^{+})V_i([F \quad C_i\hat{X}_i^{\perp}]W_i^{+})', \tag{3.45}$$

$$Cov\big(BLUP_{\mathcal{M}_i}(\phi_i), \phi_i\big) = ([F \quad C_i\hat{X}_i^{\perp}]W_i^{+})C_i', \tag{3.46}$$

$$\begin{aligned} &Cov(\phi_i) - Cov\left(BLUP_{\mathcal{M}_i}(\phi_i)\right) \\ &= J_i\Sigma J_i' - ([F \quad C_i\hat{X}_i^{\perp}]W_i^{+})V_i([F \quad C_i\hat{X}_i^{\perp}]W_i^{+})', \end{aligned} \tag{3.47}$$

$$\begin{aligned} &Cov\big(BLUP_{\mathcal{M}_i}(\phi_i) - \phi_i\big) \\ &= \big([F \quad C_i\hat{X}_i^{\perp}]W_i^{+}\tilde{X}_i - J_i\big)\Sigma\big([F \quad C_i\hat{X}_i^{\perp}]W_i^{+}\tilde{X}_i - J_i\big)'. \end{aligned} \tag{3.48}$$

Ayrıca ϕ_i bilinmeyen parametreler vektöründe $G = 0$ ve $H_i = 0$ alındığında, $\mathcal{M}_\mathrm{i}$ modeli altında $F\alpha$'nın BLUE'su (3.43)'den

$$A_0y_i = BLUE_{\mathcal{M}_i}(F\alpha) = ([F \quad 0][\hat{X}_i \quad V_i\hat{X}_i^{\perp}]^{+} + U[\hat{X}_i \quad V_i\hat{X}_i^{\perp}]^{\perp})y_i \tag{3.49}$$

olarak elde edilir.

(3.34)'de verilen ϕ_i, (3.3) modeli altında ön tahmin edilebilir olsun. Bu durumda aşağıdaki sağlanır.

$$E(A_0 y - \phi_i) = 0 \text{ ve } Cov(A_0 y - \phi_i) = min$$
$$\Leftrightarrow A_0[\hat{X} \quad V\hat{X}^{\perp}] = [F \quad D_i\hat{X}^{\perp}]. \tag{3.50}$$

Buna göre A_0'ın çözümü ve buna karşılık gelen $BLUP_{\mathcal{M}}(\phi_i)$,

$$BLUP_{\mathcal{M}}(\phi_i) = A_0 y = ([F \quad D_i\hat{X}^{\perp}][\hat{X} \quad V\hat{X}^{\perp}]^{+} + U[\hat{X} \quad V\hat{X}^{\perp}]^{\perp})y \tag{3.51}$$

ile verilir. Burada $U \in \mathbb{R}^{s\times n}$ keyfi bir matristir. Bu denklem tutarlıdır yani

$$[F \quad D_i\hat{X}^{\perp}][\hat{X} \quad V\hat{X}^{\perp}]^{+}[\hat{X} \quad V\hat{X}^{\perp}] = [F \quad D_i\hat{X}^{\perp}] \tag{3.52}$$

dır.

$BLUP_{\mathcal{M}}(\phi_i)$, (3.51)'deki gibi olsun. Bu durumda $W = [\hat{X} \quad V\hat{X}^{\perp}]$ olmak üzere (3.51) ve Teorem 2.7.6'dan aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$Cov\big(BLUP_{\mathcal{M}}(\phi_i)\big) = ([F \quad D_i\hat{X}^{\perp}]W^{+})V([F \quad D_i\hat{X}^{\perp}]W^{+})', \tag{3.53}$$

$$Cov(BLUP_{\mathcal{M}}(\phi_i), \phi_i) = ([F \quad D_i\hat{X}^{\perp}]W^{+})D_i{}', \tag{3.54}$$

$$Cov(\phi_i) - Cov\big(BLUP_{\mathcal{M}}(\phi_i)\big)$$
$$= J_i\Sigma J_i' - ([F \quad D_i\hat{X}^{\perp}]W^{+})V([F \quad D_i\hat{X}^{\perp}]W^{+})' \tag{3.55}$$

$$Cov\big(\phi_i - BLUP_{\mathcal{M}}(\phi_i)\big)$$
$$= \big(J_i - [F \quad D_i\hat{X}^{\perp}]W^{+}\tilde{X}\big)\Sigma\big(J_{i_{\mathrm{i}}} - [F \quad D_i\hat{X}^{\perp}]W^{+}\tilde{X}\big)'. \tag{3.56}$$

Ayrıca ϕ_i bilinmeyen parametreler vektöründe $G = 0$ ve $H_i = 0$ alındığında, $\mathcal{M}$ modeli altında $F\alpha$'nın BLUE'su (3.51)'den

$$A_0 y = BLUE_{\mathcal{M}}(F\alpha) = ([F \quad 0][\hat{X} \quad V\hat{X}^{\perp}]^{+} + U[\hat{X} \quad V\hat{X}^{\perp}]^{\perp})y \tag{3.57}$$

olarak elde edilir.

BÖLÜM 4. GENEL LİNEER RASGELE ETKİ MODELİ ALTINDA ÖN TAHMİN EDİCİLERİN KARŞILAŞTIRILMASI

Bu bölümde, öncelikle $\mathcal{M}$ modeli altında (3.7)'de verilen ϕ'nin BLUP'ının kovaryans matrisi ile herhangi bir simetrik A matrisinin kovaryans matrisinin karşılaştırılması yapılacaktır. Daha sonra aynı karşılaştırma $\mathcal{M}_i$ modeli alınarak (3.34)'de verilen ϕ_i lineer sabit ve rasgele etkili fonksiyonun, BLUP'ının kovaryans matrisi ile yapılacaktır. Bu genel sonuçlar elde edildikten sonra $\mathcal{M}$ ve $\mathcal{M}_i$ modelleri altında ϕ_i'nin BLUP'ının kovaryans matrisleri, daha sonra $\mathcal{M}_1$ ve $\mathcal{M}_2$ modelleri altında ϕ_1 ve ϕ_2'nin BLUP'larının kovaryans matrisleri karşılaştırılacaktır. Ayrıca ele alınan tüm problemler için BLUE karşılaştırmaları ile ilgili sonuçlar da verilecektir.

4.1. $\mathcal{M}$ Modeli Altında BLUP'ın Kovaryans Matrisi ile Diğer Tip Yansız Ön Tahmin Edicinin Kovaryans Matrisinin Karşılaştırılması

Teorem 4.1.1. (3.7)'deki ϕ, (3.3) modeli altında ön tahmin edilebilir ve $BLUP_{\mathcal{M}}(\phi)$, (3.16)'da verildiği gibi olsun. Ayrıca $A = A' \in \mathbb{R}^{s\times s}$ ve

$$L = \begin{bmatrix} V & C' & \hat{X} \\ C & J\Sigma J' - A & F \\ \hat{X}' & F' & 0 \end{bmatrix}$$

olmak üzere,

$$i_+\left(A - Cov\big(\phi - BLUP_{\mathcal{M}}(\phi)\big)\right) = i_-(L) - r(\hat{X}), \tag{4.1}$$

$$i_-\left(A - Cov\big(\phi - BLUP_{\mathcal{M}}(\phi)\big)\right) = i_+(L) - r[\hat{X} \quad V], \tag{4.2}$$

$$r\left(A - Cov\big(\phi - BLUP_{\mathcal{M}}(\phi)\big)\right) = r(L) - r\big(\hat{X}\big) - r[\hat{X} \quad V], \tag{4.3}$$

dır. Sonuç olarak, aşağıdakiler elde edilir.

a. $Cov\big(\phi - BLUP_{\mathcal{M}}(\phi)\big) \succ A \Leftrightarrow i_+(L) = r[\hat{X} \quad \mathrm{V}] + s.$

b. $Cov\big(\phi - BLUP_{\mathcal{M}}(\phi)\big) \prec A \Leftrightarrow i_-(L) = r\big(\hat{X}\big) + s.$

c. $Cov\big(\phi - BLUP_{\mathcal{M}}(\phi)\big) \succcurlyeq A \Leftrightarrow i_-(L) = r\big(\hat{X}\big).$

d. $Cov\big(\phi - BLUP_{\mathcal{M}}(\phi)\big) \preccurlyeq A \Leftrightarrow i_+(L) = r[\hat{X} \quad \mathrm{V}].$

e. $Cov\big(\phi - BLUP_{\mathcal{M}}(\phi)\big) = A \Leftrightarrow r(L) = r\big(\hat{X}\big) + r[\hat{X} \quad \mathrm{V}].$

İspat. $W = [\hat{X} \quad V\hat{X}^{\perp}]$ olmak üzere, (3.21)'den

$$\begin{aligned} &A - Cov(\phi - BLUP_{\mathcal{M}}(\phi)\,) \\ &= A - \big(J - [F \quad C\hat{X}^{\perp}]W^{+}\tilde{X}\big)\Sigma\big(J - [F \quad C\hat{X}^{\perp}]W^{+}\tilde{X}\big)' \end{aligned} \tag{4.4}$$

yazılır. Ayrıca $\Re(F') \subseteq \Re\big(\hat{X}'\,\big)$ ve $\Re(\mathrm{C}') = \Re\big(\tilde{X}\Sigma J'\big) \subseteq \Re\big(\tilde{X}\Sigma\big) = \Re\big(\tilde{X}\Sigma\tilde{X}'\big) = \Re(\mathrm{V})$ olduğundan, dolayısıyla $\Re([F \quad C\hat{X}^{\perp}]') \subseteq \Re([\hat{X} \quad V\hat{X}^{\perp}]'\,)$'dır. $\Re(V) \subseteq \Re[\hat{X} \quad V\hat{X}^{\perp}]$ olduğundan (2.17) kullanılarak,

$$\begin{aligned} &i_{\pm}\left(A - Cov\big(\phi - BLUP_{\mathcal{M}}(\phi)\big)\right) \\ &= i_{\pm}\big(A - \big([F \quad C\hat{X}^{\perp}]W^{+}\tilde{X} - J\big)\Sigma\big(\big[F \quad C\hat{X}^{\perp}\big]W^{+}\tilde{X} - J\big)'\big) \\ &= i_{\pm}\begin{bmatrix} \Sigma & \Sigma\big([F \quad C\hat{X}^{\perp}]W^{+}\tilde{X} - J\big)' \\ \big([F \quad C\hat{X}^{\perp}]W^{+}\tilde{X} - J\big)\Sigma & A \end{bmatrix} - i_{\pm}(\Sigma) \end{aligned}$$

elde edilir. Eşitliğin solundaki matris düzenlenirse aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\left[\begin{pmatrix} \Sigma & -\Sigma J' \\ -J\Sigma & A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Sigma\tilde{X}' & 0 \\ 0 & [F \quad C\hat{X}^{\perp}] \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & W \\ W' & 0 \end{pmatrix}^{+}\begin{pmatrix} \tilde{X}\Sigma & 0 \\ 0 & [F \quad C\hat{X}^{\perp}]' \end{pmatrix}\right].$$

(2.17) özelliği yukarıdaki ifadeye tekrar uygulanabilir. Dolayısıyla Teorem 2.8.3 ve Teorem 2.8.4’den

$$i_{\pm}\left(A - Cov\left(\phi - BLUP_{\mathcal{M}}(\phi)\right)\right)$$

$$= i_{\pm}\begin{bmatrix} 0 & -W & \tilde{X}\Sigma & 0 \\ -W' & 0 & 0 & [F \quad C\hat{X}^{\perp}]' \\ \Sigma\tilde{X}' & 0 & \Sigma & -\Sigma J' \\ 0 & [F \quad C\hat{X}^{\perp}] & -J\Sigma & A \end{bmatrix} - i_{\pm}\begin{bmatrix} 0 & -W \\ -W' & 0 \end{bmatrix} - i_{\pm}(\Sigma)$$

$$= i_{\pm}\begin{bmatrix} 0 & -W & \tilde{X}\Sigma & 0 \\ -W' & 0 & 0 & [F \quad C\hat{X}^{\perp}]' \\ \Sigma\tilde{X}' & 0 & \Sigma & -\Sigma J' \\ 0 & [F \quad C\hat{X}^{\perp}] & -J\Sigma & A \end{bmatrix} - i_{\mp}\begin{bmatrix} 0 & W \\ W' & 0 \end{bmatrix} - i_{\pm}(\Sigma)$$

$$= i_{\pm}\begin{bmatrix} 0 & -\hat{X} & -V\hat{X}^{\perp} & \tilde{X}\Sigma & 0 \\ -\hat{X}' & 0 & 0 & 0 & F' \\ -\hat{X}^{\perp}V & 0 & 0 & 0 & \hat{X}^{\perp}C' \\ \Sigma\tilde{X}' & 0 & 0 & \Sigma & -\Sigma J' \\ 0 & F & C\hat{X}^{\perp} & -J\Sigma & A \end{bmatrix} - r(W) - i_{\pm}(\Sigma)$$

$$= i_{\pm}\begin{bmatrix} -\tilde{X}\Sigma\tilde{X}' & -\hat{X} & -V\hat{X}^{\perp} & \tilde{X}\Sigma & 0 \\ -\hat{X}' & 0 & 0 & 0 & F' \\ -\hat{X}^{\perp}V & 0 & 0 & 0 & \hat{X}^{\perp}C' \\ 0 & 0 & 0 & \Sigma & -\Sigma J' \\ C & F & C\hat{X}^{\perp} & -J\Sigma & A \end{bmatrix} - r[\hat{X} \quad V\hat{X}^{\perp}] - i_{\pm}(\Sigma)$$

$$= i_{\pm}\begin{bmatrix} -\tilde{X}\Sigma M' & -\hat{X} & -V\hat{X}^{\perp} & 0 & C' \\ -\hat{X}' & 0 & 0 & 0 & F' \\ -\hat{X}^{\perp}V & 0 & 0 & 0 & \hat{X}^{\perp}C' \\ 0 & 0 & 0 & \Sigma & -\Sigma J' \\ C & F & C\hat{X}^{\perp} & -J\Sigma & A \end{bmatrix} - r[\hat{X} \quad V] - i_{\pm}(\Sigma)$$

$$= i_{\pm}\begin{bmatrix} -\tilde{X}\Sigma\tilde{X}' & -\hat{X} & -V\hat{X}^{\perp} & 0 & C' \\ -\hat{X}' & 0 & 0 & 0 & F' \\ -\hat{X}^{\perp}V & 0 & 0 & 0 & \hat{X}^{\perp}C' \\ 0 & 0 & 0 & \Sigma & 0 \\ C & F & C\hat{X}^{\perp} & -J\Sigma & A - J\Sigma J' \end{bmatrix} - r[\hat{X} \quad V] - i_{\pm}(\Sigma)$$

$$= i_{\pm}\begin{bmatrix} -V & -\hat{X} & -V\hat{X}^{\perp} & 0 & C' \\ -\hat{X}' & 0 & 0 & 0 & F' \\ -\hat{X}^{\perp}V & 0 & 0 & 0 & \hat{X}^{\perp}C' \\ 0 & 0 & 0 & \Sigma & 0 \\ C & F & C\hat{X}^{\perp} & 0 & A - J\Sigma J' \end{bmatrix} - r[\hat{X} \quad V] - i_{\pm}(\Sigma)$$

$$= i_{\pm}\begin{bmatrix} -V & -\hat{X} & -V\hat{X}^{\perp} & C' & 0 \\ -\hat{X}' & 0 & F' & 0 & 0 \\ -\hat{X}^{\perp}V & 0 & 0 & \hat{X}^{\perp}C' & 0 \\ C & F & C\hat{X}^{\perp} & A - J\Sigma J' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Sigma \end{bmatrix} - r[\hat{X} \quad V] - i_{\pm}(\Sigma)$$

$$= i_{\pm}\begin{bmatrix} -V & -\hat{X} & -V\hat{X}^{\perp} & C' \\ -\hat{X}' & 0 & 0 & F' \\ -\hat{X}^{\perp}V & 0 & 0 & \hat{X}^{\perp}C' \\ C & F & C\hat{X}^{\perp} & A - J\Sigma J' \end{bmatrix} + i_{\pm}(\Sigma) - r[\hat{X} \quad V] - i_{\pm}(\Sigma)$$

$$= i_{\pm}\begin{bmatrix} -V & -\hat{X} & -V\hat{X}^{\perp} & C' \\ -\hat{X}' & 0 & 0 & F' \\ -\hat{X}^{\perp}V & 0 & 0 & \hat{X}^{\perp}C' \\ C & F & C\hat{X}^{\perp} & A - J\Sigma J' \end{bmatrix} - r[\hat{X} \quad V]$$

$$= i_{\pm}\begin{bmatrix} -V & -\hat{X} & -V\hat{X}^{\perp} & C' \\ -\hat{X}' & 0 & 0 & F' \\ 0 & 0 & \hat{X}^{\perp}V\hat{X}^{\perp} & 0 \\ C & F & C\hat{X}^{\perp} & A - J\Sigma J' \end{bmatrix} - r[\hat{X} \quad V]$$

$$= i_{\pm}\begin{bmatrix} -V & -\hat{X} & 0 & C' \\ -\hat{X}' & 0 & 0 & F' \\ 0 & 0 & \hat{X}^{\perp}V\hat{X}^{\perp} & 0 \\ C & F & 0 & A - J\Sigma J' \end{bmatrix} - r[\hat{X} \quad V]$$

$$= i_{\pm}\begin{bmatrix} -V & -\hat{X} & C' & 0 \\ -\hat{X}' & 0 & F' & 0 \\ C & F & A - J\Sigma J' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \hat{X}^{\perp}V\hat{X}^{\perp} \end{bmatrix} - r[\hat{X} \quad V]$$

$$= i_{\pm}\begin{bmatrix} -V & -\hat{X} & C' \\ -\hat{X}' & 0 & F' \\ C & F & A - J\Sigma J' \end{bmatrix} + i_{\pm}\left(\hat{X}^{\perp}V\hat{X}^{\perp}\right) - r[\hat{X} \quad V]$$

$$= i_{\pm}\begin{bmatrix} -V & -\hat{X} & C' \\ C & F & A - J\Sigma J' \\ -\hat{X}' & 0 & F' \end{bmatrix} + i_{\pm}\left(\hat{X}^{\perp}V\hat{X}^{\perp}\right) - r[\hat{X} \quad V]$$

$$= i_{\pm}\begin{bmatrix} -V & C' & -\hat{X} \\ C & A - J\Sigma J' & F \\ -\hat{X}' & F' & 0 \end{bmatrix} + i_{\pm}\left(\hat{X}^{\perp}V\hat{X}^{\perp}\right) - r[\hat{X} \quad V]$$

$$= i_{\mp}\begin{bmatrix} V & C' & -\hat{X} \\ C & J\Sigma J' - A & -F \\ -\hat{X}' & -F' & 0 \end{bmatrix} + i_{\pm}\left(\hat{X}^{\perp}V\hat{X}^{\perp}\right) - r[\hat{X} \quad V]$$

$$= i_{\mp}\begin{bmatrix} V & C' & \hat{X} \\ C & J\Sigma J' - A & F \\ \hat{X}' & F' & 0 \end{bmatrix} + i_{\pm}\begin{bmatrix} V & \hat{X} \\ \hat{X}' & 0 \end{bmatrix} - r\left(\hat{X}\right) - r[\hat{X} \quad V] \tag{4.5}$$

elde edilir. Burada $i_{\pm}\begin{bmatrix} V & \hat{X} \\ \hat{X}' & 0 \end{bmatrix}$, (2.14) ve (2.15) denklemlerinden sırasıyla,

$$i_{+}\begin{bmatrix} V & \hat{X} \\ \hat{X}' & 0 \end{bmatrix} = r[\hat{X} \quad V]$$

ve

$$i_{-}\begin{bmatrix} V & \hat{X} \\ \hat{X}' & 0 \end{bmatrix} = r(\hat{X})$$

olarak yazılır. Sonuç olarak,

$$\begin{aligned} i_{+}\left(A - Cov\big(\phi - BLUP_{\mathcal{M}}(\phi)\big)\right) &= i_{-}(L) + i_{+}\begin{bmatrix} V & \hat{X} \\ \hat{X}' & 0 \end{bmatrix} - r(\hat{X}) - r[\hat{X} \quad V] \\ &= i_{-}(L) + r[\hat{X} \quad V] - r(\hat{X}) - r[\hat{X} \quad V] \\ &= i_{-}(L) - r(\hat{X}) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} i_{-}\left(A - Cov\big(\phi - BLUP_{\mathcal{M}}(\phi)\big)\right) &= i_{+}(L) + i_{-}\begin{bmatrix} V & \hat{X} \\ \hat{X}' & 0 \end{bmatrix} - r(\hat{X}) - r[\hat{X} \quad V] \\ &= i_{+}(L) + r(\hat{X}) - r(\hat{X}) - r[\hat{X} \quad V] \\ &= i_{+}(L) - r[\hat{X} \quad V] \end{aligned}$$

olup, (4.1) ve (4.2) eşitlikleri sağlanır. (2.1)'e göre, (4.1) ve (4.2) toplandığında (4.3) eşitliği kolayca görülür. Son olarak (4.1)-(4.3) eşitliklerine Teorem 2.8.1 uygulanırsa, (a)-(e) eşitlik ve eşitsizlikleri elde edilir.

■

Sonuç 4.1.2, ϕ vektörünün bazı özel durumları alınarak Teorem 4.1.1'den kolayca görülür.

Sonuç 4.1.2. $F\alpha$ ve $\hat{X}\alpha$, $\mathcal{M}$ modeli altında tahmin edilebilir olsun. Ayrıca $A_1 = A_1' \in \mathbb{R}^{s\times s}$ ve $A_2 = A_2' \in \mathbb{R}^{n\times n}$,

$$M = \begin{bmatrix} V & 0 & \hat{X} \\ 0 & -A_1 & F \\ \hat{X}' & F' & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } N = \begin{bmatrix} V & 0 & \hat{X} \\ 0 & -A_2 & \hat{X} \\ \hat{X}' & \hat{X}' & 0 \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$i_+\left(A_1 - Cov\big(BLUE_{\mathcal{M}}(F\alpha)\big)\right) = i_-(M) - r\big(\hat{X}\big), \tag{4.6}$$

$$i_-\left(A_1 - Cov\big(BLUE_{\mathcal{M}}(F\alpha)\big)\right) = i_+(M) - r[\hat{X} \quad V], \tag{4.7}$$

$$r\left(A_1 - Cov\big(BLUE_{\mathcal{M}}(F\alpha)\big)\right) = r(M) - r\big(\hat{X}\big) - r[\hat{X} \quad V], \tag{4.8}$$

dır. Ayrıca

$$i_+\left(A_2 - Cov\left(BLUE_{\mathcal{M}}\big(\hat{X}\alpha\big)\right)\right) = i_-(N) - r\big(\hat{X}\big), \tag{4.9}$$

$$i_-\left(A_2 - Cov\left(BLUE_{\mathcal{M}}\big(\hat{X}\alpha\big)\right)\right) = i_+(N) - r[\hat{X} \quad V], \tag{4.10}$$

$$r\left(A_2 - Cov\left(BLUE_{\mathcal{M}}\big(\hat{X}\alpha\big)\right)\right) = r(N) - r\big(\hat{X}\big) - r[\hat{X} \quad V], \tag{4.11}$$

dır. Sonuç olarak, aşağıdakiler elde edilir.

a. $Cov\big(BLUE_{\mathcal{M}}(F\alpha)\big) \succ A_1 \Leftrightarrow i_+(M) = r[\hat{X} \quad V] + s.$

b. $Cov\big(BLUE_{\mathcal{M}}(F\alpha)\big) \prec A_1 \Leftrightarrow i_-(M) = r\big(\hat{X}\big) + s.$

c. $Cov\big(BLUE_{\mathcal{M}}(F\alpha)\big) \succcurlyeq A_1 \Leftrightarrow i_-(M) = r\big(\hat{X}\big).$

d. $Cov\big(BLUE_{\mathcal{M}}(F\alpha)\big) \preccurlyeq A_1 \Leftrightarrow i_+(M) = r[\hat{X} \quad V].$

e. $Cov(BLUE_{\mathcal{M}}(F\alpha)) = A_1 \Leftrightarrow r(M) = r(\hat{X}) + r[\hat{X} \quad V]$.

f. $Cov\left(BLUE_{\mathcal{M}}(\hat{X}\alpha)\right) \succ A_2 \Leftrightarrow i_+(N) = r[\hat{X} \quad V] + n$.

g. $Cov\left(BLUE_{\mathcal{M}}(\hat{X}\alpha)\right) \prec A_2 \Leftrightarrow i_-(N) = r(\hat{X}) + n$.

h. $Cov\left(BLUE_{\mathcal{M}}(\hat{X}\alpha)\right) \succcurlyeq A_2 \Leftrightarrow i_-(N) = r(\hat{X})$.

i. $Cov\left(BLUE_{\mathcal{M}}(\hat{X}\alpha)\right) \preccurlyeq A_2 \Leftrightarrow i_+(N) = r[\hat{X} \quad V]$.

j. $Cov\left(BLUE_{\mathcal{M}}(\hat{X}\alpha)\right) = A_2 \Leftrightarrow r(N) = r(\hat{X}) + r[\hat{X} \quad V]$.

Bu sonucun ispatı aynı zamanda Teorem 2.8.5 kullanılarak, Teorem 4.1.1'in ispatından farklı olarak yapılabilir. Teorem 2.8.5'den yararlanılarak yapılan ispat aşağıda ifade edilmiştir.

$$
\begin{aligned}
& i_\pm(A_1 - Cov(BLUE_{\mathcal{M}}(F\alpha))) \\
&= i_\pm(A_1 - ([F \quad 0]W^+)V([F \quad 0]W^+)') \\
&= i_\pm\begin{bmatrix} -V & W & 0 \\ W' & 0 & [F \quad 0]' \\ 0 & [F \quad 0] & A_1 \end{bmatrix} - r(W) \\
&= i_\pm\begin{bmatrix} -V & \hat{X} & V\hat{X}^\perp & 0 \\ \hat{X}' & 0 & 0 & F' \\ \hat{X}^\perp V & 0 & 0 & 0 \\ 0 & F & 0 & A_1 \end{bmatrix} - r[\hat{X} \quad V\hat{X}^\perp] \\
&= i_\pm\begin{bmatrix} -V & \hat{X} & 0 & 0 \\ \hat{X}' & 0 & 0 & F' \\ 0 & 0 & \hat{X}^\perp V\hat{X}^\perp & 0 \\ 0 & F & 0 & A_1 \end{bmatrix} - r[\hat{X} \quad V] \\
&= i_\pm\begin{bmatrix} -V & \hat{X} & 0 \\ \hat{X}' & 0 & F' \\ 0 & F & A_1 \end{bmatrix} + i_\pm(\hat{X}^\perp V\hat{X}^\perp) - r[\hat{X} \quad V] \\
&= i_\mp\begin{bmatrix} V & 0 & \hat{X} \\ 0 & -A_1 & F \\ \hat{X}' & F' & 0 \end{bmatrix} + i_\pm\begin{bmatrix} V & \hat{X} \\ \hat{X}' & 0 \end{bmatrix} - r(\hat{X}) - r[\hat{X} \quad V].
\end{aligned}
$$

Burada (3.22) ve Teorem 2.7.6'dan

$$Cov\big(BLUE_{\mathcal{M}}(F\alpha)\big) = ([F \quad 0]W^{+})V([F \quad 0]W^{+})'$$

olduğu açıktır. Sonuç olarak,

$$\begin{aligned} i_{+}\left(A_1 - Cov\big(BLUE_{\mathcal{M}}(F\alpha)\big)\right) &= i_{-}(M) + i_{+}\begin{bmatrix} V & \hat{X} \\ \hat{X}' & 0 \end{bmatrix} - r(\hat{X}) - r[\hat{X} \quad V] \\ &= i_{-}(M) - r(\hat{X}) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} i_{-}\left(A_1 - Cov\big(BLUE_{\mathcal{M}}(F\alpha)\big)\right) &= i_{+}(M) + i_{-}\begin{bmatrix} V & \hat{X} \\ \hat{X}' & 0 \end{bmatrix} - r(\hat{X}) - r[\hat{X} \quad V] \\ &= i_{+}(M) - r[\hat{X} \quad V] \end{aligned}$$

elde edilir. Özel olarak $F = \hat{X}$ alınırsa, $i_{\pm}\left(A_2 - Cov\left(BLUE_{\mathcal{M}}(\hat{X}\alpha)\right)\right)$ için de Teorem 2.8.5 kullanılarak benzer hesaplamalar yapılabilir.

4.2. $\mathcal{M}_i$ Modeli Altında BLUP'ın Kovaryans Matrisi ile Diğer Tip Yansız Ön Tahmin Edicinin Kovaryans Matrisinin Karşılaştırılması

Teorem 4.2.1. (3.34)'deki ϕ_i, $\mathcal{M}_i$ modeli altında ön tahmin edilebilir ve $BLUP_{\mathcal{M}_i}(\phi_i)$, (3.43)'de verildiği gibi olsun. Ayrıca $A = A' \in \mathbb{R}^{s \times s}$ ve

$$L = \begin{bmatrix} V_i & C_i' & \hat{X}_i \\ C_i & J_i \Sigma J_i' - A & F \\ \hat{X}_i' & F' & 0 \end{bmatrix}$$

olmak üzere,

$$i_{+}\left(A - Cov\left(\phi_i - BLUP_{\mathcal{M}_i}(\phi_i)\right)\right) = i_{-}(L) - r(\hat{X}_i), \tag{4.12}$$

$$i_{-}\left(A - Cov\left(\phi_i - BLUP_{\mathcal{M}_i}(\phi_i)\right)\right) = i_{+}(L) - r[\hat{X}_i \quad V_i], \tag{4.13}$$

$$r\left(A - Cov\left(\phi_i - BLUP_{\mathcal{M}_i}(\phi_i)\right)\right) = r(L) - r(\hat{X}_i) - r[\hat{X}_i \quad V_i] \tag{4.14}$$

dır. Sonuç olarak, aşağıdakiler elde edilir.

a. $Cov\left(\phi_i - BLUP_{\mathcal{M}_i}(\phi_i)\right) \succ A \Leftrightarrow i_{+}(L) = r[\hat{X}_i \quad V_i] + s.$

b. $Cov\left(\phi_i - BLUP_{\mathcal{M}_i}(\phi_i)\right) \prec A \Leftrightarrow i_{-}(L) = r(\hat{X}_i) + s.$

c. $Cov\left(\phi_i - BLUP_{\mathcal{M}_i}(\phi_i)\right) \succcurlyeq A \Leftrightarrow i_{-}(L) = r(\hat{X}_i).$

d. $Cov\left(\phi_i - BLUP_{\mathcal{M}_i}(\phi_i)\right) \preccurlyeq A \Leftrightarrow i_{+}(L) = r[\hat{X}_i \quad V_i].$

e. $Cov\left(\phi_i - BLUP_{\mathcal{M}_\mathrm{i}}(\phi_i)\right) = A \Leftrightarrow r(L) = r(\hat{X}_i) + r[\hat{X}_i \quad V_i].$

İspat. (3.48)'den

$$\begin{aligned} &A - Cov\left(\phi_i - BLUP_{\mathcal{M}_i}(\phi_i)\right) \\ &= A - \left([F \quad C_i\hat{X}_i^{\perp}]W_i^{+}\tilde{X}_i - J_i\right)\Sigma\left([F \quad C_i\hat{X}_i^{\perp}]W_i^{+}\tilde{X}_i - J_i\right)' \end{aligned} \tag{4.15}$$

yazılır. Ayrıca $\Re(F') \subseteq \Re(\hat{X}_i')$ ve $\Re(C_i') \subseteq \Re(V_i)$ olduğundan, dolayısıyla $\Re([F \quad C_i\hat{X}_i^{\perp}]') \subseteq \Re\left([\hat{X}_i \quad V_i\hat{X}_i^{\perp}]'\right)$'dır ve $\Re(V_i) \subseteq \Re[\hat{X}_i \quad V_i\hat{X}_i^{\perp}]$ olduğu açıktır. Gerekli yerlerde (2.17) özelliğini uygulayarak, Teorem 2.8.3 ve Teorem 2.8.4 inertia özellikleri ile matris işlemleri kullanarak

$$\begin{aligned} &i_{\pm}\left(A - Cov\left(\phi_i - BLUP_{\mathcal{M}_i}(\phi_i)\right)\right) \\ &= i_{\pm}\left(A - \left([F \quad C_i\hat{X}_i^{\perp}]W_i^{+}\tilde{X}_i - J_i\right)\Sigma\left([F \quad C_i\hat{X}_i^{\perp}]W_i^{+}\tilde{X}_i - J_i\right)'\right) \\ &= i_{\pm}\begin{bmatrix} \Sigma & \Sigma\left([F \quad C_i\hat{X}_i^{\perp}]W_i^{+}\tilde{X}_i - J_i\right)' \\ \left([F \quad C_i\hat{X}_i^{\perp}]W_i^{+}\tilde{X}_i - J_i\right)\Sigma & A \end{bmatrix} - i_{\pm}(\Sigma) \\ &= i_{\pm}\left[\begin{pmatrix} \Sigma & -\Sigma J_i' \\ -J_i\Sigma & A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Sigma\tilde{X}_i' & 0 \\ 0 & [F \quad C_i\hat{X}_i^{\perp}] \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & W_i \\ W_i' & 0 \end{pmatrix}^{+}\begin{pmatrix} \tilde{X}_i\Sigma & 0 \\ 0 & [F \quad C_i\hat{X}_i^{\perp}]' \end{pmatrix}\right] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-i_{\pm}(\Sigma)\\
&= i_{\pm}\begin{bmatrix} 0 & -W_i & \tilde{X}_i\Sigma & 0 \\ -W_i' & 0 & 0 & [F \quad C_i\hat{X}_i^{\perp}]' \\ \Sigma\tilde{X}_i' & 0 & \Sigma & -\Sigma\tilde{J}_i' \\ 0 & [F \quad C_i\hat{X}_i^{\perp}] & -\tilde{J}_i\Sigma & A \end{bmatrix} - i_{\mp}\begin{bmatrix} 0 & W_i \\ W_i' & 0 \end{bmatrix} - i_{\pm}(\Sigma)\\
&= i_{\pm}\begin{bmatrix} -\tilde{X}_i\Sigma\tilde{X}_i' & -\hat{X}_i & -V_i\hat{X}_i^{\perp} & 0 & \tilde{X}_i\Sigma J_i' \\ -\hat{X}_i' & 0 & 0 & 0 & F' \\ -\hat{X}_i^{\perp}V_i & 0 & 0 & 0 & \hat{X}_i^{\perp}C_i' \\ \Sigma\tilde{X}_i' & 0 & 0 & \Sigma & -\Sigma J_i' \\ J_i\Sigma\tilde{X}_i' & F & C_i\hat{X}_i^{\perp} & 0 & A - J_i\Sigma J_i' \end{bmatrix} - r(W_i) - i_{\pm}(\Sigma)\\
&= i_{\pm}\begin{bmatrix} -\tilde{X}_i\Sigma\tilde{X}_i' & -\hat{X}_i & -V_i\hat{X}_i^{\perp} & \tilde{X}_i\Sigma J_i' \\ -\hat{X}_i' & 0 & 0 & F' \\ -\hat{X}_i^{\perp}V_i & 0 & 0 & \hat{X}_i^{\perp}C_i' \\ J_i\Sigma\tilde{X}_i' & F & C_i\hat{X}_i^{\perp} & A - J_i\Sigma J_i' \end{bmatrix} - r(W_i)\\
&= i_{\pm}\begin{bmatrix} -V_i & -\hat{X}_i & 0 & C_i' \\ -\hat{X}_i' & 0 & 0 & F' \\ 0 & 0 & \hat{X}_i^{\perp}V_i\hat{X}_i^{\perp} & 0 \\ C_i & F & 0 & A - J_i\Sigma J_i' \end{bmatrix} - r\big[\hat{X}_i \quad V_i\hat{X}_i^{\perp}\big]\\
&= i_{\mp}\begin{bmatrix} V_i & C_i' & \hat{X}_i \\ C_i & J_i\Sigma J_i' - A & F \\ \hat{X}_i' & F' & 0 \end{bmatrix} + i_{\pm}\big(\hat{X}_i^{\perp}V_i\hat{X}_i^{\perp}\big) - r[\hat{X}_i \quad V_i] \qquad (4.16)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Yani

$$
\begin{aligned}
i_{+}\left(A - Cov\left(\phi_i - BLUP_{\mathcal{M}_i}(\phi_i)\right)\right) &= i_{-}(L) + i_{+}\big(\hat{X}_i^{\perp}V_i\hat{X}_i^{\perp}\big) - r[\hat{X}_i \quad V_i]\\
&= i_{-}(L) + r\big(\hat{X}_i\big),
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
i_{-}\left(A - Cov\left(\phi_i - BLUP_{\mathcal{M}_i}(\phi_i)\right)\right) &= i_{+}(L) + i_{-}\big(\hat{X}_i^{\perp}V_i\hat{X}_i^{\perp}\big) - r[\hat{X}_i \quad V_i]\\
&= i_{+}(L) - r[\hat{X}_i \quad V_i],
\end{aligned}
$$

olup, (4.12) ve (4.13) eşitlikleri sağlanır. (2.1)'e göre, (4.12) ve (4.13) toplandığında (4.14) eşitliği kolayca görülür. Son olarak (4.12)-(4.14) eşitliklerine Teorem 2.8.1 uygulanırsa, (a)-(e) eşitlik ve eşitsizlikleri elde edilir.

■

Aşağıdaki sonuç, ϕ_i vektörünün bazı özel durumları alınarak Teorem 4.2.1'den kolayca görülür.

Sonuç 4.2.2. $F\alpha$ ve $\hat{X}_i\alpha$, $\mathcal{M}_\mathrm{i}$ modeli altında tahmin edilebilir olsun. Ayrıca $A_1 = A_1' \in \mathbb{R}^{s\times s}$ ve $A_2 = A_2' \in \mathbb{R}^{n_i\times n_i}$,

$$M = \begin{bmatrix} V_i & 0 & \hat{X}_i \\ 0 & -A_1 & F \\ \hat{X}_i' & F' & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } N = \begin{bmatrix} V & 0 & \hat{X}_i \\ 0 & -A_2 & \hat{X}_i \\ \hat{X}_i' & \hat{X}_i' & 0 \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$i_+\left(A_1 - Cov\left(BLUE_{\mathcal{M}_\mathrm{i}}(F\alpha)\right)\right) = i_-(M) - r(\hat{X}_i), \tag{4.17}$$

$$i_-\left(A_1 - Cov\left(BLUE_{\mathcal{M}_\mathrm{i}}(F\alpha)\right)\right) = i_+(M) - r[\hat{X}_i \quad V_i], \tag{4.18}$$

$$r\left(A_1 - Cov\left(BLUE_{\mathcal{M}_\mathrm{i}}(F\alpha)\right)\right) = r(M) - r(\hat{X}_i) - r[\hat{X}_i \quad V_i], \tag{4.19}$$

dır. Ayrıca

$$i_+\left(A_2 - Cov\left(BLUE_{\mathcal{M}_\mathrm{i}}(\hat{X}_i\alpha)\right)\right) = i_-(N) - r(\hat{X}_i), \tag{4.20}$$

$$i_-\left(A_2 - Cov\left(BLUE_{\mathcal{M}_\mathrm{i}}(\hat{X}_i\alpha)\right)\right) = i_+(N) - r[\hat{X}_i \quad V_i] \tag{4.21}$$

$$r\left(A_2 - Cov\left(BLUE_{\mathcal{M}_\mathrm{i}}(\hat{X}_i\alpha)\right)\right) = r(N) - r(\hat{X}_i) - r[\hat{X}_i \quad V_i], \tag{4.22}$$

dır. Sonuç olarak, aşağıdakiler elde edilir.

a. $Cov\left(BLUE_{\mathcal{M}_\mathrm{i}}(F\alpha)\right) \succ A_1 \Leftrightarrow i_+(M) = r[\hat{X}_i \quad V_i] + s.$

b. $Cov\left(BLUE_{\mathcal{M}_\mathrm{i}}(F\alpha)\right) \prec A_1 \Leftrightarrow i_-(M) = r(\hat{X}_i) + s.$

c. $Cov\left(BLUE_{\mathcal{M}_\mathrm{i}}(F\alpha)\right) \succcurlyeq A_1 \Leftrightarrow i_-(M) = r(\hat{X}_i).$

d. $Cov\left(BLUE_{\mathcal{M}_\mathrm{i}}(F\alpha)\right) \preccurlyeq A_1 \Leftrightarrow i_+(M) = r[\hat{X}_i \quad V_i].$

e. $Cov\left(BLUE_{\mathcal{M}_\mathrm{i}}(F\alpha)\right) = A_1 \Leftrightarrow r(M) = r(\hat{X}_i) + r[\hat{X}_i \quad V_i].$

f. $Cov\left(BLUE_{\mathcal{M}_\mathrm{i}}(\hat{X}_i\alpha)\right) \succ A_2 \Leftrightarrow i_+(N) = r[\hat{X}_i \quad V_i] + n_i.$

g. $Cov\left(BLUE_{\mathcal{M}_\mathrm{i}}(\hat{X}_i\alpha)\right) \prec A_2 \Leftrightarrow i_-(N) = r(\hat{X}_i) + n_i.$

h. $Cov\left(BLUE_{\mathcal{M}_\mathrm{i}}(\hat{X}_i\alpha)\right) \succcurlyeq A_2 \Leftrightarrow i_-(N) = r(\hat{X}_i).$

i. $Cov\left(BLUE_{\mathcal{M}_\mathrm{i}}(\hat{X}_i\alpha)\right) \preccurlyeq A_2 \Leftrightarrow i_+(N) = r[\hat{X}_i \quad V_i].$

j. $Cov\left(BLUE_{\mathcal{M}_\mathrm{i}}(\hat{X}_i\alpha)\right) = A_2 \Leftrightarrow r(N) = r(\hat{X}_i) + r[\hat{X}_i \quad V_i].$

Teorem 4.2.1'de elde edilen sonuç ayrıca $\mathcal{M}$ modeli için de düşünülebilir. (3.34)'deki ϕ_i, $\mathcal{M}$ modeli altında ön tahmin edilebilir ve $BLUP_{\mathcal{M}}(\phi_i)$, (3.51)'de verildiği gibi olsun. Bu durumda $A = A' \in \mathbb{R}^{s\times s}$ olmak üzere, (4.16) $\mathcal{M}$ modeli için aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\begin{aligned} &i_\pm\left(A - Cov\left(\phi_i - BLUP_{\mathcal{M}}(\phi_i)\right)\right) \\ &= i_\mp\begin{bmatrix} V & D_i' & \hat{X} \\ D_i & J_i\Sigma J_i' - A & F \\ \hat{X}' & F' & 0 \end{bmatrix} + i_\pm(\hat{X}^\perp V \hat{X}^\perp) - r[\hat{X} \quad V]. \end{aligned} \tag{4.23}$$

4.3. $\mathcal{M}$ ve $\mathcal{M}_{\mathrm{i}}$ Modelleri Altında BLUP'ın Kovaryans Matrislerinin Karşılaştırılması

Teorem 4.3.1. (3.34)'deki ϕ_i, $\mathcal{M}_i$ ve $\mathcal{M}$ altında ön tahmin edilebilir, $BLUP_{\mathcal{M}_i}(\phi_i)$ ve $BLUP_{\mathcal{M}}(\phi_i)$, sırasıyla (3.43) ve (3.51)'de verildiği gibi olsun.

$$P = \begin{bmatrix} V & 0 & \hat{X} & 0 & D_i' \\ 0 & -V_i & 0 & \hat{X}_i & -C_i' \\ \hat{X}' & 0 & 0 & 0 & F' \\ 0 & \hat{X}_i' & 0 & 0 & F' \\ D_i & -C_i & F & F & 0 \end{bmatrix}$$

olmak üzere,

$$i_+\left(Cov\big(\phi_i - BLUP_{\mathcal{M}}(\phi_i)\big) - Cov\left(\phi_i - BLUP_{\mathcal{M}_i}(\phi_i)\right)\right) = i_+(P) \\ -r[\hat{X} \quad V] - r\big(\hat{X}_i\big), \tag{4.24}$$

$$i_-\left(Cov\big(\phi_i - BLUP_{\mathcal{M}}(\phi_i)\big) - Cov\left(\phi_i - BLUP_{\mathcal{M}_i}(\phi_i)\right)\right) = i_-(P) \\ -r\big(\hat{X}\big) - r[\hat{X}_i \quad V_i], \tag{4.25}$$

$$r\left(Cov\big(\phi_i - BLUP_{\mathcal{M}}(\phi_i)\big) - Cov\left(\phi_i - BLUP_{\mathcal{M}_i}(\phi_i)\right)\right) = r(P) \\ -r[\hat{X} \quad V] - r\big(\hat{X}_i\big) - r\big(\hat{X}\big) - r[\hat{X}_i \quad V_i], \tag{4.26}$$

dır. Sonuç olarak, aşağıdakiler elde edilir.

a. $\quad Cov\left(\phi_i - BLUP_{\mathcal{M}_i}(\phi_i)\right) \succ Cov\big(\phi_i - BLUP_{\mathcal{M}}(\phi_i)\big)$

$\Leftrightarrow i_-(P) = r\big(\hat{X}\big) + r[\hat{X}_i \quad V_i] + s.$

b. $\quad Cov\left(\phi_i - BLUP_{\mathcal{M}_i}(\phi_i)\right) \prec Cov\big(\phi_i - BLUP_{\mathcal{M}}(\phi_i)\big)$

$\Leftrightarrow i_+(P) = r\big(\hat{X}_i\big) + r[\hat{X} \quad V] + s.$

c. $\quad Cov\left(\phi_i - BLUP_{\mathcal{M}_i}(\phi_i)\right) \succcurlyeq Cov\big(\phi_i - BLUP_{\mathcal{M}}(\phi_i)\big)$

$\Leftrightarrow i_{+}(P) = r\big(\hat{X}_i\big) + r[\hat{X} \quad V]$.

d. $\quad Cov\left(\phi_i - BLUP_{\mathcal{M}_i}(\phi_i)\right) \preccurlyeq Cov\big(\phi_i - BLUP_{\mathcal{M}}(\phi_i)\big)$

$\Leftrightarrow i_{-}(P) = r\big(\hat{X}\big) + r[\hat{X}_i \quad V_i]$.

e. $\quad Cov\left(\phi_i - BLUP_{\mathcal{M}_i}(\phi_i)\right) = Cov\big(\phi_i - BLUP_{\mathcal{M}}(\phi_i)\big)$

$\Leftrightarrow r(P) = r[\hat{X} \quad V] + r\big(\hat{X}_i\big) + r\big(\hat{X}\big) + r[\hat{X}_i \quad V_i]$.

İspat. (4.16) eşitliğinde A simetrik matrisi yerine $Cov\big(\phi_i - BLUP_{\mathcal{M}}(\phi_i)\big)$ yazılırsa ve (3.48) kullanılırsa,

$$
\begin{aligned}
& i_{\pm}\left(Cov\big(\phi_i - BLUP_{\mathcal{M}}(\phi_i)\big) - Cov\left(\phi_i - BLUP_{\mathcal{M}_i}(\phi_i)\right)\right) \\
& = i_{\pm}\Big(Cov\big(\phi_i - BLUP_{\mathcal{M}}(\phi_i)\big) \\
& \qquad\qquad - \big([F \quad C_i\hat{X}_i^{\perp}]W_i^{+}\tilde{X}_i - J_i\big)\Sigma\big([F \quad C_i\hat{X}_i^{\perp}]W_i^{+}\tilde{X}_i - J_i\big)'\Big) \\
& = i_{\mp}\begin{bmatrix} V_i & C_i' & \hat{X}_i \\ C_i & J_i\Sigma J_i' - Cov\big(\phi_i - BLUP_{\mathcal{M}}(\phi_i)\big) & F \\ \hat{X}_i' & F' & 0 \end{bmatrix} + i_{\pm}\big(\hat{X}_i^{\perp}V_i\hat{X}_i^{\perp}\big) - r[\hat{X}_i \quad V_i] \\
& = i_{\mp}\left(\begin{bmatrix} V_i & C_i' & \hat{X}_i \\ C_i & J_i\Sigma J_i' & F \\ \hat{X}_i' & F' & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ I_s \\ 0 \end{bmatrix} Cov\big(\phi_i - BLUP_{\mathcal{M}}(\phi_i)\big)[0 \quad I_s \quad 0]\right) - r[\hat{X}_i \quad V_i] \\
& + i_{\pm}\big(\hat{X}_i^{\perp}V_i\hat{X}_i^{\perp}\big)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu son eşitlikteki ilk inertia ifadesi için (4.23) dikkate alınırsa ve (4.23) eşitliğinde A simetrik matrisi yerine $\begin{bmatrix} V_i & C_i' & \hat{X}_i \\ C_i & J_i\Sigma J_i' & F \\ \hat{X}_i' & F' & 0 \end{bmatrix}$ yazılırsa,

$$i_{\pm}\left(Cov(\phi_i - BLUP_{\mathcal{M}}(\phi_i)) - Cov\left(\phi_i - BLUP_{\mathcal{M}_i}(\phi_i)\right)\right)$$

$$= i_{\pm}\begin{bmatrix} V & [0 \quad D_i' \quad 0] & \hat{X} \\ \begin{bmatrix}0\\ D_i\\ 0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0\\ I_s\\ 0\end{bmatrix}(J_i\Sigma J_i')[0 \quad I_s \quad 0] - \begin{bmatrix}V_i & C_i' & \hat{X}_i \\ C_i & J_i\Sigma J_i' & F \\ \hat{X}_i' & F' & 0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0\\ F\\ 0\end{bmatrix} \\ \hat{X}' & [0 \quad F' \quad 0] & 0\end{bmatrix} + i_{\mp}\left(\hat{X}^{\perp} V \hat{X}^{\perp}\right)$$

$$-r[\hat{X} \quad V] + i_{\pm}\left(\hat{X}_i^{\perp} V_i \hat{X}_i^{\perp}\right) - r[\hat{X}_i \quad V_i]$$

olarak yazılır. Böylece

$$i_{\pm}\left(Cov(\phi_i - BLUP_{\mathcal{M}}(\phi_i)) - Cov\left(\phi_i - BLUP_{\mathcal{M}_i}(\phi_i)\right)\right)$$

$$= i_{\pm}\begin{bmatrix} V & 0 & D_i' & 0 & \hat{X} \\ 0 & -V_i & -C_i' & -\hat{X}_i & 0 \\ D_i & -C_i & 0 & -F & F \\ 0 & -\hat{X}_i' & -F' & 0 & 0 \\ \hat{X}' & 0 & F' & 0 & 0 \end{bmatrix} + i_{\mp}\left(\hat{X}^{\perp} V \hat{X}^{\perp}\right)$$

$$-r[\hat{X} \quad V] + i_{\pm}\left(\hat{X}_i^{\perp} V_i \hat{X}_i^{\perp}\right) - r[\hat{X}_i \quad V_i]$$

$$= i_{\pm}\begin{bmatrix} V & 0 & D_i' & 0 & \hat{X} \\ 0 & -V_i & -C_i' & \hat{X}_i & 0 \\ D_i & -C_i & 0 & F & F \\ 0 & \hat{X}_i' & F' & 0 & 0 \\ \hat{X}' & 0 & F' & 0 & 0 \end{bmatrix} - r[\hat{X} \quad V]$$

$$+i_{\mp}\left(\hat{X}^{\perp} V \hat{X}^{\perp}\right) + i_{\pm}\left(\hat{X}_i^{\perp} V_i \hat{X}_i^{\perp}\right) - r[\hat{X}_i \quad V_i]$$

$$= i_{\pm}\begin{bmatrix} V & 0 & \hat{X} & 0 & D_i' \\ 0 & -V_i & 0 & \hat{X}_i & -C_i' \\ \hat{X}' & 0 & 0 & 0 & F' \\ 0 & \hat{X}_i' & 0 & 0 & F' \\ D_i & -C_i & F & F & 0 \end{bmatrix} - r[\hat{X} \quad V]$$

$$+i_{\mp}\left(\hat{X}^{\perp} V \hat{X}^{\perp}\right) + i_{\pm}\left(\hat{X}_i^{\perp} V_i \hat{X}_i^{\perp}\right) - r[\hat{X}_i \quad V_i] \qquad (4.27)$$

elde edilir. Böylece

$$i_{+}\left(Cov(\phi_i - BLUP_{\mathcal{M}}(\phi_i)) - Cov\left(\phi_i - BLUP_{\mathcal{M}_i}(\phi_i)\right)\right) = i_{+}(P) - r[\hat{X} \quad V] -$$
$$r(\hat{X}_i),$$

ve

$$i_-\left(Cov(\phi_i - BLUP_{\mathcal{M}}(\phi_i)) - Cov\left(\phi_i - BLUP_{\mathcal{M}_i}(\phi_i)\right)\right) = i_-(P) - r(\hat{X}) - r[\hat{X}_i \quad V_i],$$

olup, (4.24) ve (4.25) eşitlikleri sağlanır. (2.1)'e göre (4.24) ve (4.25) toplandığında (4.26) eşitliği kolayca görülür. Son olarak (4.24)-(4.26) eşitliklerine Teorem 2.8.1 uygulanırsa, (a)-(e) eşitlik ve eşitsizlikleri elde edilir.

■

Sonuç 4.3.2, ϕ_i vektörünün bazı özel durumları alınarak Teorem 4.3.1'den kolayca görülür.

Sonuç 4.3.2. $F\alpha$ ve $\hat{X}_i\alpha$, $\mathcal{M}$ ve $\mathcal{M}_\mathrm{i}$ modelleri altında tahmin edilebilir olsun. Ayrıca,

$$R = \begin{bmatrix} V & 0 & \hat{X} & 0 & 0 \\ 0 & -V_i & 0 & \hat{X}_i & 0 \\ \hat{X}' & 0 & 0 & 0 & F' \\ 0 & \hat{X}_i' & 0 & 0 & F' \\ 0 & 0 & F & F & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } S = \begin{bmatrix} V & 0 & \hat{X} \\ 0 & -V_i & -\hat{X}_i \\ \hat{X}' & -\hat{X}_i' & 0 \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$i_+\left(Cov(BLUE_{\mathcal{M}}(F\alpha)) - Cov\left(BLUE_{\mathcal{M}_\mathrm{i}}(F\alpha)\right)\right) = i_+(R) - r(\hat{X}_i) - r[\hat{X} \quad V], \tag{4.28}$$

$$i_-\left(Cov(BLUE_{\mathcal{M}}(F\alpha)) - Cov\left(BLUE_{\mathcal{M}_\mathrm{i}}(F\alpha)\right)\right) = i_-(R) - r(\hat{X}) - r[\hat{X}_i \quad V_i], \tag{4.29}$$

$$r\left(Cov(BLUE_{\mathcal{M}}(F\alpha)) - Cov\left(BLUE_{\mathcal{M}_\mathrm{i}}(F\alpha)\right)\right) = r(R) - r(\hat{X}_i) - r(\hat{X}) - r[\hat{X} \quad V] - r[\hat{X}_i \quad V_i], \tag{4.30}$$

dır. Ayrıca

$$i_+\left(Cov\left(BLUE_{\mathcal{M}}(\hat{X}_i\alpha)\right) - Cov\left(BLUE_{\mathcal{M}_{\mathrm{i}}}(\hat{X}_i\alpha)\right)\right) = i_+(S) - r[\hat{X} \quad V], \tag{4.31}$$

$$i_-\left(Cov\left(BLUE_{\mathcal{M}}(\hat{X}_i\alpha)\right) - Cov\left(BLUE_{\mathcal{M}_{\mathrm{i}}}(\hat{X}_i\alpha)\right)\right) = i_-(S) - r(\hat{X}) + r(\hat{X}_i) - r[\hat{X}_i \quad V_i], \tag{4.32}$$

$$r\left(Cov\left(BLUE_{\mathcal{M}}(\hat{X}_i\alpha)\right) - Cov\left(BLUE_{\mathcal{M}_{\mathrm{i}}}(\hat{X}_i\alpha)\right)\right) = r(S) + r(\hat{X}_i) - r(\hat{X}) - r[\hat{X} \quad V] - r[\hat{X}_i \quad V_i], \tag{4.33}$$

dır. Sonuç olarak, aşağıdakiler elde edilir.

a. $Cov\left(BLUE_{\mathcal{M}_{\mathrm{i}}}(F\alpha)\right) \succ Cov\left(BLUE_{\mathcal{M}}(F\alpha)\right)$
$\Leftrightarrow i_-(R) = r(\hat{X}) + r[\hat{X}_i \quad V_i] + s.$

b. $Cov\left(BLUE_{\mathcal{M}_{\mathrm{i}}}(F\alpha)\right) \prec Cov\left(BLUE_{\mathcal{M}}(F\alpha)\right)$
$\Leftrightarrow i_+(R) = r(\hat{X}_i) + r[\hat{X} \quad V] + s.$

c. $Cov\left(BLUE_{\mathcal{M}_{\mathrm{i}}}(F\alpha)\right) \succcurlyeq Cov\left(BLUE_{\mathcal{M}}(F\alpha)\right) \Leftrightarrow i_+(R) = r(\hat{X}_i) + r[\hat{X} \quad V].$

d. $Cov\left(BLUE_{\mathcal{M}_{\mathrm{i}}}(F\alpha)\right) \preccurlyeq Cov\left(BLUE_{\mathcal{M}}(F\alpha)\right) \Leftrightarrow i_-(R) = r(\hat{X}) + r[\hat{X}_i \quad V_i].$

e. $Cov\left(BLUE_{\mathcal{M}_{\mathrm{i}}}(F\alpha)\right) = Cov\left(BLUE_{\mathcal{M}}(F\alpha)\right)$
$\Leftrightarrow r(R) = r(\hat{X}_i) + r[\hat{X}_i \quad V_i] + r(\hat{X}) + r[\hat{X} \quad V].$

f. $Cov\left(BLUE_{\mathcal{M}_{\mathrm{i}}}(\hat{X}_i\alpha)\right) \succ Cov\left(BLUE_{\mathcal{M}}(\hat{X}_i\alpha)\right)$
$\Leftrightarrow i_-(S) = r(\hat{X}) + r[\hat{X}_i \quad V_i] - r(\hat{X}_i) + n_i.$

g. $Cov\left(BLUE_{\mathcal{M}_{\mathrm{i}}}(\hat{X}_i\alpha)\right) \prec Cov\left(BLUE_{\mathcal{M}}(\hat{X}_i\alpha)\right) \Leftrightarrow i_+(S) = r[\hat{X} \quad V] + n_i.$

h. $Cov\left(BLUE_{\mathcal{M}_{\mathrm{i}}}(\hat{X}_i\alpha)\right) \succcurlyeq Cov\left(BLUE_{\mathcal{M}}(\hat{X}_i\alpha)\right) \Leftrightarrow i_+(S) = r[\hat{X} \quad V].$

i. $Cov\left(BLUE_{\mathcal{M}_{\mathrm{i}}}(\hat{X}_i\alpha)\right) \preccurlyeq Cov\left(BLUE_{\mathcal{M}}(\hat{X}_i\alpha)\right)$
$\Leftrightarrow i_-(S) = r(\hat{X}) + r[\hat{X}_i \quad V_i] - r(\hat{X}_i).$

j. $Cov\left(BLUE_{\mathcal{M}_i}(\hat{X}_i\alpha)\right) = Cov\left(BLUE_{\mathcal{M}}(\hat{X}_i\alpha)\right)$

$\Leftrightarrow r(S) = r[\hat{X}_i \quad V_i] - r(\hat{X}_i) + r(\hat{X}) + r[\hat{X} \quad V]$.

4.4. $\mathcal{M}_1$ ve $\mathcal{M}_2$ Alt Modelleri Altında BLUP'ın Kovaryans Matrislerinin Karşılaştırılması

Teorem 4.4.1. $i = 1,2$ için (3.34)'deki ϕ_i, $\mathcal{M}_i$ modeli altında ön tahmin edilebilir ve $BLUP_{\mathcal{M}_i}(\phi_i)$, (3.43)'de verildiği gibi olsun.

$$P = \begin{bmatrix} V_1 & 0 & \hat{X}_1 & 0 & C_1' \\ 0 & -V_2 & 0 & \hat{X}_2 & -C_2' \\ \hat{X}_1' & 0 & 0 & 0 & F' \\ 0 & \hat{X}_2' & 0 & 0 & F' \\ C_1 & -C_2 & F & F & J_1\Sigma J_1' - J_2\Sigma J_2' \end{bmatrix}$$

olmak üzere,

$$i_+\left(Cov\left(\phi_1 - BLUP_{\mathcal{M}_1}(\phi_1)\right) - Cov\left(\phi_2 - BLUP_{\mathcal{M}_2}(\phi_2)\right)\right) = i_+(P) - r[\hat{X}_1 \quad V_1] - r(\hat{X}_2) \tag{4.34}$$

$$i_-\left(Cov\left(\phi_1 - BLUP_{\mathcal{M}_1}(\phi_1)\right) - Cov\left(\phi_2 - BLUP_{\mathcal{M}_2}(\phi_2)\right)\right) = i_-(P) - r(\hat{X}_1) - r[\hat{X}_2 \quad V_2] \tag{4.35}$$

$$r\left(Cov\left(\phi_1 - BLUP_{\mathcal{M}_1}(\phi_1)\right) - Cov\left(\phi_2 - BLUP_{\mathcal{M}_2}(\phi_2)\right)\right) = r(P) - r[\hat{X}_1 \quad V_1] - r(\hat{X}_2) - r(\hat{X}_1) - r[\hat{X}_2 \quad V_2] \tag{4.36}$$

dır. Sonuç olarak, aşağıdakiler elde edilir.

a. $Cov\left(\phi_2 - BLUP_{\mathcal{M}_2}(\phi_2)\right) \succ Cov\left(\phi_1 - BLUP_{\mathcal{M}_1}(\phi_1)\right)$

$\Leftrightarrow i_-(P) = r(\hat{X}_1) + r[\hat{X}_2 \quad V_2] + s$.

b. $\quad Cov\left(\phi_2 - BLUP_{\mathcal{M}_2}(\phi_2)\right) \prec Cov\left(\phi_1 - BLUP_{\mathcal{M}_1}(\phi_1)\right)$

$\Leftrightarrow i_+(P) = r[\hat{X}_1 \quad V_1] + r(\hat{X}_2) + s.$

c. $\quad Cov\left(\phi_2 - BLUP_{\mathcal{M}_2}(\phi_2)\right) \succcurlyeq Cov\left(\phi_1 - BLUP_{\mathcal{M}_1}(\phi_1)\right)$

$\Leftrightarrow i_+(P) = r[\hat{X}_1 \quad V_1] + r(\hat{X}_2).$

d. $\quad Cov\left(\phi_2 - BLUP_{\mathcal{M}_2}(\phi_2)\right) \preccurlyeq Cov\left(\phi_1 - BLUP_{\mathcal{M}_1}(\phi_1)\right)$

$\Leftrightarrow i_-(P) = r(\hat{X}_1) + r[\hat{X}_2 \quad V_2].$

e. $\quad Cov\left(\phi_2 - BLUP_{\mathcal{M}_2}(\phi_2)\right) = Cov\left(\phi_1 - BLUP_{\mathcal{M}_1}(\phi_1)\right)$

$\Leftrightarrow r(P) = r[\hat{X}_1 \quad V_1] + r(\hat{X}_2) + r(\hat{X}_1) + r[\hat{X}_2 \quad V_2].$

İspat. $i = 2$ için (4.16)'de A simetrik matrisi yerine $Cov\left(\phi_1 - BLUP_{\mathcal{M}_1}(\phi_1)\right)$ yazılırsa ve (3.48) kullanılırsa,

$$
\begin{aligned}
& i_\pm\left(Cov\left(\phi_1 - BLUP_{\mathcal{M}_1}(\phi_1)\right) - Cov\left(\phi_2 - BLUP_{\mathcal{M}_2}(\phi_2)\right)\right) \\
&= i_\pm\Big(Cov\left(\phi_1 - BLUP_{\mathcal{M}_1}(\phi_1)\right) \\
&\qquad\qquad - \left([F \quad C_2\hat{X}_2^\perp]W_2^+\tilde{X}_2 - J_2\right)\Sigma\left([F \quad C_2\hat{X}_2^\perp]W_2^+\tilde{X}_2 - J_2\right)'\Big) \\
&= i_\mp\begin{bmatrix} V_2 & C_2' & \hat{X}_2 \\ C_2 & J_2\Sigma J_2' - Cov\left(\phi_1 - BLUP_{\mathcal{M}_1}(\phi_1)\right) & F \\ \hat{X}_2' & F' & 0 \end{bmatrix} + i_\pm\left(\hat{X}_2^\perp V_2 \hat{X}_2^\perp\right) \\
&-r[\hat{X}_2 \quad V_2] \\
&= i_\mp\left(\begin{bmatrix} V_2 & C_2' & \hat{X}_2 \\ C_2 & J_2\Sigma J_2' & F \\ \hat{X}_2' & F' & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ I_s \\ 0 \end{bmatrix} Cov\left(\phi_1 - BLUP_{\mathcal{M}_1}(\phi_1)\right)[0 \quad I_s \quad 0]\right) \\
&+i_\pm\left(\hat{X}_2^\perp V_2 \hat{X}_2^\perp\right) - r[\hat{X}_2 \quad V_2]
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu son eşitlikteki ilk inertia ifadesi için (4.16) dikkate alınırsa ve $i = 1$ için (4.16) eşitliğinde A simetrik matrisi yerine $\begin{bmatrix} V_2 & C_2' & \hat{X}_2 \\ C_2 & J_2\Sigma J_2' & F \\ \hat{X}_2' & F' & 0 \end{bmatrix}$ yazılırsa,

$$i_{\pm}\left(Cov\left(\phi_1 - BLUP_{\mathcal{M}_1}(\phi_1)\right) - Cov\left(\phi_2 - BLUP_{\mathcal{M}_2}(\phi_2)\right)\right)$$

$$= i_{\pm}\begin{bmatrix} V_1 & [0 \quad C_1' \quad 0] & \hat{X}_1 \\ \begin{bmatrix}0\\C_1\\0\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}0\\I_s\\0\end{bmatrix}(J_1\Sigma J_1')[0 \quad I_s \quad 0] - \begin{bmatrix} V_2 & C_2' & \hat{X}_2 \\ C_2 & J_2\Sigma J_2' & F \\ \hat{X}_2' & F' & 0 \end{bmatrix} & & \begin{bmatrix}0\\F\\0\end{bmatrix} \\ \hat{X}_1' & [0 \quad F' \quad 0] & 0 \end{bmatrix} + i_{\mp}\left(\hat{X}_1^{\perp}V_1\hat{X}_1^{\perp}\right)$$

$$-r[\hat{X}_1 \quad V_1] + i_{\pm}\left(\hat{X}_2^{\perp}V_2\hat{X}_2^{\perp}\right) - r[\hat{X}_2 \quad V_2]$$

olarak yazılır. Böylece

$$i_{\pm}\left(Cov\left(\phi_1 - BLUP_{\mathcal{M}_1}(\phi_1)\right) - Cov\left(\phi_2 - BLUP_{\mathcal{M}_2}(\phi_2)\right)\right)$$

$$= i_{\pm}\begin{bmatrix} V_1 & 0 & C_1' & 0 & \hat{X}_1 \\ 0 & -V_2 & -C_2' & -\hat{X}_2 & 0 \\ C_1 & -C_2 & J_1\Sigma J_1' - J_2\Sigma J_2' & -F & F \\ 0 & -\hat{X}_2' & -F' & 0 & 0 \\ \hat{X}_1' & 0 & F' & 0 & 0 \end{bmatrix} - r[\hat{X}_1 \quad V_1]$$

$$+i_{\mp}\left(\hat{X}_1^{\perp}V_1\hat{X}_1^{\perp}\right) + i_{\pm}\left(\hat{X}_2^{\perp}V_2\hat{X}_2^{\perp}\right) - r[\hat{X}_2 \quad V_2]$$

$$= i_{\pm}\begin{bmatrix} V_1 & 0 & C_1' & 0 & \hat{X}_1 \\ 0 & -V_2 & -C_2' & \hat{X}_2 & 0 \\ C_1 & -C_2 & J_1\Sigma J_1' - J_2\Sigma J_2' & F & F \\ 0 & \hat{X}_2' & F' & 0 & 0 \\ \hat{X}_1' & 0 & F' & 0 & 0 \end{bmatrix} - r[\hat{X}_1 \quad V_1]$$

$$+i_{\mp}\left(\hat{X}_1^{\perp}V_1\hat{X}_1^{\perp}\right) + i_{\pm}\left(\hat{X}_2^{\perp}V_2\hat{X}_2^{\perp}\right) - r[\hat{X}_2 \quad V_2]$$

$$= i_{\pm}\begin{bmatrix} V_1 & 0 & \hat{X}_1 & 0 & C_1' \\ 0 & -V_2 & 0 & \hat{X}_2 & -C_2' \\ \hat{X}_1' & 0 & 0 & 0 & F' \\ 0 & \hat{X}_2' & 0 & 0 & F' \\ C_1 & -C_2 & F & F & J_1\Sigma J_1' - J_2\Sigma J_2' \end{bmatrix} + i_{\mp}\left(\hat{X}_1^{\perp}V_1\hat{X}_1^{\perp}\right)$$

$$-r[\hat{X}_1 \quad V_1] + i_{\pm}\left(\hat{X}_2^{\perp}V_2\hat{X}_2^{\perp}\right) - r[\hat{X}_2 \quad V_2] \tag{4.37}$$

elde edilir. Böylece,

$$i_{+}\left(Cov\left(\phi_1 - BLUP_{\mathcal{M}_1}(\phi_1)\right) - Cov\left(\phi_2 - BLUP_{\mathcal{M}}(\phi_2)\right)\right) = i_{+}(P) - r[\hat{X}_1 \quad V_1] -$$

$$r(\hat{X}_2),$$

ve

$$i_-\left(Cov\left(\phi_1 - BLUP_{\mathcal{M}_1}(\phi_1)\right) - Cov\left(\phi_2 - BLUP_{\mathcal{M}_2}(\phi_2)\right)\right) = i_-(P) - r(\hat{X}_1) - r[\hat{X}_2 \quad V_2],$$

olup, (4.34) ve (4.35) eşitlikleri sağlanır. (2.1)'e göre (4.34) ve (4.35) toplandığında, (4.36) eşitliği kolayca görülür. Son olarak (4.34)-(4.36) eşitliklerine Teorem 2.8.1 uygulanırsa, (a)-(e) eşitlik ve eşitsizlikleri elde edilir.

■

Aşağıdaki sonuç, Teorem 4.4.1'den kolayca görülür.

Sonuç 4.4.2. $F\alpha$, $\mathcal{M}_1$ ve $\mathcal{M}_2$ modelleri altında tahmin edilebilir olsun. Ayrıca,

$$R = \begin{bmatrix} V_1 & 0 & \hat{X}_1 & 0 & 0 \\ 0 & -V_2 & 0 & \hat{X}_2 & 0 \\ \hat{X}_1' & 0 & 0 & 0 & F' \\ 0 & \hat{X}_2' & 0 & 0 & F' \\ 0 & 0 & F & F & 0 \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$i_+\left(Cov\left(BLUE_{\mathcal{M}_1}(F\alpha)\right) - Cov\left(BLUE_{\mathcal{M}_2}(F\alpha)\right)\right) = i_+(R) - r(\hat{X}_2) - r[\hat{X}_1 \quad V_1], \tag{4.38}$$

$$i_-\left(Cov\left(BLUE_{\mathcal{M}_1}(F\alpha)\right) - Cov\left(BLUE_{\mathcal{M}_2}(F\alpha)\right)\right) = i_-(R) - r(\hat{X}_1) - r[\hat{X}_2 \quad V_2], \tag{4.39}$$

$$r\left(Cov\left(BLUE_{\mathcal{M}_1}(F\alpha)\right) - Cov\left(BLUE_{\mathcal{M}_2}(F\alpha)\right)\right) = r(R) - r(\hat{X}_2) - r(\hat{X}_1) - r[\hat{X}_1 \quad V_1] - r[\hat{X}_2 \quad V_2] \tag{4.40}$$

dır. Sonuç olarak, aşağıdakiler elde edilir.

a. $Cov\left(BLUE_{\mathcal{M}_2}(F\alpha)\right) \succ Cov\left(BLUE_{\mathcal{M}_1}(F\alpha)\right)$

$\Leftrightarrow i_{-}(R) = r\left(\hat{X}_1\right) + r[\hat{X}_2 \quad V_2] + s.$

b. $Cov\left(BLUE_{\mathcal{M}_2}(F\alpha)\right) \prec Cov\left(BLUE_{\mathcal{M}_1}(F\alpha)\right)$

$\Leftrightarrow i_{+}(R) = r\left(\hat{X}_2\right) + r[\hat{X}_1 \quad V_1] + s.$

c. $Cov\left(BLUE_{\mathcal{M}_2}(F\alpha)\right) \succcurlyeq Cov\left(BLUE_{\mathcal{M}_1}(F\alpha)\right)$

$\Leftrightarrow i_{+}(R) = r\left(\hat{X}_2\right) + r[\hat{X}_1 \quad V_1].$

d. $Cov\left(BLUE_{\mathcal{M}_2}(F\alpha)\right) \preccurlyeq Cov\left(BLUE_{\mathcal{M}_1}(F\alpha)\right)$

$\Leftrightarrow i_{-}(R) = r\left(\hat{X}_1\right) + r[\hat{X}_2 \quad V_2].$

e. $Cov\left(BLUE_{\mathcal{M}_2}(F\alpha)\right) = Cov\left(BLUE_{\mathcal{M}_1}(F\alpha)\right)$

$\Leftrightarrow r(R) = r\left(\hat{X}_2\right) + r[\hat{X}_2 \quad V_2] + r\left(\hat{X}_1\right) + r[\hat{X}_1 \quad V_1].$

BÖLÜM 5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada,

$\mathcal{M}$: $y = \hat{X}\alpha + X\gamma + \varepsilon$

genel lineer rasgele etki modeli ile onun alt modelleri olan

$\mathcal{M}_1 \colon y_1 = \hat{X}_1\alpha + X_1\gamma + \varepsilon_1$

ve

$\mathcal{M}_2 \colon y_2 = \hat{X}_2\alpha + X_2\gamma + \varepsilon_2$

modelleri ele alınmıştır. Lineer rasgele etki modelleri sabit ve rasgele etkileri birlikte içeren yapılarıyla veri analizinde istatistiksel sonuçların çıkarılmasında kullanılan modellerin önemli bir parçasıdır. Alt modeller, $\mathcal{M}$ modelinden, özellikle bazı gözlemlerin çıkarılması ile elde edilen modellerdir. $\mathcal{M}$ tam modeli ise, $\mathcal{M}_1$ ve $\mathcal{M}_2$ alt modellerine yeni gözlemler eklenmesi ile elde edilen modeldir. Bu durumda bu üç model, eklenen veya silinen gözlemlerin olduğu durumlarda eşzamanlı sonuçlar çıkarmak için kullanılabilir. Bu modellerde ele alınan temel konulardan biri bilinmeyen parametreler vektörlerinin tahmin problemidir. Tahminler için özellikle, istatistiksel ve matematiksel açıdan uygun olan BLUP'lar kullanılır. BLUP'lar bilinmeyen parametrelerin yansız ön tahmin edicileri arasında Löwner sıralamasına göre en küçük kovaryans matrisine sahip olan tahmin ediciler olarak tanımlanır. Bu tanımdan dolayı BLUP'ların kovaryans matrisleri genel olarak diğer yansız ön tahmin ediciler arasında en uygun olan ön tahmin ediciyi belirlemek amacıyla bir karşılaştırma ölçütü olarak kullanılır.

$\mathcal{M}$ modeli ile $\mathcal{M}_1$ ve $\mathcal{M}_2$ alt modelleri istatistiksel sonuçlar çıkarmak için ayrı ayrı veya birlikte ele alınabilirler. Örneğin, bilinmeyen parametreler vektörleri ile ilgili tahminler bazen verilen genel modelin belli bir parçası ile elde edilebilir. Bu durumda, bazı gözlemlerin modelden çıkarılması ile elde edilen alt modeller kullanılabilir. Alt modeller ve genel model yapı olarak benzemelerine rağmen içerdikleri bazı farklılıklardan dolayı bu modeller altında ortak bilinmeyen parametrelerin ön tahmin edicileri farklı ifade, özellik ve performanslara sahiptir. Bu nedenle, ele alınan genel lineer rasgele etki modeli $\mathcal{M}$ ve bu modelin iki alt modeli $\mathcal{M}_1$ ve $\mathcal{M}_2$ altında sırasıyla ortak olan bilinmeyen sabit ve rasgele etkilerin lineer kombinasyonlarına karşılık gelen

$$\phi = F\alpha + G\gamma + H\varepsilon$$

ve

$$\phi_i = F\alpha + G\gamma + H_i\varepsilon_i = F\alpha + G\gamma + H_iT_i\varepsilon,\ i = 1,2$$

vektörlerinin BLUP'larının kovaryans matrislerinin karşılaştırılması yapılmıştır. Matris cebirinden yararlanılarak, özellikle bazı rank ve inertia özellikleri kullanılarak,

$$Cov\left(\phi - BLUP_{\mathcal{M}}(\phi)\right) \succ A\ (\prec, \succcurlyeq, \preccurlyeq, =),$$

$$Cov\left(\phi_i - BLUP_{\mathcal{M}_i}(\phi_i)\right) \succ A\ (\prec, \succcurlyeq, \preccurlyeq, =),$$

$$Cov\left(\phi - BLUP_{\mathcal{M}}(\phi)\right) \succ Cov\left(\phi_i - BLUP_{\mathcal{M}_i}(\phi_i)\right)\ (\prec, \succcurlyeq, \preccurlyeq, =)$$

$$Cov\left(\phi_1 - BLUP_{\mathcal{M}_1}(\phi_1)\right) \succ Cov\left(\phi_2 - BLUP_{\mathcal{M}_2}(\phi_2)\right)\ (\prec, \succcurlyeq, \preccurlyeq, =)$$

eşitlik ve eşitsizlikleri için gerek ve yeter şartlar elde edilmiştir. Eşitlikler ve eşitsizlikler elde edilirken kullanılan ifadeler ve denklemler birçok matris işlemi içermektedir. Özellikle matrislerin rankları ve inertiaları kullanılarak karşılaşılan karmaşık matris ifadeleri daha basit formlara getirilmiştir. Ayrıca, elde edilen sonuçların bazı özel durumlar için karşılık gelen sonuçları da verilmiştir.

Bu çalışmada ele alınan konu lineer rasgele etki modelleri ve bu modellerin alt modelleri için genel durumları ortaya koymaktadır. Ancak $\mathcal{M}$ matrisinin $\mathcal{M}_1$ ve $\mathcal{M}_2$ dışında farklı dönüştürülmüş modelleri için de benzer karşılaştırma yapılabilir. Parçalanmış modeller için de benzer kovaryans karşılaştırması yapılabilir. Ayrıca konu katlı modeller altında ele alınarak BLUP'lar ve diğer tahmin ediciler içinde ele alınabilir ve genel sonuçlar elde edilebilir.

KAYNAKLAR

Alalouf, I. S., Styan, G. P. H. 1979. Characterizations of estimability in the general linear model. Ann. Stat., 7: 194-200.

Arendacká, B., Puntanen, S. 2015. Further remarks on the connection between fixed linear model and mixed linear model. Stat. Papers, 56 (4): 1235–1247.

Bhatia, R., 2007. Positive definite matrices, Princeton series in applied mathematics, Princeton University Press, Priceton, NJ.

Drygas, H. 1975. Estimation and prediction for linear models in general spaces. Math. Operationsforsch. Statist., 6: 301-321.

Gan, S., Sun, Y., Tian, Y. 2017. Equivalence of predictors under real and over-parameterized linear models. Commun. Statist. Theor. and Meth., 97: 16-24.

Goldberger, A. S. 1962. Best linear unbiased prediction in the generalized linear regression model. J. Amer. Statist. Assoc., 57: 369-375.

Graybill, F. A. 1969. Introduction to matrices with applications in statistics, Wadworth Publising Company inc., California.

Harville, D. A. 1976. Extension of the Gauss-Markov theorem to include the estimation of random effects. The Annals of Statistics, 4: 384-395.

Harville, D. A. 1997. Matrix algebra from a statiscians perspective, Springer.

Haslett, S. J., Puntanen, S. 2010a. A note on the equality of the BLUPs for new observations under two linear models. Acta et Commentationes Universitatis Tartuensis de Mathematica, 14: 27–33.

Haslett, S. J., Puntanen, S. 2010b. Equality of BLUEs or BLUPs under two linear models using stochastic restrictions. Stat. Papers, 51 (2): 465-475.

Haslett, S. J., Puntanen, S. 2011. On the equality of the BLUPs under two linear mixed models. Metrika, 74: 381–395.

Haslett, S. J., Puntanen, S. 2013. A review of conditions under which BLUEs and/or BLUPs in one linear mixed model are also BLUEs and/or BLUPs in another. Calcutta Statistical Association Bulletin, 65 (1-4): 25–42.

Haslett, S. J., Puntanen, S., Arendacká, B. 2015. The link between the mixed and fixed linear models revisited. Stat. Papers, 56: 849–861.

Henderson, C. R. 1975. Best linear unbiased estimation and prediction under a selection model. Bio-metrics, 31: 423-447.

Hou, J., Jiang, B. 2018. Predictions and estimations under a group of linear models with random coefficients. Commun. Statist. Simulation and Computation, 47 (2): 510-525.

Jiang, J. 1997. A derivation of BLUP-Best linear unbiased predictor. Stat Prob. Lett., 32: 321-324.

Liu, X. Q., Rong, J. Y., Liu, X. Y. 2008. Best linear unbiased prediction for linear combinations in general mixed linear models. J. Multivariate Anal., 99: 1503-1517.

Liu, X., Wang, Q. W. 2013. Equality of the BLUPs under the mixed linear model when random components and errors are correlated. J. Multivariate Anal., 116: 297–309.

Lu, C., Gan, S., Tian, Y. 2015. Some remarks on general linear model with new regressors. Stat Prob. Lett., 97: 16-24.

Magnus, J. R., Neudecker, H. 1988. Matrix differential calculus with applications in statistics and econometrics, John Wiley, G. Britain.

Marsaglia, G., Styan, G. P. H. 1974. Equalities and inequalities for ranks of matrices. Linear Multilinear Algebra, 2: 269–292.

Penrose, R. 1955. A generalized inverse for matrices. Proc. Cambridge Philos. Soc., 51: 406–413.

Pfeffermann, D. 1984. On extensions of the Gauss-Markov theorem to the case of stochastic regression coefficients. J. R. Statist. Soc. Ser B, 46: 139-148.

Puntanen, S., Styan, G. P. H., Isotalo, J. 2011. Matrix tricks for linear statistical models. Our Personal Top Twenty. Springer, Heidelberg.

Rao, C. R. 1973. Representations of best linear unbiased estimators in the Gauss-Markoff model with a singular dispersion matrix. J. Multivariate Anal., 3: 276-292.

Rao, C. R. 1975. Simultaneous estimation of parameters in different linear models and applications to biometric problems. Biometrics, 31: 545-554.

Robinson, G. K. 1991. That BLUP is a good thing: the estimation of random effects (with discussion on pp. 32-51). Stat. Sci., 6: 15-51.

Searle, S. R. 1997. The matrix handling of BLUE and BLUP in the mixed linear model. Linear Algebra Appl., 264: 291-311.

Seber, G. A. F. 1977. Linear regression analysis, John Wiley, New York.

Seber, G. A. F. 2008. A matrix handbook for statisticians, John Wiley & Sons, Inc., New Jersey.

Sengupta, D., Jammalamadaka, S. R. 1985. Linear models an integrated approach, World Scientific, Singapore.

Tian, Y. 2010. Equalities and inequalities for inertias of Hermitian matrices with applications. Linear Algebra Appl., 433: 263–296.

Tian, Y. 2012. Solving optimization problems on ranks and inertias of some constrained nonlinear matrix functions via an algebraic linearization method. Nonlinear Analysis, 75: 717–734.

Tian, Y. 2015a. A new derivation of BLUPs under random-effects model. Metrika, 78: 905–918.

Tian, Y. 2015b. A matrix handling of predictions under a general linear random-effects model with new observations. Elektron. J. Linear Algebra, 29: 30–45.

Tian, Y. 2017a. Some equalities and inequalities for covariance matrices of estimators under linear models. Stat. Papers, 58: 467–484.

Tian, Y. 2017b. Matrix rank and inertia formulas in the analysis of general linear models. Open Math., 15: 126–150.

Tian, Y. 2017c. Transformation approaches of linear random-effects models. Stat. Methods Appl., 26(4): 583-608.

Tian, Y., Beisiegel, M., Dagenais, E., Haines, C. 2008. On the natural restrictions in the singular Gauss-Markov model. Stat. Papers, 49: 553-564.

Tian, Y., Guo, W. 2016. On comparison of dispersion matrices of estimators under a constrained linear model. Stat. Methods Appl., 25: 623–649.

Tian, Y., Jiang, B. 2016a. An algebraic study of BLUPs under two linear random-effects models with correlated covariance matrices. Linear Multilinear Algebra, 64 (12): 2351-2367.

Tian, Y., Jiang, B. 2016b. Matrix rank/inertia formulas for least-squares solutions with statistical applications. Spec. Matrices, 4, 130–140.

Toutenburg, H., Shalabh 2000. Improved predictions in linear regression models with stochastic linear constraints. Biometr. J., 42: 71-86.

Venit, S., Bishop, W. 1985. Elementary linear algebra, PWS publishers, Massachusetts.

ÖZGEÇMİŞ

Melek ERİŞ BÜYÜKKAYA, 25 Mayıs 1992 tarihinde Karabük'de doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini 2009 yılında tamamladı. Aynı yıl Sakarya Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü lisans öğrenimine yerleşti ve 2013 yılında bu bölümden birincilikle mezun oldu. Aynı yıl Sakarya Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Uygulamalı Matematik Anabilim Dalında tezli yüksek lisans programına başladı. 2015 yılında yüksek lisans mezuniyetinin ardından Sakarya Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Uygulamalı Matematik Anabilim dalında doktora programına kaydoldu. Burada eğitimine devam ederken, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstatistik Anabilim Dalında Araştırma Görevlisi olarak çalışmaya başladı. Halen bu görevine devam etmektedir.