T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN BAZI YAKLAŞIK ÇÖZÜM YÖNTEMLERİYLE ÇÖZÜMÜ ve KARŞILAŞTIRILMASI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Orhan YÜKSEL

Matematik Anabilim Dalı

Uygulamalı Matematik Bilim Dalı

OCAK 2024

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN BAZI YAKLAŞIK ÇÖZÜM YÖNTEMLERİYLE ÇÖZÜMÜ ve KARŞILAŞTIRILMASI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Orhan YÜKSEL

Matematik Anabilim Dalı

Uygulamalı Matematik Bilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof.Dr. Ömer Faruk GÖZÜKIZIL

OCAK 2024

Orhan YÜKSEL tarafından hazırlanan “Diferansiyel denklemlerin bazı yaklaşık çözüm yöntemleriyle çözümü ve karşılaştırılması üzerine” adlı tez çalışması 18.01.2024 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Uygulamalı Matematik Bilim Dalı’nda Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi

Jüri Başkanı :

Jüri Üyesi :

Jüri Üyesi :

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Eğitim-Öğretim Yönetmeliğine ve Yükseköğretim Kurumları Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Yönergesine uygun olarak hazırlamış olduğum "Diferansiyel denklemlerin bazı yaklaşık çözüm yöntemleriyle çözümü ve karşılaştırılması Üzerine" başlıklı tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın tüm aşamalarında yukarıda belirtilen yönetmelik ve yönergeye uygun davrandığımı, tezin içerdiği yenilik ve sonuçları başka bir yerden almadığımı, tezde kullandığım eserleri usulüne göre kaynak olarak gösterdiğimi, bu tezi başka bir bilim kuruluna akademik amaç ve unvan almak amacıyla vermediğimi ve 20.04.2016 tarihli Resmi Gazete'de yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince Sakarya Üniversitesi'nin abonesi olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Enstitü tarafından belirlenmiş ölçütlere uygun rapor alındığını, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun ortaya çıkması halinde doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi beyan ederim.

(25/01/2024).

Orhan YÜKSEL

Eşime ve Mesut Aras'a

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans ve tez çalışmalarım süresinde büyük yardım ve desteğini esirgemeyen tez danışmanım Sayın Prof. Dr. Ömer Faruk GÖZÜKIZIL'a, hiçbir konuda yardımını esirgemeyen değerli meslektaşım Zeynep Sümeyye YILMAZ'a, bu süreç boyunca sevgi, fedakarlık ve anlayıştan dolayı kıymetli eşim Derya YÜKSEL'e ve sabrından dolayı minik yaramazım Mesut Aras'a en içten teşekkür ederim.

Orhan YÜKSEL

İÇİNDEKİLER

Sayfa

KISALTMALAR

ADM : Adomian ayrışım metodu

HAM : Homotopi analiz metodu

HPM : Homotopi pertürbasyon metodu

SFM : Sonlu fark metodu

VIM : Varyasyonel iterasyon metodu

SİMGELER

$\boldsymbol{\ell}$	: Herhangi bir pozitif tam sayı
$\boldsymbol{\delta}$	: Varyasyon operatörü
$\tilde{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{n}}$	: Sınırlanmış varyasyon
$\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{n}}$	: Adomian polinomları
$\boldsymbol{\Omega}$	: Reel eksende bir bölge
$\boldsymbol{\Gamma}$	: Ω bölgesinin sınırı
$\tilde{\boldsymbol{h}}$	: HAM' da yardımcı paramatre
$\boldsymbol{\chi}_{\boldsymbol{m}}$	: HAM' da yardımcı fonksiyon

TABLO LİSTESİ

DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN BAZI YAKLAŞIK ÇÖZÜM YÖNTEMLERİYLE ÇÖZÜMÜ ve KARŞILAŞTIRILMASI

ÖZET

Bilim ve teknik dünyasında, ikinci mertebeden adi diferansiyel denklemler, bilimsel problemlerin çözümünde büyük öneme sahiptir. Bu tür diferansiyel denklemler, uygulamalı bilimlerle ilgilenen birçok bilim insanı tarafından çalışılmaktadır. Çalışma yapılan diferansiyel denklemlerden bir tanesi de Lane-Emden tipi diferansiyel denklemlerdir. Astrofizikte, Lane-Emden denklemi, Newtoncu özçekim etkisi olan, küresel simetrik, politropik bir akışkanın yerçekimi potansiyeli için Poisson denkleminin boyutsuz bir formudur. Bu denklem, astrofizikçi Jonathan Homer Lane ve Robert Emden'in adını taşır.

Lane–Emden denklemi, kendi çekimine sahip politropik bir bedenin iç yapısını tanımlamak için ilk kez kullanılmıştır. Bu denklemler, yıldızın yarıçapını ve kütlesini hesaplamak, yıldızın iç yapısını tanımlamak, basınç, yoğunluk ve sıcaklık gibi değişkenlerinin dağılımını ve hidrostatik denge durumunu analiz etmek için kullanılan bir dizi diferansiyel denklem sistemidir. Sıcaklık etkilerinin de dahil edildiği durumlarda, örneğin izotermal gaz kürelerinin incelendiği durumlarda, astrofiziksel olay bir Lane–Emden denklemi tarafından tanımlanır.

Yirminci yüzyılın ikinci yarısında, izotermal çözümün (tekil izotermal küre) ve bu çözümün tekil olmayan modifikasyonlarının ilginç uygulamaları, küresel kümeler ve erken tip galaksiler gibi çarpışmasız sistemlerin yapılarında kullanıldı.

Bu denklemler, özellikle kütlesi ve yapısal özellikleri hakkında bilgi edinmek istediğimiz küçük kütleli yıldızlar gibi belirli yıldız türleri üzerinde çalışırken kullanışlıdır. Yıldız içlerinin incelenmesinde ortaya çıkan ikinci dereceden bir basit diferansiyel denklem, aynı zamanda politropik diferansiyel denklemler olarak da adlandırılır.

Dahası, bu denklemler astrofiziğin ötesinde daha geniş uygulamalara sahiptir. Özellikle kimya mühendisliği ve aerodinamik dahil olmak üzere çeşitli mühendislik alanlarıyla ilgili olan sıkıştırılabilir akışkan kürelerde akışkan dinamiği çalışmalarında temel modeller olarak hizmet ederler.

Lane-Emden denklemlerinin matematiksel zarafeti ve faydası, onları teorik astrofiziğin ve uygulamalı matematiğin ayrılmaz bir parçası haline getirmektedir. Çok yönlülükleri, matematikçilerin ve bilim insanlarının karmaşık fiziksel sistemleri keşfetmelerine ve anlamalarına olanak tanıyarak gök cisimlerinin davranışları hakkında değerli bilgiler sağlar ve çeşitli bilimsel disiplinlerde matematiksel modellemedeki ilerlemelere katkıda bulunur.

Lane-Emden tipi diferansiyel denkleminin çözülmesi ve analiz edilmesi, özellikle orijin olmak üzere bazı noktalarda tekillik oluşması nedeniyle zor olmuştur. Bu özelliği sayesinde diferansiyel denklemler için yeni yöntemler geliştirilmesi için birmodel denklem olmuştur. Çözümlerin fiziksel yapısı literatürde bulunabilir. Lane-

Emden tipi diferansiyel denklemlerin çözümleri bilgisayar yardımıyla elde edilebilir, ancak fiziksel anlayış için analitik çözümlere çok ihtiyaç olduğu gözlemlenmektedir.

Bu tez çalışmasında, yukarıda bahsedilen Lane-Emden tipi diferansiyel denklemleri ve bu denklemlerin çözümünde kulanılan bazı yöntemler tanıtılıp, belirli uygulamalarına yer verilmiştir. Bu uygulamaların sonucuna göre çözüm yöntemlerinden hangisinin daha kullanışlı olduğuna dair fikir beyan edilecektir. Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır ve planı aşağıdaki gibidir.

Birinci bölümde, özette tanıtılan Lane-Emden tipi diferansiyel denklemlerin formüle edilmiş gösterimi, temel elemanları ve denklem örnekleri verilmiştir. Daha sonra tezin amacı ve Lane-Emden tipi denklemlerin çözümü için literatürde geliştirilen yöntemlerden bahsedilmiştir.

Tezin ikinci bölümünde teorik kısım yer almaktadır. Bu bölümde temel bazı kavramlar, ayrıca problemlerin çözümünde kullanılacak olan çözüm yöntemleri olan HE varyasyonel iterasyon yöntemi, homotopi analiz metodu, adomian ayrışım yöntemi, sonlu farklar yöntemi ve homotopi pertürbasyon yöntemi tanıtılmıştır.

Tezin üçüncü bölümde seçtiğimiz iki tane Lane-Emden tipi diferansiyel denklemlerini verilen sınır şartları altında, ikinci bölümde tanıttığımız metotlar ile sırasıyla çözümü yapılmış ve çözüm sonucunda aldığı değerler tablo yardımıyla gösterilmiştir.

Son bölümde Lane-Emden tipi diferansiyel denklemlerin HE varyasyonel iterasyon yöntemi, homotopi analiz metodu, adomian ayrışım yöntemi, sonlu farklar yöntemi ve homotopi pertürbasyon yöntemine göre bu çalışmada elde edilmiş olan sonuçları yorumlanmış ve farklı tarzdaki Lane-Emden tipi diferansiyel denklemlere uygulanmasına yönelik önerilere yer verilerek tez çalışması tamamlanmıştır.

SOLUTİON AND COMPARISON OF DIFFERENTIAL EQUATİONS WİTH SOME APPROXIMATE SOLUTIONS METHODS

SUMMARY

In the world of science and technology, second-order ordinary differential equations hold significant importance in solving scientific problems. Many scientists engaged in applied sciences work on such differential equations. One of these differential equations studied is the Lane-Emden type of differential equation. This equation bears the names of astrophysicists Jonathan Homer Lane and Robert Emden. In astrophysics, the Lane-Emden equation is a dimensionless form of Poisson's equation for the gravitational potential of a Newtonian self-gravitating, spherically symmetric, polytrophic fluid.

The Lane-Emden equation was initially utilized to describe the internal structure of a self-gravitating polytropic body. These equations constitute a system of differential equations used to calculate the radius and mass of a star, define its internal structure, analyze the distribution of variables such as pressure, density, and temperature, and examine the hydrostatic equilibrium state. In cases where temperature effects are included, such as when studying isothermal gas spheres, the astrophysical phenomenon is described by a Lane-Emden equation.

In the latter half of the 20th century, interesting applications of the isothermal solution (singular isothermal sphere) and its non-singular modifications were utilized in the structures of collisionless systems like globular clusters and early-type galaxies.

These equations are particularly useful when studying certain types of stars, such as low-mass stars, where we aim to understand their mass and structural properties. A second-order ordinary differential equation emerging in the study of stellar interiors is also known as a polytropic differential equation.

Furthermore, these equations have broader applications beyond astrophysics. They serve as fundamental models in the study of fluid dynamics, specifically in compressible fluid spheres, which find relevance in various engineering fields, including chemical engineering and aerodynamics.

The Lane-Emden equations' mathematical elegance and utility make them an integral part of theoretical astrophysics and applied mathematics. Their versatility allows mathematicians and scientists to explore and comprehend complex physical systems, providing valuable insights into the behavior of celestial objects and contributing to advancements in mathematical modeling across diverse scientific disciplines.

Solving and analyzing Lane-Emden type differential equations has been challenging, especially due to singularities occurring at certain points, like the origin. While solutions can be found through computational means, there's a recognized need for analytical solutions to enhance physical understanding.

This thesis aims to emphasize the significance of Lane-Emden type differential equations by introducing various methods used in solving these equations and

evaluating the impact of these methods on applications. Based on the results of the applications, an opinion will be stated regarding which solution method proves to be more practical, thereby contributing to further research in the relevant field. This work comprises four sections structured as follows:

In the first chapter, the formulated representation of the Lane-Emden type differential equations introduced in the abstract, its basic elements and examples of equations are given. Then, the aim of the thesis and the methods developed in the literature for solving Lane-Emden type equations are mentioned.

The second section delves into the theoretical aspect, introducing fundamental concepts and the solution methods used to solve problems: the HE’s variational iteration method, finite differences method, homotopy perturbation method, homotopy analysis method, and Adomian decomposition method.

In the third chapter of the thesis, we solved two Lane-Emden type differential equations under specified boundary conditions using several methods. Firstly, solutions were obtained using the HE variational iteration method. For this purpose, Lagrange multiplier and initial approximation function were determined. Subsequently, functional solutions were computed through iterative processes up to a certain level. Secondly, we employed the Adomian decomposition method for the solution. Here, we initially identified Adomian polynomials as initial approximation function and then proceeded with iterative procedures, achieving functional solutions up to a specified level. Thirdly, for the solution using the homotopy perturbation method, we established the homotopy structure to calculate approximation functions. Within the homotopy analysis method, we formulated the zeroth-order deformation equation, followed by higher-order deformation equations, and conducted iterative procedures to solve them. Additionally, solutions were obtained in Matlab using the finite differences method based on the chosen value of 'n'."

The final section interprets the results obtained from Lane-Emden type differential equations using the HE variational iteration method, Adomian decomposition method, homotopy perturbation method, homotopy analysis method, and finite differences method. it is seen that closer results can be obtained by calculating higher-order approximations for all methods used.

Adomian decomposition method can be easily applied to differential equations. Approximate solutions obtained using this method are nearly identical to the analytical solutions of nonlinear equations. Adomian polynomials can be separately determined for different types of Lane-Emden equations, leading to approximate solutions. Homotopy analysis method is applicable to nonlinear differential equations. The approximate solutions obtained through this method are almost the same as the analytical solutions of the Lane-Emden (Poisson) equation. Writing approximate solutions using the homotopy analysis method can yield close results to the exact solutions. Convergence in the homotopy perturbation method depends on the initial approximation chosen and is also related to the homotopy path. Results close to the exact solutions have been observed. Moreover, this method requires more computational effort compared to others.

The cost of the finite differences method is also higher compared to others, but selecting a large value can yield close results. Due to the high computational load, computer assistance might be necessary. The values used in the solution methods in this thesis have been arbitrarily chosen, without any specific reason. There is no particular justification for their selection. Changing the values for a more detailed comparison of solutions could be the subject of another study.

1. GİRİŞ

Günümüzde bilimsel problemlerin çözümünde kullanılan ikinci dereceden adi diferansiyel denklemler büyük önem taşımaktadır. Bu diferansiyel denklemlerin çözümüyle alakalı, uygulamalı bilimler ile ilgilenen birçok bilim insanı çalışma yapmıştır. Çalışma yapılan diferansiyel denklemlerden bir tanesi de Lane-Emden tipi diferansiyel denklemlerdir.

Lane-Emden tipi denklemler, ilk olarak 1870 yılında Jonathan Homer Lane tarafından yayınlanmış [1] ve Robert Emden tarafından detaylı olarak çalışılmıştır [2]. Lane-Emden tipi denklemler matematiksel fizik ve astrofizikte bir yıldızın yapısal problemi, Politropik izotermal gazlarda denge yoğunluk dağılımını açıklamak ve moleküllerin karşılıklı çekimi altında hareket eden bir gaz bulutunun termal davranışı gibi çeşitli olguları modellemek için sıkça kullanılmaktadır[3].

Lane-Emden denklemlerinin başlangıç koşulları ile genel formu aşağıdaki gibidir.

$$y''(x) + \frac{k}{x}\ y'(x) + f(x,y) = g(x), \quad k, x \geq 0 \tag{1.1}$$

$$y(0) = a, \qquad y'(0) = 0 \tag{1.2}$$

Burada $f(x,y)$ lineer olmayan bir fonksiyondur. Bu denklemin analitik çözümü $x = 0$ noktasında verilen başlangıç koşullarıyla mevcut olduğu bilinmektedir. Fakat $x = 0$ deki tekil durum sadece Lane-Emden denkleminde değil ayrıca kuantum mekaniği ve astrofizikte çok çeşitli lineer olmayan problemlerde karşımıza çıkar. [4]

Verilen denklemde $k = 2,\ f(x,y) = y^n,\ g(x) = 0$ ve başlangıç koşulları

$$y(0) = 1, \qquad y'(0) = 0 \tag{1.3}$$

gibi alınırsa

$$y''(x) + \frac{2}{x}\ y'(x) +\ y^n = 0 \tag{1.4}$$

denklemi oluşur. Bu denklem standart Lane-Emden denklemi olarak bilinir. Astrofizikte bu denkleme poisson denklemi de denir [5].

y^n ifadesindeki n politropik indeks olarak adlandırılır. (1.4) denkleminde n parametresi $0 \leq n \leq 5$ aralığında önemli rol oynar. (1.3) başlangıç koşulları ile (1.4) denkleminin $n = 0{,}1{,}5$ için analitik çözümü vardır [6]. Bu çözüm fonksiyonları Tablo 1.1 de gösterilmiştir. Bu durum yıldız yapısı kararlılık ve salınımların incelenmesinde Lane-Emden denkleminin pratik kullanımı için önemli bir dezavantajdır.

Tablo 1.1. (1.4) denkleminin çözüm fonksiyonları

n	0	1	5
Çözüm	$1 - \frac{x^2}{6}$	$\frac{sinx}{x}$	$\left(1 + \frac{x^2}{3}\right)^{\frac{-1}{2}}$

$f(x,y) = (y^2 - c)^{\frac{3}{2}}$ aldığımızda Chandrasekhar'ın beyaz cüce yıldızların kütle çekim potansiyeli üzerine yaptığı çalışmada tanıtılan "beyaz cüce" denklemine ulaşırız. $c = 0$ alındığında bu denklem, $n = 3$ olan Lane-Emden denklemine indirgenir. $f(x,y) = e^y$ olarak alındığında izotermal gaz kürelerini tanımlayan bir model elde edilir.$f(x,y) = e^{-y}$ olarak düzenlendiğinde yıldızın termodinamik ve hidrostatik denge içinde, belirli bir denklem durumuyla gaz halinde bir küre olarak modellemek için kullanılır.

1.1. Tezin Amacı

Bu tez çalışmasının amacı özel olarak seçilen iki adet Lane-Emden denklemini belirli yöntemlerle çözmek ve çözüm yöntemlerini birbirleriyle karşılaştırarak hangisinin daha kullanışlı olduğu hakkında fikir edinmektir.

1.2. Literatür Araştırması

Lane-Emden denkleminin çözümü için çeşitli yöntemler kullanılmaktadır. Bu yöntemlerden bazıları adomian ayrışım yöntemi [3,7], sinc-kolokasyon yöntemi [8], sonlu fark yöntemleri [9-11], Pade serileri yöntemi [12]. Parand ve diğerleri , Lane-

Emden denklemi için Hermite collocation yöntemini önermiştir [13], homotopi analiz yöntemi [14-15], z varyasyonal iterasyon yöntemi [16-18], homotopi pertürbasyon yöntemi [19-22], Yousefi Lane-Emden denklemlerini integral denklemlerine dönüştürürek sayısal bir çözüm elde etmiştir [23]. Pandey ve diğerleri , Lane-Emden denkleminin çözümü için Legendre operasyon matrisini kullanarak verimli bir sayısal yöntem geliştirmiştir [24]. Berstein operasyonel matriks yöntemi [25], Ramos ise yaptığı bazı çalışmalarda Lane-Emden denkleminin için seri yaklaşımları lineerleştirme gibi yöntemleri göstermiştir [26–28].

2. TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER

Tanım 2.0.1 Bir $y = f(x)$ fonksiyonunun, x bağımsız değişkeni, y bağımlı değişkeni ve onun sınırlı sayıda herhangi mertebeye kadar türevleri arasında kurulmuş olan bir eşitliğe Diferansiyel Denklem denir. Bu tanıma göre bir diferansiyel denklemin genel ifadesi şu şekildedir [29].

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0 \tag{2.1}$$

Tanım 2.0.2 Denklemde bulunan bir bağlı değişkenler kümesinin bir elemanını ya da onun bir türevini bulunduran her terim, bu değişkene ve türevlerine göre birinci dereceden ise, bu diferansiyel denklem bu bağlı değişken kümesine göre lineer'dir. Bir bağlı değişkene göre lineer olmayan denkleme, bu bağlı değişkene göre lineer olmayan diferansiyel denklem denir [30].

Tanım 2.0.3 *n* basamaktan bir diferansiyel denklemin

$$\frac{d^iy}{dx^i}(x_0) = k_i, \quad i = 0,1,2, \dots, n-1 \tag{2.2}$$

koşullarını sağlayan çözümlerini bulma problemine başlangıç değer problemi denir. Bu koşullara da başlangıç koşulları adı verilir [30].

Tanım 2.0.4 $F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$ şeklindeki n. mertebeden adi diferansiyel denklemim tanımlı olduğu aralıkta 2 veya daha fazla noktada toplam olarak n tane değeri biliniyorsa buna sınır değer problemi denir [29].

Tanım 2.0.5 Bir düzgün bölgede, apsisleri x, ordinatları y_1 ve y_2 olan iki keyfi nokta seçilmiş olsun. Aynı D bölgesinde sürekli bir $f(x,y) = 0$ fonksiyonunun var olduğunu kabul edelim. Keyfi seçilen her nokta çifti için $|f(x,y_2) - f(x,y_1)| < \ell\,|y_2 - y_1|$ ilişkisi gerçekleşecek şekilde bir ℓ pozitif sayısı bulunabiliyorsa, $f(x,y)$ fonksiyonu, D bölgesinde y ye göre Lipschitz Koşulu'nu sağlamış olur [29].

2.1. HE Varyasyonel İterasyon Yöntemi

L lineer, N nonlineer bir operatör olmak üzere;

$$Lu + Nu = f(x) \tag{2.2}$$

genel nonlineer bir denkleminin varyasyonel iterasyon yöntemine göre düzeltme fonksiyonu şu şekilde tanımlanır.

$$u_{n+1}(\mathrm{x}) = u_n(\mathrm{x}) + \int_a^b \lambda(s)[Lu_n(s) + N\tilde{u}_n(s) - f(s)]ds \tag{2.3}$$

Burada λ genel lagrange çarpanıdır ve varyasyonel analiz yöntemler kullanılarak hesapanabilir. λ sabit bir sayı veya fonksiyon olabililir. λ yöntem için kritik bir rol oynamaktadır. $\tilde{u}_n$ sınırlanmış varyasyon olup $\delta\tilde{u}_n = 0$'dir. Burada öncelikle olarak $\lambda(s)$yi hesaplayalım.

Her iki tarafın δ varyasyononu alırsak

$$\delta u_{n+1}(\mathrm{x}) = \delta u_n(\mathrm{x})\left(1 - \lambda'(x) + \frac{k}{x}\lambda(x)\right) + \delta\lambda(x)u'_n(\mathrm{x})$$

$$+\,\delta\int_0^x u_n(\mathrm{x})\left(\lambda''(x) - k\frac{s\lambda'(s) - \lambda(s)}{s^2}\right)ds \tag{2.4}$$

Başlangıç koşullarını sağlatırsa

$$\lambda(x = s) = 0, \tag{2.5}$$

$$\lambda'|_{n=x} = 1, \tag{2.6}$$

$$\lambda' - k\frac{s\lambda' - \lambda}{x^2} = 0 \tag{2.7}$$

elde edilir. Farklı k durumları için λ genel Lagrange çarpanının fonksiyonları Tablo 2.1 de gösterilmiştir [33].

Tablo 2.1. Lagrange fonksiyonları

k	$k = 1$	$k = 2$	$k > 2$
$\lambda(s)$	$s\ln\left(\frac{s}{x}\right)$	$\frac{s(s-x)}{x}$	$\frac{s(s^{k-1} - x^{k-1})}{(k-1)x^{k-1}}$

Ardından, başlangıç koşullarını sağlayacak şekilde bir u_0 ilk yaklaşım fonksiyonu seçilir. Bu değerler (2.3) iterasyon formülünde yerlerine yazılarak $u_n,\ n = 1,2,\ldots$ yaklaşımları bulunur. Sonuç olarak çözüm fonksiyonu

$$u = \lim_{n\to\infty} u_n \tag{2.8}$$

ile bulunur.

2.2. Adomian Ayrışım Yöntemi

$F,$ lineer ve lineer olmayan terimleri içeren bir genel lineer olmayan adi diferansiyel operatörü olmak üzere

$$F(u) = g(x) \tag{2.9}$$

denklemi ele alınsın.

L tersi alınabilen ve verilen diferansiyel denklemin en yüksek mertebeden türevini içeren bir lineer operatörünü, R lineer operatörün kalan kısmını ve N ise lineer olmayan terimi göstermek üzere (2.9) denklemini

$$Lu + Nu + Ru = g(x) \tag{2.10}$$

şeklinde yazalım. L^{-1} ters operatörü eşitliğin her iki tarafına uygulanıp düzenleme yapılırsa

$$L^{-1}Lu = L^{-1}g - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu \tag{2.11}$$

elde edilir. L'nin ikinci mertebeden ve tersi mevcut olan lineer bir operatör olduğunu kabul edersek (2.11) eşitliğinde gerekli düzenlemeler yapılınca

$$u = a + bx + L^{-1}g - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu \tag{2.12}$$

çözüm fonksiyonu bulunur. (2.12) ile elde edilen eşitlikteki $N(u)$ lineer olmayan terimi

$$N(u) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \tag{2.13}$$

biçiminde ifade edilir. Buradaki A_n özel bir polinom olan Adomian polinomlarını göstermektedir. (2.12) eşitliğindeki u ayrıştırılmış seri çözüm fonksiyonunu temsil eder. Bu seri çözüm fonksiyonunun ilk terimi u_0, verilen başlangıç değeri sağ taraf fonksiyonun integrali olmak üzere $u_0 = a + bx - L^{-1}g$ ile bulunur daha sonra ilk terim olan u_0 kullanılarak sırasıyla u_1, u_2, u_3 ... terimleri elde edilerek ayrıştırılmış seri çözüm fonksiyonu

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) \tag{2.14}$$

yazılır. Bu seri çözümü kullanılarak (2.12) eşitliği tekrar yazılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = u_0 - L^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} u_n - L^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} A_n \tag{2.15}$$

genel seri formu bulunur. Benzer olarak (2.15) eşitliği belirgin şekilde

$$\begin{gathered} u_1 = -L^{-1}Ru_0 - L^{-1}A_0 \\ u_2 = -L^{-1}Ru_1 - L^{-1}A_1 \\ \vdots \\ u_{n+1} = -L^{-1}Ru_n - L^{-1}A_n\,, \;\; n \geq 0 \end{gathered} \tag{2.16}$$

formunda yazılabilir. (2.16) eşitliğindeki bütün A_n adomian polinomlarının ayrıştılmış hali ise literatürde

$$\begin{gathered} A_0 = f(u_0) \\ A_1 = u_1\left(\frac{d}{du_0}\right)f(u_0) \\ A_2 = u_2\left(\frac{d}{du_0}\right)f(u_0) + \left(\frac{{u_1}^2}{2!}\right)\left(\frac{d^2}{{du_0}^2}\right)f(u_0) \\ \vdots \\ A_n = \left(\frac{1}{n!}\right)\left[\frac{d^n}{{du_0}^n}\Phi\left(\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k u_k\right)\right]_{\lambda=0} \quad n \geq 0 \end{gathered} \tag{2.17}$$

ile verilmektedir. Buradan açıkça görülürki A_0 sadece u_0'a, A_1 ise u_0 ve u_1'e, A_2 ise u_0, u_1 ve u_2' ye bağlıdır ve bu şekilde ilerler. Ayrışım metodu kullanılarak $u(x,t)$ kapalı çözüm fonksiyonunun bu fonksiyonu ait sayısal çözümlerin elde edilmesi için;

$$\Phi(\mathrm{x},\mathrm{t}) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) \tag{2.18}$$

olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_n = u(x,t) \tag{2.19}$$

ifadesi (2.16) indirgeme bağıntısı göz önüne alınarak kolayca hesaplanabilir.

2.3. Homotopi Pertürbasyon Yöntemi

Bir A genel bir diferansiyel operatörü için

$$A(u) - f(r) = 0\,, \quad r \in \Omega \tag{2.20}$$

Nonlineer bir diferansiyel denklemini aşağıdaki sınır koşullarıyla ele alalım.

$$B\left(u, \frac{\partial u}{\partial n}\right) = 0 \qquad\qquad r \in \Gamma \tag{2.21}$$

Burada B sınır operatörü, $f(r)$ bilinen bir analitik fonksiyon, Γ ise Ω tanım kümesinin sınırıdır.

L lineer ve N nonlinear olmak üzere A operatörünü

$$A(u) = L(u) + N(u) \tag{2.22}$$

olacak şekilde iki kısma ayrıldığında (2.20) ifadesi

$$L(u) + N(u) - f(r) = 0 \tag{2.23}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan

$$V(r,p)\colon \Omega \times [0,1] \longrightarrow R \tag{2.24}$$

şeklinde Homotopi yapısı kurulabilir. Bu homotopi yapısı

$$H(v,p) = (1-p)[L(v) - L(u_0)] + p[A(v) - f(r)] = 0 \quad p \in [0,1] \;\; r \in \Omega \tag{2.25}$$

ya da

$$H(v,p) = L(v) - L(u_0) + pL(u_0) + p[N(v) - f(r)] = 0 \quad p \in [0,1] \;\; r \in \Omega \tag{2.26}$$

eşitlikleriyle ifade edilir. (2.25) ve (2.26) ifadelerinde yer alan $p \in [0,1]$ parametresine gömme parametresi denir. u_0, ifadesi (2.20) denklemini sağlayan başlangıç sınır şartıdır. (2.25) denkleminde p yerine sırasıyla 0 ve 1 konursa ;

$$H(v,0) = L(v) - L(u_0) = 0 \tag{2.27}$$

$$H(v,1) = A(v) - f(r) = 0 \tag{2.28}$$ (2.28)

elde edilir. p nin $0'$dan başlayarak birime doğru değişim süreci aynı zamanda $V(r,p)$'nin de $u_0(r)$ den $u(r)$ ye olan değişmesini göstermektedir. $L(v) - L(u_0)$, $A(v) - f(r)$ çiftine homotopik denmektedir. Denklemde p ifadesi küçük bir parametre olarak kabul edip (2.26) denkleminin çözümü için

$$v = v_0 + pv_1 + p^2v_2 + p^3v_3 + \cdots = \sum_{n\to 0}^{\infty} p^n v_n \tag{2.29}$$

olacak şekilde p parametresinin kuvvet serisi aşağıdaki şekilde gibi yazılabilir.

$$p^0 : f(v_0) - f(x_0) = 0 \tag{2.30}$$

$$p^1 : f'(v_0)v_1 + f(x_0) = 0 \tag{2.31}$$

$$p^2 : f'(v_0)v_2 + \frac{1}{2!}f''(v_0){v_1}^2 = 0 \tag{2.32}$$

$$p^3 : f'(v_0)v_3 + \frac{1}{2!}f''(v_0)2v_1v_2 + \frac{1}{3!}f'''(v_0){v_1}^3 = 0 \tag{2.33}$$

Bu denklemlerden $v_1, v_2, v_3, ...$ için çözülmesiyle

$$v_1 = -\frac{f(x_0)}{f'(v_0)} \tag{2.34}$$

$$v_2 = -\frac{f''(v_0){v_1}^2}{2!\,f'(v_0)} = -\frac{f''(v_0)}{2!\,f'(v_0)}\left(\frac{f(x_0)}{f'(v_0)}\right)^2 \tag{2.35}$$

$$\begin{aligned} v_3 &= -\frac{f''(v_0)v_1 v_2}{f'(v_0)} - \frac{f'''(v_0){v_1}^3}{3!\,f'(v_0)} \\ &= -\frac{1}{2!}\left(\frac{f''(v_0)}{f'(v_0)}\right)^2\left(\frac{f(v_0)}{f'(v_0)}\right)^3 + \frac{1}{3!}\frac{f''(v_0)}{f'(v_0)}\left(\frac{f(v_0)}{f'(v_0)}\right)^3 \end{aligned} \tag{2.36}$$

serisinin v_1, v_2 ve v_3 bileşenleri elde edilir. Buradan $p = 1$ alınırsa yaklaşım fonksiyonu aşağıdaki denklem bulunur.

$$u = \lim_{p \to 1} v = v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + \cdots \tag{2.37}$$

2.4. Homotopi Analiz Yöntemi

Aşağıdaki lineer olmayan cebirsel denklemini alalım.

$$N[u(x)] = 0 \tag{2.38}$$

Ndoğrusal olmayan bir operatördür, *x* bağımsız değişkeni temsil eder, *u(x)* bilinmeyen bir fonksiyondur Geleneksel homotopi yöntemini genelleştirerek, Liao [34] sıfırıncı dereceden deformasyon denklemi kurulur.

$$(1-p)L[\phi(x;p) - u_0(x)] = p\tilde{h}H(x)N[\phi(x;p)] \tag{2.39}$$

Burada $p \in [0,1]$, gömme parametresidir, $\tilde{h} \neq 0$ sıfırdan farklı bir yardımcı parametredir, $H(x) \neq 0$ bir yardımcı fonksiyon, L bir yardımcı lineer operatör, $u_0(x)$ ise $u(x)$ ifadesinin başlangıç tahmini $\phi(x;p)$ ise bilinmeyen bir fonksiyondur. $p = 0$ ve $p = 1$ iken,

$\phi(x;0) = u_0(x), \qquad \phi(x;1) = u(x)$

Bu ifade bize p parametrisi 0 'dan 1' e değiştikçe $\phi(x;p)$ nin , $u_0(x)$den çözüm fonksiyonu olan $u(x)$ e ulaştığını gösterir. $\phi(x;p)$, homotopi paremetresi p'nin bir fonksiyonu olduğu için m. mertebeden taylor serisine açarsak

$$u_m(x) = \frac{1}{m!}\frac{\partial^m \phi(x;p)}{\partial p^m}\bigg|_{p=0} \tag{2.40}$$

bulunur, ve bu denklemden

$$\phi(x;p) = u_0(x) + \sum_{m=1}^{+\infty} u_m(x)p^m \tag{2.41}$$

elde edilir. Eğer yardımcı lineer operatör, başlangıç tahmini, yardımcı parametre $\tilde{h}$, ve yardımcı fonksiyon uygun şekilde seçilirse, $p = 1$ için (2.41) denklemi yakınsar, bu durumda

$$\phi(x;1) = u_0(x) + \sum_{m=1}^{+\infty} u_m(x) \tag{2.42}$$

elde edilir. $\tilde{h} = -1$ ve $H(x) = 1$ seçildiğinde (2.39) denklemi

$$(1-p)L[\phi(x;p) - u_0(x)] + pN[\phi(x;p)] \tag{2.43}$$

denklemine dönüşür ve bu denklem genellikle homotopi pertürbasyon metodunda kullanılır.Yüksek mertebe deformasyon denklemleri sıfırıncı derece deformasyon denkleminden elde edilir. $\vec{u}_n = \{u_0(x), u_1(x), \dots, u_n(x)\}$ şeklinde vektörü tanımlansın. (2.39) denklemini p ye göre m kez türevi alınırsa ve $p = 0$ alınırarak $m!$ e bölünürse

$$u_m(x) = \chi_m u_{m-1}(x) + \tilde{h}L^{-1}R_m\big(\vec{u}_{m-1}(x)\big) \tag{2.44}$$

denklemi elde edilir. Bu denkleme $m.$ mertebeden deformasyon denklemi denir.

Burada

$$R_m(\vec{u}_{m-1}) = \frac{1}{(m-1)!}\frac{\partial^{m-1}N[\phi(x;p)]}{\partial p^{m-1}}\bigg|_{p=0}$$

ve

$$\chi_m = \begin{cases} 0, & m \le 1 \\ 1, & m > 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

2.5. Sonlu Fark Yöntemi

Bu yöntemde, türevler için sonlu fark yaklaşımları bulabilmek için Taylor seri açılımından faydalanılacaktır.

$u = f(x)$ fonksiyonunun x_i noktası civarındaki Taylor serisi açılımı aşağıdaki gibidir.

$$u(x) = u(x_i) + \frac{u'(x_i)}{1!}(x - x_i) + \frac{u''(x_i)}{2!}(x - x_i)^2 + \frac{u'''(x_i)}{3!}(x - x_i)^3 + \cdots \tag{2.45}$$

(2.45) ifadesinde ki x yerine sırasıyla $x = h + x_i$ ve $x = x_i - h$ alınıp yeniden düzenlenirse aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$u(x_i + h) = u(x_i) + \frac{u'(x_i)}{1!}h + \frac{u''(x_i)}{2!}h^2 + \frac{u'''(x_i)}{3!}h^3 + \cdots \tag{2.46}$$

$$u(x_i - h) = u(x_i) - \frac{u'(x_i)}{1!}h + \frac{u''(x_i)}{2!}h^2 - \frac{u'''(x_i)}{3!}h^3 + \cdots \tag{2.47}$$

(2.46) ifadesinden $u'(x_i)$ türevi çekilirse

$$u'(x_i) = \frac{u(x_i + h) - u(x_i)}{h} + O(h) \tag{2.48}$$

ifadesi elde edilir. (2.48) ifadesine ileri fark yaklaşımı denir. (2.47) ifadesinden $u'(x_i)$ türevi çekilirse

$$u'(x_i) = \frac{u(x_i) - u(x_i - h)}{h} + O(h) \tag{2.49}$$

ifadesi elde edilir. (2.49) ifadesine geri fark yaklaşımı denir. (2.46) ve (2.47) ifadeler taraf tarafa çıkartılırsa ve $u'(x_i)$ türevi çekilirse

$$u'(x_i) = \frac{u(x_i + h) - u(x_i - h)}{2h} + O(h^2) \tag{2.50}$$

ifadesi elde edilir. (2.49) ifadesine merkezi fark yaklaşımı denir.(2.46) ve (2.47) ifadelerinde sırasıyla h yerine $2h$ alınırsa aşağıdaki denlemler elde edilir.

$$u(x_i+2h)=u(x_i)+\frac{u'(x_i)}{1!}2h+\frac{u''(x_i)}{2!}4h^2+\frac{u'''(x_i)}{3!}8h^3+\cdots \tag{2.51}$$

$$u(x_i-2h)=u(x_i)-\frac{u'(x_i)}{1!}2h+\frac{u''(x_i)}{2!}4h^2-\frac{u'''(x_i)}{3!}8h^3+\cdots \tag{2.52}$$

(2.46) ifadesini “2” ile çarpıp (2.51) ifadesiyle taraf tarafa çıkartılırsa ve bu ifadeden $u''(x_i)$ çekilirse,

$$u''(x_i)=\frac{u(x_i+2h)-2u(x_i+h)+u(x_i)}{h^2}+O(h) \tag{2.53}$$

şeklinde $u''(x_i)$ için ileri fark yaklaşımı elde edilir. (2.46) ifadesini “2” ile çarpıp (2.51) ifadesiyle taraf tarafa çıkartılırsa ve bu ifadeden $u''(x_i)$ çekilirse,

$$u''(x_i)=\frac{u(x_i-2h)-2u(x_i-h)+u(x_i)}{h^2}+O(h) \tag{2.54}$$

şeklide $u''(x_i)$ için geri fark yaklaşımı elde edilir. (2.46) ve (2.47) ifadeler taraf tarafa toplanıp $u''(x_i)$ türevi çekilirse

$$u''(x_i)=\frac{u(x_i-h)-2u(x_i)+u(x_i+h)}{h^2}+O(h^2) \tag{2.55}$$

İfadesi elde edilir. (2.49) ifadesine $u''(x_i)$ için merkezi fark yaklaşımı denir.

2.5.1. Lineer problemlerin sonlu fark yöntemi ile çözümü

$$u''(x_i)=p(x)u'+q(x)u+r(x), a\le x\le b,\quad u(a)=\alpha, u(b)=\beta \tag{2.56}$$

şeklindeki sınır değer problemini göz önüne alalım. $[a,b]$ aralığını $n>0$ tamsayısı için $h=\frac{b-a}{n+1}$, $x_i=a+ih$, $i=0,1,\dots.n+1$ olacak şekilde $n+1$ eşit parçaya bölünür. (2.56) ifadesinde u' ve u'' türevleri yerine merkezi fark yaklaşımları yazılırsa,

$$\frac{u(x_{i+1})-2u(x_i)+u(x_{i-1})}{h^2}+O(h^2) \tag{2.57}$$
$$= \ p(x_i)\left[\frac{u(x_{i+1})-u(x_{i-1})}{2h}+O(h)\right]$$
$$+\,q(x_i)u(x_i)+r(x_i)$$

elde edilir. (2.57) denklemini sadeleştirme için $u(x_i)=w_i$ alınıp hata terimleri ihmal edilirse

$$\frac{-w_{i+1}+2w_i+w_{i-1}}{h^2}+\ p(x_i)\frac{w_{i+1}-w_{i-1}}{2h}+q(x_i)w_i \tag{2.58}$$
$$=-r(x_i) \qquad\qquad i=1,2,\dots,n$$

elde edilir. Bu ifade düzenlenir ve sınır değerleri de göz önüne alınırsa

$$-\left(1+\frac{h}{2}p(x_i)\right)w_{i-1}+\left(2+h^2q(x_i)\right)w_i \tag{2.59}$$
$$-\left(1-\frac{h}{2}p(x_i)\right)w_{i+1}=-h^2r(x_i) \qquad\qquad i=1,2,\dots,n$$
$$w_0=\alpha, \qquad\qquad w_{n+1}=\beta$$

elde edilir. Bu ise

$$AW=B \tag{2.60}$$

Şeklinde bir lineer denklem sistemi olarak ifade edilebilir.

Burada,

$$A=\begin{bmatrix} 2+h^2q(x_1) & -(1+\frac{h}{2}p(x_1) & \cdots 0 \\ -(1+\frac{h}{2}p(x_2) & 2+h^2q(x_2) & \vdots \\ & & 0 \\ 0 & \ddots & \\ \vdots & -(1+\frac{h}{2}p(x_2) & (1+\frac{h}{2}p(x_2) \\ 0 & 0 & 2+h^2q(x_n) \end{bmatrix}_{nxn}$$

$$W = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{n-1} \\ w_n \end{bmatrix}_{nxn}$$

ve

$$B = \begin{bmatrix} -h^2 r(x_1) + \left(1 + \frac{h}{2} p(x_1)\right)\alpha \\ -h^2 r(x_2) \\ \vdots \\ -h^2 r(x_{n-1}) \\ -h^2 r(x_n) + \left(1 - \frac{h}{2} p(x_n)\right)\beta \end{bmatrix}_{nx1}$$

dir. Bu lineer denklem sistemi Crout Yöntemiyle çözüldüğünde (2.56) ile verilen sınır değer probleminin nümerik çözümü elde edilmiş olur.

2.5.2. Lineer olmayan problemlerin sonlu fark yöntemi ile çözümü

$$u'' = f(x, u, u'), \quad a \leq x \leq b, \quad u(a) = \alpha, \quad u(b) = \beta \tag{2.61}$$

şeklindeki sınır değer problemini göz önüne alalım. $[a, b]$ aralığını $n > 0$ tamsayısı için $h = \frac{b-a}{n+1}$, $x_i = a + ih$, $i = 0,1, \ldots . n+1$ olacak şekilde $n+1$ eşit parçaya bölünür. (2.56) ifadesinde u' ve u'' türevleri yerine merkezi fark yaklaşımları yazılırsa,

$$\frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})}{h^2} + O(h^2) \tag{2.62}$$
$$= \quad f(x_i, u(x_i), \frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i-1})}{2h} + O(h))$$

elde edilir. (2.57) denklemini sadeleştirme içim $u(x_i) = w_i$ alınıp hata terimleri ihmal edilirse

$$\frac{-w_{i+1} + 2w_i + w_{i-1}}{h^2} + f\left(x_i, w_i, \frac{w_{i+1} - w_{i-1}}{2h}\right) = 0 \qquad i = 1,2, \ldots, n \tag{2.63}$$

$$w_0 = \alpha, \qquad w_{n+1} = \beta$$

elde edilir. Burada $w_{i,}$ $u(x_i)$ nin yaklaşık değeridir. Bu denklem sisteminden

$$-\alpha + 2w_1 - w_2 + h^2 f(x_1, w_1, \frac{w_2 - \alpha}{2h}) = 0$$

$$-w_1 + 2w_2 - w_3 + h^2 f(x_2, w_2, \frac{w_3 - w_1}{2h}) = 0$$

$$-w_2 + 2w_3 - w_4 + h^2 f(x_3, w_3, \frac{w_4 - w_2}{2h}) = 0$$

$$\vdots$$

$$-w_{n-2} + 2w_{n-1} - w_n + h^2 f(x_{n-1}, w_{n-1}, \frac{w_n - w_{n-2}}{2h}) = 0$$

$$-w_{n-1} + 2w_n + h^2 f(x_n, w_n, \frac{\beta - w_{n-1}}{2h}) - \beta = 0 \tag{2.64}$$

şeklinde n tane lineer olmayan denklemden oluşan non-lineer denklem sistemine ulaşılır. Bu denklem sistemi $F(W) = 0$ şeklinde Newton yöntemi kullanılarak çözüm elde edilmiş olur.

3. UYGULAMALAR

Bu bölümde özel olarak seçilen iki adet Lane-Emden denklemini

$$u'(0) = 0, u(0) = 1 \tag{3.1}$$

sınır şartları altında ikinci bölümde belirtilen yöntemler ile çözülmüştür. Elde eldilen nümerik çözümler tablo yardımıyla tam çözümlerle karşılaştırılmıştır.

Çözüm sırasında işlemler için Mathematica ve Matlab programlarından yararlanılmıştır.

3.1. Problem 1

$$u'' + \frac{2}{x}u' + u^5 = 0 \tag{3.2}$$

denkleminin (3.1) sınır şartları altında tam çözümü

$$u(x) = \left(1 + \frac{x^2}{3}\right)^{\frac{-1}{2}} \tag{3.3}$$

dir [6]. (3.1) ifadesinin $x = 0$ Taylor seri açılımı ise aşağıdaki gibidir.

$$u(x) = u_n(x) = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{24} - \frac{5x^6}{432} + \frac{35x^8}{10368} - \frac{7x^{10}}{6912} + O(x^{12}) \tag{3.4}$$

3.1.1. Problem 1'in HE varyosyonel iterasyon yöntemi ile çözümü

Bu denklem için düzeltme denklemi

$$u_{n+1}(\mathrm{x}) = u_n(\mathrm{x}) + \int_0^x \lambda(s)\left(u''_s(s) + \frac{2}{s}u'_s(s) + u^5{}_s(s) = 0\ \right)ds \tag{3.5}$$

şeklinde tanımlanır.

Bu denklem için lagrange çarpanı $\lambda(s) = \frac{s(s-x)}{x}$ şeklinde bulunur ve ilk yaklaşım fonksiyonunun problemin başlangıç koşullarını sağlaması gerektiğinden $u_0(x) = 1$ olarak alınabilir.Düzeltme fonskiyonunda $n = 0,1,2, \dots$ değerlerine yerine konulup iterasyon adımlarında ilk altı yaklaşım aşağıdaki gibidir.

$$u_1(x) = 1 - \frac{x^2}{6} \tag{3.6}$$

$$u_2(x) = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{24} + O(x^6) \tag{3.7}$$

$$u_3(x) = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{24} - \frac{5x^6}{432} + O(x^8) \tag{3.8}$$

$$u_4(x) = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{24} - \frac{5x^6}{432} + \frac{35x^8}{10368} + O(x^{10}) \tag{3.9}$$

$$u_5(x) = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{24} - \frac{5x^6}{432} + \frac{35x^8}{10368} - \frac{7x^{10}}{6912} + O(x^{12}) \tag{3.10}$$

Bu şekilde devam edecek olursak

$$\begin{aligned} u_n(x) = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{24} - \frac{5x^6}{432} + \frac{35x^8}{10368} - \frac{7x^{10}}{6912} \\ + \frac{77x^{12}}{248832} - \frac{143x^{14}}{1492992} + \frac{715x^{16}}{23887872} - \frac{12155x^{18}}{1289945088} \\ + \frac{46189x^{20}}{15479341056} + O(x^{22}) \end{aligned} \tag{3.11}$$

olarak elde edilir. $u = \lim_{n\to\infty} u_n$ alınırsa (3.4) ifadesi elde edilir.

3.1.2. Problem 1'in Adomian ayrışım yöntemi ile çözümü

Verilen denklem için L lineer operatörü ve operatör formu

$$L(.) = x^{-2}\frac{d}{dx}\left(x^2\frac{d}{dx}\right)(.) \tag{3.12}$$

$$Lu = -u^5 \tag{3.13}$$

şeklinde tanımlanır. Buradan

$$u(x) = u(0) + u'(0)x - L^{-1}u^5 \tag{3.14}$$

$$u(x) = 1 - L^{-1}u^5 \tag{3.15}$$

elde edilir. Sonsuz seri toplamı alınırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = 1 - L^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad , \qquad u_{n+1} = -L^{-1}A_n \tag{3.16}$$

$$u_{i+1} = -\int_0^x x^{-2}\left(\int_0^x x^2 A_i\, dx\right) dx \tag{3.17}$$

elde edilir. Şimdi de u^5 için A_i adomian polinomlarını bulalım.

$$A_0 = {u_0}^m = 1 \tag{3.18}$$

$$A_1 = m u_1 {u_0}^{m-1} = -\frac{5x^2}{6} \tag{3.19}$$

$$A_2 = m u_2 {u_0}^{m-1} + m(m-1)\frac{{u_1}^2}{2!}{u_0}^{m-2} = \frac{35x^4}{72} \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned} A_3 &= m u_3 {u_0}^{m-1} + m(m-1)u_1 u_2 {u_0}^{m-2} \\ &+ m(m-1)(m-2)\frac{{u_1}^3}{3!}{u_0}^{m-3} = \frac{-35x^6}{144} \end{aligned} \tag{3.21}$$

$$\begin{aligned} A_4 = m u_4 {u_0}^{m-1} &+ m(m-1)\left(\frac{{u_2}^2}{2!} + u_1 u_3\right){u_0}^{m-2} \\ &+ m(m-1)(m-2)\frac{{u_1}^2 u_2}{2!}{u_0}^{m-3} \\ &+ m(m-1)(m-2)(m-3)\frac{{u_1}^4}{4!}{u_0}^{m-4} = \frac{385x^8}{3456} \end{aligned} \tag{3.22}$$

ifadelerinde *m=5* yazarak bulduğumuz Adomian polinomlarını sırasıyla (3.17) ifadesinde yazarak iterasyon adımlarını yaparsak

$$u_0 = 1 \tag{3.23}$$

$$u_1 = -\frac{x^2}{6} \tag{3.24}$$

$$u_2 = \frac{x^4}{24} \tag{3.25}$$

$$u_{3=} -\frac{5x^6}{432} \tag{3.26}$$

$$u_4 = \frac{35x^8}{10368} \tag{3.27}$$

$$\vdots$$

elde edilir.

Elde ettiğimiz değerleri (2.18) denkleminde yerine yazılacak olursa (3.4) ifadesi elde edilir. $u = \lim_{n\to\infty} u_n$ alınırsa da (3.3) elde edilir.

3.1.3. Problem 1'in homotopi pertürbasyon yöntemi ile çözümü

Verilen (3.2) nonliner denklemi (2.25) denkleminde yerine konulursa

$$H(v,p) = (1-p)[L(v) - L(u_0)] + p[A(v) - f(r)] = 0 \tag{3.28}$$

$$H(v,p) = (1-p)\left[v'' + \frac{2}{x}v' - u_0'' - \frac{2}{x}u_0'\right] + p\left[v'' + \frac{2}{x}v' - v^5\right] = 0 \tag{3.29}$$

Elde edilir. Sınır şartlarını kontrol edersek ;

$$H(v,0) = \left[v'' + \frac{2}{x}v' - u_0'' - \frac{2}{x}u_0'\right] \tag{3.30}$$

$$H(v,1) = \left[v'' + \frac{2}{x}v' - v^5\right] = 0 \tag{3.31}$$

denklemlerini elde ederiz. Homotopi pertürbasyon metodu için seri açılımı yaparak elde edilen

$$v = v_0 + pv_1 + p^2v_2 + p^3v_3 + p^4v_4 + O(p^5) \tag{3.32}$$

$$v' = v_0' + pv_1' + p^2v_2' + p^3v_3' + p^4v_4' + O(p^5) \tag{3.33}$$

$$v'' = v_0'' + pv_1'' + p^2v_2'' + p^3v_3'' + p^4v_4' + O(p^5) \tag{3.34}$$

denklemlerini (3.28) ana denklemde yerine yazarsak

$$\begin{aligned}(v_0'' + pv_1'' + p^2v_2'' + p^3v_3'' + p^4v_4 + \cdots) + \frac{2}{x}(v_0' + pv_1' + p^2v_2' \\ + p^3v_3' + p^4v_4' + \cdots) - u_0'' - \frac{2}{x}u_0' + p[u_0'' + \frac{2}{x}u_0' \\ + (v_0 + pv_1 + p^2v_2 + p^3v_3 + p^4v_4 + \cdots)^5] = 0\end{aligned} \tag{3.35}$$

denklemi elde edilir.

p^0 için ,

$$\begin{gathered}v_0'' + \frac{2}{x}v_0' - u_0'' - \frac{2}{x}u_0' = 0 \\ v_0(0) = 1 \ \ v_0'(0) = 0\end{gathered} \tag{3.36}$$

denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümü $v_0(x) = 1$ elde edilir [28].

p için ,

$$\begin{gathered}v_1'' + \frac{2}{x}v_1' + u_0'' + \frac{2}{x}u_0' + v_0^5 = 0 \\ v_1(0) = 0, \qquad v_1'(0) = 0\end{gathered} \tag{3.37}$$

denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümü $v_1(x) = -\frac{1}{6}x^2$ elde edilir [28].

p^2 için ,

$$\begin{gathered}v_2'' + \frac{2}{x}v_2' + u_0'' + 5v_1v_0^4 = 0 \\ v_2(0) = 0, \qquad v_2'(0) = 0\end{gathered} \tag{3.38}$$

denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümü $v_2(x) = \frac{5x^4}{120} = \frac{x^4}{24}$ elde edilir [28].

p^3 için ,

$$v_3'' + \frac{2}{x}v_3' + 5v_2v_0^4 + 10v_1^2v_0^3 = 0 \tag{3.39}$$

$$v_3(0) = 0, \qquad v_3{}'(0) = 0$$

Bu denklemin çözümü $v_3(x) = \frac{-5x^6}{432}$ elde edilir [28].

p^4 için ,

$$v_4{}'' + \frac{2}{x} v_4{}' + 5v_3 v_0{}^4 + 20 v_2 v_1 v_0{}^3 + 10 v_1^3 v_0{}^2 = 0 \tag{3.40}$$

$$v_4(0) = 0, \qquad v_4{}'(0) = 0$$

Bu denklemin çözümü $v_4(x) = \frac{35x^8}{10368}$ elde edilir [28].

Buradan genel çözüm

$u \approx v = v_0 + pv_1 + p^2 v_2 + p^3 v_3 + p^4 v_4 + O(p^5)$

Olarak bulunur.Tam çözüm için $p = 1$ alındığında,

$$u = \lim_{p \to 1} v$$

$$u = v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + O(p^5)$$

$u = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{24} - \frac{5x^6}{432} + \frac{35x^8}{10368} + \cdots$ taylor seri açılımı elde edilir. Bu açılım da (3.3) çözüm fonksiyonunun açılımıdır.

3.1.4. Problem 1'in homotopi analiz yöntemi ile çözümü

Önce L lineer operatörünü belirleyelim.

$$L[\phi(x;p)] = \phi''(x) + \frac{2}{x}\phi'(x) \tag{3.41}$$

Bununla birlikte $L\left[-\frac{c_1}{x} + c_2\right] = 0$ $\quad c_i(i = 1,2)$ integrasyon sabitleridir. N nonlineer operatörü

$$N[\phi(x;p)] = \phi''(x) + \frac{2}{x}\phi'(x) + \phi^5 \tag{3.42}$$

şeklinde tanımlanır. Sıfırıncı mertebeden deformasyon denklemi

$$(1-p)L[\phi(x;p) - u_0(x)] = p\tilde{h}H(x)N[\phi(x;p)] \tag{3.43}$$

şeklinde oluşturulur. Buradan

$\phi(x;0) = u_0(x), \quad \phi(x;1) = u(x)$dir.

$$u(x) = u_0(x) + \sum_{m=1}^{\infty} u_m(x)$$

ifadesi bu denklemin asıl çözümüdür. $m.$ mertebeden deformasyon denklemi

$$u_m(x) = \chi_m u_{m-1}(x) + \tilde{h} L^{-1} R_m\big(\vec{u}_{m-1}(x)\big) \tag{3.44}$$

Şeklindedir. Buradan $R_m\big(\vec{u}_{m-1}(x)\big)$ iterasyon adımlarında sırasıyla yerine konularak

$$R_1\big(\vec{u}_0(x)\big) = u_0{}'' + \frac{2}{x} u_0{}' + u_0{}^5 \tag{3.45}$$

$$R_2\big(\vec{u}_1(x)\big) = u_1{}'' + \frac{2}{x} u_1{}' + 5 u_1 u_0{}^4 \tag{3.46}$$

$$R_3\big(\vec{u}_2(x)\big) = u_2{}'' + \frac{2}{x} u_2{}' + 5 u_2 u_0{}^4 + 20 \frac{u_1{}^2}{2!} u_0{}^3 \tag{3.47}$$

$$R_4\big(\vec{u}_3(x)\big) = u_3{}'' + \frac{2}{x} u_3{}' + 5 u_3 u_0{}^4 + 20 u_1 u_2 u_0{}^3 + 60 \frac{u_1{}^3}{3!} u_0{}^3 \tag{3.48}$$

$$\vdots$$

olarak bulunur. (3.44) ifadesinde sırayla yerine yazarsak

$$u_1(x) = \frac{\tilde{h}x^2}{6} \tag{3.49}$$

$$u_2(x) = \frac{\tilde{h}x^2}{6} + \tilde{h}\Big(\frac{\tilde{h}x^2}{6} + \frac{\tilde{h}x^4}{24}\Big) \tag{3.50}$$

$$u_3(x) = \frac{\tilde{h}x^2}{6} + \tilde{h}\Big(\frac{\tilde{h}x^2}{6} + \frac{\tilde{h}x^4}{24}\Big) + \tilde{h}\Big(\frac{\tilde{h}x^2}{6} + \frac{\tilde{h}^2x^2}{6} + \frac{\tilde{h}x^4}{24} + \frac{\tilde{h}^2x^4}{12} + \frac{5\tilde{h}^2x^6}{432}\Big) \tag{3.51}$$

$$\begin{aligned} u_4(x) = {} & \frac{\tilde{h}x^2}{6} + \tilde{h}\Big(\frac{\tilde{h}x^2}{6} + \frac{\tilde{h}x^4}{24}\Big) + \tilde{h}\Big(\frac{\tilde{h}x^2}{6} + \frac{\tilde{h}^2x^2}{6} + \frac{\tilde{h}x^4}{24} + \frac{\tilde{h}^2x^4}{12} + \frac{5\tilde{h}^2x^6}{432}\Big) \\ & + \tilde{h}\Big(\frac{\tilde{h}x^2}{6} + \frac{\tilde{h}^2x^2}{3} + \frac{\tilde{h}^3x^2}{6} + \frac{\tilde{h}x^4}{24} + \frac{\tilde{h}^2x^4}{6} + \frac{\tilde{h}^3x^4}{8} + \frac{5\tilde{h}^2x^6}{216} \\ & + \frac{5\tilde{h}^3x^6}{144} + \frac{35\tilde{h}^3x^8}{10368}\Big) \end{aligned} \tag{3.52}$$

olarak elde edilir. Serinin gerçek çözümü $\tilde{h} = -1$ değeri alınacağından ve $u(x) = u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + u_4(x) + \cdots$ olduğundan

$$u(x)=1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{24}-\frac{5x^6}{432}+\frac{35x^8}{10368}+O(x^6)$$

ifadesi elde edilir. Bu seride (3.3) ifadesinin Taylor açılımıdır, ispat tamamlanmış olur.

3.1.5. Problem 1'in sonlu fark yöntemi ile çözümü

(3.2) denkleminde u'' ve u' türevlerine yerine merkezi sonlu farklar yaklaşımları ifadeleri yazılıp hata payları dikkate alınmazsa

$$\frac{u(x_i-h)-2u(x_i)+u(x_i+h)}{h^2}+\frac{2}{x_i}\frac{u(x_{i+1})-u(x_{i-1})}{2h}+u(x_i)^5=0 \qquad (3.53)$$

Denklemi elde edilir. Sınır şartlarını da dikkate alırsak

$h=(b-a)/(n+1),\ \ x_i=a+ih,\ i=1,\dots.n$ şeklinde tanımlanırsa (3.11) denklemi

$$\left(1-\frac{h}{x_i}\right)w_{i-1}-2w_i+\left(1+\frac{h}{x_i}\right)w_{i+1}+h^2{w_i}^5=0 \qquad (3.54)$$

olur. Bu denklem ailesindeki denklemleri sırayla yazacak olursak ;

$$2w_1+2w_2h^2{w_1}^5=0$$

$$\left(1-\frac{h}{x_2}\right)w_1-2w_2+\left(1+\frac{h}{x_2}\right)w_3+h^2{w_2}^5=0$$

$$\left(1-\frac{h}{x_3}\right)w_2-2w_3+\left(1+\frac{h}{x_3}\right)w_4+h^2{w_3}^5=0$$

$$\left(1-\frac{h}{x_n}\right)w_{n-1}-2w_n+\left(1+\frac{h}{x_n}\right)\sqrt{\frac{3}{4}}+h^2{w_n}^5=0 \qquad (3.55)$$

şeklinde n tane lineer olmayan denklemden oluşan bir denklem sistemi elde edilir.

$F(W)=0$ ve $W=(w_1,w_2,\dots,w_n)$ denklem sistemine dönüşür buradan Newton yöntemi Matlab programı kullanarak nümerik çözümü elde edilmiştir.

Problem 1'in verilen yöntemlere göre yaklaşık adımlarının aldığı değerler Tablo 3.1 de gösterilmiştir.

Tablo 3.1. Problem 1 için Yöntemlerin karşılaştırılması

x	Nümerik değeri	VIM u_4'e kadar	ADM u_4'e kadar	HPM u_4'e kadar	HAM u_4'e kadar	SFM n=100
0.1	0.99833748	0.99833748	0.99833748	0.99833748	0.99833748	0.99850309
0.2	0.99339926	0.99339926	0.99339926	0.99339926	0.99339926	0.99372403
0.3	0.98532927	0.98532928	0.98532928	0.98532928	0.98532928	0.98580077
0.4	0.97435470	0.97435480	0.97435480	0.97435480	0.97435480	0.97495553
0.5	0.96076928	0.96076984	0.96076984	0.96076984	0.96076984	0.96147805

3.2. Problem 2

$$u'' + \frac{1}{x}u' + 4u^2 - 8u^3 = 0 \tag{3.56}$$

Verilen (3.56) denkleminin (3.1) sınır şartları altında tam çözümü

$$u(x) = \frac{1}{1-x^2} \tag{3.57}$$

dir[33]. (3.57) ifadesinin $x = 0$ daki Taylor seri açılımı da aşağıdaki gibidir.

$$u_n(x) = 1+x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + x^{10} + O(x^{12}) \tag{3.58}$$

3.2.1. Problem 2'nin HE varyasyonel iterasyon yöntemi ile çözümü

Bu denklem için düzeltme denklemi

$$u_{n+1}(\mathrm{x}) = u_n(\mathrm{x}) + \int_0^x \lambda(s)\left(u''_s(s) + \frac{1}{s}u'_s(s) + 4u^2{}_s(s) - 8u^3{}_s(s)\right)ds \tag{3.59}$$

şeklinde tanımlanır.

Bu denklem için lagrange çarpanı $\lambda(s) = s\ln\frac{s}{x}$ şeklinde bulunur ve ilk yaklaşım fonksiyonunun problemin başlangıç koşullarını sağlaması gerektiğinden $u_0(x) = 1$ olarak alabiliriz. Düzeltme fonskiyonunda $n = 0,1,2,\ldots$ değerlerine yerine konulup iterasyon adımlarından ilk dört yaklaşım

$$u_1(x) = 1 + x^2 \tag{3.60}$$

$$u_2(x) = 1 + x^2 + x^4 + \frac{5x^6}{9} + \frac{x^8}{8} + O(x^{10}) \tag{3.61}$$

$$u_3(x) = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \frac{8x^8}{9} + \frac{307x^{10}}{450} + O(x^{12}) \tag{3.62}$$

$$u_4(x) = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + \frac{221x^{10}}{225} + \frac{1891x^{12}}{2025} + O(x^{14}) \tag{3.63}$$

olarak elde edilir. Bu şekilde devam edecek olursak (3.58) ifadesi elde edilir.

$u = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$ alınırsa (3.57) fonksiyonu elde edilir.

3.2.2. Problem 2'nin Adomian ayrışım yöntemi ile çözümü

Verilen denklem için L lineer operatörü ve operatör formu

$$L(.) = x^{-1}\frac{d}{dx}\left(x\frac{d}{dx}\right)(.) \tag{3.64}$$

$$Lu = -4u^2 + 8u^3 \tag{3.65}$$

şeklinde tanımlanır. Buradan

$$u(x) = u(0) + u'(0)x - L^{-1}(4u^2 - 8u^3) \tag{3.66}$$

$$u(x) = 1 - L^{-1}(4u^2 - 8u^3) \tag{3.67}$$

elde edilir. Sonsuz seri toplamı alırsak

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = 1 - L^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad , \quad u_{n+1} = -L^{-1}A_n \tag{3.68}$$

$$u_{i+1} = -\int_0^x x^{-1}(\int_0^x xA_i\, dx)\, dx \tag{3.69}$$

Şimdi de $(4u^2 - 8u^3)$ için A_i adomian polinomlarını bulalım.

$$A_0 = -4 \tag{3.70}$$

$$A_1 = -16x^2 \tag{3.71}$$

$$A_2 = -36x^4 \tag{3.72}$$

$$A_3 = -64x^6 \tag{3.73}$$

$$A_4 = -100x^8 \tag{3.74}$$

$$\vdots$$

Bulduğumuz Adomian polinomlarını sırasıyla (3.69) ifadesinde yazarak iterasyon adımları yapılırsa

$$u_0 = 1 \tag{3.75}$$

$$u_1 = x^2 \tag{3.76}$$

$$u_2 = x^4 \tag{3.77}$$

$$u_3 = x^6 \tag{3.78}$$

$$u_4 = x^8 \tag{3.79}$$

olarak elde edilir.Elde ettiğimiz değerler (2.18) denkleminde yerine yazılacak olursa (3.58) ifadesi elde edilir. $u = \lim_{n \to \infty} u_n$ alınırsa (3.57) ifadesi elde edilir.

3.2.3. Problem 2'nin homotopi pertürbasyon yöntemi ile çözümü

Verilen (3.56) nonliner denklemi (2.25) denkleminde yerine konulursa

$$H(v,p) = (1-p)[L(v) - L(u_0)] + p[A(u) - f(r)] = 0 \tag{3.80}$$

$$H(v,p) = (1-p)\left[v'' + \frac{1}{x}v' - u_0'' - \frac{1}{x}u_0'\right] + p\left[v'' + \frac{1}{x}v' - 4v^2 + 8v^3\right] = 0 \tag{3.81}$$

elde edilir. Sınır şartlarını kontrol edersek ;

$$H(v,0) = \left[v'' + \frac{1}{x}v' - u_0'' - \frac{1}{x}u_0'\right] \tag{3.82}$$

$$H(v,1) = \left[v'' + \frac{1}{x}v' - 4v^2 + 8v^3\right] = 0 \tag{3.83}$$

Denklemlerini elde ederiz. Homotopi pertürbasyon metodu için Seri açılımı yaparsak

$$v = v_0 + pv_1 + p^2v_2 + p^3v_3 + p^4v_4 + O(p^5) \tag{3.84}$$

$$v' = v_0' + pv_1' + p^2v_2' + p^3v_3' + p^4v_4' + O(p^5) \tag{3.85}$$

$$v'' = v_0'' + pv_1'' + p^2v_2'' + p^3v_3'' + p^4v_4'' + O(p^5) \tag{3.86}$$

Denklemlerini (3.80) ana denklemde yerine yazarsak

$$(v_0'' + pv_1'' + p^2v_2'' + p^3v_3'' + p^4v_4'' + \cdots) + \frac{1}{x}(v_0' + pv_1' + p^2v_2' + p^3v_3' + p^4v_4' \ldots) - u_0'' - \frac{1}{x}u_0' + p[u_0'' + \frac{1}{x}u_0' + 4(v_0 + pv_1 + p^2v_2 + p^3v_3 + p^4v_4 + \cdots)^2 - 8(v_0 + pv_1 + p^2v_2 + p^3v_3 + p^4v_4 + \cdots)^3] = 0 \tag{3.87}$$

Denklemi elde edilir.

p^0 için ,

$$v_0'' + \frac{1}{x}v_0' - u_0'' - \frac{1}{x}u_0' = 0 \tag{3.88}$$

$$v_0(0) = 1 \quad v_0'(0) = 0$$

Bu denklemin çözümü $v_0(x) = 1$ elde edilir [28].

p için ,

$$v_0'' + \frac{1}{x}v_0' - u_0'' - \frac{1}{x}u_0' + 4(v_0)^2 - 8(v_0)^3] = 0 \tag{3.89}$$

$$v_1(0) = 0, \qquad v_1'(0) = 0$$

denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümü $v_1(x) = x^2$ elde edilir [28].

p^2 için ,

$$v_2'' + \frac{1}{x}v_2' + 8v_0v_1 - 24v_0^2v_1 = 0 \tag{3.90}$$

$$v_2(0) = 0, \qquad v_2'(0) = 0$$

denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümü $v_2(x) = x^4$ elde edilir [28].

p^3 için ,

$$v_3'' + \frac{1}{x}v_3' + 4v_1^2 + 8v_0v_2 - 48v_0v_1^2 - 24v_0^2v_2 = 0 \tag{3.91}$$

$$v_3(0) = 0, \qquad v_3'(0) = 0$$

denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümü $v_3(x) = x^6$ elde edilir [28].

p^4 için ,

$$v_4'' + \frac{1}{x}v_4' + -8v_1^3 + (8 - 48v_0)v_1v_2 + (8v_0 - 24v_0^2)v_3 = 0 \tag{3.92}$$

$$v_4(0) = 0, \qquad v_4'(0) = 0$$

Bu denklemin çözümü $v_4(\mathrm{x}) = x^8$ elde edilir [28]. Buradan genel çözüm

$u \approx v = v_0 + pv_1 + p^2v_2 + p^3v_3 + p^4v_4 + O(p^5)$

olarak bulunur.Tam çözüm için $p = 1$ alındığında,

$$u = \lim_{p\to 1} v$$

$$u = v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + O(p^5)$$

(3.58) taylor seri açılımı elde edilir. Bu açılım da (3.57) fonksiyonun açılımıdır.

3.2.4. Problem 2'nin homotopi analiz yöntemi ile çözümü

Önce L lineer operatörünü belirleyelim.

$$L[\phi(x;p)] = \phi''(x) + \frac{1}{x}\phi'(x) \tag{3.93}$$

Bununla birlikte $L\left[-\frac{c_1}{x} + c_2\right] = 0$ $c_i(i = 1,2)$ integrasyon sabitleridir. N nonlineer operatörü

$$N[\phi(x;p)] = \phi''(x) + \frac{1}{x}\phi'(x) + 4\phi^2 - 8\phi^3 \tag{3.94}$$

şeklinde tanımlanabilir. Sıfırıncı mertebeden deformasyon denklemi

$$(1-p)L[\phi(x;p) - u_0(x)] = p\tilde{h}H(x)N[\phi(x;p)] \tag{3.95}$$

şeklinde oluşturulur. Buradan

$\phi(x;0) = u_0(x)$, $\phi(x;1) = u(x)$dir.

$$u(x) = u_0(x) + \sum_{m=1}^{\infty} u_m(x)$$

ifadesi bu denklemin asıl çözümüdür. $m.$ mertebeden deformasyon denklemi

$$u_m(x) = \chi_m u_{m-1}(x) + \tilde{h}L^{-1}R_m\left(\vec{u}_{m-1}(x)\right) \tag{3.96}$$

şeklindedir. Buradan $R_m\left(\vec{u}_{m-1}(x)\right)$ iterasyon adımları sırasıyla yerine konularak

$$R_1\left(\vec{u}_0(x)\right) = u_0'' + \frac{1}{x}u_0' + 4u_0^{\ 2} - 8u_0^{\ 3} \tag{3.97}$$

$$R_2\left(\vec{u}_1(x)\right) = u_1'' + \frac{1}{x}u_1' + u_1(8u_0 - 24u_0^2) \tag{3.98}$$

$$R_3\left(\vec{u}_2(x)\right) = u_2'' + \frac{1}{x}u_2' + \frac{1}{2}(8 - 48u_0)u_1^2 + (8u_0 - 24u_0^2)u_2 \tag{3.99}$$

$$R_4\left(\vec{u}_3(x)\right) = u_3'' + \frac{1}{x}u_3' - 8u_1^3 + (8 - 48u_0)u_1u_2 \tag{3.100}$$

$$+(8u_0 - 24u_0^2)u_3$$

$$\vdots$$

olarak bulunur. (3.44) ifadesinde sırayla yerine yazarsak

$$u_1(x) = \tilde{h}x^2 \tag{3.101}$$

$$u_2(x) = -\tilde{h}x^2(-1 + \tilde{h}(-1 + x^2)) \tag{3.102}$$

$$u_3(x) = -\tilde{h}x^2(1 + \tilde{h}(-1 + x^2))^2 \quad (3.103)$$

$$u_4(x) = -\tilde{h}x^2(1 + \tilde{h}(-1 + x^2))^3 \quad (3.104)$$

$$\vdots$$

olarak elde edilir.Serinin gerçek çözümü $\tilde{h} = -1$ değeri alınacağından ve $u(x) = u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + u_4(x) + \cdots$, olduğundan $u(x) = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + x^{10} + O(x^{12})$ ifadesi elde edilir. Bu seride (3.57) fonksiyonunun Taylor açılımıdır.

3.2.5. Problem 2'nin sonlu fark yöntemi ile çözümü

Verilen problemin çözüm fonksiyonu *x=1* için tanımsız olduğundan problemin bu yöntemle çözümü bulunamamıştır.

Problem 2'nin verilen yöntemlere göre yaklaşık adımlarının aldığı değerler Tablo 3.2 gösterilmiştir.

Tablo 3.2. Problem 2 için Yöntemlerin karşılaştırılması

x	Nümerik değeri	VIM u_4'e kadar	ADM u_4'e kadar	HPM u_4'e kadar	HAM u_4'e kadar
0.1	1.01010101	1.01010101	1.01010101	1.01010101	1.01010101
0.2	1.04166666	1.04166656	1.04166656	1.04166656	1.04166656
0.3	1.09890109	1.09889461	1.09889461	1.09889461	1.09889461
0.4	1.19047619	1.19035136	1.19035136	1.19035136	1.19035136
0.5	1.33333333	1.33203125	1.33203125	1.33203125	1.33203125

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada HE Varyasyonel iterasyon , Homotopi pertürbasyon , Homotopi analiz, Adomian ayrışım metodu ve Sonlu farklar metotları ile ilgili yapmış olduğumuz literatür araştırmaları doğrultusunda sınır şartları verilen belirli Lane–Emden denklemlerinin nümerik ve fonksiyonel çözümleri gerçekleştirildi. Bu çözümlerde belirli bir kademeden sonraki hata payları ihmal edilmiştir. Kullanılan yöntemler için daha yüksek mertebeden yaklaşımlar hesaplanarak daha yakın sonuçlar elde edildiği görülmüştür.

Adomian ayrışım metodu lineer olmayan diferansiyel denklemlere kolaylıkla uygulanabilen bir yöntemdir. Yaklaşık çözümler nonlineer denklemlerin analitik çözümleri ile hemen hemen aynıdır. Farklı tür Lane-Emden denklemleri için Adomian polinomları ayrı ayrı bulunarak analitik çözümler elde edilebilir.

Homotopi analiz metotu herhangi bir varsayım ve sınırlama olmaksızın lineer olmayan diferansiyel denklemlere kolaylıkla uygulanabilir. Yaklaşık çözümler denklemlerin analitik çözümlerine hemen hemen özdeştir. Homotopi analiz metotunda elde edilen yaklaşımlarda $\tilde{h} = -1$ yazılarak diğer yaklaşımlara yakın sonuçlar elde edilmektedir.

Homotopi pertürbasyon metodunda yakınsama, başlangıç yaklaşımının yeterince iyi seçilmesine bağlıdır. Ayrıca yakınsama homotopi yoluna da bağlıdır.$p = 1$ seçildiğinde yakın sonuçlar elde edildiği görülmüştür.

Sonlu farklar yönteminin işlemsel yükü diğerlerine göre fazla olduğu görülmektedir. Yakın sonuca n değerini yüksek seçtiğimiz zaman ulaşabilir. bu yöntem de sayısal hesaplamaların fazla olmasından dolayı bilgisayar yardımı gerekebilir.

HE Varyasyonel iterasyon, sadece birkaç iterasyon sonucu yaklaşık çözüme yakınsayabilmektedir. Çözümlerin yakınsaması, başlangıç yaklaşımının ve Lagrange çarpanının iyi tespit edilmesiyle alakalıdır. Belirtilen diğer yöntemlere göre HE varyasyonel iterasyon yönteminin diğer çözümlere göre daha az hesaplama ile tam sonuca yakın sonuç verdiği görülmüştür. İşlem yükü seçilen fonksiyona göre artabilir.

Farklı tür Lane-Emden denklemleri için başlangıç yaklaşımı ve Lagrange çarpanı değiştirilerek çözüm bulunabilir.

Hesaplamalar Mathematica ve MATLAB programları yardımıyla hesaplanmıştır. Elde edilen sonuçlar ışığında metotların Lane-Emden problemlerine uygulanabileceği söylenebilir.

Seçilen Lane-Emden denklemlemleri değiştirilip farklı yöntemler ile çözüm yolları arasında kıyas yapılabilir.

Yöntemlerin Lane-Emden denklemlerine ait birbirlerine göre farklılıkları Tablo 4.1 de gösterilmiştir.

Tablo 4.1. Yöntemlerin karşılaştırılması

YÖNTEM / KRİTER	HE VIM	ADM	HAM	HPM	SFM
NONLİNEER DENKLEME	UYGULANIR	UYGULANIR	UYGULANIR	UYGULANIR	UYGULANIR
İŞLEM YÜKÜ	AZ	ORTA	FAZLA	ORTA	FAZLA
GERÇEK SONUCA YAKINLIK	YAKIN	YAKIN	YAKIN	YAKIN	YAKIN
ÇÖZÜM FONKSİYONU	BULUNUR	BULUNUR	BULUNUR	BULUNUR	BULUNMAZ

KAYNAKLAR

[1] Lane, H. J. (1874). On theoretical temperature of the sun under the hypothesis of a gaseous mass maintaining its internal heat and depending on the laws of gases known to terrestrial experiment. *American Journal of Science*, *148*, 57-74. https://doi.org/10.2475/ajs.s2-50.148.57

[2] Emden, R. (1907). *Gaskugeln: Anwendungen der Mechanischen Wärmetherorie auf Kosmologiche und Meteorologiche Problem*. YAYINEVİ.

[3] Wazwaz, A. (2001). A new algorithm for solving differential equations of Lane-Emden type. *Applied Mathematics and Computation*, 118, 287-310. https://doi.org/10.1016/S0096-3003(99)00223-4

[4] Singh , O, P. , Pandey R. K., Singh V. K. (2009). An analytic algorithm of Lane–Emden type equations arising in astrophysics using modified Homotopy analysis method. *Computer Physics Communications*, 180, 1116-1124. http://dx.doi.org/10.1016/j.cpc.2009.01.012

[5] Baranwal, V. K. , Pandey R. K., Tripathi, M. P., Singh , O, P. (2012). An analytic algorithm of Lane-Emden-type equations arising in astrophysics - a hybrid approach. *Journal of Theoretical and Applied Physics*, 6, 6-22. http://doi:10.1186/2251-7235-6-22

[6] Chandrasekhar, S. (1938). *Polytropic and ısothermal gas spheres*. The University of Chicago Press, Chicago, pp. 94

[7] Kumar U, Kumar M. (2020.) Numerical solution of Lane-Emden type equations using Adomian decomposition method with unequal step-size partitions. *Engineering Computations*. http://doi:10.1108/EC-02-2020-0073

[8] Parand, K., Pirkhedri, A. (2010). Sinc-Collocation method for solving astrophysic equations. *New Astronomy*, 15(6), 533-537. https://doi.org/10.1016/j.newast.2010.01.001

[9] Jamet, P. (1970). On the convergence of finite-difference approximations to one-dimensional singular boundary-value problems. *Numerische Mathematik*. 14, 355-378

[10] Chawla, M.M., Katti, C. P. (1982). Finite difference methods and their convergence for a class of singular two point boundary value problems. *Numerische Mathematik*, 39,341-350.

[11] Chawla, M.M., Katti, C. P. (1984). A finite-difference method for a class of singular two-point boundary-value problems. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 4(4). 457-466. https://doi.org/10.1093/imanum/4.4.457

[12] Turut, V.(2015). Padé approximations for solving differential equations of Lane-Emden type. Batman University Journal of Life Sciences, 5(1), 26-39.

[13] Parand, K., Dehghan, M., Rezaei, A.R., Ghaderi, S.M.(2010) An approximation algorithm for the solution of the nonlinear Lane–Emden type equations arising in astrophysics using Hermite functions collocation method. *Computer Physics Communications*, 181, 1096-1108. http://dx.doi.org/10.1016/j.cpc.2010.02.018

[14] Liao, S. (2003). A new analytic algorithm for Lane-Emden type equations. *Applied Mathematics and Computation*, 142, 1-16. http://doi:10.1016/S0096-3003(02)00943-8

[15] Danish, M., Kumar S., Kumar. S. (2012). A note on the solution of singular boundary value problems arising in engineering and applied sciences: use of OHAM. *Computers and Chemical Engineering,* 36, 57-67. doi:10.1016/j.compchemeng.2011.08.008

[16] Kanth, R. A.S.V., Aruna, K. (2010). He's variational iteration method for treating nonlinear singular boundary value problems. *Computers and Mathematics with Applications,* 60, 821-829. http://dx.doi.org/10.1016/j.camwa.2010.05.029

[17] Yıldırım, A., Öziş, T. (2009). Solutions of singular IVPs of Lane-Emden type by the variational iteration method. *Nonlinear Analyis*, 70, 2480-2484. http://dx.doi.org/10.1016/j.na.2008.03.012

[18] Van Gorder, R. A., Vajravelu K.(2008). Analytic and numerical solutions to the Lane-Emden equation. *Physics Letters A,* 372, 6060-6065. http://dx.doi.org/10.1016/j.physleta.2008.08.002

[19] He, J.H.(1999). Homotopy perturbation technique, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 178(3-4) 257-262. https://doi.org/10.1016/S0045-7825(99)00018-3

[20] Chowdhury, M.S.H., Hashim, I.,(2007). Solutions of a class of singular second-order IVPs by homotopy-perturbation method. *Physics Letters A,* 365, 439-447. http://dx.doi.org/10.1016/j.physleta.2007.02.002

[21] Saadatmandia, A. , Dehghan, M., Eftekhari, A. (2008). Application of He's homotopy perturbation method for non-linear system of second-order boundary value problems. *Nonlinear Analysis: Real World Applications,* 10, 1912-1922. http://dx.doi.org/10.1016/j.nonrwa.2008.02.032

[22] Yıldırım, A. , Agirseven, D. (2009). The Homotopy Perturbation Method for Solving Singular Initial Value Problems. *International Journal of Nonlinear Sciences & Numerical Simulation*, 10(2),235-238.

[23] Yousefi, S.A. (2016). Legendre wavelets method for solving differential equations of Lane-Emden type. *Applied Mathematics and Computation*, 181, 1417-1422. http://dx.doi.org/10.1016/j.amc.2006.02.031

[24] Pandey, R. K., Kumar, N., Bhardwaj, A., Dutta, G. (2012). Solution of Lane–Emden type equations using Legendre operational matrix of differentiation. *Applied Mathematics and Computation*, 218, 7629-7637. http://dx.doi.org/10.1016/j.amc.2012.01.032

[25] Pandey, R. K., Kumar, N. (2012). Solution of Lane-Emden type equations using Bernstein operational matrix of differentiation. *New Astronomy*, 17, 303-308. http://dx.doi.org/10.1016/j.newast.2011.09.005

[26] Ramos, J. I. (2003). Linearization methods in classical and quantum mechanics. *Computer Physics Communications*,153,199-208. http://dx.doi.org/10.1016/S0010-4655(03)00226-1

[27] Ramos, J. I. (2003). linearization techniques for singular initiual value problems of ordinary differrential equations. *Applied Mathematics and Computation*,161(2), 525-542. https://doi.org/10.1016/j.amc.2003.12.047

[28] Ramos, J. I. (2008). Series approach to the Lane–Emden equation and comparison with the homotopy perturbation method. *Chaos Solitions and Fractals* 38,400-408. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2006.11.018

[29] Aksoy, Y. ve Özkan M.E.(2017). *Diferansiyel Denklemler*(ss. 1).Yıldız Teknik Üniversitesi Basım-Yayım Merkezi

[30] Ondokuz mayıs üniversitesi, Mühendislik matematiği II ders notları [PDF belgesi].https://avys.omu.edu.tr/storage/app/public/kursat.gultekin/71022/M%C3%BChendislik%20Matemati%C4%9Fi-II-1-14.pdf adresinden edinilmiştir.

[31] Nadeem, M., Ahmad, H. (2019). Variational Iteration Method for Analytical Solution of the Lane-Emden Type Equation with Singular Initial and Boundary Conditions. *Earthline Journal of Mathematical Sciences,* 2 (1), 127-142. https://doi.org/10.34198/ejms.2119.127142

[32] Adomian, G.(1988). A review of the Decompposition Method in Applied Mathematics. *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* 135, 501-544.

[33] Adomian, G., Rach, R. (1983). Inversion of Nonlinear Stochtastic Operators. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 91, 39-46.

[34] He, J. H. (1997).A new approach to nonlinear partial differential equations. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2 (4), 230-235, https://doi.org/10.1016/S1007-5704(97)90007-1

[35] Liao, S.J. , (2003).Beyond Perturbation: Introduction to the Homotopy Analysis Method, *Chapman and Hall*, CRC Press, Boca Raton

[36] He. J.H, (2003). A coupling method of homotopy technique and perturbation technique for nonlinear problems. *International Journal of Non-Linear Mechanics,* 35(1), 7-43. https://doi.org/10.1016/S0020-7462(98)00085-7

[37] He, J.H.(2003). Homotopy perturbation method: a new nonlinear analytical technique. *Applied Mathematics and Computation,* 135, 73-79. https://doi.org/10.1016/S0096-3003(01)00312-5

[38] Liao, S.(Ed.).(2014). *Advances in the homotopy analysis method.* World Scientific

[39] Liao, S.(2011). *Homotopy analysis method in Nonlinear Differential Equations.* Higher Education Press. https://doi.org/10.1007/978-3-642-25132-0

[40] Ahmad, M. A. B. (2012). *Homotopy perturbation method for nonlinear ordinary differentiial equations* [Yüksek LisansTezi] Unıversiti Teknologi Malaysia

[41] Özdemir , G. (2019). Lane-Emden Denklemlerinin Sonlu Fark Yontemi ile Nümerik Çözümü [Yüksek LisansTezi] İnönü Üniversitesi

[42] Dehghan, M., Shakeri, F.,(2008). Approximate solution of a differential equation arising in astrophysics using the variational iteration method. *New Astronomy*, 13, 53-59. http://dx.doi.org/10.1016/j.newast.2007.06.012

[43] Al-Hayani, W., Alzubaidy, L., Entisar A.(2017). Solutions of singular IVPs of Lane-Emden type by Homotopy Analysis Method with Genetic Algorithm. *Applied Mathematics & Information Sciences* , 11(2),407-416. http://dx.doi.org/10.18576/amis/110208

[44] Yıldırım, A., Ağirseven, D. (2009). The Homotopy Perturbation Method for Solving Singular Initial Value Problems. *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 10(2), 235-238. http://dx.doi.org/10.1515/IJNSNS.2009.10.2.235

[45] Mohyud-Din, S. T., Noor M. A., Noor, K. I. (2009) Solving Second-order Singular Problems Using He's Polynomials. *World Applied Sciences Journal*, 6(6), 769-775.

[46] Tanrıverdı, T.(2018) Classıcal Way Of Lookıng At The Lane-Emden Equatıon. *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics*, 68(1), 271-276

EKLER

VIM için Mathematica kodları

PROBLEM 1

1.Adım

```
f[x] := 1

f[s_] := f[x] /. x -> s ;

a = f[s];

b = f'[s];

c = f''[s];

Subscript[u, 1] = f[x] + \!\(
\*SubsuperscriptBox[\(\[Integral]\), \(0\), \(x\)]\(\((
\*FractionBox[\(s^2 - x*s\), \(x\)])\)*\((c +
\*FractionBox[\(2\), \(s\)]*b + a^5)\) \[DifferentialD]s\)\)
```

2. Adım

```
f[x] := 1 - x^2/6

f[s_] := f[x] /. x -> s ;

a = f[s];

b = f'[s];

c = f''[s];

Subscript[u, 2] = f[x] + \!\(
\*SubsuperscriptBox[\(\[Integral]\), \(0\), \(x\)]\(\((
```

```
\*FractionBox[\(s^2 - x*s\), \(x\)]])\)*\((c +
\*FractionBox[\(2\), \(s\)]*b + a^5)\) \[DifferentialD]s\)\)
```

3.Adım

```
f[x] := 1 - x^2/6 + x^4/24 - (5 x^6)/756 + (5 x^8)/7776 - x^10/28512 +
  x^12/1213056
f[s_] := f[x] /. x -> s
a = f[s];
b = f'[s];
c = f''[s];
Subscript[u, 3] = f[x] + \!\(
\*SubsuperscriptBox[\(\[Integral]\), \(0\), \(x\)]\(\((
\*FractionBox[\(s^2 - x*s\), \(x\)]])\)*\((c +
\*FractionBox[\(2\), \(s\)]*b + a^5)\) \[DifferentialD]s\)\)
```

4. Adım

```
f[x] := 1 - x^2/6 + x^4/24 - (5 x^6)/432 + (55 x^8)/18144 - (
 221 x^10)/299376 + (93437 x^12)/560431872 - (638941 x^14)/
 18307441152 + (159505 x^16)/23538138624 - (708048755 x^18)/
 579603125477376 + (407717491 x^20)/1993021273571328 - (
 50429974571 x^22)/1584736629814001664 + (119572763 x^24)/
 26018783219810304 - (39894960567365 x^26)/
 64823144476268951764992 + (17160622399925 x^28)/
 224941851772352089030656 - (5398476088321 x^30)/
 618313070389026924527616 + (46601856508615 x^32)/
 5068172618898443274918297 6 - (10426114956665 x^34)/
 117489456165373003191287808 + (123223324205395 x^36)/
 1578110476762455531940793548 8 - (189472789416445 x^38)/
```

```
  30434310756061529808179508019 2 + (5801288321401 x^40)/
  1299046925273187333628483338 24 - (37659458624195 x^42)/
  131742368665510071542127651717 12 + (6697763153581 x^44)/
  414047444377317367703829762539 52 - (1329643780895 x^46)/
  166079883996987040626285704380416 + (18030281635 x^48)/
  5269694746620402861685106068684 8 - (132931480411 x^50)/
  10695329439824470706011914255728640 + (45537508673 x^52)/
  12109789254816756449055357332461 9776 - (787296635 x^54)/
  854188327698250164621321286440714 24 + (1222645 x^56)/
  6954823849639869721128603066826752 - (17065 x^58)/
  6971801742056723225964870528663552 + x^60/
  4519206272413369287326466205286 4 - x^62/
  1025974319376778236982995384375705 6
f[s_] := f[x] /. x -> s
a = f[s];
b = f'[s];
c = f''[s];
Subscript[u, 4] = f[x] + \!\(
\*SubsuperscriptBox[\(\[Integral]\), \(0\), \(x\)]\(\((
\*FractionBox[\(s^2 - x*s\), \(x\)])\)*\((c +
\*FractionBox[\(2\), \(s\)]*b + a^5)\) \[DifferentialD]s\)\)
```

PROBLEM 2

1. Adım

```
f[s_] := 1
a = f[s];
b = f'[s];
```

```
c = f''[s];
Subscript[y, 1] = f[x] + \!\(
\*SubsuperscriptBox[\(\[Integral]\), \(0\), \(x\)]\(s*Log[E,
\*FractionBox[\(s\), \(x\)]]*\((c +
\*FractionBox[\(1\), \(s\)]*b + 4
\*SuperscriptBox[\(a\), \(2\)] - 8
\*SuperscriptBox[\(a\), \(3\)])\) \[DifferentialD]s\)\)
```

2. Adım

```
f[s_] := 1 + s^2
a = f[s];
b = f'[s];
c = f''[s];
Subscript[y, 2] = f[x] + \!\(
\*SubsuperscriptBox[\(\[Integral]\), \(0\), \(x\)]\(s*Log[E,
\*FractionBox[\(s\), \(x\)]]*\((c +
\*FractionBox[\(1\), \(s\)]*b + 4
\*SuperscriptBox[\(a\), \(2\)] - 8
\*SuperscriptBox[\(a\), \(3\)])\) \[DifferentialD]s\)\)
```

3. Adım

```
f[s_] := 1 + s^2 + s^4 + (5 s^6)/9 + s^8/8
a = f[s];
b = f'[s];
c = f''[s];
Subscript[y, 3] = f[x] + \!\(
\*SubsuperscriptBox[\(\[Integral]\), \(0\), \(x\)]\(s*Log[E,
\*FractionBox[\(s\), \(x\)]]*\((c +
```

```
\*FractionBox[\(1\), \(s\)]*b + 4
\*SuperscriptBox[\(a\), \(2\)] - 8
\*SuperscriptBox[\(a\), \(3\)])\) \[DifferentialD]s\)\)
```

4. Adım

```
f[x_] := 1 + x^2 + x^4 + x^6 + (8 x^8)/9 + (307 x^10)/450 + (
  581 x^12)/1296 + (989 x^14)/3969 + (797 x^16)/6912 + (6071 x^18)/
  139968 + (29627 x^20)/2332800 + (281 x^22)/104544 + (5 x^24)/13824 +
   x^26/43264
f[s];
a = f[s];
b = f'[s];
c = f''[s];
Subscript[y, 4] = f[x] + \!\(
\*SubsuperscriptBox[\(\[Integral]\), \(0\), \(x\)]\(s*Log[E,
\*FractionBox[\(s\), \(x\)]]*\((c +
\*FractionBox[\(1\), \(s\)]*b + 4
\*SuperscriptBox[\(a\), \(2\)] - 8
\*SuperscriptBox[\(a\), \(3\)])\) \[DifferentialD]s\)\)
```

ADM için Mathematica kodları

PROBLEM 1

1.Adım

```
Subscript[y, 0] = 1;
m = 5;
Subscript[A, 0] = Subscript[y, 0]^m
Subscript[y, 1] = -\!\(
\*SubsuperscriptBox[\(\[Integral]\), \(0\), \(x\)]\(
```

```
\*SuperscriptBox[\(x\), \(-2\)]*\((
\*SubsuperscriptBox[\(\[Integral]\), \(0\), \(x\)]
\*SuperscriptBox[\(x\), \(2\)]*
\*SubscriptBox[\(A\), \(0\)] \[DifferentialD]x)\) \[DifferentialD]x\)\
\)
```

2. Adım

```
Subscript[A, 1] = m*Subscript[y, 1]*Subscript[y, 0]^(m - 1)
Subscript[y, 2] = -\!\(
\*SubsuperscriptBox[\(\[Integral]\), \(0\), \(x\)]\(
\*SuperscriptBox[\(x\), \(-2\)]*\((
\*SubsuperscriptBox[\(\[Integral]\), \(0\), \(x\)]
\*SuperscriptBox[\(x\), \(2\)]*
\*SubscriptBox[\(A\), \(1\)] \[DifferentialD]x)\) \[DifferentialD]x\)\
\)
```

3. Adım

```
Subscript[A, 2] =
 m*Subscript[y, 2]*Subscript[y, 0]^(m - 1) +
  m*(m - 1)*Subscript[y, 1]^2/2!*Subscript[y, 0]^(m - 2)
Subscript[y, 3] = -\!\(
\*SubsuperscriptBox[\(\[Integral]\), \(0\), \(x\)]\(
\*SuperscriptBox[\(x\), \(-2\)]*\((
\*SubsuperscriptBox[\(\[Integral]\), \(0\), \(x\)]
\*SuperscriptBox[\(x\), \(2\)]*
\*SubscriptBox[\(A\), \(2\)] \[DifferentialD]x)\) \[DifferentialD]x\)\
\)
```

4. Adım

Subscript[A, 3] =

m*Subscript[y, 3]*Subscript[y, 0]^(m - 1) +

m*(m - 1)*Subscript[y, 1]*Subscript[y, 2]*Subscript[y, 0]^(m - 2) +

m*(m - 1)*(m - 2)*Subscript[y, 1]^3/3!*Subscript[y, 0]^(m - 3)

Subscript[y, 4] = -\!\(

*SubsuperscriptBox[\(\[Integral]\), \(0\), \(x\)]\(

SuperscriptBox[\(x\), \(-2\)]\((

*SubsuperscriptBox[\(\[Integral]\), \(0\), \(x\)]

SuperscriptBox[\(x\), \(2\)]

*SubscriptBox[\(A\), \(3\)] \[DifferentialD]x)\) \[DifferentialD]x\)\

\)

5. Adım

Subscript[A, 4] = \!\(TraditionalForm\`m*

SubscriptBox[\(y\), \(4\)]

*SuperscriptBox[

SubscriptBox[\(y\), \(0\)], \(m - 1\)] + m*\((m - 1)\)*\((

*FractionBox[

SuperscriptBox[

SubscriptBox[\(y\), \(2\)], \(2\)], \(2!\)] +

SubscriptBox[\(y\), \(1\)]

*SubscriptBox[\(y\), \(3\)])\)

*SuperscriptBox[

SubscriptBox[\(y\), \(0\)], \(m - 2\)] + m*\((m - 1)\)*\((m - 2)\)*

*FractionBox[\(

*SuperscriptBox[

SubscriptBox[\(y\), \(1\)], \(2\)]

```
\*SubscriptBox[\(y\), \(2\)]\), \(2!\)]
\*SuperscriptBox[
SubscriptBox[\(y\), \(0\)], \(m - 3\)] +
    m*\((m - 1)\)*\((m - 2)\)*\((m - 3)\)*
\*FractionBox[
SuperscriptBox[
SubscriptBox[\(y\), \(1\)], \(4\)], \(4!\)]
\*SuperscriptBox[
SubscriptBox[\(y\), \(0\)], \(m - 4\)]\)
Subscript[y, 5] = -\!\(
\*SubsuperscriptBox[\(\[Integral]\), \(0\), \(x\)]\(
\*SuperscriptBox[\(x\), \(-2\)]*\((
\*SubsuperscriptBox[\(\[Integral]\), \(0\), \(x\)]
\*SuperscriptBox[\(x\), \(2\)]*
\*SubscriptBox[\(A\), \(4\)] \[DifferentialD]x)\) \[DifferentialD]x\)\
\)
```

PROBLEM 2

1.Adım

```
Subscript[y, 0] = 1;
Subscript[A, 0] = 4 Subscript[y, 0]^2 - 8 Subscript[y, 0]^3
Subscript[y, 1] = -\!\(
\*SubsuperscriptBox[\(\[Integral]\), \(0\), \(x\)]\(
\*SuperscriptBox[\(x\), \(-1\)]*\((
\*SubsuperscriptBox[\(\[Integral]\), \(0\), \(x\)]
\*SuperscriptBox[\(x\), \(1\)]*
\*SubscriptBox[\(A\), \(0\)] \[DifferentialD]x)\) \[DifferentialD]x\)\
```

```
\)
```

2. Adım

```
f[x_] := 4 x^2 - 8 x^3

Subscript[A, 1] = Subscript[y, 1]*f'[1]

Subscript[y, 2] = -\!\(

\*SubsuperscriptBox[\(\[Integral]\), \(0\), \(x\)]\(

\*SuperscriptBox[\(x\), \(-1\)]*\((

\*SubsuperscriptBox[\(\[Integral]\), \(0\), \(x\)]

\*SuperscriptBox[\(x\), \(1\)]*

\*SubscriptBox[\(A\), \(1\)] \[DifferentialD]x)\) \[DifferentialD]x\)\

\)
```

3. Adım

```
f[x_] := 4 x^2 - 8 x^3

Subscript[A, 2] = Subscript[y, 2]*f'[1] + Subscript[y, 1]^2/2! f''[1]

Subscript[y, 3] = -\!\(

\*SubsuperscriptBox[\(\[Integral]\), \(0\), \(x\)]\(

\*SuperscriptBox[\(x\), \(-1\)]*\((

\*SubsuperscriptBox[\(\[Integral]\), \(0\), \(x\)]

\*SuperscriptBox[\(x\), \(1\)]*

\*SubscriptBox[\(A\), \(2\)] \[DifferentialD]x)\) \[DifferentialD]x\)\

\)
```

4. Adım

```
f[x_] := 4 x^2 - 8 x^3

Subscript[A, 3] =

 Subscript[y, 3]*f'[1] + Subscript[y, 1]*Subscript[y, 2]*f''[1] +

  Subscript[y, 1]^3/3!*f'''[1]
```

```
Subscript[y, 4] = -\!\(
\*SubsuperscriptBox[\(\[Integral]\), \(0\), \(x\)]\(
\*SuperscriptBox[\(x\), \(-1\)]*\((
\*SubsuperscriptBox[\(\[Integral]\), \(0\), \(x\)]
\*SuperscriptBox[\(x\), \(1\)]*
\*SubscriptBox[\(A\), \(3\)] \[DifferentialD]x)\) \[DifferentialD]x\)\
\)
```

5. Adım

```
f[x_] := 4 x^2 - 8 x^3
Subscript[A, 4] =
 Subscript[y, 4]*
   f'[1] + (1/2*Subscript[y, 2]^2 + Subscript[y, 1]*Subscript[y, 3])*
   f''[1] + (Subscript[y, 1]^2*Subscript[y, 2])/2!*f'''[1] +
  1/4! Subscript[y, 1]^4 f''''[1]
Subscript[y, 5] = -\!\(
\*SubsuperscriptBox[\(\[Integral]\), \(0\), \(x\)]\(
\*SuperscriptBox[\(x\), \(-1\)]*\((
\*SubsuperscriptBox[\(\[Integral]\), \(0\), \(x\)]
\*SuperscriptBox[\(x\), \(1\)]*
\*SubscriptBox[\(A\), \(4\)] \[DifferentialD]x)\) \[DifferentialD]x\)\
\)
```

6. Adım

```
Subscript[y, 0] + Subscript[y, 1] + Subscript[y, 2] + Subscript[y, 3] \
+ Subscript[y, 4] + Subscript[y, 5]
```

HPM için Mathematica kodları

PROBLEM 1

1.Adım

```
f[x_] := x^5

Subscript[y, 0][x_] := 1

Subscript[f, 0] := Subscript[y, 0][x_] /. x -> s

\!\(

\*SubsuperscriptBox[\(\[Integral]\), \(0\), \(x\)]\(

\*FractionBox[\(

\*SuperscriptBox[\(s\), \(2\)] - s*x\), \(x\)]*f[

\*SubscriptBox[\(f\), \(0\)]] \[DifferentialD]s\)\)
```

2. Adım

```
f[x_] := x^5

Subscript[y, 0][x_] := 1

Subscript[y, 1] := -(x^2/6)

Subscript[A, 1][x_] := Subscript[y, 1]*f'[1]

Subscript[g, 1][s_] := Subscript[A, 1][x] /. x -> s

Subscript[f, 0] := Subscript[y, 0][x_] /. x -> s

\!\(

\*SubsuperscriptBox[\(\[Integral]\), \(0\), \(x\)]\(

\*FractionBox[\(

\*SuperscriptBox[\(s\), \(2\)] - s*x\), \(x\)]*

\(\*SubscriptBox[\(g\), \(1\)]\)[s] \[DifferentialD]s\)\)
```

3. Adım

```
f[x_] := x^5

Subscript[y, 1] := -(x^2/6)

Subscript[y, 2] := x^4/24
```

```
Subscript[A, 2][x_] :=
 Subscript[y, 2]*f'[1] + Subscript[y, 1]^2/2! f''[1]
Subscript[g, 2][s_] := Subscript[A, 2][x] /. x -> s
\!\(
\*SubsuperscriptBox[\(\[Integral]\), \(0\), \(x\)]\(
\*FractionBox[\(
\*SuperscriptBox[\(s\), \(2\)] - s*x\), \(x\)]*
\(\*SubscriptBox[\(g\), \(2\)]\)[s] \[DifferentialD]s\)\)
```

4. Adım

```
f[x_] := x^5
Subscript[y, 1] := -(x^2/6)
Subscript[y, 2] := x^4/24
Subscript[y, 3] := -((5 x^6)/432)
Subscript[A, 3][x_] :=
 Subscript[y, 3]*f'[1] + Subscript[y, 1]*Subscript[y, 2]*f''[1] +
  Subscript[y, 1]^3/3!*f'''[1]
Subscript[g, 3][s_] := Subscript[A, 3][x] /. x -> s
\!\(
\*SubsuperscriptBox[\(\[Integral]\), \(0\), \(x\)]\(
\*FractionBox[\(
\*SuperscriptBox[\(s\), \(2\)] - s*x\), \(x\)]*
\(\*SubscriptBox[\(g\), \(3\)]\)[s] \[DifferentialD]s\)\)
```

PROBLEM 2

1.Adım

```
f[x_] := 4 x^2 - 8 x^3
Subscript[y, 0][x_] := 1
```

```
Subscript[f, 0] := Subscript[y, 0][x_] /. x -> s
\!\(
\*SubsuperscriptBox[\(\[Integral]\), \(0\), \(x\)]\(s*Log[E,
\*FractionBox[\(s\), \(x\)]]*f[
\*SubscriptBox[\(f\), \(0\)]] \[DifferentialD]s\)\)
```

2. Adım

```
f[x_] := 4 x^2 - 8 x^3
Subscript[y, 0][x_] := 1
Subscript[y, 1] := x^2 /. x -> s
Subscript[f, 0] := Subscript[y, 0][x_] /. x -> s
\!\(
\*SubsuperscriptBox[\(\[Integral]\), \(0\), \(x\)]\(s*Log[E,
\*FractionBox[\(s\), \(x\)]]*\((\(-16\)\
\*SuperscriptBox[\(s\), \(2\)])\) \[DifferentialD]s\)\)
```

3. Adım

```
f[x_] := 4 x^2 - 8 x^3
Subscript[y, 1] := x^2
Subscript[y, 2] := x^4
Subscript[A, 2][x_] :=
 Subscript[y, 2]*f'[1] + Subscript[y, 1]^2/2! f''[1]
Subscript[g, 2][s_] := Subscript[A, 2][x] /. x -> s
\!\(
\*SubsuperscriptBox[\(\[Integral]\), \(0\), \(x\)]\(s*Log[E,
\*FractionBox[\(s\), \(x\)]]*
\(\*SubscriptBox[\(g\), \(2\)]\)[s] \[DifferentialD]s\)\)
```

4. Adım

```
f[x_] := 4 x^2 - 8 x^3
Subscript[y, 1] := x^2
Subscript[y, 2] := x^4
Subscript[y, 3] := x^6
Subscript[A, 3][x_] :=
 Subscript[y, 3]*f'[1] + Subscript[y, 1]*Subscript[y, 2]*f''[1] +
  Subscript[y, 1]^3/3!*f'''[1]
Subscript[g, 3][s_] := Subscript[A, 3][x] /. x -> s
\!\(
\*SubsuperscriptBox[\(\[Integral]\), \(0\), \(x\)]\(s*Log[E,
\*FractionBox[\(s\), \(x\)]]*
\(\*SubscriptBox[\(g\), \(3\)]\)[s] \[DifferentialD]s\)\)
```

HAM için Mathematica kodları

PROBLEM 1

1.Adım

```
Subscript[y, 0] := 1
Subscript[f, 0] := Subscript[y, 0][x] /. x -> t
h = h;
Subscript[a, 1] = 0;
b = \!\(
\*SubscriptBox[\(\[PartialD]\), \(x\)]
\*SubscriptBox[\(y\), \(0\)]\);
c = \!\(
\*SubscriptBox[\(\[PartialD]\), \(x\)]b\);
Subscript[y, 1] = Subscript[a, 1]*Subscript[y, 0] + h*\!\(
\*SubsuperscriptBox[\(\[Integral]\), \(0\), \(x\)]\(
```

```
\*SuperscriptBox[\(x\), \(-2\)]*\((
\*SubsuperscriptBox[\(\[Integral]\), \(0\), \(x\)]
\*SuperscriptBox[\(x\), \(2\)]*\((c +
\*FractionBox[\(2\), \(x\)]*b +
\*SuperscriptBox[
SubscriptBox[\(y\), \(0\)], \(5\)])\) \[DifferentialD]x)\) \
\[DifferentialD]x\)\)
```

2. Adım

```
Subscript[y, 1] := (h x^2)/6
Subscript[y, 0] = 1;
h = h;
Subscript[a, 2] = 1;
b = \!\(
\*SubscriptBox[\(\[PartialD]\), \(x\)]
\*SubscriptBox[\(y\), \(1\)]\);
c = \!\(
\*SubscriptBox[\(\[PartialD]\), \(x\)]b\);
m = 5;
Subscript[y, 2] = Subscript[a, 2]*Subscript[y, 1] + h*\!\(
\*SubsuperscriptBox[\(\[Integral]\), \(0\), \(x\)]\(
\*SuperscriptBox[\(x\), \(-2\)]*\((
\*SubsuperscriptBox[\(\[Integral]\), \(0\), \(x\)]
\*SuperscriptBox[\(x\), \(2\)]*\((c +
\*FractionBox[\(2\), \(x\)]*b + m*
\*SubscriptBox[\(y\), \(1\)]*
\*SuperscriptBox[
```

```
SubscriptBox[\(y\), \(0\)], \(m -
        1\)])\) \[DifferentialD]x)\) \[DifferentialD]x\)\)
```

3. Adım

```
Subscript[y, 2] := (h x^2)/6 + h ((h x^2)/6 + (h x^4)/24)
Subscript[y, 0] = 1;
Subscript[y, 1] = (h x^2)/6;
h = h;
Subscript[a, 3] = 1;
b = \!\(
\*SubscriptBox[\(\[PartialD]\), \(x\)]
\*SubscriptBox[\(y\), \(2\)]\);
c = \!\(
\*SubscriptBox[\(\[PartialD]\), \(x\)]b\);
m = 5;
Subscript[y, 3] = Subscript[a, 3]*Subscript[y, 2] + h*\!\(
\*SubsuperscriptBox[\(\[Integral]\), \(0\), \(x\)]\(
\*SuperscriptBox[\(x\), \(-2\)]*\((
\*SubsuperscriptBox[\(\[Integral]\), \(0\), \(x\)]
\*SuperscriptBox[\(x\), \(2\)]*\((c +
\*FractionBox[\(2\), \(x\)]*b + m*
\*SubscriptBox[\(y\), \(2\)]*
\*SuperscriptBox[
SubscriptBox[\(y\), \(0\)], \(m - 1\)] + m*\((m - 1)\)*
\*FractionBox[
SuperscriptBox[
SubscriptBox[\(y\), \(1\)], \(2\)], \(2!\)]*
```

```
\*SuperscriptBox[
SubscriptBox[\(y\), \(0\)], \(m -
            2\)])\) \[DifferentialD]x)\) \[DifferentialD]x\)\)
```

4. Adım

```
Subscript[y, 3] := (h x^2)/6 + h ((h x^2)/6 + (h x^4)/24) +
 h ((h x^2)/6 + (h^2 x^2)/6 + (h x^4)/24 + (h^2 x^4)/12 + (
    5 h^2 x^6)/432)
Subscript[y, 0] = 1;
Subscript[y, 1] = (h x^2)/6;
h = h;
Subscript[a, 4] = 1;
b = \!\(
\*SubscriptBox[\(\[PartialD]\), \(x\)]
\*SubscriptBox[\(y\), \(3\)]\);
c = \!\(
\*SubscriptBox[\(\[PartialD]\), \(x\)]b\);
m = 5;
Subscript[y, 4] = Subscript[a, 4]*Subscript[y, 3] + h*\!\(
\*SubsuperscriptBox[\(\[Integral]\), \(0\), \(x\)]\(
\*SuperscriptBox[\(x\), \(-2\)]*\((
\*SubsuperscriptBox[\(\[Integral]\), \(0\), \(x\)]
\*SuperscriptBox[\(x\), \(2\)]*\((c +
\*FractionBox[\(2\), \(x\)]*b + m*
\*SubscriptBox[\(y\), \(3\)]*
\*SuperscriptBox[
SubscriptBox[\(y\), \(0\)], \(m - 1\)] + m*\((m - 1)\)*
```

```
\*SubscriptBox[\(y\), \(1\)]*
\*SubscriptBox[\(y\), \(2\)]*
\*SuperscriptBox[
SubscriptBox[\(y\), \(0\)], \(m - 2\)] + m*\((m - 1)\)*\((m - 2)\)*
\*FractionBox[
SuperscriptBox[
SubscriptBox[\(y\), \(1\)], \(3\)], \(3!\)]*
\*SuperscriptBox[
SubscriptBox[\(y\), \(0\)], \(m -
        3\)])\) \[DifferentialD]x)\) \[DifferentialD]x\)\)
```

PROBLEM 2

1.Adım

```
Subscript[y, 0] := 1
Subscript[f, 0] := Subscript[y, 0][x] /. x -> t
h = h;
Subscript[\[Chi], 1] = 0;
b = \!\(
\*SubscriptBox[\(\[PartialD]\), \(x\)]
\*SubscriptBox[\(y\), \(0\)]\);
c = \!\(
\*SubscriptBox[\(\[PartialD]\), \(x\)]b\);
Subscript[y, 1] = Subscript[\[Chi], 1]*Subscript[y, 0] + h*\!\(
\*SubsuperscriptBox[\(\[Integral]\), \(0\), \(x\)]\(
\*SuperscriptBox[\(x\), \(-1\)]*\((
\*SubsuperscriptBox[\(\[Integral]\), \(0\), \(x\)]
\*SuperscriptBox[\(x\), \(1\)]*\((c +
```

```
\*FractionBox[\(1\), \(x\)]*b + 4*
\*SuperscriptBox[
SubscriptBox[\(y\), \(0\)], \(2\)] - 8*
\*SuperscriptBox[
SubscriptBox[\(y\), \(0\)], \(3\)])\) \[DifferentialD]x)\) \
\[DifferentialD]x\)\)
```

2. Adım

```
Subscript[y, 1] := -h x^2
Subscript[y, 0] = 1;
h = h;
f[x_] := 4 x^2 - 8 x^3
Subscript[A, 1] = Subscript[y, 1]*f'[1]
Subscript[\[Chi], 2] = 1;
b = \!\(
\*SubscriptBox[\(\[PartialD]\), \(x\)]
\*SubscriptBox[\(y\), \(1\)]\);
c = \!\(
\*SubscriptBox[\(\[PartialD]\), \(x\)]b\);
Subscript[y, 2] = Subscript[\[Chi], 2]*Subscript[y, 1] + h*\!\(
\*SubsuperscriptBox[\(\[Integral]\), \(0\), \(x\)]\(
\*SuperscriptBox[\(x\), \(-1\)]*\((
\*SubsuperscriptBox[\(\[Integral]\), \(0\), \(x\)]
\*SuperscriptBox[\(x\), \(1\)]*\((c +
\*FractionBox[\(1\), \(x\)]*b +
\*SubscriptBox[\(A\), \(1\)])\) \[DifferentialD]x)\) \
\[DifferentialD]x\)\)
```

3. Adım

```
Subscript[y, 2] := -h x^2 + h (-h x^2 + h x^4)

Subscript[y, 0] = 1;

Subscript[y, 1] = -h x^2;

f[x_] := 4 x^2 - 8 x^3

Subscript[A, 2] = Subscript[y, 2]*f'[1] + Subscript[y, 1]^2/2! f''[1]

h = h;

Subscript[a, 3] = 1;

b = \!\(

\*SubscriptBox[\(\[PartialD]\), \(x\)]

\*SubscriptBox[\(y\), \(2\)]\);

c = \!\(

\*SubscriptBox[\(\[PartialD]\), \(x\)]b\);

Subscript[y, 3] = Subscript[a, 3]*Subscript[y, 2] + h*\!\(

\*SubsuperscriptBox[\(\[Integral]\), \(0\), \(x\)]\(

\*SuperscriptBox[\(x\), \(-1\)]*\((

\*SubsuperscriptBox[\(\[Integral]\), \(0\), \(x\)]

\*SuperscriptBox[\(x\), \(1\)]*\((c +

\*FractionBox[\(1\), \(x\)]*b +

\*SubscriptBox[\(A\), \(2\)])\) \[DifferentialD]x)\) \

\[DifferentialD]x\)\)
```

4. Adım

```
Subscript[y,

  3] := -h x^2 + h (-h x^2 + h x^4) +

   h (-h x^2 - h^2 x^2 + h x^4 + 2 h^2 x^4 - h^2 x^6);

Subscript[y, 0] = 1;
```

```
Subscript[A, 3] =
 Subscript[y, 3]*f'[1] + Subscript[y, 1]*Subscript[y, 2]*f''[1] +
  Subscript[y, 1]^3/3!*f'''[1]
Subscript[y, 1] = -h x^2;
h = h;
Subscript[a, 4] = 1;
b = \!\(
\*SubscriptBox[\(\[PartialD]\), \(x\)]
\*SubscriptBox[\(y\), \(3\)]\);
c = \!\(
\*SubscriptBox[\(\[PartialD]\), \(x\)]b\);
Subscript[y, 4] = Subscript[a, 4]*Subscript[y, 3] + h*\!\(
\*SubsuperscriptBox[\(\[Integral]\), \(0\), \(x\)]\(
\*SuperscriptBox[\(x\), \(-1\)]*\((
\*SubsuperscriptBox[\(\[Integral]\), \(0\), \(x\)]
\*SuperscriptBox[\(x\), \(1\)]*\((c +
\*FractionBox[\(1\), \(x\)]*b +
\*SubscriptBox[\(A\), \(3\)])\) \[DifferentialD]x)\) \
\[DifferentialD]x\)\)
```

SFM için Matlab kodları

PROBLEM 1

```
N=100;
a=0; b=1;
h=(b-a)/N;
x=a:h:b;
for i=2:N
```

```
   u(1)=1
   u(2)=u(1);
   u(i+1)=((2*x(i)+2*(h))*u(i)-x(i)*(h^2)*u(i)^5-x(i)*u(i-1))/(x(i)+2*h);
end
 U=1./sqrt(1+(x.^2)/3);
 Error=abs(u-U);
 for j=1:N+1
    fprintf('%10.2f\t %10.11f\t %10.11f\t %10.5e\n',x(j),u(j),U(j),Error(j));
 end
 plot(x,u,'k-',x,U,'r*')
 %plot(x,U,'r*',x,u,'-k')
 ylabel('$y(x)$','FontSize',18,'InterPreter','Latex')
  xlabel('x','FontSize',18,'InterPreter','Latex')
  legend('Finite difference','y-exact')
  set(gca,'fontsize',14)
  str = {'N=60'};%here put what ever you want
  w=[1.6]; % the distance of texts in x-axis
  s=[0.9]; % the distance of texts in y-axis
  text(w,s,str) % setup displat
```

ÖZGEÇMİŞ

Ad-Soyad : Orhan YÜKSEL

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans** **:** 2011, Selçuk Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü
- **Yükseklisans** **:** Devam ediyor, Sakarya Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı, Uygulamalı Matematik Program

MESLEKİ DENEYİM VE ÖDÜLLER:

- 2014 den beri Milli Eğitim Bakanlığı'nda öğretmen olarak çalışıyor.