T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BANACH UZAYINDA ZENGİNLEŞTİRİLMİŞ (Cγ) ŞARTINI SAĞLAYAN DÖNÜŞÜMLER İÇİN F-İTERASYON YÖNTEMİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Azize ARSLANHAN

Matematik Anabilim Dalı

Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı

TEMMUZ 2024

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BANACH UZAYINDA ZENGİNLEŞTİRİLMİŞ (Cγ) ŞARTINI SAĞLAYAN DÖNÜŞÜMLER İÇİN F-İTERASYON YÖNTEMİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Azize ARSLANHAN

Matematik Anabilim Dalı

Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Metin BAŞARIR

TEMMUZ 2024

Azize ARSLANHAN tarafından hazırlanan “Banach Uzayında Zenginleştirilmiş (Cγ) Şartını Sağlayan Dönüşümler İçin F-İterasyon Yöntemi” adlı tez çalışması 05.07.2024 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı **Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi** Bilim Dalı’nda Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi

Jüri Başkanı : **Prof. Dr. Metin BAŞARIR**
Sakarya Üniversitesi

Jüri Üyesi : **Doç. Dr. Aynur Şahin**
Sakarya Üniversitesi

Jüri Üyesi : **Prof. Dr. E. Emrah Kara**
Düzce Üniversitesi

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Eğitim-Öğretim Yönetmeliğine ve Yükseköğretim Kurumları Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Yönergesine uygun olarak hazırlamış olduğum "Banach Uzayında Zenginleştirilmiş (Cγ) Şartını Sağlayan Dönüşümler İçin F-İterasyon Yöntemi" başlıklı tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın tüm aşamalarında yukarıda belirtilen yönetmelik ve yönergeye uygun davrandığımı, tezin içerdiği yenilik ve sonuçları başka bir yerden almadığımı, tezde kullandığım eserleri usulüne göre kaynak olarak gösterdiğimi, bu tezi başka bir bilim kuruluna akademik amaç ve unvan almak amacıyla vermediğimi ve 20.04.2016 tarihli Resmi Gazete'de yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince Sakarya Üniversitesi'nin abonesi olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Enstitü tarafından belirlenmiş ölçütlere uygun rapor alındığını, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun ortaya çıkması halinde doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi beyan ederim.

(18/06/2024).

(imza)

Azize ARSLANHAN

TEŞEKKÜR

Bilgisini, deneyimini ve desteğini hiçbir zaman esirgemeyen, akademik yolculuğumda rehberlik eden kıymetli danışman hocam Prof. Dr. Metin BAŞARIR'a derin şükranlarımı sunarım. Çalışmalarımda gösterdiği üstün katkılar, değerli önerileri ve sağladığı sürekli destek nedeniyle Doç. Dr. Aynur ŞAHİN hocama minnettarlığımı ifade ederim. Onların bilgi birikimi ve vizyonu, bu çalışmanın şekillenmesinde olağanüstü bir role sahiptir.

Aynı zamanda, bu süreçte bana sevgi dolu destekleriyle her zaman yanımda olan eşime ve sonsuz sabır ve anlayış gösteren çocuklarıma en içten teşekkürlerimi ifade etmek isterim. Onların varlığı, bu tezin tamamlanmasındaki en büyük güç ve ilham kaynağımdır.

Azize ARSLANHAN

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar kümesi
$\mathbb{F}$	: Sayı Cismi
$\mathbb{R}^n$	: n-Boyutlu gerçek sayı uzayı
$\emptyset$	: Boş küme
I	: İndis kümesi
D	: Daralma veya büzülme (contraction) dönüşümü
D^n	: D Dönüşümünün n'inci iterasyonu
$F(D)$	: D'nin tüm sabit noktalarının kümesi
$\{u_l\}$	: Dizi kümesi
(X, d)	: Metrik uzay
$(X, +, .)$	: Lineer uzay (Vektör uzayı)
$(X, \|\cdot\|)$	: Normlu uzay
$(X, (\cdot,\cdot))$	: İç çarpım uzayı
R$(W, \{u_l\})$	: $\{u_l\}$ dizisinin W kümesine göre asimptotik yarıçapı
A$(W, \{u_l\})$	: $\{u_l\}$ dizisinin W tüm kümesine göre asimptotik merkezinin kümesi

TABLO LİSTESİ

Sayfa

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

BANACH UZAYINDA ZENGİNLEŞTİRİLMİŞ (Cγ) ŞARTINI SAĞLAYAN DÖNÜŞÜMLER İÇİN F-İTERASYON YÖNTEMİ

ÖZET

Bu çalışmada, zenginleştirilmiş (Cγ) şartını sağlayan dönüşümlerin bir sınıfı tanıtılmaktadır. Zenginleştirilmiş (Cγ) şartını sağlayan dönüşümlerin sabit noktaları, Banach uzayında modifiye edilmiş üç adımlı F-iterasyon yöntemi kullanılarak incelenmiştir.

Giriş bölümünde, ana sonucumuzu elde etmemize yardımcı olan önceden tanıtılmış ve ispatlanmış bilgiler temel kavramlar olarak sunuldu, sonra sabit noktanın ne olduğu hakkında bilgi verildi ve genişlemeyen dönüşüm, Suzuki genişlemeyen dönüşüm, (Cγ) şartı, (C) şartı, (E) şartı ve (Eu) şartı tanımları verildi. Daha sonra zenginleştirilmiş genişlemeyen dönüşüm ve zenginleştirilmiş Suzuki genişlemeyen dönüşümler verildi. Ayrıca, zenginleştirilmiş (Cγ) şartını sağlayan dönüşümler tanıtıldı. Son olarak, sayısal örneklerde yakınsama hızını karşılaştırdığımız dört iterasyon yöntemi (Agarwal iterasyonu, Thakur iterasyonu, M-iterasyonu ve F-iterasyonu) verildi.

İkinci bölümde, zenginleştirilmiş Suzuki genişlemeyen dönüşümler ve bu dönüşümlerle ilgili önemli teoremler incelenmiştir. Hilbert uzaylarında tanımlanan bu dönüşümlerin asimptotik düzenlilik ve yakınsaklık özellikleri hakkında teorik sonuçlar sunulmuştur. Krasnoselskii iterasyon dizileri kullanılarak, dönüşümlerin sabit noktalarına zayıf ve kuvvetli yakınsaklıkları ile bu dönüşümlerin konveks, kapalı ve sınırlı alt kümeler üzerindeki sonuçları incelendi.

Üçüncü bölümde, ilk olarak zenginleştirilmiş (Cγ) şartını sağlayan dönüşüm tanımı verilerek, bir dönüşümün zenginleştirilmiş (Cγ) şartını sağlaması durumunda, onun ortalama dönüşümünün de (Cγ) şartını sağladığını ispat eden bir lemma sunulmuştur. Daha sonra, F-iterasyonu kullanılarak zayıf ve kuvvetli yakınsama teoremleri ispatlanmıştır. Ayrıca, (I) şartı tanımı kullanılarak kuvvetli yakınsaklık teoremi verilmiştir.

Dördüncü bölümde, iki sayısal örnek verilerek üçüncü bölümde elde edilen sonuçlar ile tanımlanan F- iterasyon yönteminin diğer yöntemlere göre sabit noktaya daha hızlı yakınsadığı gösterilmiştir. Sayısal örnekler ve hesaplamalar ile çeşitli iterasyon yöntemlerinden bulunan veriler kullanılarak tablolar ve grafikler yapılmıştır. Örnek 4.1'de hem (Cγ) şartını hem de zenginleştirilmiş (Cγ) şartını sağlayan bir dönüşüm örneği verilmiş, örnek 4.2'de zenginleştirilmiş (Cγ) şartını sağlayan ancak (Cγ) şartını sağlamayan başka bir dönüşüm verilmiştir. Bu iki örnek yardımıyla dört çeşit iterasyonun sabit noktaya nasıl yakınsadığını gösteren tablolar ve grafikler, Python dili kullanılarak kodlar yazılıp hesaplanmış ve grafikleri çizilmiştir.

Son bölümde ise tüm tezde elde edilen sonuçlar kısaca özetlenmiş ve sonrasında bu konu üzerinde nasıl çalışmalar geliştirilebileceği ile ilgili bir açık problem ortaya konulmuştur.

ON THE F-ITERATIVE METHOD FOR THE CLASS OF MAPS SATISFYING ENRICHED CONDITION (Cγ) IN BANACH SPACES

SUMMARY

This study delves into the fixed point theory of various classes of nonlinear maps in normed and Banach spaces. Let W be a nonempty subset of a normed space $\mathcal{Z}$, and $D: W \to W$ be a map. A point $u \in W$ is a fixed point of D if $Du = u$. Fixed point theory is a crucial mathematical concept with applications in various fields such as economics, engineering, and the sciences. Nonexpansive maps, characterized by the property $\| Du - Dv \| \leq \| u - v \|$ for all $u, v \in W$, have been extensively studied. This condition ensures that the distance between mapped points does not exceed the distance between the original points, which is essential for convergence analysis.

Suzuki (2008) introduced generalized nonexpansive maps, satisfying condition (C), which later inspired further generalizations, such as condition (E), (E_μ), and (C_γ). A map $D: W \to W$ satisfies condition (C) if $\frac{1}{2} \| u - Du \| \leq \| u - v \|$ implies $\| Du - Dv \| \leq \| u - v \|$ for all $u, v \in W$. This condition ensures that the map D does not increase distances significantly under certain constraints, allowing for more general mappings while maintaining some control over their behavior.

Another generalization is condition (E_μ), where $\| u - Dv \| \leq \mu \| u - Du \| + \| u - v \|$ for $\mu \geq 1$. This condition allows for a bounded increase in distance based on a multiplicative factor μ, providing a framework for analyzing maps that are not strictly nonexpansive but still exhibit controlled behavior. Additionally, condition (C_γ) for $\gamma \in (0,1)$ is defined as $\gamma \| u - Du \| \leq \| u - v \|$ implying $\| Du - Dv \| \leq \| u - v \|$. This condition further generalizes nonexpansiveness by introducing a parameter γ that scales the distance condition, allowing for finer control over the map's behavior.

In 2019, Berinde introduced enriched nonexpansive maps, where D is enriched nonexpansive if there exists $b \in [0, \infty)$ such that $\| b(u - v) + Du - Dv \| \leq (b + 1) \| u - v \|$. This class of maps incorporates an additional parameter b that enriches the nonexpansive condition, providing a broader framework for analyzing nonlinear maps. Later, in 2021, Ullah et al. introduced enriched Suzuki nonexpansive maps, further studied in Banach spaces by Abdeljawad et al. in 2022. These maps combine the ideas of enrichment and Suzuki's condition, offering a versatile tool for fixed point analysis.

Iterative methods play a crucial role in approximating fixed points. These methods generate sequences that converge to fixed points, which are essential for practical applications. Notable methods include Picard, Mann, Ishikawa, Noor, Agarwal, Thakur, M-iterative, and F-iterative methods. These methods are essential for maps ensuring fixed points under certain conditions. The iterative methods vary in their approach and convergence properties, making them suitable for different types of maps and applications.

This paper focuses on the convergence of the F-iterative method for maps satisfying an enriched version of condition (C_γ). We establish both weak and strong convergence results in Banach spaces using the F-iterative method. Moreover, we present numerical examples demonstrating the efficiency of our method compared to others. The F-iterative method is particularly effective in handling enriched conditions, providing faster convergence and greater accuracy in approximating fixed points.

We introduce the class of maps satisfying the enriched condition (C_γ) and prove convergence results for the F-iterative method. Theorem 3.3 demonstrates that $\{u_l\}$ is bounded in W and $\lim_{l\to\infty}\|u_l - D_{\mathrm{r}}u_l\| = 0$ if and only if $F_D \neq \emptyset$. Theorem 3.4 establishes weak convergence under Opial's condition. Strong convergence results are proved under conditions such as compactness of W (Theorem 3.5), $\liminf_{l\to\infty} \operatorname{dist}(u_l, F_D) = 0$ (Theorem 3.6), and condition (I) (Theorem 3.8). These theorems provide a comprehensive framework for analyzing the convergence behavior of the F-iterative method under various conditions, ensuring robust and reliable approximations of fixed points.

Numerical examples illustrate the superior convergence rate of the F-iterative method compared to other iterative methods. For instance, Example 4.1 presents a map satisfying both the enriched condition (C_γ) and the ordinary condition (C_γ). The map D on $W = [0,1]$ defined by $Du = \frac{u}{2}$ for $u \neq 1$ and $D(1) = \frac{11}{19}$ satisfies both conditions. The F-iterative method again demonstrates faster convergence compared to other iterative processes, validating its effectiveness.

Example 4.2 demonstrates a map satisfying the enriched condition (C_γ) but not the ordinary condition (C_γ). The map D on $W = [-0.5, -2] \cup [0.5,2]$ defined by $Du = u^{-1}$ satisfies the enriched condition with $b = 1.5$ but not the ordinary condition. The numerical results show that the F-iterative method converges faster than other methods, highlighting its efficiency.

In conclusion, this study contributes to the understanding of fixed point theory for various classes of nonlinear maps in Banach spaces, presenting significant theoretical results and practical applications through iterative methods. The introduction of the enriched condition (C_γ) and the development of the F-iterative method provide powerful tools for analyzing and approximating fixed points. The convergence theorems and numerical examples illustrate the robustness and efficiency of our approach, making it a valuable addition to the field of fixed point theory. This work lays the foundation for further research and applications in diverse areas, emphasizing the importance of iterative methods in solving complex nonlinear problems.

The fixed point theory has profound implications in various scientific disciplines. In economics, fixed point theorems are used in game theory and equilibrium analysis. For instance, Nash equilibrium in game theory is a solution concept where no player can benefit by unilaterally changing their strategy, and it can be proven using fixed point theorems. In engineering, fixed point methods are employed in signal processing, control theory, and the design of algorithms for solving differential equations. The ability to ensure the existence and uniqueness of solutions is fundamental in these applications.

The generalizations introduced in this paper, particularly the enriched condition (C_γ), extend the applicability of fixed point theory to a broader class of problems. By incorporating parameters such as μ and γ, we can handle maps that exhibit more complex behaviors, making the theory more versatile. This is particularly important in real-world applications where ideal conditions (such as strict nonexpansiveness) are rarely met.

The enriched condition (C_γ), as introduced in this study, offers a nuanced approach to handling nonlinear maps. The condition $\gamma \parallel u - Du \parallel \leq \parallel u - v \parallel$ implies $\parallel Du - Dv \parallel \leq \parallel u - v \parallel$ allows for a controlled relaxation of the nonexpansive condition. This is crucial for dealing with maps that are not strictly nonexpansive but still exhibit convergence properties under certain conditions.

The F-iterative method leverages this enriched condition to provide robust convergence results. By iteratively applying the map and adjusting parameters, the method ensures that the sequence generated converges to a fixed point. The convergence theorems established in this study provide a rigorous mathematical foundation for the method, ensuring its reliability and effectiveness.

The numerical examples provided in this study highlight the practical implications of the theoretical results. By demonstrating the convergence behavior of the F-iterative method on specific maps, we provide concrete evidence of its efficiency. The comparative analysis with other iterative methods, such as the Agarwal and Thakur methods, further underscores the advantages of the F-iterative method.

The results of this study open up several avenues for future research. One potential direction is the extension of the enriched condition (C_γ) to other types of spaces, such as CAT(0) spaces. These spaces generalize the concept of non-positive curvature and have applications in various areas of mathematics and computer science. Exploring the applicability of the F-iterative method in these spaces could lead to new insights and broader applications.

Another area for future research is the development of new iterative methods based on the enriched condition (C_γ). By further refining the parameters and conditions, it may be possible to design methods that offer even faster convergence and greater accuracy. Additionally, investigating the stability and robustness of these methods in the presence of perturbations or noise would be valuable for practical applications.

In conclusion, this study presents significant advancements in the fixed point theory for nonlinear maps in Banach spaces. The introduction of the enriched condition (C_γ) and the development of the F-iterative method provide powerful tools for analyzing and approximating fixed points. The comprehensive theoretical framework and numerical examples illustrate the robustness and efficiency of our approach, making it a valuable addition to the field of fixed point theory. This work lays the foundation for further research and applications, emphasizing the importance of iterative methods in solving complex nonlinear problems.

1. GİRİŞ

1.1. Literatür Taraması

Uygulamalı fizik ve matematik mühendisliği gibi birçok farklı alanda ve çeşitli problemlerde, bilinen analitik yöntemlerle çözümü garanti etmek için birçok zorlukla karşılaşılır. Bu tür durumlarda, sabit nokta teorisi, aranan çözümleri elde etmek için alternatif teknikler önerir. İlk olarak, ifade edilen denklemin sabit nokta kümesi ile verilen problemin çözüm kümesi eşit olacak şekilde problemin formüle edilmesi gerekir. İfade edilen denklemin sabit noktasının varlığı ispatlandığında, verilen denklemin çözümünün varlığı da ispatlanmış olur. Bundan sonra, ifade edilen denklemin sabit noktasının değerini hesaplamak için bazı iterasyon yöntemlerinden (örneğin Picard iterasyonu, Krasnoselskii iterasyonu, M-iterasyonu ve F-iterasyonu gibi çeşitli iterasyonlardan) yararlanabiliriz.

Sabit nokta teorisi, 19. yüzyılın başlarında, adi diferansiyel denklemlerin çözümlerinin varlığı ve tekliğini ispatlama amacıyla geliştirilmeye başlanmıştır. Bu teori, özellikle matematiksel analizin çeşitli dallarında uygulamalı problemlerin çözümünde temel bir araç olarak kabul edilir.

1922'de Stefan Banach, daralma prensibi ile sabit nokta teoremini formüle etmiş ve bu durum, metrik uzaylarda daraltıcı bir dönüşümün tek bir sabit noktaya sahip olduğunu belirten ve iterasyonlar aracılığıyla bu sabit noktaya yakınsanabileceğini ispatlayan bir teorem olarak matematikte büyük bir devrim yaratmıştır.

1960'lar ve 1970'lerde, genişlemeyen dönüşümler üzerine yoğun bir şekilde çalışılmış ve bu dönüşümlerin sabit nokta teoremlerine uygulanabilirliği araştırılmıştır. Bu dönüşümler, uzaydaki elemanlar arası mesafeyi artırmayan ve çeşitli optimizasyon problemlerinde kullanılan işlemleri tanımlar.

2008'de Shunichi Suzuki, genişlemeyen dönüşümler üzerine önemli bir gelişme olarak Suzuki genişlemeyen dönüşümü ortaya koymuştur. Suzuki'nin bu çalışması, daha önce var olan sabit nokta teoremlerini genişletmiş ve bu teorilerin daha karmaşık sistemlerde uygulanabilirliğini artırmıştır.

2019'da ise yine Suzuki zenginleştirilmiş genişlemeyen dönüşümleri tanıtılarak bu alandaki araştırmaları daha da ileriye taşımıştır. Bu yeni geliştirilen dönüşümler, daha karmaşık sistemlerde sabit noktaların varlığını ve özelliklerini keşfetme olanağı sunmuştur.

Günümüzde, iterasyon yöntemleri, sabit nokta teoremleri temel alınarak geliştirilmiş ve bu yöntemler, algoritma tasarımında ve bilgisayar bilimlerinde geniş bir uygulama alanı bulmuştur. İterasyon yöntemleri, belirli bir işlemi tekrarlayarak sabit bir sonuca yaklaşma prensibine dayanır ve bu yöntemler, pek çok bilimsel ve mühendislik disiplininde kritik öneme sahiptir.

1.2. Temel Kavramlar

Sabit nokta teorisi, matematiksel analizde ve fonksiyonel analizde oldukça önemli bir yere sahiptir ve çeşitli matematiksel yapıları anlamada temel bir araç olarak kullanılmaktadır. Bu teorinin temelleri ve uygulamalarını ele almadan önce, temel kavramları ve terminolojiyi açıklığa kavuşturmak gerekmektedir.

Tanım 1.2.1. (Metrik ve Metrik Uzay)

$\mathcal{Z}$ boştan farklı bir küme olsun. $d: \mathcal{Z} \times \mathcal{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlarsa d fonksiyonuna metrik ve $(\mathcal{Z}, d)$ çiftine de metrik uzay denir. Her $u, v, z \in \mathcal{Z}$ için

(a) $d(u,v) \geq 0$, $d(u,v) = 0 \Leftrightarrow u = v$

(b) $d(u,v) = d(v,u)$ (simetri)

(c) $d(u,v) \leq d(u,z) + d(z,v)$ (üçgen eşitsizliği)

[37].

Örnek 1.2.2.

$\forall u, v \in \mathbb{R}$ için $d(u,v) = |u - v|$ olarak tanımlanan $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü $\mathbb{R}$ üzerinde bir metriktir. Bu metriğe $\mathbb{R}$ nin mutlak değer metriği denir [28].

Tanım 1.2.3. (Cauchy Dizisi)

$(\mathcal{Z}, d)$ metrik uzayında $\{u_l\}$ bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $m, l > N$ için

$$d(u_l, u_m) < \varepsilon$$

olacak biçimde bir $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı varsa, $\{u_l\}$ dizisine bir Cauchy disizi denir [37].

Örnek 1.2.4.

$\mathbb{R}$ üzerinde mutlak değer metriği verilsin. $\mathbb{R}$ deki $\{u_l\} = 1/n, (n \in \mathbb{N})$ dizisi $0 \in \mathbb{R}$ noktasına yakınsar. Dolayısıyla $\{u_l\}$ bir Cauchy dizisidir [27].

Tanım 1.2.5. (Tam Metrik Uzay)

$(\mathcal{Z}, d)$ bir metrik uzay olsun. $\mathcal{Z}$ deki her $\{u_l\}$ Cauchy dizisi bir limite sahip ise $(\mathcal{Z}, d)$ metrik uzayına tam metrik uzay denir [28].

Örnek 1.2.6.

$\mathbb{R}$ kümesi $\mathbb{R}$ üzerindeki mutlak değer metriğine göre tamdır [28].

Tanım 1.2.7. (Yakınsaklık)

$\{u_l\}$, $(\mathcal{Z}, d)$ metrik uzayında bir dizi olsun. $u \in \mathcal{Z}$ olmak üzere $\lim_{l\to\infty} d(u_l, u) = 0$ ise $\{u_l\}$ dizisi u'ya yakınsaktır denir.

$$\lim_{l\to\infty} u_l = u \text{ veya } u_l \to u(l \to \infty)$$

ile gösterilir [27].

Tanım 1.2.8. (Kuvvetli Yakınsaklık)

$\{u_l\}, (\mathcal{Z}, d)$ metrik uzayı içinde bir dizi ve $u_0 \in \mathcal{Z}$ olsun. Eğer $\lim_{l\to\infty} d(u_l, u_0) = 0$ ise başka bir deyişle, eğer $\forall\varepsilon > 0$ ve $\exists l_\varepsilon \in \mathbb{N} \ni \forall l > l_\varepsilon$ için $d(u_l, u_0) < \varepsilon$ oluyorsa, $\{u_l\}$ dizisi u_0 noktasına kuvvetli yakınsıyor denir ve

$$u_l \to u_0 \ (l \to \infty) \text{ ya da } \lim_{l\to\infty} u_l = u_0$$

şeklinde gösterilir. Metrik uzayda dizilerin yakınsaklığı ile kuvvetli yakınsaklık denktir [28].

Tanım 1.2.9. (Açık Örtü)

$(\mathcal{Z}, d)$ bir metrik uzay, I bir indis kümesi $\emptyset \neq A \subseteq \mathcal{Z}$ ve $\forall i \in I$ için $A_i \subseteq \mathcal{Z}$ açık küme olsun. Şayet $A \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$ ise $(A_i)_{i\in I}$ ailesine A nın bir açık örtüsü denir [25].

Bir örtünün herhangi bir alt kümesi de bir örtü ise buna çoğunlukla alt örtü adı verilir [25].

Örnek 1.2.10.

$n \in \mathbb{Z}$ için $(n-2, n+2)$ ile verilen açık aralıkların $\{(n-2, n+2)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ ailesi $\mathbb{R}$ için bir açık örtüsüdür [37].

Tanım 1.2.11. (Kompakt Küme)

$(\mathcal{Z}, d)$ bir metrik uzay, $\emptyset \neq W \subseteq \mathcal{Z}$ olsun. W nın her açık örtüsü sonlu bir alt örtüye sahipse W ya bir kompakt küme denir [25].

Örnek 1.2.12.

Bir $(\mathcal{Z}, d)$ metrik uzayının sonlu bir W alt kümesi kompakttır [37].

Örnek 1.2.13.

Doğal metrik ile $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinin

(**a**) (0, 1) (**b**) $\mathbb{N}$ (**c**) $\mathbb{Z}$ (**d**) $\mathbb{R}$

alt kümeleri kompakt değildir [37].

Tanım 1.2.14. (Dizisel Kompakt)

$(\mathcal{Z}, d)$ metrik uzayında tanımlı her dizi bu uzayda yakınsak bir alt diziye sahipse, bu uzaya dizisel kompaktır denir [28].

Teorem 1.2.15.

$(\mathcal{Z}, d)$ bir metrik uzay olsun. $\mathcal{Z}$ kompaktır ancak ve ancak $\mathcal{Z}$ dizisel kompaktır [37].

Örnek 1.2.16.

$(\mathcal{Z}, d)$ bir metrik uzay olsun.

(**a**) Herhangi bir

$$A = \{u_l : 1 \leq l \leq n\}$$

sonlu alt kümesi dizisel kompakt bir kümedir.

(**b**) Yakınsak bir $\{u_l\}$ dizisinin terimlerini ve dizinin u_0 limit noktasını içeren B kümesi, yani

$$B = \{u_l : l \in \mathbb{N}\} \cup \{u_0\}$$

kümesi dizisel kompakttır [37].

Örnek 1.2.17.

Herhangi bir sonlu küme, herhangi bir metrik altında kompakt bir metrik uzaydır. Örneğin, $\mathcal{Z} = \{a, b, c\}$ kümesi üzerinde herhangi bir d metriği verilsin. Sonlu kümelerin her dizisi, en azından bir elemanını tekrar tekrar içerecek şekilde bir alt diziye sahiptir. Bu, her dizi için yakınsak bir alt dizinin var olduğunu ifade eder. Dolayısıyla, $\mathcal{Z}$ kompakt bir metrik uzaydır.

Tanım 1.2.18. (Semi kompakt)

$\mathcal{Z}$ bir Hilbert uzay, $\emptyset \neq W \subset \mathcal{Z}$ bir alt kümesi ve $D: W \to W$ bir dönüşüm olsun. Bu takdirde, eğer herhangi bir $\{u_l\} \subseteq W$ sınırlı dizisi için $\{Du_l - u_l\}, (l = 0,1,2, \dots)$ kuvvetli yakınsaksa, yani $\{u_l\}$'nin kuvvetli yakınsak bir $\{u_{l_i}\}$ alt dizisi bulunabilirse, D dönüşümüne semi kompakttır denir [33].

Tanım 1.2.19. (Süreklilik)

$(\mathcal{Z}, d)$ ve (X, ρ) iki metrik uzay, $f: \mathcal{Z} \to X$ bir dönüşüm ve $u_0 \in \mathcal{Z}$ olsun. Her bir $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$d(u, u_0) < \delta \text{ olduğunda } \rho\big(f(u), f(u_0)\big) < \varepsilon$$

veya denk bir ifade ile,

$$f\big(B(u_0; \delta)\big) \subseteq B(f(u_0); \varepsilon)$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa, f ye u_0 noktasında süreklidir denir. f, X in her noktasında sürekli ise f ye X üzerinde süreklidir denir [8].

Örnek 1.2.20.

$A \subseteq \mathbb{R}$ olsun. Her bir $f: A \to \mathbb{R}$ polinom fonksiyonu A nın her noktasında süreklidir [37].

Tanım 1.2.21. (Dizisel Süreklilik)

$\mathcal{Z}$ ve X metrik uzaylar olsun ve $f: \mathcal{Z} \to X$ fonksiyonu verilsin. $\mathcal{Z}$ uzayındaki yakınsak her u_l dizisi için,

$$u_l \to u \Rightarrow f(u_l) \to f(u) \quad (l \to \infty)$$

ise f ye dizisel süreklidir denir [27].

Tanım 1.2.22. (Zayıf Yakınsaklık)

Bir $\{u_l\}$ dizisi ve $u_0 \in \mathcal{Z}$ noktası verildiğinde, eğer $\mathcal{Z}$ üzerinde tanımlı sürekli her lineer f fonksiyoneli için $\lim_{l\to\infty} f(u_{l)} = f(u_0)$ eşitliği sağlanıyorsa, $\{u_l\}$ dizisinin u_0 noktasına zayıf yakınsadığı söylenir.

Tanım 1.2.23. (Azalmayan ve Artmayan Fonksiyonlar)

Tanım bölgesindeki her u, v elemanı için

$$u < v \text{ olduğunda } f(u) \geq f(v)$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna artmayan,

$$u < v \text{ olduğunda } f(u) \leq f(v)$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna ise azalmayan fonksiyon denir.

Örnek 1.2.24.

Artmayan fonksiyonlar, sabit veya azalan fonksiyonlardır. Örneğin, $f(u) =$ a, $f(u) = \frac{1}{u}$.

Azalmayan fonksiyonlar, sabit veya artan fonksiyonlardır. Örneğin , $f(u) =$ a, $f(u) = u$.

Tanım 1.2.25. (Vektör Uzayı)

$\mathcal{Z}$ boştan farklı bir küme, $\mathbb{F}$ bir sayı cismi olsun.

$$+: \mathcal{Z} \times \mathcal{Z} \to \mathcal{Z} \qquad \cdot : \mathbb{F} \times \mathcal{Z} \to \mathcal{Z}$$
$$(u, v) \to u + v \qquad (\lambda, u) \to \lambda . u$$

ikili işlemleri $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$ ve $\forall u, v, z \in \mathcal{Z}$ için

1. $u + v = v + u$
2. $u + (v + z) = (u + v) + z$
3. $\forall u \in \mathcal{Z}$ için $u + e = e + u = u$ olacak şekilde bir $e \in \mathcal{Z}$ vardır.
4. $\forall u \in \mathcal{Z}$ için $u + (-u) = (-u) + u = e$ olacak şekilde $(-u) \in \mathcal{Z}$ vardır.
5. $1 \cdot u = u$
6. $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$
7. $(\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u$
8. $(\alpha \cdot \beta) \cdot u = \alpha \cdot (\beta \cdot u)$

şartlarını sağlıyorsa $(X, +, .)$ üçlüsüne $\mathbb{F}$ cismi üzerinde lineer uzay (vektör uzayı) denir [27].

Tanım 1.2.26. (Norm ve Normlu Uzay)

$\mathcal{Z}, \mathbb{F}\ cismi$ ($\mathbb{F} = \mathbb{R}$ veya $\mathbb{F} = \mathbb{C}$) üzerinde bir lineer uzay olsun.

$\|\cdot\|: \mathcal{Z} \to \mathbb{R}, u \to \| u \|$ dönüşümü $\forall u, v \in \mathcal{Z}$ ve $\forall \alpha \in \mathbb{F}$ için

(a) $\| u \| = 0 \Leftrightarrow u = \theta$

(b) $\| \alpha u \| = |\alpha| \| u \|$

(c) $\| u + v \| \leq \| u \| + \| v \|$

şartlarını sağlıyorsa $\|\cdot\|$ fonksiyonuna $\mathbb{F}'$de (veya $\mathbb{F}$ üzerinde) norm, $(\mathcal{Z}, \|\cdot\|)$ ikilisine de normlu uzay denir [27].

Örnek 1.2.27.

$\mathbb{F}$ (yani $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$) kümesi $\| u \| = |v|$ normu ile bir normlu vektör uzayıdır. Bu norma $\mathbb{F}$ için doğal norm ya da mutlak değer normu adı verilir. Bu norm $d(u, v) = |u - v|$ doğal metriğini üretir [37].

Tanım 1.2.28. (Banach Uzayı)

Bir normlu lineer uzayda her Cauchy dizisi yakınsak ise bu uzaya Banach uzayı denir [27].

$\mathcal{Z}$ in reel veya kompleks lineer uzay oluşuna göre Banach uzayı reel veya kompleks Banach uzayı olarak adlandırılır.

Tanım 1.2.29. (Konvekslik)

$\mathcal{Z}$ bir reel lineer uzay ve $\emptyset \neq W \subseteq \mathcal{Z}$ olsun. Her $u, v \in W$ için

$$A = \{z \in \mathcal{Z}: z = \alpha u + (1 - \alpha)v, 0 \leq \alpha \leq 1\} \subseteq W$$

ise W kümesine konveks denir [28].

Tanım 1.2.30. (Düzgün Konveks Uzay)

$\mathcal{Z}$ bir normlu lineer uzay olsun. Eğer her $\varepsilon \in (0,2]$ ve $u, v \in \mathcal{Z}$ için

$$\| u \| \leq 1, \| v \| \leq 1 \text{ ve } \| u - v \| > \varepsilon \text{ iken } \left\| \frac{u+v}{2} \right\| \leq \delta$$

olacak şekilde $\delta > 0$ varsa $\mathcal{Z}$ uzayına düzgün konveks uzay adı verilir [15].

Tanım 1.2.31. (İç Çarpım Uzayı)

$\mathbb{F} = \mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ olmak üzere $\mathcal{Z}$ bir vektör uzayı olsun. $(\cdot,\cdot): \mathcal{Z} \times \mathcal{Z} \to \mathbb{F}$ dönüşümü aşağıdaki özelliklere sahip ise $(\cdot,\cdot)$ fonksiyonuna, $\mathcal{Z}$ üzerinde bir iç çarpım, $(\mathcal{Z}, (\cdot,\cdot))$ ikilisine de iç çarpım uzayı denir [28].

(i1) Her $u \in \mathcal{Z}$ için $(u, u) \geq 0$ ve $(u, u) = 0 \Leftrightarrow u = \theta$,

(i2) Her $u, v \in \mathcal{Z}$ için $(u, v) = \overline{(v, u)}$ (kompleks eşlenik),

(i3) Her $u, v \in \mathcal{Z}$ ve $a \in \mathbb{F}$ için $(au, v) = a(u, v)$,

(i4) Her $u, v, z \in \mathcal{Z}$ için $(u + v, z) = (u, z) + (v, z)$.

$\mathbb{F} = \mathbb{R}$ olması halinde $(u, v) = (v, u)$ dir.

$(i2)$ ve $(i4)$ ifadelerinden $\forall u, v, z \in \mathcal{Z}$ ve $\forall a, b \in \mathbb{F}$ için

(a) $(au + bv, z) = a(u, z) + b(v, z)$,

(b) $(u, av) = \bar{a}(u, v)$,

(c) $(u, av + bz) = \bar{a}(u, v) + \bar{b}(u, z)$ dir.

Tanım 1.2.32. (Hilbert Uzayı)

Bir $(\mathcal{Z}, (\cdot,\cdot))$ iç çarpım uzayı tam ise yani $(\mathcal{Z}, (\cdot,\cdot))$ uzayındaki her Cauchy dizisi uzayda yakınsaksa, bu iç çarpım uzayına Hilbert uzayı denir [28].

Tanım 1.2.33. (Asimptotik Yarıçap ve Asimptotik Merkez)

$\mathcal{Z}$ bir normlu uzay, $\emptyset \neq W \subset \mathcal{Z}$ kapalı, konveks bir alt küme ve $\{u_l\}$, $\mathcal{Z}$ içinde sınırlı bir dizi olsun. Bu durumda,

$$\mathrm{R}(W, \{u_l\}) = \inf\left\{\limsup_{l\to\infty} \|u_l - u\| : u \in W\right\}$$

sayısına $\{u_l\}$'nin W'ya göre asimptotik yarıçapı denir.

$$\mathrm{A}(W, \{u_l\}) = \left\{u \in W : \limsup_{l\to\infty} \|u_l - u\| = \mathrm{R}(W, \{u_l\})\right\}$$

kümesine $\{u_l\}$'nin W'ya göre asimptotik merkezi denir [13, 41].

Tanım 1.2.34. (Düzgün Asimptotik Dönüşüm)

$\mathcal{Z}$ bir Hilbert uzay, $\emptyset \neq W \subset \mathcal{Z}$ kapalı, konveks bir alt küme ve $D: W \to W$ bir dönüşüm olsun. Bu takdirde, D dönüşümü her $u \in W$ için

$$\lim_{l\to\infty}\|D^{l+1}u - D^{l}u\| = 0, \qquad (l = 0,1,2,\dots)$$

ise D ye düzgün asimptotiktir denir [12].

Tanım 1.2.35. (Opial Şartı)

$\mathcal{Z}$ bir normlu uzay olsun. Eğer $\mathcal{Z}$ içindeki herhangi bir $\{u_l\}$ dizisi bir zayıf limite sahipse, yani

$$\liminf_{l\to\infty}\|u_l - u\| < \liminf_{l\to\infty}\|u_l - v\|, \quad \forall v \in \mathcal{Z} - \{u\}$$

ise $\mathcal{Z}$ uzayı Opial şartını sağlıyor denir [30].

Lemma 1.2.36.

$0 < \mathrm{i} \leq \alpha_l \leq \mathrm{j} < 1$ ve $\mathcal{Z}$ düzgün konveks Banach uzayı olsun. Bu durumda, $\mathcal{Z}$ içindeki herhangi $\{u_l\}$ ve $\{v_l\}$ dizileri için

$$\limsup_{l\to\infty}\|u_l\| \leq \mathrm{z},\ \limsup_{l\to\infty}\|v_l\| \leq \mathrm{z} \ \text{ ve } \ \lim_{l\to\infty}\|\alpha_l u_l + (1-\alpha_l)v_l\| = \mathrm{z}$$

olacak şekilde $\mathrm{z} \geq 0$ varsa, bu takdirde $\lim_{l\to\infty}\|u_l - v_l\| = 0$ dır [35].

1.3. Sabit Nokta Kavramı

Tanım 1.3.1. (Sabit Nokta ve Sabit Nokta Kümesi)

$\mathcal{Z} \neq \varnothing$ herhangi bir küme ve $D: \mathcal{Z} \to \mathcal{Z}$ bir dönüşüm olsun. Eğer $Du = u$ olacak şekilde bir $u \in \mathcal{Z}$ noktası varsa, bu u noktasına D nin sabit noktası denir ve D nin tüm sabit noktalarının kümesi

$$F(D) = \{u \in \mathcal{Z}: Du = u\}$$

ile gösterilir [16].

Aşağıdaki örneklerden de görülebileceği gibi $D: \mathcal{Z} \to \mathcal{Z}$ dönüşümün herhangi bir sabit noktası olmayabilir veya bir sabit noktası olabilir ya da birden fazla sabit noktası olabilir.

Örnek 1.3.2.

a) Eğer $\mathcal{Z} = \mathbb{R}$ ve $Du = u$ ise $F(D) = \mathbb{R}$ dır.

b) Eğer $\mathcal{Z} = \mathbb{R}$ ve $Du = \frac{u}{3}$ ise $F(D) = \{0\}$ olur.

c) Eğer $\mathcal{Z} = \mathbb{R}$ ve $Du = u^2$ ise $F(D) = \{1,0\}$ elde edilir.

d) Eğer $\mathcal{Z} = [1, \infty)$ ve $Du = 2u^4 - 1$ ise $F(D) = \{1\}$ olur.

Örneklerden görüldüğü gibi bir dönüşümün sabit noktasının varlığı, dönüşümün tanımlandığı kümeye ve tanımlanma tarzına bağlıdır.

Tanım 1.3.3. (İterasyon)

$\mathcal{Z}$ herhangi bir küme ve $D: \mathcal{Z} \to \mathcal{Z}$ bir dönüşüm olsun. Her $u \in \mathcal{Z}$ için

$$D^{n+1}u = D(D^n u)$$

olacak şekilde $D^n u$ tanımlansın. Bu takdirde $D^n u$, D altındaki u in n. iterasyonu olarak adlandırılır [8].

$D: \mathcal{Z} \to \mathcal{Z}$ bir dönüşüm olsun. Keyfi $n \in \mathbb{N}$ için $F(D) \subseteq F(D^n)$ dir. Ancak tersi doğru değildir.

Örnek 1.3.4.

$Du = u^2 - 1$ ile tanımlı $D: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun dördüncü iterasyonu

$$D^4 u = D(D(D(Du))) = (((u^2 - 1)^2 - 1)^2 - 1)^2 - 1$$

ile verilir [37].

Tanım 1.3.5. (Daralma Dönüşümü)

$(\mathcal{Z}, d)$ metrik uzay ve $D: \mathcal{Z} \to \mathcal{Z}$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $u, v \in \mathcal{Z}$ için

$$d(Du, Dv) \leq k \cdot d(u, v)$$

eşitsizliği $k \in [0,1)$ olması durumunda sağlanıyorsa D'ye daralma veya büzülme (contraction) dönüşümü denir [16].

Örnek 1.3.6.

$u = \{u_l\} \in \ell^2$ için $D\,u = \left\{\frac{u_l}{3}\right\}$ ile tanımlı D dönüşümü ℓ^2 den ℓ^2'ye bir daralma dönüşümüdür [37].

Banach Sabit Nokta Teoremi veya daralma prensibi, belirli şartlar altında bir fonksiyonun sabit bir noktaya sahip olduğunu garantiler. Bu teoremde, daralma dönüşümü özelliği önemlidir.

Teorem 1.3.7. (Banach Sabit Nokta Teoremi)

$(\mathcal{Z}, d)$ bir tam metrik uzay ve $D: \mathcal{Z} \to \mathcal{Z}$ bir daralma dönüşümü olsun. Bu takdirde,

(a) D nın bir ve yalnız bir sabit $u \in \mathcal{Z}$ noktası vardır.

(b) herhangi bir $u \in \mathcal{Z}$ için iterasyon dizisi, D nın bu sabit noktasına yakınsar (yani her $l \in \mathbb{N}$ için $u_l = Du_{l-1}$ ile tanımlı $\{u_l\}$ iterasyon dizisi D nin bu sabit u noktasına yakınsar) [37].

Sabit nokta teorisi birçok alanda kullanılmaktadır ([21], [31], [32] ve [43]).

Tanım 1.3.8.(Lipschitz Dönüşüm)

$(\mathcal{Z}, d)$ bir metrik uzay ve $D: \mathcal{Z} \to \mathcal{Z}$ bir dönüşüm olsun. Her $u, v \in \mathcal{Z}$ için,

$$d(Du, Dv) \leq Ld(u, v)$$

olacak şekilde bir $L \geq 0$ sabiti varsa, D ye Lipschitz dönüşümü denir. Yukarıdaki eşitsizliğe Lipschitz şartı ve bu şartı sağlayan en küçük L değerine Lipschitz sabiti denir [16]. Lipschitz dönüşümü tanımlı olduğu küme üzerinde düzgün süreklidir.

Örnek 1.3.9.

$\mathcal{Z} = \mathbb{R}$, $d(u, v) = |u - v|$ ve $D: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $Du = 2u$ olsun. Bu takdirde,

$$d(Du, Dv) = |2u - 2v| = 2|u - v| = 2d(u, v) \leq Ld(u, v)$$

$L \geq 2$ için D dönüşümü Lipschitz şartını sağlar.

Tanım 1.3.10.(Kesin Daralma Dönüşümü)

$(\mathcal{Z}, d)$ bir metrik uzay ve $D: \mathcal{Z} \to \mathcal{Z}$ bir dönüşüm olsun. Her $u, v \in \mathcal{Z}$ ve $u \neq v$ için

$$d(Du, Dv) < d(u, v)$$

ise D ye kesin daralma (contractive) dönüşümü denir [16].

Tanım 1.3.11.(Genişleyen Dönüşüm)

$(\mathcal{Z}, d)$ bir metrik uzay ve $D: \mathcal{Z} \to \mathcal{Z}$ bir dönüşüm olsun. Her $u, v \in \mathcal{Z}$ ve $k > 1$ için

$$d(Du, Dv) \geq kd(u, v)$$

ise D ye genişleyen (expansive) dönüşüm denir [16].

Tanım.1.3.12.(Genişlemeyen Dönüşüm)

$\mathcal{Z}$ bir metrik uzay ve $\emptyset \neq W \subset \mathcal{Z}$ bir alt kümesi olsun. Bir $D: W \to W$ dönüşümü her $u, v \in W$ için

$$d(Du, Dv) \leq d(u, v)$$

ise D ye genişlemeyen (nonexpansive) dönüşüm denir.

Bu tanım, D dönüşümünün W içindeki herhangi iki noktayı birbirinden daha fazla uzaklaştırmadığını, yani u ve v arasındaki orijinal mesafeyi koruduğunu veya azalttığını ifade eder. Genişlemeyen dönüşümler, sabit nokta teorisinde önemli bir rol oynarlar. Çünkü bu tür dönüşümler genellikle sabit noktanın varlığına ve sabit noktalara iterasyon yöntemleriyle yaklaşmanın analizine imkan tanır.

Genişlemeyen dönüşümlerin sabit nokta teorisi ve genellemeleri hakkında geniş bir literatür bulunmaktadır ([5], [23], [24] ve [39]).

Örnek 1.3.13.

$\mathcal{Z} = \mathbb{R},\ d(u,v) = |u - v|$ ve $D: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\quad Du = u + 1$ olsun.

$$d(Du, Dv) = |u + 1 - v - 1| = |u - v| = d(u,v)$$

olacağından her $u, v \in \mathcal{Z}$ için $d(Du, Dv) \leq d(u,v)$ şartı sağlanmış olur. Böylece D nin genişlemeyen bir dönüşüm olduğu görülür. Fakat D dönüşümü daralma ve kesin daralma dönüşümü değildir.

Örnek 1.3.14.

$W = [0,1]$ ve $Du = 1 - u$ olsun. Bu takdirde D genişlemeyen, daralma dönüşümü olmayan ve tek sabit noktası $z = 0.5$ olan bir operatördür. Krasnoselskii iterasyonu D'nin sabit noktasına yakınsar fakat Picard iterasyonu yakınsamaz. Bunu görmek için, $u_0 = u \neq 0.5$ olsun, Picard iterasyonu aşağıdaki yakınsamayan diziyi üretir:

$$u, 1 - u, u, 1 - u, \ldots$$

2008'de, Suzuki aşağıdaki şekilde genelleştirilmiş genişlemeyen dönüşümlerin bir sınıfını tanımlamıştır [38].

Tanım 1.3.15.(Suzuki Genişlemeyen Dönüşüm)

$\mathcal{Z}$ bir normlu uzay ve $\emptyset \neq W \subset \mathcal{Z}$ bir alt kümesi olsun. Bir $D: W \to W$ dönüşümü her $u, v \in W$ için

$$\frac{1}{2} \| u - Du \| \leq \| u - v \| \quad \text{iken} \quad \| Du - Dv \| \leq \| u - v \|$$

şartını sağlarsa, D dönüşümüne Suzuki genelleştirilmiş genişlemeyen dönüşümdür yada D dönüşümü (C) şartını sağlar denir [38]. Bu tanım daha sonra [14] de genişletilmiştir.

Örnek 1.3.16.

$W = [0,1]$ olsun ve

$$Du = \begin{cases} 1-u & \text{eğer } u < \dfrac{1}{5} \\ \dfrac{4+u}{5} & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Genişlemeyen dönüşümler sürekli olduğundan, buradaki D'nin genişlemeyen olmadığı görülür. Ancak, D Suzuki genişlemeyen dönüşümdür.

Teorem 1.3.17.

$\mathcal{Z}$ bir Hilbert uzay ve $\emptyset \neq W \subset \mathcal{Z}$ kapalı, konveks ve sınırlı bir alt küme olsun. Eğer $D: W \to W$ dönüşümü Suzuki genişlemeyen dönüşüm ise $F(D)$ kümesi boştan farklı, kapalı ve konveksdir [38].

Lemma 1.3.18.

$\mathcal{Z}$ bir Hilbert uzay ve $\emptyset \neq W \subset \mathcal{Z}$ bir alt kümesı olsun. Eğer $D: W \to W$ bir Suzuki genişlemeyen dönüşüm ise her $u, v \in W$ için

$$\| u - Dv \| \leq 3 \| u - Du \| + \| u - v \|$$

geçerlidir [38].

Tanım 1.3.19.(E_μ Şartı)

$\mathcal{Z}$ bir normlu uzay ve $\emptyset \neq W \subset \mathcal{Z}$ bir alt kümesı olsun. Eğer $D: W \to W$ dönüşümü her $u, v \in W$ ve $\mu \geqslant 1$ için

$$\| u - Dv \| \leqslant \mu \| u - Dv \| + \| u - v \|$$

eşitsizliğini sağlarsa D dönüşümü (E_μ) şartını sağlar denir. Eğer D dönüşümü $\mu = 1$ için (E_μ) şartını sağlarsa D ye W üzerinde (E) şartını sağlar denir [14].

Bu özel durum, dönüşümün mesafeleri daha sıkı bir şekilde kontrol ettiğini gösterir. Bu tanım, dönüşümlerin mesafe özelliklerini analiz etmek için kullanılır ve sabit nokta teorisinde, özellikle iterasyon yöntemlerle sabit noktalara yakınsama analizlerinde kritik bir öneme sahiptir. (E_μ) ve (E) şartları, dönüşümün davranışını anlamak ve matematiksel modellerdeki sabit noktaları tespit etmek için kullanılır. Bu şartların sağlanması, çeşitli matematiksel problemlerin çözümlerinin varlığını ve özelliklerini garanti altına alır.

Açıklama 1.3.20.

(i) Eğer $D\colon W \to W$ genişlemeyen dönüşüm ise D dönüşümü (E) şartını sağlar. [14] deki Örnek 1'de gösterildiği gibi bunun tersi doğru değildir.

(ii) [38]'deki Lemma 7 ye göre, eğer $D\colon W \to W$, W üzerinde (C) şartını sağlıyorsa D dönüşümü (E_3) şartını da sağlar.

(iii) (E) şartını sağlayan fakat (C) şartını sağlamayan sürekli dönüşümler vardır, [14] deki Örnek 1 bunu göstermektedir.

Tanım 1.3.21. ($\mathbf{C}_\gamma$ Şartı)

$\mathcal{Z}$ bir normlu uzay ve $\emptyset \neq W \subset \mathcal{Z}$ bir alt kümesi olsun. $D\colon W \to W$ dönüşümü her $u, v \in W$ ve $\gamma \in (0,1)$ için

$$\gamma \parallel u - Du \parallel \leq \parallel u - v \parallel \text{ iken } \parallel Du - Dv \parallel \leq \parallel u - v \parallel$$

ise *D* dönüşümüne (C_γ) şartını sağlar denir [14].

Açıklama 1.3.22.

(i) Eğer $\gamma = \frac{1}{2}$ ise dönüşüm (C) şartını sağlar.

(ii) Eğer $0 < \gamma_1 < \gamma_2 < 1$ ise (C_{γ_1}) şartı (C_{γ_2}) şartını gerektirir. Bunun tersi doğru değildir.

$\gamma \neq \frac{1}{2}$ için (C_γ) şartının (E) şartını gerektirip gerektirmediği bilinmemektedir. Yine de, bu durum Lipschitz dönüşümleri için geçerlidir [14].

Önerme 1.3.23.

$\mathcal{Z}$ bir Banah uzayı, $\emptyset \neq W \subset \mathcal{Z}$ kapalı bir alt kümesi olsun.

(i) Eğer $D\colon W \to W$ dönüşümü $\gamma \in (0,1)$ için (C_γ) şartını sağlayan bir Lipschitz dönüşümü ve L, Lipschitz sabiti ise bu takdirde *D* dönüşümü, $\mu = \max\{1, 1 + \gamma(\mathrm{L} - 1)\}$ olmak üzere (E_μ) şartını sağlar.

(ii) Eğer D dönüşümü $\gamma \in (0,1)$ için (C_γ) şartını sağlarsa, bu takdirde $F(D)$ kümesi kapalıdır [14].

Önerme 1.3.24.

$\mathcal{Z}$ Opial şartını sağlayan Banach uzayı, $\emptyset \neq W \subset \mathcal{Z}$ kapalı bir alt kümesi ve $D: W \to W$ dönüşümü, $\gamma \in (0,1)$ için (C_γ) şartını sağlayan ve Lipschitz sabiti L olan bir Lipschitz dönüşümü olsun. Eğer $\{u_l\}$ dizisi zayıf olarak a*'a yakınsarsa ve

$$\lim_{l\to\infty} \|Du_l - u_l\| = 0$$

ise bu takdirde $D\mathrm{a}^* = \mathrm{a}^*$ olur.

İspat. Önerme 1.3.23 (i) den,

$$\| u_l - D\mathrm{a}^* \| \leq \mu \| u_l - Du_l \| + \| u_l - \mathrm{a}^* \|$$

için $\mu = \max\{1, 1 + \gamma(\mathrm{L} - 1)\}$ alınır. Sonra

$$\liminf_{l\to\infty} \|u_l - D\mathrm{a}^*\| \leq \liminf_{l\to\infty} \|u_l - \mathrm{a}^*\|$$

elde edilir. Bu durumda Opial şartından, $D\mathrm{a}^* = \mathrm{a}^*$ sonucu çıkarılır.

2019 yılında, Berinde [10] genişlemeyen dönüşümlerin yeni bir genellemesini sunan ilk kişi oldu ve bu yeni dönüşüm sınıfına zenginleştirilmiş genişlemeyen dönüşümler adını verdi.

Tanım 1.3.25. (Zenginleştirilmiş Genişlemeyen Dönüşüm)

$\mathcal{Z}$ bir normlu uzay ve $\emptyset \neq W \subset \mathcal{Z}$ bir alt kümesi ve $D: W \to W$ dönüşüm olsun. Eğer her $u, \mathrm{v} \in W$ için

$$\| b(u - v) + Du - Dv \| \leq (b + 1) \| u - v \|$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde bir $b \in [0, \infty)$ sabiti varsa, D dönüşümüne zenginleştirilmiş genişlemeyen dönüşüm denir [10].

Zenginleştirilmiş genişlemeyen dönüşümler ve (C) şartını sağlayan dönüşümler sınıfı, önemli lineer olmayan dönüşüm sınıflarıdır. 2021 yılında, Ullah ve arkadaşları [45], Hilbert uzaylarında zenginleştirilmiş Suzuki genişlemeyen dönüşüm sınıfını tanıtan ilk kişiler oldu. Daha sonra, 2022 yılında, Abdeljawad ve arkadaşları [1] bu dönüşüm sınıfını Banach uzaylarında incelediler.

Tanım 1.3.26. (Zenginleştirilmiş Suzuki Genişlemeyen Dönüşüm)

$\mathcal{Z}$ bir Hilbert uzay, $\emptyset \neq W \subset \mathcal{Z}$ bir alt kümesi ve $D: W \to W$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $u, v \in W$ için

$$\frac{1}{2} \| u - Du \| \leq (b + 1) \| u - v \| \Rightarrow \| b(u - v) + Du - Dv \| \leq (b + 1) \| u - v \|$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde bir $b \in [0,\infty)$ sabiti varsa, D dönüşümüne zenginleştirilmiş Suzuki genişlemeyen dönüşüm denir [45].

Her Suzuki genişlemeyen dönüşümü $b = 0$ ile bir zenginleştirilmiş Suzuki genişlemeyen dönüşümüdür.

Örnek 1.3.27.

$W = [0,3]$ alalım ve

$$Du = \begin{cases} 0 & \text{eğer } u \neq 3 \\ 1 & \text{eğer } u = 3 \end{cases}$$

olarak D dönüşümünü tanımlayalım. D dönüşümü Suzuki genişlemeyen dönüşüm olduğundan, aynı zamanda zenginleştirilmiş Suzuki genişlemeyen dönüşümdür. Çünkü, her Suzuki genişlemeyen dönüşümü $b = 0$ ile bir zenginleştirilmiş Suzuki genişlemeyen dönüşümdür.

Tanım 1.3.28. (Zenginleştirilmiş (C_γ) şartını sağlayan dönüşüm)

$\mathcal{Z}$ bir normlu uzay ve $\emptyset \neq W \subset \mathcal{Z}$ bir alt kümesi ve $D: W \to W$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $u, v \in W$ ve $\gamma \in (0,1)$ için

$$\gamma \parallel u - Du \parallel \leq (b+1) \parallel u - v \parallel \ \Rightarrow \ \parallel b(u-v) + Du - Dv \parallel \leq (b+1) \parallel u - v \parallel$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde bir $b \in [0,\infty)$ sabiti varsa bu takdirde D dönüşümüne zenginleştirilmiş (C_γ) şartını sağlar denir.

Belirli şartlar altında genişlemeyen dönüşümlerin sabit bir noktasının varlığını ve tekliğini garanti etmek ve bu sabit noktayı yaklaşık olarak hesaplamak için bir iterasyon yöntemi geliştirmek çok önemlidir. Picard tarafından geliştirilen ilk iterasyon yöntemi [34], lineer olmayan dönüşümlerin sabit noktalarını bulmak için tasarlanmıştır. Banach [7], daha sonra Picard'ın yönteminin daralma dönüşümlerinin sabit noktalarını belirlemede etkin olduğunu göstermiştir. Daha sonra birçok araştırmacı, çeşitli dönüşüm sınıfları için Picard'ın iterasyon yönteminin yakınsaklığını doğrulamıştır. Ancak, genişlemeyen dönüşümler için Picard iterasyon yönteminin uygulanması zorluklar içerdiğinden, birçok araştırmacı, yeni iterasyon yöntemleri ortaya koymuştur (örneğin, Mann [26], Ishikawa [19], Noor [29], Ali ve Ali [4], Alshehri ve arkadaşları [6], Şahin ve arkadaşları [40] vb.).

2020 yılında, Ali ve Ali [3] F-iteratif yöntemini tanıttılar ve bu iterasyon yönteminin yakınsama hızını farklı iterasyon yöntemlerinin yakınsama hızlarıyla karşılaştırdılar. F-iterasyon yönteminin, Agarwal ve arkadaşları [2], Gürsoy ve Karakaya [17], Karakaya ve arkadaşları [22], Thakur ve arkadaşları [42], Ullah ve Arshad (M^*) [47] ve Ullah ve Arshad (M) [46] tarafından önerilen iterasyon yöntemlerden daha hızlı yakınsadığını ispatladılar. 2021'de, Jubair ve arkadaşları [20], Banach uzaylarında bu iterasyon şemasını kullanarak genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktalarını tahmin etmeye çalıştılar. 2022'de, Uddin ve arkadaşları [44], Banach uzaylarında bu iterasyon sürecini inceleyerek Suzuki genişlemeyen dönüşümler için yakınsama sonuçları elde ettiler.

$\mathcal{Z}$ bir normlu uzay, $\emptyset \neq W \subset \mathcal{Z}$ konveks bir alt küme ve $D: W \to W$ dönüşümü verildiğinde, D nin ortalama D_r dönüşümü; $r = 1/(b+1)$ olmak üzere

$$D_r u = (1-r)u + rDu$$

olarak tanımlanır. D_r nin sabit noktaları kümesi ile D nin sabit nokta kümesi eşittir. D_r dönüşümünü kullanarak, sırasıyla Agarwal iterasyon [2], Thakur iterasyon [42], M-iterasyon [46, 39] ve F-iterasyon [3] yöntemleri şu şekilde tanımlanır:

Tanım 1.3.29. (Agarwal iterasyonu)

$\mathcal{Z}$ bir normlu uzay, $\emptyset \neq W \subset \mathcal{Z}$ konveks bir alt kümesi ve $D: W \to W$ bir dönüşüm olsun. $u_1 \in W, \{\alpha_n\}, \{\beta_n\} \subset (0,1)$, $r = \frac{1}{b+1}$ olmak üzere; Agarwal iterasyonu

$$\begin{cases} u_1 \in W \\ z_l = (1-\beta_l)u_l + \beta_l D_r u_l \\ u_{l+1} = (1-\alpha_l)D_r u_l + \alpha_l D_r z_l, \ l \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{1.1}$$

şeklinde tanımlanır. Agarwal iterasyonu literatürde bazen S-iterasyonu olarak da adlandırılır [2].

Tanım 1.3.30. (Thakur iterasyonu)

$\mathcal{Z}$ bir normlu uzay, $\emptyset \neq W \subset \mathcal{Z}$ konveks bir alt kümesi ve $D: W \to W$ bir dönüşüm olsun. $u_1 \in W, \{\alpha_n\}, \{\beta_n\} \subset (0,1)$, $r = \frac{1}{b+1}$ olmak üzere; Thakur iterasyonu

$$\begin{cases} u_1 \in W \\ v_l = (1-\beta_l)u_l + \beta_l D_r u_l \\ z_l = D_r((1-\alpha_l)u_l + \alpha_l v_l) \\ u_{l+1} = D_r z_l, l \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{1.2}$$

şeklinde tanımlanır [42].

Tanım 1.3.31. (M- iterasyonu)

$\mathcal{Z}$ bir normlu uzay, $\emptyset \neq W \subset \mathcal{Z}$ konveks bir alt kümesi ve $D: W \to W$ bir dönüşüm olsun. $u_1 \in W, \{\alpha_n\} \subset (0,1), r = \frac{1}{b+1}$ olmak üzere; M-iterasyonu

$$\begin{cases} u_1 \in W \\ v_l = (1-\alpha_l)u_l + \alpha_l D_r u_l \\ z_l = D_r v_l \\ u_{l+1} = D_r z_l, l \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (1.3)$$

şeklinde tanımlanır [46].

Tanım 1.3.32. (F- iterasyonu)

$\mathcal{Z}$ bir normlu uzay, $\emptyset \neq W \subset \mathcal{Z}$ konveks bir alt kümesi ve $D: W \to W$ bir dönüşüm olsun. $u_1 \in W, \{\alpha_n\} \subset (0,1), r = \frac{1}{b+1}$ olmak üzere; F-iterasyonu

$$\begin{cases} u_1 \in W \\ v_l = D_r((1-\alpha_l)u_l + \alpha_l D_r u_l) \\ z_l = D_r v_l \\ u_{l+1} = D_r z_l, l \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (1.4)$$

şeklinde tanımlanır [3].

Bu tez çalışmasında, Banach uzayında zenginleştirilmiş (C_γ) şartını sağlayan dönüşümler için (1.4) ile tanımlanan F-iterasyon yönteminin yakınsaklığı incelendi. (1.4) iterasyon yöntemini kullanarak çeşitli özel şartlar altında Banach uzayında zenginleştirilmiş (C_γ) şartını sağlayan dönüşümler için hem zayıf hem de kuvvetli yakınsaklık sonuçları elde edildi. Ayrıca, bulunan sonuçlar sayısal örneklerle gösterildi.

2. ZENGİNLEŞTİRİLMİŞ SUZUKİ GENİŞLEMEYEN DÖNÜŞÜMLER

Bu bölümde, zenginleştirilmiş Suzuki genişlemeyen dönüşümle ilgili önemli teorem ve sonuçlar verilecektir [45].

Ilk olarak, aşağıda önemli bir sonucu verelim.

Lemma 2.1.

$\mathcal{Z}$ bir Hilbert uzayı, $\varnothing \neq W \subset \mathcal{Z}$ bir alt kümesi ve $D: W \to W$ bir dönüşüm olsun. Eğer D dönüşümü Suzuki genişlemeyen dönüşüm ve $F(D) \neq \emptyset$ ise bu takdirde, her $r \in (0,1)$ için D nin ortalama dönüşümü $D_{\mathrm{r}} = rI + (1-r)D$ asimptotik olarak düzenlidir ve $F(D_{\mathrm{r}}) = F(D)$ dır.

İspat. W içinden herhangi bir u elemanı verilsin ve $u_l = D_r^l u, (l = 0,1,2, \dots)$ tanımlansın. $z \in F(D)$ ve dolayısıyla $\mathrm{D_r}$ için de sabit nokta olduğu için

$$u_{l+1} - z = ru_l + (1-r)Du_l - z = r(u_l - z) + (1-r)(Du_l - z)$$

olur. Ek olarak, herhangi bir a sabiti alındığında aşağıdaki ifade geçerlidir

$$a(u_l - Du_l) = a(u_l - z) - a(Du_l - z)$$

$\frac{1}{2} \| z - Dz \| = 0 \leq \|u_l - z\|$ olduğundan ve D Suzuki genişlemeyen dönüşüm olduğu için $\|Du_l - Dz\| \leq \|u_l - z\|$ olur. Bu nedenle

$$\begin{aligned}\|u_{l+1} - z\|^2 &= r^2\|u_l - z\|^2 + (1-r)^2\|Du_l - z\|^2 + 2r(1-r) \\ &\quad < Du_l - z, u_l - z > \\ &\leq r^2\|u_l - z\|^2 + (1-r)^2\|u_l - z\|^2 + 2r(1-r) \\ &\quad < Du_l - z, u_l - z > \\ &= (r^2 + (1-r)^2)\|Du_l - z\|^2 + 2r(1-r) < Du_l - z, u_l - z >\end{aligned}$$

elde edilir. Dahası

$$\begin{aligned}a^2\|u_l - Du_l\|^2 &= a^2\|u_l - z\|^2 + a^2\|Du_l - z\|^2 - 2a^2 < Du_l, u_l - z > \\ &\leq a^2\|u_l - z\|^2 + a^2\|u_l - z\|^2 - 2a^2 < Du_l, u_l - z > \\ &= 2a^2\|u_l - z\|^2 - 2a^2 < Du_l, u_l - z >\end{aligned}$$

bulunur. Yukarıdakileri taraf tarafa toplarsak,

$$\|u_{l+1} - z\|^2 + a^2\|u_l - Du_l\|^2 \leq (2a^2 + r^2 + (1-r)^2)\|u_l - z\|^2 + 2(r(1-r) - a^2) < Du_l - z, u_l - z >$$

elde edilir. Eğer, $a^2 = r(1-r)$ olduğu gözönüne alınırsa, $a^2 > 0$ olduğu açıktır. $\sum_{l=0}^{l=L}$ toplamı alınırsa,

$$\begin{aligned} r(1-r)\sum_{l=0}^{l=L} \|u_l - Du_l\|^2 &\leq \sum_{l=0}^{l=L} \left(\|u_l - z\|^2 - \|u_{l+1} - z\|^2\right) \\ &= \|u_0 - z\|^2 - \|u_{l+1} - z\|^2) \\ &\leq \|u_0 - z\|^2 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\sum_{l=0}^{\infty} \|u_l - Du_l\|^2 < \infty$$

bulunur. $u_{l+1} - u_l = (1-r)(Du_l - u_l)$ olduğu için

$$\sum_{l=0}^{\infty} \|u_l - u_{l+1}\|^2 \leq \frac{(1-r)\|u_0 - z\|^2}{r}$$

bulunur. Buna göre, $\sum_{l=0}^{\infty} \|u_l - u_{l+1}\|^2 < \infty$ olduğundan $\lim_{l\to\infty} \|D_r^{l+1}u - D_r^l u\| = 0$ olur. Bu nedenle D_r dönüşümü asimptotik olarak düzenlidir.

Teorem 2.2.

$\mathcal{Z}$ bir Hilbert uzayı, $\emptyset \neq W \subset \mathcal{Z}$ konveks, kapalı ve sınırlı bir alt kümesi ve $D: W \to W$ bir dönüşüm olsun. Eğer D semi kompakt ve zenginleştirilmiş Suzuki genişlemeyen dönüşüm ise bu takdirde, $F(D)$ kümesi boştan farklı, kapalı ve konveksdir. Ek olarak, $u_0 \in W$ için bir $r \in (0,1)$ seçilebilir ve verilen Krasnoselskii iterasyon dizisi

$$u_{l+1} = (1-r)u_l + rDu_l, (l = 0,1,2, \dots) \tag{2.1}$$

$F(D)$ nin bir elemanına kuvvetli yakınsar.

İspat. D nin ortalama dönüşümü $D_r u = (1-r)u + rDu$ Suzuki genişlemeyen dönüşümdür. D zenginleştirilmiş Suzuki genişlemeyen dönüşümü olduğundan, $b \in [0, \infty)$ sabiti ve her $u, v \in W$ için

$$\frac{1}{2} \| u - Du \| \leq (b+1) \| u - v \| \Rightarrow \| b(u-v) + Du - Dv \| \leq (b+1) \| u - v \|$$

geçerlidir. $b = \frac{1-r}{r} = \frac{1}{r} - 1$ yazılabilir. Bu takdirde $b + 1 = \frac{1}{\mathrm{r}}$ olur. $r \in (0,1]$ olduğunu görmek kolaydır. Yukarıdaki hipotezden

$$\frac{1}{2} \| u - Du \| \leq \frac{1}{r} \| u - v \| \Rightarrow \left\| \left(\frac{1-\mathrm{r}}{\mathrm{r}} \right) (u - v) + Du - Dv \right\| \leq \frac{1}{\mathrm{r}} \| u - v \|$$

olur. Bundan

$$\frac{1}{2} \| ru - rDu \| \leq \| u - v \| \Rightarrow \| (1-r)(u-v) + rDu - rDv \| \leq \| u - v \|$$

veya

$$\frac{1}{2} \| u - [(1-r)u + rDu] \| \leq \| u - v \| \Rightarrow \| [(1-r)u + rDu] - [(1-r)v + rDv] \| \leq \| u - v \|$$

bulunur. $(1-r)u + rDu = D_r u$ olduğundan her $u, v \in W$ için

$$\frac{1}{2} \|u - D_r u\| \leq \| u - v \| \Rightarrow \|D_r u - D_r v\| \leq \| u - v \|$$

geçerlidir. Böylece, ortalama dönüşümü D_r, Suzuki genişlemeyen operatördür. Dolayısıyla Teorem 1.3.18'e göre, $F(D_r)$ nin boştan farklı, kapalı ve konveks olduğu açıktır. Ancak, Lemma 2.1'e göre, $F(D) = F(D_r)$ olduğu görülür, dolayısıyla teoremin ispatı biter.

Sonuç 2.3.

Teorem 2.2 nin hipotezleri sağlansın. Eğer D semi kompakt ve Suzuki genişlemeyen dönüşüm ise bu takdirde $F(D)$ kümesi boştan farklı, kapalı ve konveksdir. Ayrıca, $u_0 \in W$ için bir $r \in (0,1)$ seçilebilir ve verilen Krasnoselskii iterasyon dizisi

$$u_{l+1} = (1-r)u_l + rDu_l, (l = 0,1,2, \ldots)$$

$F(D)$ nin bir elemanına kuvvetli yakınsar.

İspat. Her Suzuki genişlemeyen dönüşüm $b = 0$ ile bir zenginleştirilmiş Suzuki genişlemeyen dönüşümdür. Bu nedenle, Sonuç 2.3 ve doğrudan Teorem 2.2 den $b = 0$ alınarak sonuç görülür.

Sonuç 2.4.

Teorem 2.2 nin hipotezleri sağlansın. Eğer D semi kompakt ve zenginleştirilmiş genişlemeyen dönüşüm ise bu takdirde $F(D)$ kümesi boştan farklı, kapalı ve konveksdir. Ayrıca, $u_0 \in W$ için bir $r \in (0,1)$ seçilerek elde edilen Krasnoselskii iterasyon dizisi

$$u_{l+1} = (1-r)u_l + rDu_l, (l = 0,1,2, \dots)$$

$F(D)$ nin bir elemanına kuvvetli yakınsar.

İspat. Bir dönüşümün zenginleştirilmiş Suzuki genişlemeyen dönüşüm olması için gereken şart, zenginleştirilmiş genişlemeyen olması için gereken şartdan daha zayıftır. Böylece, Sonuç 2.4, Teorem 2.2 nin bir sonucudur.

Teorem 2.5.

Teorem 2.2 nin hipotezleri sağlansın. Eğer D zenginleştirilmiş Suzuki genişlemeyen dönüşüm ve $\{z\} = F(D)$ ise bu takdirde, W daki her başlangıç u_0 noktası ve $r \in (0,1)$ için Krasnoselskii iterasyon dizisi

$$u_{l+1} = (1-r)u_l + rDu_l, (l = 0,1,2, \dots) \tag{2.2}$$

$F(D)$ nin z elemanına zayıf yakınsar.

İspat. Teorem 2.2 den dolayı, $D_r u = (1-r)u + rDu$ Suzuki genişlemeyen dönüşümdür. Lemma 2.1'e göre, $F(D_{\mathrm{r}}) = F(D) = \{z\}$ dir. İstenen sonucu elde etmek için, eğer $\{u_{l_j}\}$ dizisi

$$u_{l_j+1} = (1-r)u_{l_j} + rDu_{l_j}$$

şeklinde tanımlanan ve q ya zayıf yakınsayan dizi ise bu durumda D_r operatörü için q sabit bir noktadır ve dolayısıyla $q = z$ olmalıdır.

$\{u_{l_j}\}$ nin z'ye zayıf yakınsamadığını varsayalım. Teorem 2.2 den dolayı, D_{r} operatörü Suzuki genişlemeyendir ve dolayısıyla asimptotik düzenlidir,

$$\lim_{j\to\infty} \left\| u_{l_j} - D_r u_{l_j} \right\| = 0$$

olur. Lemma 1.3.19'a göre

$$\left\| u_{l_j} - D_r q \right\| \leq 3 \left\| u_{l_j} - D_r u_{l_j} \right\| + \left\| u_{l_j} - q \right\|$$

elde edilir. Bundan dolayı

$$\limsup_{j\to\infty} \left(\left\| u_{l_j} - D_r q \right\| + \left\| u_{l_j} - q \right\| \right) \leq 0 \tag{2.3}$$

bulunur. Şimdi

$$\left\|u_{l_j} - D_r q\right\|^2 = \left\|\left(u_{l_j} - q\right) + (q - D_r q)\right\|^2$$
$$\leq \left\|u_{l_j} - q\right\|^2 + \|q - D_r q\|^2 + 2\left\langle u_{l_j} - q, q - D_r q\right\rangle$$

elde edilir. Dolayısıyla kabulden $\left\{u_{l_j}\right\}$ zayıf bir şekilde q ya yakınsamadığı için, yukarıdan

$$\lim_{j\to\infty}\left(\left\|u_{l_j} - D_r q\right\|^2 - \left\|u_{l_j} - q\right\|^2\right) = \left\|q - u_{l_j}\right\|^2 \qquad (2.4)$$

bulunur. Ayrıca

$$\left\|u_{l_j} - D_r q\right\|^2 - \left\|u_{l_j} - q\right\|^2 = \left(\left\|u_{l_j} - D_r q\right\| - \left\|u_{l_j} - q\right\|\right)\left(\left\|u_{l_j} - D_r q\right\| + \left\|u_{l_j} - q\right\|\right) \qquad (2.5)$$

dir. W sınırlı küme olduğu için, $\left\{\left\|u_{l_j} - D_r q\right\| + \left\|u_{l_j} - q\right\|\right\}$ dizisi de sınırlıdır ve bu nedenle (2.3), (2.4) ve (2.5) birleştirilerek

$$\|q - D_r q\| = 0$$

olur. Bu $q \in F(D_r) = F(D) = \{z\}$ olduğunu gösterir.

Sonuç 2.6.

Teorem 2.5. in şartları altında eğer D Suzuki genişlemeyen dönüşüm ise Krasnoselskii iterasyon dizisi $F(D)$ nin bir elemanına zayıf yakınsar.

İspat. Her Suzuki genişlemeyen dönüşüm $b = 0$ ile zenginleştirilmiş Suzuki genişlemeyen dönüşümdür. Böylece, Sonuç 2.6 ve Teorem 2.5 den $b = 0$ ve $r = 1$ seçilerek sonuç elde edilir.

Sonuç 2.7.

Teorem 2.5. in şartları altında eğer D zenginleştirilmiş genişlemeyen dönüşüm ise Krasnoselskii iterasyon dizisi $F(D)$ nin bir elemanına zayıf yakınsar.

İspat. Bir dönüşümün zenginleştirilmiş Suzuki genişlemeyen dönüşüm olması için gereken şart, zenginleştirilmiş genişlemeyen dönüşüm olması için gereken şartdan daha zayıftır. Böylece, Sonuç 2.7 , Teorem 3.5 nin bir sonucudur.

Şimdi başka bir zayıf yakınsaklık teoremi verelim.

Teorem 2.8.

Teorem 2.5. in şartları altında eğer D zenginleştirilmiş Suzuki genişlemeyen dönüşümü ise bu takdirde, W 'daki her başlangıç u_0 noktası ve $r \in (0,1)$ için Krasnoselskii iterasyon dizisi

$$u_{l+1} = (1-r)u_l + rDu_l, (l = 0,1,2, \dots)$$

$F(D)$ nin bir elemanına zayıf yakınsar.

İspat. Teorem 2.2 nın ispatında belirtildiği gibi $F(D) = F(D_r) \neq \emptyset$ olduğu açıktır. Teorem 2.2'ye göre $F(D_r)$ boştan farklı ve konveksdir. D_r Suzuki genişlemeyen olduğu ve $F(D_r)$ deki her z için $\frac{1}{2}\|z - D_r z\| = 0 \leq \|u_l - z\|$ olduğundan, $\|D_r u_l - D_r z\| \leq \|u_l - z\|$ olur. Buna göre

$$\begin{aligned} \|u_{l+1} - z\| &= \|(1-r)u_l + rD_r u_l - z\| \\ &\leq (1-r)\|u_l - z\| + r\|D_r u_l - z\| \\ &\leq (1-r)\|u_l - z\| + r\|u_l - z\| \\ &= \|u_l - z\| \end{aligned}$$

bulunur. Sonuç olarak $\|u_{l+1} - z\| \leq \|u_l - z\|$ dir. Buradan her $z \in F(D_r)$

$$\lim_{l \to \infty} \|u_l - z\|,$$

bulunur. $F(D_r)$ kümesi iyi tanımlanmış ve konveks dır . Kalan ispat ([12], Teorem 8) nin ispatındaki gibi yapılır.

Sonuç 2.9. Teorem 2.2 nin şartları altında eğer D bir Suzuki genişlemeyen dönüşüm ise bu takdirde, W'daki her u_0 başlangıç noktası ve $r \in (0,1)$ için Krasnoselskii iterasyon dizisi

$$u_{l+1} = (1-r)u_l + rDu_l, (l = 0,1,2, \dots)$$

$F(D)$ nin bir elemanına zayıf yakınsar.

İspat. Her Suzuki genişlemeyen dönüşüm, $b = 0$ ile zenginleştirilmiş Suzuki genişlemeyen bir dönüşümdür. Böylece, Sonuç 2.9, Teorem 2.8'den $b = 0$ seçilerek ve $r = 1$ için sonuç görülür.

Sonuç 2.10.

Teorem 2.2 nin şartları altında eğer D zenginleştirilmiş genişlemeyen dönüşüm ise bu takdirde W'daki her u_0 başlangıç noktası ve $r \in (0,1)$ için Krasnoselskii iterasyon dizisi

$$u_{l+1} = (1-r)u_l + rDu_l, (l = 0,1,2, \dots)$$

$F(D)$ nin bir elemanına zayıf yakınsar.

İspat. Bir dönüşümün zenginleştirilmiş Suzuki genişlemeyen dönüşümü olması için gereken şart, zenginleştirilmiş genişlemeyen olması için gereken şartdan daha zayıftır. Böylece, Sonuç 2.10, Teorem 2.8'in bir sonucudur.

3. ZENGİNLEŞTİRİLMİŞ (C_γ) ŞARTINI SAĞLAYAN DÖNÜŞÜMLER

Bu bölümde, zenginleştirilmiş (C_γ) şartını sağlayan dönüşümlerin bir sınıfı tanımlanarak, bu sınıftaki dönüşümler için Banach uzayında bazı kuvvetli ve zayıf yakınsaklık teoremleri sunuldu.

Önce önemli bir lemma verelim.

Lemma 3.1.

$\mathcal{Z}$ bir Hilbert uzayı ve $\emptyset \neq W \subset \mathcal{Z}$ konveks ve kapalı bir alt kümesi ve $D: W \to W$ bir dönüşümü olsun. Eğer D dönüşümü bazı $\gamma \in (0,1)$ ve $b \in [0, \infty)$ için zenginleştirilmiş (C_γ) şartını sağlarsa, bu takdirde her $\mathrm{r} \in (0,1]$ için

$$D_{\mathrm{r}}u = (1-\mathrm{r})u + \mathrm{r}Du$$

ile tanımlanan $D_{\mathrm{r}}: W \to W$ ortalama dönüşümü (C_γ) şartını sağlar.

İspat. Hipotezden, D dönüşümü zenginleştirilmiş (C_γ) şartını sağladığından, her $u, v \in W$ için ,

$$\gamma \parallel u - Du \parallel \leq (b+1) \parallel u - v \parallel \Rightarrow \parallel b(u-v) + Du - Dv \parallel \leq (b+1) \parallel u - v \parallel$$

ifadesi sağlanacak şekilde $\gamma \in (0,1)$ ve $b \in [0, \infty)$ sabitleri bulunabilir. $b = \frac{1-\mathrm{r}}{\mathrm{r}} = \frac{1}{\mathrm{r}} - 1$ alındığında $b + 1 = \frac{1}{\mathrm{r}}$ olur. Buradan $\mathrm{r} \in (0,1]$ olduğunu görmek kolaydır. Yukarıdaki şart

$$\gamma \parallel u - Du \parallel \leq \frac{1}{\mathrm{r}} \parallel u - v \parallel \Rightarrow \left\| \left(\frac{1-\mathrm{r}}{\mathrm{r}}\right)(u-v) + Du - Dv \right\| \leq \frac{1}{\mathrm{r}} \parallel u - v \parallel$$

şekline dönüşür.

$$\gamma \parallel \mathrm{r}u - \mathrm{r}Du \parallel \leq \parallel u - v \parallel \Rightarrow \parallel (1-\mathrm{r})(u-v) + \mathrm{r}Du - \mathrm{r}Dv \parallel \leq \parallel u - v \parallel$$

bulunur. Daha sonra

$$\gamma \parallel u - [(1-\mathrm{r})u + \mathrm{r}Du] \parallel \leq \parallel u - v \parallel$$

$$\Rightarrow \parallel [(1-\mathrm{r})u + \mathrm{r}Du] - [(1-\mathrm{r})v + \mathrm{r}Dv] \parallel \leq \parallel u - v \parallel$$

elde edilir. $(1-\mathrm{r})u + \mathrm{r}Du = D_{\mathrm{r}}u$ olduğundan, her $u, v \in W$ için

$$\gamma \parallel u - D_r u \parallel \leq \parallel u - v \parallel \Rightarrow \|D_r u - D_r v\| \leq \parallel u - v \parallel$$

elde edilir. Bu, ortalama dönüşüm D_r nin (C_γ) şartını sağladığını gösterir.

Aşağıda, zenginleştirilmiş (C_γ) şartını sağlayan (1.4), F-iterasyon yöntemi için elde edilenler verildi. Önce bir lemma verelim.

Lemma 3.2.

$\mathcal{Z}$ bir Banach uzayı ve $\emptyset \neq W \subset \mathcal{Z}$ konveks ve kapalı bir alt kümesi, $D: W \to W$ dönüşümü zenginleştirilmiş (C_γ) şartını sağlayan bir Lipschitz dönüşümü, $F(D) \neq \emptyset$ ve $\{u_l\}$ dizisi (1.4) ile elde edilen bir dizi olsun. Bu takdirde her $a^* \in F(D)$ için $\lim_{l\to\infty}\|u_l - a^*\|$ limiti mevcuttur.

İspat. $F(D)$ içindeki herhangi bir a^* noktası ele alınsın. Bu durumda $a^* \in F(D_r)$ dir. Dolayısıyla, Lemma 3.1 kullanılarak D_r nin (C_γ) şartını sağladığı görülür. Özellikle, her $u \in W$ için

$$\gamma \parallel a^* - D_r a^* \parallel \leq \parallel a^* - u \parallel \quad \text{ise} \quad \|D_r a^* - D_r u\| \leq \|a^* - u\|$$

ifadesi geçerlidir. Bunu kullanarak

$$\begin{aligned}
&\|v_l - a^*\| = \|D_r[(1-\alpha_l)u_l + \alpha_l D_r u_l] - a^*\| \\
&\leq \|(1-\alpha_l)u_l + \alpha_l D_r u_l - a^*\| \\
&\leq (1-\alpha_l)\|u_l - a^*\| + \alpha_l\|D_r u_l - a^*\| \\
&\leq (1-\alpha_l)\|u_l - a^*\| + \alpha_l\|u_l - a^*\| \\
&= \|u_l - a^*\| \qquad (3.1)
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.1)'den

$$\begin{aligned}
\|z_l - a^*\| &= \|D_r v_l - a^*\| \\
&\leq \|v_l - a^*\| \leq \|u_l - a^*\|
\end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitsizliği kullanarak

$$\begin{aligned}
\|u_{l+1} - a^*\| &= \|D_r z_l - a^*\| \\
&\leq \|z_l - a^*\| \leq \|u_l - a^*\|
\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi $\|u_{l+1} - a^*\| \leq \|u_l - a^*\|$ olduğundan $\{\parallel u_l - a^* \parallel\}$ dizisi azalan ve alttan sınırlıdır. Bu durumda, herhangi bir $a^* \in F(D_r) = F(D)$ noktası için $\lim_{l\to\infty}\|u_l - a^*\|$ limitinin var olduğu sonucuna varılır.

Lemma 3.2 den aşağıdaki teorem ispatlanabilir. Bu teorem, bu tezde önemli bir rol oynamaktadır.

Teorem 3.3.

$\mathcal{Z}$ bir düzgün konveks, Banach uzayı, $\emptyset \neq W \subset \mathcal{Z}$ konveks ve kapalı bir alt kümesi, $D: W \to W$ dönüşümü zenginleştirilmiş (C_γ) şartını sağlayan bir Lipschitz dönüşümü ve $\{u_l\}$ dizisi (1.4) ile elde edilen bir dizi olsun. Bu takdirde $F(D) \neq \emptyset \Leftrightarrow \{u_l\}$ dizisi W içinde sınırlıdır ve $\lim_{l\to\infty}\|u_l - D_\mathrm{r}u_l\| = 0$ olur, burada $\mathrm{r} = \frac{1}{b+1}$ dir.

İspat. İlk olarak, Lemma 3.2 den herhangi bir belirli $\mathrm{a}^* \in F(D)$ noktası için, $\lim_{l\to\infty}\|u_l - \mathrm{a}^*\|$ limitinin var olduğu ve $\{u_l\}$ nın W içinde sınırlı dizi olduğu elde edilir. Böylece

$$\lim_{l\to\infty}\|u_l - \mathrm{a}^*\| = \mathrm{z} \tag{3.2}$$

bulunur. Lemma 3.2'de ispatladığımız gibi

$$\|v_l - \mathrm{a}^*\| \leq \|u_l - \mathrm{a}^*\|$$

olur. Buradan

$$\limsup_{l\to\infty}\|v_l - \mathrm{a}^*\| \leq \limsup_{l\to\infty}\|u_l - \mathrm{a}^*\| = \mathrm{z} \tag{3.3}$$

elde edilir. Lemma 3.1 den D_r nin (C_γ) şartını sağladığı görülür. Bu takdirde

$$\gamma\|\mathrm{a}^* - D_\mathrm{r}\mathrm{a}^*\| \leq \|u_l - \mathrm{a}^*\| \Rightarrow \|D_\mathrm{r}u_l - \mathrm{a}^*\| \leq \|u_l - \mathrm{a}^*\|$$

bulunur. Böylece

$$\limsup_{l\to\infty}\|D_\mathrm{r}u_l - \mathrm{a}^*\| \leq \limsup_{l\to\infty}\|u_l - \mathrm{a}^*\| = \mathrm{z}$$

olur. Yine Lemma 3.2 ispatından

$$\|u_{l+1} - \mathrm{a}^*\| \leq \|v_l - \mathrm{a}^*\|$$

elde edilir. Bu durumda

$$\mathrm{z} \leq \liminf_{l\to\infty}\|v_l - \mathrm{a}^*\| \tag{3.4}$$

bulunur. (3.3) ve (3.4) den

$$\mathrm{z} = \lim_{l\to\infty}\|v_l - \mathrm{a}^*\| \tag{3.5}$$

elde edilir. (3.1), (3.2) ve (3.5) ile

$$z = \lim_{l\to\infty} \|(1-\alpha_l)(u_l - a^*) + \alpha_l(D_r u_l - a^*)\|$$

bulunur. Lemma 1.2.36 uygulanarak

$$\lim_{l\to\infty} \|u_l - D_r u_l\| = 0$$

elde edilir.

Tersine, $\{u_l\} \subseteq W$ sınırlı olduğunu ve $\lim_{l\to\infty} \| u_l - D_r u_l \| = 0$ olduğunu varsayarak, $F(D) \neq \emptyset$ olduğunun ispatlanması gerekiyor. Bu amaçla, $A(W, \{u_l\})$ kümesinde yer alan her $a^* \in A(W, \{u_l\})$ için, $D_r a^*$'nın $A(W, \{u_l\})$ kümesinde yer aldığını ispatlamak yeterlidir. Lemma 3.1 ve önerme 1.3.24 (i) kullanılarak

$$\begin{aligned} R(D_r a^*, \{u_l\}) &= \limsup_{l\to\infty} \|u_l - D_r a^*\| \\ &= \limsup_{l\to\infty} (\mu\|u_l - D_r u_l\| + \|u_l - a^*\|) \\ &= \limsup_{l\to\infty} \|u_l - a^*\| = R(a^*, \{u_l\}) \end{aligned}$$

elde edilir, burada $\mu = \max\{1, 1 + \gamma(L-1)\}$ dır. Görüldüğü gibi $D_r a^* \in A(W, \{u_l\})$ olur. Ancak $A(W, \{u_l\})$ kümesi tek bir noktadan oluşur. Bu ise, $a^* = D_r a^*$ olduğunu gösterir. Çünkü $F(D_r) = F(D)$ dır, dolayısıyla $F(D) \neq \emptyset$ olduğu ispatlanır.

Opial şartı altında aşağıdaki teoremde bir zayıf yakınsaklık sonucu verildi.

Teorem 3.4.

$\mathcal{Z}$ bir düzgün konveks, Banach uzayı, $\emptyset \neq W \subset \mathcal{Z}$ konveks, kapalı bir alt kümesi, $D: W \to W$ dönüşümü bazı $\gamma \in (0,1)$ için zenginleştirilmiş (C_γ) şartını sağlayan bir Lipschitz dönüşümü, $F(D) \neq \emptyset$ ve $\{u_l\}$ dizis (1.4) ile elde edilen bir dizi olsun. Bu takdirde, $\mathcal{Z}$ Opial şartını sağlarsa $\{u_l\}$ dizisi D nin bir sabit noktasına zayıf yakınsar.

İspat. $\mathcal{Z}$ uzayı düzgün konveks Banach uzayı olduğu için, Teorem 3.3 den $\{u_l\}$ dizisi W içinde sınırlı bir dizidır. Buna göre, $\{u_l\}$ dizisinden $\{u_{l_j}\}$ alt dizisini seçebiliriz ki $\{u_{l_j}\}$, W içindeki z'ye zayıf yakınsar. Eğer z, $\{u_{l_j}\}$ nin zayıf limiti ise bu takdirde z nin, $\{u_l\}$ için zayıf limiti ve aynı anda D nin bir sabit noktası olduğunu ispatlamak yeterlidir. Bu durumda, Teorem 3.3'e göre, $\lim_{j\to\infty} \left\|D_r u_{l_j} - u_{l_j}\right\| = 0$ elde edilir. Önerme 1.3.25 ile $z \in F(D_r)$ olduğu; yani, z nin D_r nin ve dolayısıyla D nin bir sabit noktası olduğu elde edilir.

Şimdi z nin, $\{u_l\}$ nin zayıf limiti olduğunu ispatlayalım. Bunun için, çelişki yötemiyle ispat yapmak için z nin $\{u_l\}$ nin zayıf limiti olmadığını varsayalım. Bu nedenle $\{u_l\}$ nin y'yi zayıf limit olarak kabul eden başka bir $\{u_{l_k}\}$ alt dizisi bulunsun ve $y \neq z$ olsun. Daha önceki hesaplamaları kullanarak y'nin $F(D_r) = F(D)$'ye ait olduğu görülür. Lemma 3.2 ve $\mathcal{Z}$ uzayının Opial şartını sağladığı dikkate alınarak,

$$\begin{aligned}\lim_{l\to\infty} \|u_l - z\| &= \lim_{j\to\infty} \left\|u_{l_j} - z\right\| < \lim_{j\to\infty} \left\|u_{l_j} - y\right\| \\ &= \lim_{l\to\infty} \|u_l - y\| = \lim_{k\to\infty} \left\|u_{l_k} - y\right\| \\ &< \lim_{k\to\infty} \left\|u_{l_k} - z\right\| = \lim_{l\to\infty} \|u_l - z\|\end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre, $\lim_{l\to\infty} \|u_l - z\| < \lim_{l\to\infty} \|u_l - z\|$ olduğu ispatlanmış oldu. Ama $y \neq z$ olduğundan bu bir çelişkidir. Böylece, istenilen sonuç elde edilir.

Şimdi bazı şartlar altında aşağıdaki kuvvetli yakınsaklık teoremini verelim.

Teorem 3.5.

$\mathcal{Z}$ bir düzgün konveks, Banach uzayı, $\emptyset \neq W \subset \mathcal{Z}$ konveks bir alt kümesi, $D: W \to W$ dönüşümü zenginleştirilmiş (C_γ) şartını sağlayan bir Lipschitz dönüşümü, $F(D) \neq \emptyset$ ve $\{u_l\}$ dizisi (1.4) ile elde edilen bir dizi olsun. Bu taktirde, eğer W kompakt küme ise $\{u_l\}$ dizisi D nin bir sabit noktasına kuvvetli yakınsar.

İspat. W kümesinin konveksliği nedeniyle, $\{u_l\}$ dizisinden, bazı $u_0 \in W$ için $\lim_{i\to\infty} \left\|u_{l_i} - u_0\right\| = 0$ sağlayan $\{u_{l_i}\}$ alt dizisi vardır. Ayrıca, Teorem 3.3 den $\lim_{i\to\infty} \left\|u_{l_i} - D_r u_{l_i}\right\| = 0$ elde edilir. Lemma 3.1'e göre, D_r, dönüşümü (C_γ) şartını sağlar. Böylece, Önerme 1.3.24 (i) kullanılarak

$$\left\|u_{l_i} - D_r u_0\right\| \leq \mu \left\|u_{l_i} - D_r u_{l_i}\right\| + \left\|u_{l_i} - u_0\right\|$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitsizliğin her iki tarafında $\lim_{i\to\infty}$ alındığında,

$$\lim_{i\to\infty} \| u_{l_i} - D_r u_0 \| = 0$$

elde edilir, yani, $u_{l_i} \to D_r u_0$ olur. Bu durum, $D_r u_0 = u_0$ olduğunu gösterir. Bu, u_0'ın D_r için bir sabit nokta olduğunu ispatlar. Ancak, Lemma 3.2 den, $\lim_{l\to\infty} \|u_l - u_0\|$'ın var olduğu görülür. W kompakt olduğundan, sonuç olarak u_0, $\{u_l\}$ dizisi için kuvvetli limit olur. Ayrıca $\{u_l\}$ dizisi D nin bir sabit noktası olan u_0'a kuvvetli yakınsar.

Teorem 3.6.

$\mathcal{Z}$ bir düzgün konveks Banach uzayı, $\emptyset \neq W \subset \mathcal{Z}$ konveks ve kapalı bir alt kümesi,

$D: W \to W$ dönüşümü zenginleştirilmiş (C_γ) şartını sağlayan bir Lipschitz dönüşümü, $F(D) \neq \emptyset$ ve $\{u_l\}$ dizisi (1.4) ile elde edilen bir dizi olsun. Bu takdirde, $\liminf_{l\to\infty} \operatorname{dist}(u_l, F(D)) = 0$ veya $\limsup_{l\to\infty} \operatorname{dist}(u_l, F(D)) = 0$ olması için gerek ve yeter şart $\{u_l\}$ dizisinin D nin bir sabit noktasına kuvvetli yakınsamasıdır. Burada $\operatorname{dist}(u_l, F(D)) = \inf\{\|u_l - u\| : u \in F(D)\}$ dır.

İspat. İlk kısım basit olduğu için, tersini ispatlıyoruz. Varsayalım ki

$$\liminf_{l\to\infty} \operatorname{dist}(u_l, F(D)) = 0$$

olsun. Burada $u \in F(D)$ dir. Lemma 3.2 den $\lim_{l\to\infty} \operatorname{dist}(u_l, F(D))$ nin var olduğu ve dolayısıyla $\lim_{l\to\infty} \operatorname{dist}(u_l, F(D)) = 0$ olduğu sonucu çıkar. Böylece, verilen bir $\delta > 0$ ve her $l \geq l_0$ için

$$\operatorname{dist}(u_l, F(D)) = \inf\{\|u_l - u\| : u \in F(D)\} < \frac{\delta}{2}$$

elde edilir. Özellikle

$$\inf\{\|u_{l_0} - u\| : u \in F(D)\} < \frac{\delta}{2}$$

olduğundan, $\|u_{l_0} - u\| < \frac{\delta}{2}$ olacak şekilde $u \in F(D)$ bulunmaktadır. Şimdi, $l_1, l \geq l_0$ için

$$\begin{aligned} \|u_{l+l_1} - u_l\| &\leq \|u_{l+l_1} - u\| + \|u - u_l\| \\ &\leq \|u_{l_0} - u\| + \|u_{l_0} - u\| = 2\|u_{l_0} - u\| < \delta \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $\{u_l\}$ dizisi W içinde bir Cauchy dizisidir. $W \subset \mathcal{Z}$ konveks ve kapalı bir alt kümesi olduğundan, $\lim_{l\to\infty} u_l = u$ olacak şekilde W içinde bir u noktası bulunur. $\lim_{l\to\infty} \operatorname{dist}(u_l, F(D)) = 0$ olduğundan, bu $\operatorname{dist}(u, F(D)) = 0$ olması anlamına gelir. Dolayısıyla Önerme 1.3.24 (ii)'ye göre $u \in F(D)$ dır.

Tanım 3.7.

$\mathcal{Z}$ bir düzgün konveks Banach uzayı ve $\emptyset \neq W \subset \mathcal{Z}$ konveks ve kapalı bir alt kümesi olsun. Eğer $\mathrm{a} = 0$ ise $f(\mathrm{a}) = 0$, $\mathrm{a} > 0$ ise $f(\mathrm{a}) > 0$ ve her $u \in W$ için

$$\| u - Du \| \geq f\big(\operatorname{dist}(u, F(D))\big)$$

geçerli olacak şekilde bir f fonksiyonu bulunabilirse, $D: W \to W$ dönüşümüne (I) şartını sağlar denir [36].

Bu bölüm aşağıdaki (I) şartının sağlanması altında ispatlanmış bir sonuç ile tamamlandı.

Teorem 3.8.

$\mathcal{Z}$ bir düzgün konveks Banach uzay, $\varnothing \neq W \subset \mathcal{Z}$ konveks ve kapalı bir alt kümesi, $D: W \to W$ dönüşümü zenginleştirilmiş (C_{γ}) şartını sağlayan bir Lipschitz dönüşümü, $F(D) \neq \emptyset$ ve $\{u_l\}$ dizisi (1.4) ile elde edilen bir dizi olsun. Bu takdirde, eğer D_{r}, dönüşümü (I) şartını sağlarsa $\{u_l\}$ dizisi D nin bir sabit noktasına kuvvetli yakınsar.

İspat. Lemma 3.1 den, D_{r} nin (C_{γ}) şartını sağladığı elde edilir. Teorem 3.3 den, $\lim_{l\to\infty}\|u_l - D_{\mathrm{r}}u_l\| = 0$ olduğu bulunur. D_{r} nin (I) şartını sağladığı gözönüne alınırsa önceki eşitlikten, $\lim_{l\to\infty}\mathrm{dist}(u_l, F(D_{\mathrm{r}})) = 0$ sonucuna varılır. Teorem 3.6 kullanılarak, $\{u_l\}$ dizisinin D nin bir sabit noktasına kuvvetli yakınsadığı görülür.

Açıklama 3.9.

(i) Eğer Teorem 3.3 - 3.8 arasında $b = 0$ alınırsa, literatürde yeni olan, (C_{γ}) şartını sağlayan dönüşüm için bazı yakınsama sonuçları elde edilir.

(ii) Eğer Tanım 1.3.29 de $b = 0$ ve $\gamma = \frac{1}{2}$ alınırsa, Suzuki genişlemeyen dönüşüm elde edilir. Bu durumda, Teorem 3.3-3.8 in yakınsama sonuçları genelleştirilir [44].

(iii) Zenginleştirilmiş (C_{γ}) şartını sağlayan dönüşüm, genişlemeyen dönüşümün bir genellemesidir. Bu durum, Teorem 3.3-3.8 in ilgili sonuçlarını genelleştirir [20].

4. SAYISAL ÖRNEKLER VE YAKINSAMA HIZLARI

Bu bölümde, iki sayısal örnek kullanılarak iterasyon yöntemlerinin diğer yöntemlere göre sabit noktaya yakınsaklığı çalışıldı.

Öncelikle, ana sonucu desteklemek için hem zenginleştirilmiş (C_γ) şartını hem de (C_γ) şartını sağlayan bir dönüşüm örneği sunuldu. Sonra, ana sonucu destekleyen zenginleştirilmiş (C_γ) şartını sağlayan, fakat (C_γ) şartını sağlamayan ve birden fazla sabit noktası olan bir dönüşüm örneği verildi.

Örnek 4.1.

Verilen bir $\gamma \in (0,1)$ için, $D: [0,1] \to [0,1]$ dönüşümü şu şekilde tanımlanansın:

$$Du = \begin{cases} \frac{u}{2}, & u \neq 1, \\ \frac{1+\gamma}{2+\gamma}, & u = 1. \end{cases}$$

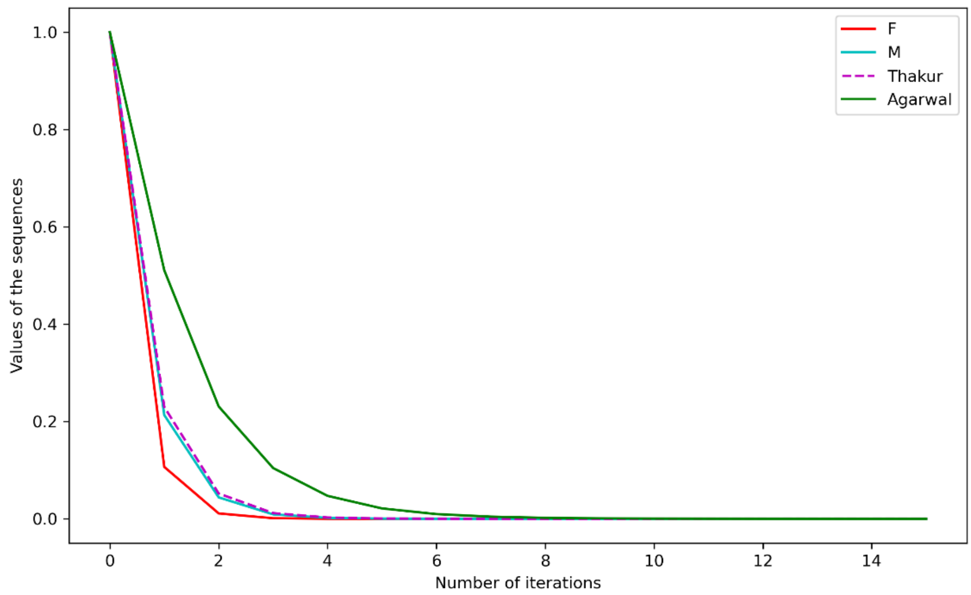
Burada $\gamma = \frac{3}{8}$ olduğunda

$$Du = \begin{cases} \frac{u}{2}, & u \neq 1, \\ \frac{11}{19}, & u = 1. \end{cases}$$

elde edilir. [12] deki Örnek 5 ten görüldüğü gibi, D dönüşümü $\left(\mathrm{C}_{\frac{3}{8}}\right)$ şartını sağlar ve dolayısıyla $b = 0$ ile zenginleştirilmiş $\left(\mathrm{C}_{\frac{3}{8}}\right)$ şartını da sağlar. Burada $r = 1/(b+1)$ olmak üzere $D_r u = (1-r)u + rDu$ olduğundan, $r = 1$ ve $D_1 u = Du$ olur. $u = 0$ noktası, D nin ve aynı anda D_r nın tek sabit noktasıdır. Aşağıdaki tablo ve grafikte, F-iterasyon yönteminin diğer iterasyon yöntemlerinden daha hızlı olduğu görülür. Her $l \in \mathbb{N}$ için $\alpha_l = 0.35$ ve $\beta_l = 0.55$ alınmıştır.

Tablo 4.1. Sabit noktası 0 olan dönüşümde, iterasyonların karşılaştırılması

l	F	M	Thakur	Agarwal
1	1	1	1	1
2	0.1065789	0.2131579	0.2297368	0.5107895
3	0.0109910	0.0439638	0.0519062	0.2308130
4	0.0011334	0.0090675	0.0117275	0.1042986
5	0.0001169	0.0018702	0.0026497	0.0471299
6	0.0000121	0.0003857	0.0005987	0.0212968
7	0.0000012	0.0000796	0.0001353	0.0096235
8	0	0.0000164	0.0000306	0.0043486
9	0	0.0000034	0.0000069	0.0019650
10	0	0.0000007	0.0000016	0.0008879
11	0	0.0000001	0.0000004	0.0004012
12	0	0	0.0000001	0.0001813
13	0	0	0	0.0000819
14	0	0	0	0.0000370
15	0	0	0	0.0000167
16	0	0	0	0.0000076
17	0	0	0	0.0000034
18	0	0	0	0.0000015
19	0	0	0	0.0000007
20	0	0	0	0.0000003
21	0	0	0	0.0000001
22	0	0	0	0



Şekil 4.1. Sabit noktası 0 olan dönüşümde, iterasyonların yakınsama hızları

Örnek 4.2.

$W = [-0.5, -2] \cup [0.5,2]$ sınırlı, kapalı ve konveks bir alt kümesi üzerinde, her $u \in W$ için $Du = u^{-1}$ olacak şekilde bir D dönüşümü alalım. Bu D dönüşümü zenginleştirilmiş (C_γ) şartını sağlıyor, fakat (C_γ) şartını sağlamıyor.

$\gamma \in (0,1)$ için, $u = 1$ ve $v = \frac{1}{2}$ alındığında

$$\gamma \parallel u - Du \parallel = \gamma \parallel 1 - (1)^{-1} \parallel = 0 < \frac{1}{2} = \parallel u - v \parallel$$

ve

$$\parallel Du - Dv \parallel = \left\| (1)^{-1} - (\tfrac{1}{2})^{-1} \right\| = 1 > \frac{1}{2} = \parallel u - v \parallel.$$

elde edilir. Dolayısıyla, D dönüşümü (C_γ) şartını sağlamaz.

Diğer taraftan, D dönüşümü zenginleştirilmiş (C_γ) şartını sağlar. Her $u, v \in W$ için

$$\gamma \parallel u - Du \parallel \leq (b+1) \parallel u - v \parallel \text{ veya } \gamma \parallel v - Dv \parallel \leq (b+1) \parallel u - v \parallel$$

olduğunda

$$\parallel b(u-v) + Du - Dv \parallel \leq (b+1) \parallel u - v \parallel$$

elde edilir. Bu durumda

$$\parallel u - v \parallel \times \|b - (uv)^{-1}\| \leq (b+1) \parallel u - v \parallel$$

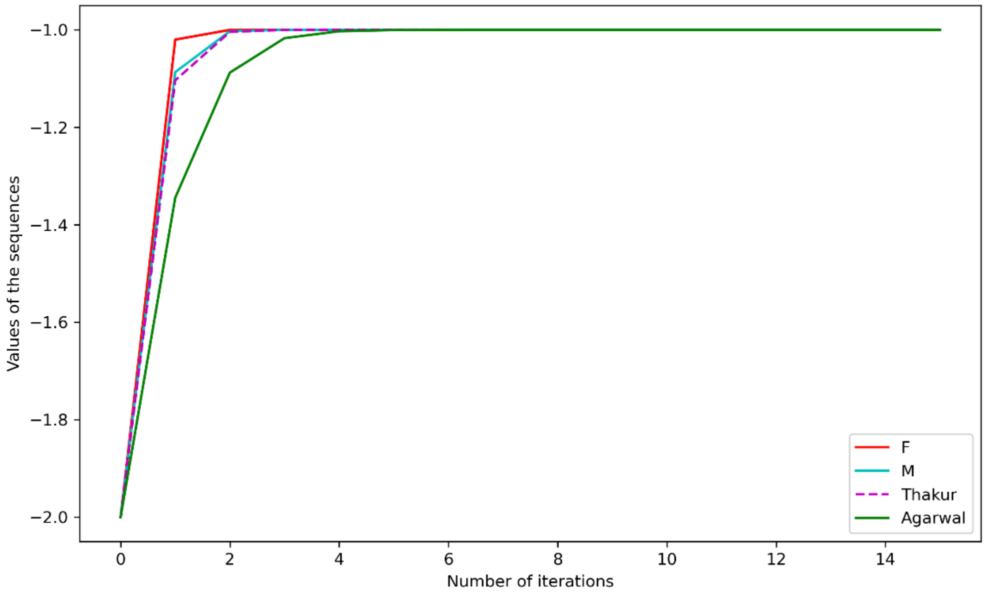
sonucu elde edilir. Sadeleştirirsek

$$\|b-(uv)^{-1}\| \leq (b+1)$$

elde edilir. Bu durum $b = 1.5$ için geçerlidir. Burada $r = 1/(b+1)$ olmak üzere $D_r u = (1-r)u + rDu$ olduğundan, $r = 2/5$ ve $D_{2/5}u = (3u^2+2)/5u$ olur. Dolayısıyla, D zenginleştirilmiş (C_γ) şartını $b = 1.5$ ile sağlar. Her $l \in \mathbb{N}$ için $\alpha_l = 0.35$ ve $\beta_l = 0.55$ alınmıştır.

Tablo 4.2. Sabit noktası -1 olan dönüşümde, iterasyonların karşılaştırılması

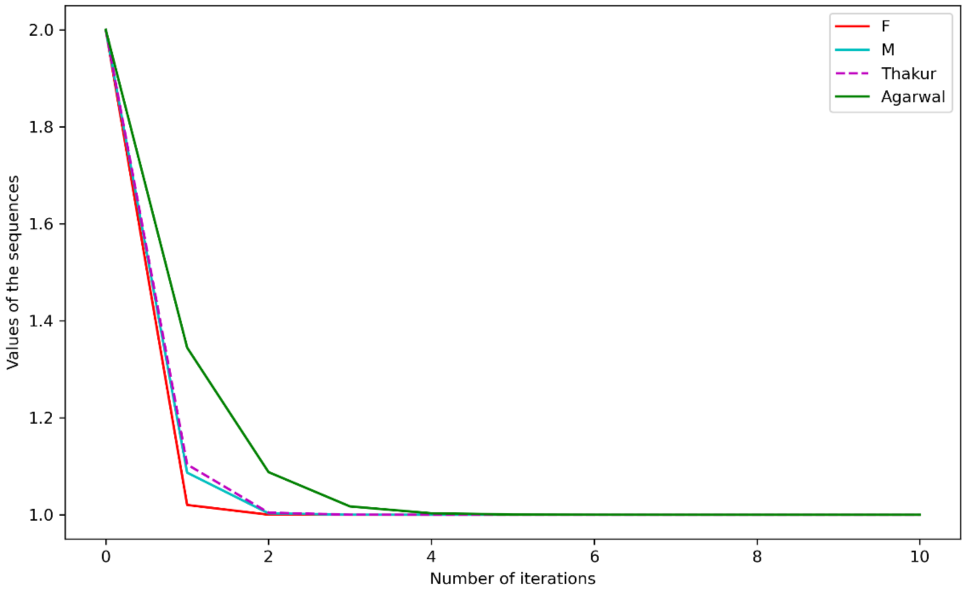
l	F	M	Thakur	Agarwal
1	-2	-2	-2	-2
2	-1.0201256834	-1.0867720042	-1.1036247297	-1.3445323353
3	-1.0001205648	-1.0029202115	-1.0042768299	-1.0878163518
4	-1.0000006946	-1.0000845744	-1.0001460409	-1.0171538720
5	-1.0000000040	-1.0000024361	-1.0000049436	-1.0029950718
6	-1.0000000000	-1.0000000702	-1.0000001673	-1.0005096233
7	-1	-1.0000000011	-1.0000000057	-1.0000863112
8	-1	-1.0000000000	-1.0000000002	-1.0000146062
9	-1	-1	-1.0000000000	-1.0000024714
10	-1	-1	-1	-1.0000004182
11	-1	-1	-1	-1.0000000708
12	-1	-1	-1	-1.0000000120
13	-1	-1	-1	-1.0000000020
14	-1	-1	-1	-1.0000000003
15	-1	-1	-1	-1.0000000001
16	-1	-1	-1	-1



Şekil 4.2 Sabit noktası -1 olan dönüşümde, iterasyonların yakınsama hızları

Tablo 4.3. Sabit noktası 1 olan dönüşümde, iterasyonların karşılaştırılması

l	F	M	Thakur	Agarwal
1	2	2	2	2
2	1.0201256834	1.0867720042	1.1036247297	1.3445323353
3	1.0001205648	1.0029202115	1.0042768299	1.0878163518
4	1.0000006946	1.0000845744	1.0001460409	1.0171538720
5	1.0000000040	1.0000024361	1.0000049436	1.0029950718
6	1.0000000000	1.0000000702	1.0000001673	1.0005096233
7	1	1.0000000011	1.0000000057	1.0000863112
8	1	1.0000000000	1.0000000002	1.0000146062
9	1	1	1.0000000000	1.0000024714
10	1	1	1	1.0000004182
11	1	1	1	1.0000000708
12	1	1	1	1.0000000120
13	1	1	1	1.0000000020
14	1	1	1	1.0000000003
15	1	1	1	1.0000000001
16	1	1	1	1



Şekil 4.3. Sabit noktası 1 olan dönüşümde, iterasyonların yakınsama hızları

Tablo ve grafiklerde görüldüğü gibi, D ve D_r dönüşümlerinin sabit noktaları $u = -1$ ve $u = 1$ dir. Başlangıç noktaları u_1'in -1 e yakın olduğu durumlarda, F-iterasyon yöntemiyle üretilen $\{u_l\}$ dizisi -1 e yakınsar. Benzer şekilde, başlangıç noktaları u_1'in 1 e yakın olduğu durumlarda, $\{u_l\}$ dizisi 1 e yakınsar. Tablolar ve grafiklerde, F-iterasyon yönteminin, iki farklı başlangıç noktası için diğer iterasyon yöntemlerine göre daha hızlı sonoç verdiği kolayca görülmektedir.

5. SONUÇ

2. bölümde, zenginleştirilmiş Suzuki genişlemeyen dönüşüm [45] kavramı çalışıldı ve bu dönüşümlerin genişlemeyen, zenginleştirilmiş genişlemeyen ve Suzuki genişlemeyen operatörler kavramından daha genel olduğu gösterildi.

Bu dönüşümler için varlık ve yaklaşım sonuçları verildi ve Berinde [10], Browder ve Petryshyn [12] ve Petryshyn [33]'ye ait literatürde bilinen bazı sonuçların bu yeni dönüşüm yapısında geliştirildiği verildi.

3. bölümde, zenginleştirilmiş (C_γ) şartını sağlayan dönüşümlerin bir sınıfı tanıtıldı. Eğer D dönüşümü zenginleştirilmiş (C_γ) şartını sağlıyorsa, ortalama dönüşümü D_Γ de (C_γ) şartını sağlar. Ayrıca, (1.4) ile belirtilen F-iterasyon yöntemi aracılığıyla, Banach uzayı içinde çeşitli şartlar altında kuvvetli ve zayıf yakınsaklık sonuçları verildi.

4. bölümde, (1.1) Agarwal iterasyonu, (1.2) Thakur iterasyonu, (1.3) M-iterasyonu ve (1.4) F-iterasyonu yöntemlerinin yakınsama hızları karşılaştırıldı ve F-iterasyon yönteminin diğer iterasyon yöntemlerinden daha hızlı olduğu iki sayısal örnek üzerinden gösterildi. Örnek 4.1'de tek bir sabit noktanın bulunduğu durumu incelendi, Örnek 4.2'de birden fazla sabit noktanın olduğu durumlar ele alındı. Her iki örnekte de, F-iterasyon yönteminin diğer iterasyon yöntemlerine kıyasla sabit noktalara daha hızlı yakınsadığı gözlemlendi ve bulgularımız tablo ve grafikler ile detaylandırıldı.

Açık bir problem olarak: bu tez çalışmadaki tüm sonuçları, CAT(0) uzayı gibi farklı bir uzayda, zenginleştirilmiş (E_μ) şartını sağlayan D dönüşümüne genişletilebilir miyiz? sorusu çalışılabilir.

KAYNAKLAR

[1] Abdeljawad, T., Ullah, K., Ahmad, J., Arshad, M., & Ma, Z. (2022). On the convergence of an iteration process for enriched Suzuki nonexpansive mappings in Banach spaces. AIMS Math., 7(11), 20247-20258. https://doi.org/10.3934/math.20221108

[2] Agarwal, R. P., O'Regan, D., & Sahu, D. R. (2007). Iteration construction of fixed points of nearly asymptotically nonexpansive mappings. J. Nonlinear Convex Anal., 8, 61-79.

[3] Ali, J., & Ali, F. (2020). A new iteration scheme to approximating fixed points and the solution of a delay differential equation. J. Nonlinear Conv. Anal., 21(9), 2151-2163.

[4] Ali, F., & Ali, J. (2020). Convergence, stability, and data dependence of a new iterative algorithm with an application. Comput. Appl. Math., 39(4), 267.

[5] Ali, F., Ali, J., & Nieto, J. J. (2020). Some observations on generalized non-expansive mappings with an application. Comput. Appl. Math., 39(2), 74.

[6] Alshehri, M. G., Khan, F. A., & Ali, F. (2022). An iterative algorithm to approximate fixed points of non-linear operators with an application. Mathematics, 10(7), 1132. https://doi.org/10.3390/math10071132

[7] Banach, S. (1922). Sur les operations dans les ensembles abstraits et leur application aux equations integrales. Fund. Math., 3, 133-181. https://doi.org/10.4064/fm-3-1-133-181

[8] Bayraktar, M., ANALİZ, ISBN: 975-442-035-1, 2000.

[9] Berinde, V. (2007). Iterative Approximation of Fixed Points (2nd ed.). Lecture Notes in Mathematics. Springer.

[10] Berinde, V. (2019). Approximating fixed points of enriched nonexpansive mappings by Krasnoselskii iteration in Hilbert spaces. Carpathian J. Math., 35, 293-304.

[11] Bridson, M. R., & Haefliger, A. (2013). Metric Spaces of Non-Positive Curvature. Springer.

[12] Browder, F. E., & Petryshyn, W. V. (1967). Construction of fixed points of nonlinear mappings in Hilbert space. J. Math. Anal. Appl., 20, 197-228.

[13] Clarkson, J. A. (1936). Uniformly convex spaces. Trans. Amer. Math. Soc., 40, 396-414.

[14] García-Falset, J., Llorens-Fuster, E., & Suzuki, T. (2011). Fixed point theory for a class of generalized nonexpansive mappings. J. Math. Anal. Appl., 375(1), 185-195. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2010.08.069

[15] Goebel, K., & Kirk, W. A. (1990). Topics in Metric Fixed Point Theory. Cambridge University Press.

[16] Granas, A., & Dugundji, J. (2002). Fixed Point Theory. Springer.

[17] Gürsoy, F., & Karakaya, V. (2014). A Picard-S hybrid type iteration method for solving a differential equation with retarded argument. arXiv:1403.2546. https://doi.org/10.48550/arXiv.1403.2546

[18] Hussain, N., Ullah, K., & Arshad, M. (2018). Fixed point approximation of Suzuki generalized nonexpansive mappings via new faster iteration process. J. Nonlinear Convex Anal., 19, 1383-1393.

[19] Ishikawa, S. (1974). Fixed points by a new iteration method. Proc. Amer. Math. Soc., 44, 147-150. https://doi.org/10.2307/2039245

[20] Jubair, M., Khan, F. A., Ali, J., & Saraç, Y. (2021). Estimating fixed points of non expansive mappings with an application. AIMS Math., 6(9), 9590–9601.

[21] Kalkan, Z., Şahin, A., Aloqaily, A., & Mlaiki, N. (2024). Some fixed point and stability results in b-metric-like spaces with an application to integral equations on time scales. AIMS Math., 9(5), 11335-11351.

[22] Karakaya, V., Bouzara, N. E. H., Dogan, K., & Atalan, Y. (2015). On different results for a new two-step iteration method under weak-contraction mapping in Banach spaces. arXiv:1507.00200v1.

[23] Khatoon, S., Uddin, I., & Başarır, M. (2021). A modified proximal point algorithm for a nearly asymptotically quasi-nonexpansive mapping with an application. Comput. Appl. Math., 40, 250.

[24] Kirk, W. A., & Sims, B. (Eds.). (2001). Handbook of Metric Fixed Point Theory. Kluwer Academic Publishers.

[25] Kızmaz, H. (1993). Fonksiyonel Analize Giriş. Karadeniz Teknik Üniversitesi Basımevi.

[26] Mann, W. R. (1953). Mean value methods in iteration. Proc. Amer. Math. Soc., 4, 506-510. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1953-0054846-3

[27] Maddox, I. J. (1970). Elements of Functional Analysis. Cambridge University Press.

[28] Musayev, B., & Alp, M. (2000). Fonksiyonel Analiz. Balcı Yayınları.

[29] Noor, M. A. (2000). New approximation schemes for general variational inequalities. J. Math. Anal. Appl., 251, 217-229. https://doi.org/10.1006/jmaa.2000.7042

[30] Opial, Z. (1967). Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings. Bull. Amer. Math. Soc., 73, 591-597.

[31] Pakkaranang, N. (2024). Double inertial extragradient algorithms for solving variational inequality problems with convergence analysis. Math. Methods Appl. Sci., 1–28.

[32] Panyanak, B., Khunpanuk, C., Pholasa, N., & Pakkaranang, N. (2023). A novel class of forward-backward explicit iterative algorithms using inertial techniques to solve variational inequality problems with quasi-monotone operators. AIMS Math., 8(4), 9692-9715.

[33] Petryshyn, W. V. (1966). Construction of fixed points of demicompact mappings in Hilbert space. J. Math. Anal. Appl., 14, 276-284.

[34] Picard, E. (1890). Memorie sur la theorie des equations aux derivees partielles et la method des approximation ssuccessives. J. Math. Pure Appl., 6, 145-210.

[35] Schu, J. (1991). Weak and strong convergence to fixed points of asymptotically nonexpansive mappings. Bull. Aust. Math. Soc., 43, 153-159. https://doi.org/10.1017/S0004972700028884

[36] Senter, H. F., & Dotson, W. G. (1974). Approximating fixed points of nonexpansive mappings. Proc. Amer. Math. Soc., 44, 375-380.

[37] Soykan, Y. (2017). Metrik Uzaylar ve Topolojisi. ISBN: 978-605-838-702-7.

[38] Suzuki, T. (2008). Fixed point theorems and convergence theorems for some generalized nonexpansive mappings. J. Math. Anal. Appl., 340, 1088-1095. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2007.09.023

[39] Şahin, A. (2019). Some new results of M-iteration process in hyperbolic spaces. Carpathian J. Math., 35, 221-232.

[40] Şahin, A., Öztürk, E., & Aggarwal, G. (2023). Some fixed-point results for the KF-iteration process in hyperbolic metric spaces. Symmetry, 15, 1360. https://doi.org/10.3390/sym15071360

[41] Takahashi, W. (2000). Nonlinear Functional Analysis. Yokohoma: Yokohoma Publishers.

[42] Thakur, B. S., Thakur, D., & Postolache, M. (2016). New iteration scheme for numerical reckoning fixed points of Suzuki's generalized nonexpansive mappings. Appl. Math. Comput., 275, 147-155. https://doi.org/10.1016/j.amc.2015.11.065

[43] Turan, N., Başarır, M., & Şahin, A. (2024). On the solutions of the second-order (p, q)-difference equation with an application to the fixed-point theory. AIMS Math., 9(5), 10679-10697.

[44] Uddin, I., Garodia, C., Abdeljawad, T., & Mlaiki, N. (2022). Convergence analysis of a novel iteration process with application to a fractional differential equation. Adv. Cont. Discr. Mod., 2022:16.

[45] Ullah, K., Ahmad, J., Arshad, M., & Ma, Z. (2022). Approximation of fixed points for enriched Suzuki nonexpansive operators with an application in Hilbert spaces. Axioms, 11, 14.

[46] Ullah, K., & Arshad, M. (2018). Numerical reckoning fixed points for Suzuki's generalized nonexpansive mappings via new iteration process. Filomat, 32, 187-196. https://doi.org/10.2298/FIL1801187U

[47] Ullah, K., & Arshad, M. (2017). New iteration process and numerical reckoning fixed points in Banach spaces. U.P.B. Sci. Bull., Series A, 79(4), 113-122.

ÖZGEÇMİŞ

Ad-Soyad : Azize ARSLANHAN

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans** **:** 2009, Xinjinag Normal University (Doğu Türkistan), Matematik, Uygulamalı Matematik
- **Yükseklisans** **:** Devam ediyor, Sakarya Üniversitesi, Matematik, Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi

TEZDEN TÜRETİLEN ESERLER:

- Arslanhan, A., Başarır, M., Şahin, A., Arslanhan, A., (2024). On The F-Iterative Method For The Class Of Maps Satisfying Enriched Condition (Cγ) In Banach Spaces. *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*, yayına kabul edildi.
- Arslanhan, A., Başarır, M., (2024, 11-13, May). On Maps Satisfying Enriched Condition (Cγ). *VII-International Antalya Scientific Research and Innovative Studies Congress*, Antalya, Türkiye, Tam metin bildiri, ISBN: 978-625-367-722 , full text book, page 283-293.