T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ KISMİ METRİK UZAYLARDA SABİT NOKTA TEORİSİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Leyla DÖNMEZ

Matematik Anabilim Dalı

Topoloji Bilim Dalı

KASIM 2023

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ KISMİ METRİK UZAYLARDA SABİT NOKTA TEORİSİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Leyla DÖNMEZ

Matematik Anabilim Dalı

Topoloji Bilim Dalı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Mahpeyker ÖZTÜRK

KASIM 2023

Leyla Dönmez tarafından hazırlanan “Genelleştirilmiş Kısmi Metrik Uzaylarda Sabit Nokta Teorisi” adlı tez çalışması 22.11.2023 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Topoloji Bilim Dalı’nda Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi

Jüri Başkanı : **Doç. Dr. Mahpeyker ÖZTÜRK** (Danışman) ....
Sakarya Üniversitesi

Jüri Üyesi : **Prof. Dr. Soley ERSOY** ....
Sakarya Üniversitesi

Jüri Üyesi : **Dr. Öğr. Üyesi Ekber GİRGİN** …………..............
Sakarya Uygulamalı Bilimler Üniversitesi

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Eğitim-Öğretim Yönetmeliğine ve Yükseköğretim Kurumları Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Yönergesine uygun olarak hazırlamış olduğum “GENELLEŞTİRİLMİŞ KISMİ METRİK UZAYLARDA SABİT NOKTA TEORİSİ” başlıklı tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın tüm aşamalarında yukarıda belirtilen yönetmelik ve yönergeye uygun davrandığımı, tezin içerdiği yenilik ve sonuçları başka bir yerden almadığımı, tezde kullandığım eserleri usulüne göre kaynak olarak gösterdiğimi, bu tezi başka bir bilim kuruluna akademik amaç ve unvan almak amacıyla vermediğimi ve 20.04.2016 tarihli Resmi Gazete’de yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince Sakarya Üniversitesi’nin abonesi olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Enstitü tarafından belirlenmiş ölçütlere uygun rapor alındığını, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun ortaya çıkması halinde doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi beyan ederim.

(22/11/2023)

(imza)

Leyla DÖNMEZ

Çocuklarıma…

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca bilgi ve tecrübesinden istifade ettiğim, desteklerini her zaman hissettiğim danışmanım Doç. Dr. Mahpeyker ÖZTÜRK'e en içten teşekkürlerimi sunarım. Matematiği sevdirip, matematik bölümü okumama vesile olan matematik öğretmenim Ahmet Fehmi ÇAM'a ve bütün öğretmenlerime teşekkürü borç bilirim.

Yüksek lisans eğitimim sırasında manevi desteğini her zaman hissettiğim, bu tezi bitirmemi benden daha çok isteyen arkadaşım Leyla ALEV'e katkılarından dolayı teşekkürü borç bilirim.

Bütün teknik konularda her zaman yardımına başvurduğum bilgisayar mühendisi kardeşim Hamza SAĞ'a teşekkür ederim.

Bu çalışmam boyunca desteğini hiçbir zaman esirgemeyen, benim yerime de çocuklarımızla ilgilenen eşim Murat DÖNMEZ'e teşekkür ve minnet borçluyum. Birini seviyorsan hayallerine kendi hayallerin gibi sahip çıkılması gerektiğini, sevginin görüntüde değil verilen değerde ve gönülde olduğunu bir kez daha gösterdiği ve hissettirdiği için binlerce kez teşekkür ederim. Çocuklarım Elif Sare, Ahmet Yasir, Halit İslam'a teşekkür eder ayrıca onlardan çaldığım her bir dakika için her birinden ayrı ayrı özür dilemeyi borç bilirim. Beni yetiştiren annem ve babama da emeklerinden dolayı teşekkür ederim.

Leyla DÖNMEZ

İÇİNDEKİLER

SİMGELER

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	: Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^{+}$	: Pozitif reel sayılar kümesi
(W,d)	: Metrik uzay
(W,p_b)	: Kısmi metrik uzay
(W,q_{p_b})	: Asimetrik kısmi $b-$metrik uzay
(W,q_{p_e})	: Asimetrik kısmi genişletilmiş $b-$metrik uzay
$T\mu$	: μ noktasının T dönüşümü altındaki görüntüsü
$\mathrm{Fix}(T)=F(T)$	: T dönüşümünün sabit noktalarının kümesi

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

GENELLEŞTİRİLMİŞ KISMİ METRİK UZAYLARDA SABİT NOKTA TEORİSİ

ÖZET

Sabit nokta teorisi bir T dönüşümü için $T\mu = \mu$ şeklindeki problemlerin çözümünü inceler. Bu teori sadece matematiğin alt dallarında değil mühendislik, biyoloji, fizik, tıp, optimizasyon ve ekonomi gibi birçok disiplinde uygulama alanına sahiptir.

Tam metrik uzaylarda sabit nokta çalışmalarının ilk adımı 1922'de S. Banach tarafından Banach daralma prensibi ile atılmıştır. Bu prensip, sabit noktanın varlığını ve tekliğini garantiler.

Birçok araştırmacı tarafından Banach daralma prensibinin genellemeleri kullanılarak sabit nokta teorisiyle ilgili çalışmalar yapılmıştır. Bu yöndeki çalışmalar, metrik uzayların genellemesi ya da dönüşümler üzarindeki daralma şartlarının genellemesiyle yapılmaktadır.

Bu çalışmada ilk olarak sabit nokta teorisinin tarihsel gelişimi, temel tanım ve teoremler, Banach sabit nokta teorisi ve metrik uzaylarda bazı genişlemelerinden sözedilmiştir. Sonrasında ise metrik uzayın genellemeleri olan kısmi metrik uzay, $b-$metrik uzay, asimetrik metrik uzay, genişletilmiş $b-$metrik uzay ve topolojik yapıları tanıtılmıştır.

S. G. Matthews bir noktanın kendine olan uzaklığının sıfırdan farklı olabileceği fikrine dayanarak metrik uzaydan farklı bir topolojik yapıya sahip olan kısmi (partial) metrik uzayı tanımladı. Yeni tanımlanan bu uzay matematiğin birçok alt dalı ve farklı disiplinlerde olmak üzere, özellikle bilgisayar biliminde geniş uygulama alanı bulmuştur. Birçok araştırmacı tarafından farklı daralma şartları altında bu uzayda sabit nokta teoremleri elde edilmiştir.

I. A. Bakhtin ve S. Czerwik metrik aksiyomlarından üçgen eşitsizliğini herhangi reel $s \geq 1$ katsayısıyla genişleterek $b-$metrik uzayı tanımladı. Bu uzayın metrik uzaydan daha genel olduğu açıktır. Akabinde ise bu katsayıyı bir fonksiyon olarak alan T. Kamran ve ark. genişletilmiş $b-$metrik uzayı tanımladı. Bu iki uzayda da sabit nokta teoremleri çeşitli daralma şartları altında ispatlanmıştır.

Metrik uzaylarda simetri şartının kaldırılmasıyla 1931'de asimetrik metrik uzaylar W. A. Wilson tarafından tanımlandı. Bu uzayda simetri özelliği olmadığından birçok topolojik kavram yeniden tanımlanmıştır. Biyoloji, bilgisayar bilimleri gibi birçok alanda uygulaması bulunmaktadır.

Daha sonra kısmi metik uzayın genellemesi olarak S. Shukla tarafından kısmi $b-$metrik uzay, A. Gupta ve P. Guatam tarafından ise asimetrik kısmi $b-$metrik uzay tanımlanıp, topolojik yapıları inşa edildi. Bu uzaylarda farklı daralma şartlarını sağlayan dönüşümlerin sabit nokta teoremleri ispatlandı.

Sabit nokta teoremlerinde birçok daralma şartı kullanılmakla birlikte bu çalışmada $E-$daralma, Geraghty daralma, (D,φ) daralma ve bunların genellemelerinden yararlanılmıştır.

Bu çalışmada kısmi $b-$metrik uzaylarda $\alpha_i^j-\left(D_\varphi\left(\beta_E\right)\right)$ daralma dönüşümü tanımlanmıştır. Farklı daralma dönüşümlerinin bir genellemesi olan bu daralma dönüşümü kullanılarak ortak sabit nokta teoremi ispatlanmıştır. Buna bağlı olarak bazı sonuçlar elde edilmiştir.

Asimetrik kısmi $b-$metrik uzaylarda $(\alpha,\beta)-D_\varphi$ daralma dönüşümü ele alınarak bir T dönüşümünün sabit noktasının varlığı ve tekliği gösterilip, buna bağlı olarak bazı sonuçlara ulaşılmıştır.

Son olarak asimetrik kısmi genişletilmiş $b-$metrik uzay tanımlanmış ve bazı topolojik özellikler inşa edilmiştir. Sonrasında ise $(\alpha,\beta)-\varphi_e$ daralma dönüşümü ile temel sabit nokta sonuçları elde edilmiştir.

FIXED POINT THEORY IN GENERALIZED PARTIAL METRIC SPACE

SUMMARY

The theorem that deals with the solution of the problem of a mapping in mathematics, given by $T:W \to W$, $T\mu = \mu$ and $W \neq \varnothing$ examines the existence of fixed points is called the fixed point theorem. This theory has found applications not only in various branches of mathematics but also in engineering, biology, physics, medicine, optimization, economics and many other disciplines. This field of application which has been on the rise based on the foundations of analysis and topology, continues to be one of the most intriguing subjects of both the past fifty years and the present day.

This first step in studying fixed points in complete metric space was taken in 1922 by S. Banach with the Banach contraction principle. The principle not only guarantees the existence of a fixed point but also expresses its uniqueness. Many researchers have conducted studies on fixed point theory using generalizations of the Banach contraction principle. These generalizations are either based on extensions of metric spaces or on generalizations of the contraction condition on mappings.

In this study, firstly, the fundamental definitions and theorems related to fixed points are presented, followed by the Banach fixed point theorem and some extensions in the metric spaces.

S. G. Matthews announced in analog of Banach's principle in a new space. He called this new construction as a partial metric space which the self-distance of any point of spaces may not be zero. This space has attracted the attention of many authors since it has extensive application area in many subsections of mathematics as well as in the field of computer domain and semantics. Various authors studied the problem of existence and uniqueness of a fixed point for mappings satisfying different contractive conditions.

I. A. Bakhtin and S. Czerwik introduced $b-$ metric function by generalizing the triangle inequality of metric function with the constant $s \geq 1$. A $b-$metric space is equivalent to the metric space for $s = 1$. This clearly shows that $b-$metric space is more general than a metric space. Afterwards, T. Kamran et al. taking the coefficient as a function, defined expanded $b-$metric space. Morever, many fixed point theorems and their results are obtained in these spaces.

Quasi metric space introduced by W.A.Wilson in 1931. Quasi metric space, like partial metric space, has been the subject of research not only in mathematics but also in many fields such as computer science, biology and material science. Since the symmetry requirement of the metric has been removed in this new distance function many notion that have been proven for metric spaces cannot be proved easily.

Partial $b-$metric spaces were generalized using $b-$metric spaces and partial metric spaces by S. Shukla in 2014. He proved the Banach contraction principle in such spaces. It has attracted the attention of researchers because the distance from the point

itself originating from the partial metric space may not be zero and it is a more general space than a $b-$metric space.

A. Gupta and P. Gautam defined quasi partial $b-$metric space notion by considering the quasi partial metric space defined by E. Karapınar together with the $b-$metric space. They also descibe the topological structure of space. Useful fixed-point theorems have been proved in this space as well.

Taking the Banach contraction principle one step further, the Geraghty contraction was defined in 1973. Like Banach contraction principle, Geraghty contraction has been found interesting by researchers and there are many studies on this contraction. $\alpha-$ admissible and $\alpha-\psi-$contraction mappings were introduced by B. Samet et al. and they obtained fixed-point theorems for these contractions. Also, some researchers have done studies on this subject. S. H. Cho et al. introduced $\alpha-$ Geraghty contraction, then they used this contraction to achieve new fixed-point results. H. Afshari et al. demonstrated a fixed-point theorem by defining generalized $\alpha-\psi$-Geraghty contractive type mappings. Additionally, A. Fulga and A. M. Proca introduced $E-$ contraction in 2017. Of course, various theorems have been proven using this contraction. In the continuation, A. Fulga and A. M. Proca proved fixed-point theorems for β_E-Geraghty contraction in the same year. In 2018, H. Alqahtani showed the existence and uniqueness of a common fixed point for Geraghty contraction of type $E_{S,T}$ on complete metric spaces. The following year, on $b-$metric space, $\alpha-\beta_E-$Geraghty contraction was introduced by H. Aydi et al. . H. Aydi proved the existence and uniqueness of fixed point for $\alpha-\beta_E-$Geraghty contraction mappings. Then in 2022, C. Lang and H. Guan introduced $\alpha_i^j-\beta_{E_{S,T}}-$Geraghty contraction mappings and expressed common fixed-point results for generalized $\alpha_i^j-\beta_{E_{S,T}}-$Geraghty contraction mappings on $b-$metric spaces.

The notion of $F-$contraction was presented by S.G. Wardowski in 2012 and subsequently, various types of result have been obtained using this concept. X. D. Liu et al. , utilizing this idea, introduced $(D,\varphi)-$contraction and established some fixed-point theorems in 2016. About four years later, M. Nazam et ai. examined common fixed-point results for two self-mapping via $(D,\varphi)-$contraction in partial metric space. In 2021, M. Nazam and Z. Hamid expressed a new definition of $(D,\varphi)-$ contraction on partial $b-$metric space by referring to X. D. Liu's definition of $(D,\varphi)-$contraction. They achieved obtaining common fixed-point of $(D,\varphi)-$ contraction on partial $b-$metric space.

In this study, $\alpha_i^j-\left(D_\varphi\left(\beta_E\right)\right)$ contraction mapping is defined in partial $b-$metric space by using $\alpha_i^j-\beta_{E_{S,T}}-$Geraghty contraction and $(D,\varphi)-$contraction. Using this contraction mapping, a common fixed-point theorem has been proved, and some results have been obtained, accordingly. Illustrative examples will be provided to indicate the accuracy and validity of the main outcomes. In the course of the study, the set of fixed points of T and the set of common fixed points of T and S will be specified with the notations $\mathrm{F}(T)$ and $\mathrm{F}(T\cap S)$.

$(\alpha,\beta)-D_{\varphi}-$contraction mappings have been defined in quasi partial $b-$metric space. Since the definitions of convergence, Cauchy sequence and completeness are different in this space, it has been more difficult to prove the fixed-point theorem. The existence and uniqueness of fixed points for T have been demonstrated, leading to some results. Illustrative example will be provided to indicate the accuracy and validity of the findings.

$(\alpha,\beta)-\varphi_{e}-$ contraction mapping is defined in quasi partial extended $b-$metric space and a fixed point theorem has been proved. In this space we have defined, as in the quasi partial extended $b-$metric space, the definitions of convergence, Cauchy sequence and completeness are different, so the proof method also changes. Then, we gave an example that satisfies the conditions of the theorem.

1. TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER

1.1. Giriş

Matematikte analizin önemli uygulama alanlarından biri, uygun şartlardaki bir T dönüşümü için $T\mu = \mu$ şeklindeki bir problemin çözümüne dayanır. Bu tür denklemlerin çözümüne dönüşümün sabit noktası denir. Dönüşümlerin sabit noktasını inceleyen sabit nokta teorisi diferansiyel ve integral denklemler [1-2], yaklaşım ve oyun teorisi [3] gibi sadece matematiğin alt dallarında değil; mühendislik, biyoloji, fizik, kimya, tıp, optimizasyon, ekonomi gibi birçok disiplinde de uygulama alanına sahiptir [4-10]. Analiz ve topoloji temellerine dayanarak yükselen bu uygulama alanı son elli yılın olduğu gibi günümüzün de en ilgi çekici konulardan biri olmaya devam etmektedir.

Sabit nokta teorisiyle ilgili çalışmalar farklı yönlerde gelişme göstermektedir. Bunlardan birincisi normlu lineer uzayların kompakt ve konveks alt kümeleri üzerinde tanımlı sürekli dönüşümler için sabit nokta teorisi, diğeri ise tam metrik uzaylar üzerinde büzülme (daralma) ve genelleştirilmiş büzülme dönüşümleri için sabit nokta teorisidir.

Normlu lineer uzaylarda sabit nokta çalışmalarının temeli, L. E. Brouwer [11] tarafından 1912 yılında ‘‘ A , $\mathbb{R}^n$ ’de kapalı bir yuvar olmak üzere $T : A \to A$ sürekli bir dönüşüm ise, T dönüşümünün A kümesinde en az bir sabit noktası vardır.’’ teoremiyle atılmıştır. Daha sonrasında 1930’da bu teorem J. Schauder [12] tarafından sonsuz boyutlu uzaylar için genişletilmiştir.

Tam metrik uzaylarda ise 1922’de S. Banach tarafından Banach Daralma (Büzülme) İlkesi (Banach Contraction Principle) ile ilk adım atılmıştır [13]. Banach sabit nokta teoremi L. E. Brouwer ve J. Schauder’in sabit nokta teoremlerinden farklı olarak sadece sabit noktanın varlığını garanti etmekle kalmaz aynı zamanda tekliğini de ifade etmektedir.

Birçok araştırmacı tarafından Banach sabit nokta teoreminin genellemeleri kullanılarak sabit nokta teorisiyle ilgili çalışmalar yapılmıştır. Bu metrik uzayların genelleştirilmesi ya da dönüşümler üzerindeki daralma şartlarının genelleştirilmesiyle yapılır. Bu genelleştirmelerin bazıları $b-$metrik, kısmi metrik, asimetrik metrik, $G-$metrik, $S-$metrik ve modüler metrik uzaylar gibi metrik uzayın genellemeleri ile bu uzaylardaki Banach daralma dönüşümünün bazı genellemeleridir. Araştırmacılar, metrik uzayın bunlar gibi farklı genellemelerinde ve genelleştirilmiş daralma şartlarıyla çalışmalar yapmaya devam etmektedir [14-35].

Bu çalışmada kısmi $b-$metrik uzayda $\alpha_i^j-\left(D_\varphi\left(\beta_E\right)\right)$ daralma dönüşümü, asimetrik kısmi $b-$metrik uzayda $(\alpha,\beta)-D_\varphi$ daralma dönüşümü ve asimetrik kısmi genişletilmiş $b-$metrik uzayda $(\alpha,\beta)-\varphi_e$ daralma dönüşümü tanımlanıp, sabit nokta teoremleri ispatlanmıştır. Ayrıca, asimetrik kısmi $b-$metrik uzayın bir genellemesi olarak asimetrik kısmi genişletilmiş $b-$metrik uzay inşa edilerek topolojik özellikleri incelenmiştir.

1.2. Temel Tanımlar ve Teoremler

Bu bölümde çalışma boyunca kullanılacak olan temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Tanım 1.2.1. [36] W boş kümeden farklı bir küme olsun. Her $\mu,\eta,\sigma\in W$ için

$$\begin{aligned} d: W\times W &\to \mathbb{R} \\ (\mu,\eta) &\to d(\mu,\eta) \end{aligned}$$

fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa d fonksiyonuna W üzerinde metrik (uzaklık fonksiyonu), (W,d) ikilisine de metrik uzay denir.

(d_1) $d(\mu,\eta)\geq 0$ (pozitif tanımlılık),

(d_2) $d(\mu,\eta)=0 \Leftrightarrow \mu=\eta$ (özdeşlik),

(d_3) $d(\mu,\eta)=d(\eta,\mu)$ (simetri),

(d_4) $d(\mu,\eta)\leq d(\mu,\sigma)+d(\sigma,\eta)$ (üçgen eşitsizliği).

Kısacası metrik uzay, üzerinde bir uzaklık fonksiyonu tanımlanmış bir küme olarak da ifade edilebilir. Bu kavramın temeli 1906'da M. R. Fréchet [37] tarafından atılmış olup, metrik uzay ifadesini ilk kez F. Hausdorff [38] kullanmıştır.

Örnek 1.2.2. [36] $W=\mathbb{R}$ boş kümeden farklı bir küme ve $d:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{+}$ bir fonksiyon olsun. Her $\mu,\eta\in\mathbb{R}$ için

$$d(\mu,\eta)=|\mu-\eta|$$

şeklinde tanımlanan d fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde bir metriktir (mutlak değer metriği) ve $(\mathbb{R},d)$ ikilisi de metrik uzaydır (alışılmış metrik uzay).

Örnek 1.2.3. [36] $W=\mathbb{N}$ boş kümeden farklı bir küme ve $d:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{R}^{+}$ bir fonksiyon olsun. Her $\mu,\eta\in\mathbb{N}$ için

$$d(\mu,\eta)=\left|\frac{1}{\mu}-\frac{1}{\eta}\right|$$

şeklinde tanımlanan d fonksiyonuna $\mathbb{N}$ üzerinde bir metriktir ve $(\mathbb{N},d)$ ikilisi de metrik uzaydır.

Örnek 1.2.4. [36] W boş kümeden farklı bir küme olsun. Her $\mu,\eta\in W$ için

$$d(\mu,\eta)=\begin{cases}0, & \mu=\eta \quad \text{ise}\\ 1, & \mu\neq\eta \quad \text{ise}\end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $d:W\times W\to\mathbb{R}^{+}$ fonksiyonu W üzerinde bir ayrık (discrete) metriktir. (W,d) ikilisi ise ayrık metrik uzaydır.

Örnek 1.2.5. [36] Sınırlı dizilerin uzayı $l_\infty=\left\{\mu=(\mu_n):\sup_n|\mu_n|<\infty\right\}$ olmak üzere, l_∞ kümesi üzerinde tanımlanan

$$d_\infty(\mu,\eta)=\sup_n|\mu_n-\eta_n|$$

$d_\infty:l_\infty\times l_\infty\to\mathbb{R}^{+}$ fonksiyonu bir metrik olup, (l_∞,d_∞) bir metrik uzaydır.

Örnek 1.2.6. [36] $C[0,1]=\left\{\mu \,|\, \mu:[0,1]\to\mathbb{R},\ \mu \text{ sürekli}\right\}$ uzayı üzerinde d fonksiyonu

$$d(\mu,\eta)=\int_0^1|\mu(t)-\eta(t)|dt$$

$t\in[0,1]$ şeklinde tanımlansın. d fonksiyonu bir metriktir, $(C[0,1],d)$ ikilisi de bir metrik uzaydır.

Örnek 1.2.7. [36] $C[0,1]=\{\mu | \mu:[0,1]\to\mathbb{R}, \mu \text{ sürekli}\}$ uzayı üzerinde d fonksiyonu

$$d(\mu,\eta)=\max_{t\in[0,1]}|\mu(t)-\eta(t)|$$

$t\in[0,1]$ şeklinde tanımlansın. d fonksiyonu bir metriktir, $(C[0,1],d)$ ikilisi de bir metrik uzaydır.

Tanım 1.2.8. [36] (W,d) bir metrik uzay ve $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset W$ bu uzayda bir dizi olsun. Her $\varepsilon>0$ sayısına karşılık her $n>n_0$ için $d(\mu_n,\mu)<\varepsilon$ olan en az bir $n_0\in\mathbb{N}$ varsa $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $\mu\in W$ noktasına yakınsaktır denir ve $\lim_{n\to\infty}\mu_n=\mu$, $\lim_{n\to\infty}d(\mu_n,\mu)=0$ veya $\mu_n\to\mu(n\to\infty)$ ifadelerinden biriyle gösterilir.

Örnek 1.2.9. [36] $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlanan mutlak değer metriğine göre $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}=\left\{\frac{1}{n}\right\}\subset\mathbb{R}$ dizisi, $\left\{\frac{1}{n}\right\}\to 0\ (n\to\infty)$ olduğundan $0\in\mathbb{R}$ noktasına yakınsar.

Uyarı 1.2.10. [36] Yakınsaklık dizinin bulunduğu uzaya ve uzayın üzerinde tanımlanan metriğe bağlıdır. Örneğin, her $n\in\mathbb{N}$ için $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}=\left\{\frac{1}{n}\right\}$ dizisi ve $W=(0,1]\subset\mathbb{R}$ uzayı üzerinde tanımlanan mutlak değer metriği verilsin. $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}=\left\{\frac{1}{n}\right\}\to 0, (n\to\infty)$ ancak $0\notin(0,1]=W$ olduğundan, bu uzayda $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi yakınsak değildir.

$\mu_n=e^{-n}, n\in\mathbb{N}$ dizisi için $C[0,1]$ kümesinde $d(\mu,\eta)=\int_0^1|\mu(t)-\eta(t)|dt$ ve $d(\mu,\eta)=\max_{t\in[0,1]}|\mu(t)-\eta(t)|$ metriklerine göre yakınsaklığına bakılırsa

$$d(\mu_n,0)=\int_0^1\left|e^{-nt}-0\right|\cdot dt=\frac{1}{n}\left(1-e^{-n}\right)\to 0, (n\to\infty),$$

$$d(\mu_n,0)=\max_{t\in[0,1]}\left|e^{-nt}\right|\to 1, n\to\infty$$

dır. Burada da görüldüğü gibi yakınsaklık tanımlanan metriğe göre değişir.

Önerme 1.2.11. [36] (W,d) herhangi bir metrik uzay olmak üzere, $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi W üzerinde yakınsak bir dizi ise $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin limiti tektir.

Önerme 1.2.12. [36] (W,d) herhangi bir d metrik uzay olmak üzere, $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi W üzerinde yakınsak bir dizi ise $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin her alt dizisi de aynı noktaya yakınsaktır.

Önerme 1.2.13. [36] (W,d) bir metrik uzay olsun. Eğer $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{\eta_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset W$ dizileri için

$$\lim_{n\to\infty}\mu_n = \mu \text{ ve } \lim_{n\to\infty}\eta_n = \eta \text{ ise } \lim_{n\to\infty} d(\mu_n,\eta_n) = d(\mu,\eta)$$

’dır.

Tanım 1.2.14. [36] (W,d) herhangi bir metrik uzay olmak üzere ve $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq W$ bir dizi olmak üzere $\forall\varepsilon > 0$ karşılık her $m,n \geq n_0$ için $d(\mu_n,\mu_m) < \varepsilon$ olacak biçimde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa, $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisine W uzayında Cauchy dizisi adı verilir.

Önerme 1.2.15. [36] Metrik uzayda yakınsak her dizi Cauchy dizisidir.

Uyarı 1.2.16. Metrik uzayda yakınsak her dizi Cauchy dizisi olmasına rağmen bunun tersi her zaman sağlanmaz. Örneğin, $\mathbb{N}$ kümesinde $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{n\}$ dizisi ve $d(\mu,\eta) = \left|\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\eta}\right|$ metriği verilsin. $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{n\}$ dizisi bu uzayda verilen metriğe göre Cauchy dizisidir. Fakat $\lim_{n\to\infty} d(\mu_n,\mu) = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{\mu}\right| = 0$ olup, $\frac{1}{\mu} = 0$ olacak şekilde $\mu \in \mathbb{N}$ sayısı bulunmadığından, $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{n\}$ dizisi bu uzayda yakınsak değildir.

Önerme 1.2.17. [36] Metrik uzayda her Cauchy dizisi sınırlıdır.

Tanım 1.2.18. [36] (W,d) bir metrik uzay olmak üzere, W kümesindeki her Cauchy dizisi W uzayındaki bir noktaya yakınsak ise (W,d) uzayına tam metrik uzay adı verilir.

Örnek 1.2.19. [36] $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi üzerinde her $\mu,\eta\in\mathbb{N}$ için mutlak değer metriği ve $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}=\left\{\frac{1}{n}\right\}$ dizisi verilsin. Bu dizi bir Cauchy dizisi olup, doğal sayılar kümesi üzerinde sıfır noktasına yakınsamaktadır. Bu uzayda alınan her Cauchy dizisi, bu uzayda bir noktaya yakınsamaktadır. Bu durumda $(\mathbb{N},d)$ metrik uzayı tamdır.

Örnek 1.2.20. [36] $C[a,b]=\{\mu \mid \mu:[a,b]\to\mathbb{R},\ \mu \text{ sürekli}\}$ fonksiyon uzayı $d(\mu,\eta)=\max\limits_{t\in[a,b]}|\mu(t)-\eta(t)|$ metriğine göre tamdır.

Örnek 1.2.21. [36] $\mathbb{R}$ alışılmış metriğe göre tam metrik uzay olmasına rağmen $\mathbb{Q}$ bu metriğe göre tam değildir.

Uyarı 1.2.22. Bir uzayın tam olması metrik bir özelliktir. Metrik değiştikçe uzayın tam olma durumu değişir.

Tanım 1.2.23. [39] (W,d_1) ve (Q,d_2) iki metrik uzay olsun. $T:W\to Q$ herhangi bir fonksiyon ve $\mu_0\in W$ olmak üzere $\forall\varepsilon>0$ için $d_1(\mu,\mu_0)<\delta$ iken $d_2(T\mu,T\mu_0)<\varepsilon$ koşulunu sağlayan $\delta>0$ sayısı varsa, T fonksiyonu $\mu_0\in W$ noktasında süreklidir denir. T fonksiyonu W kümesindeki her noktada sürekli ise T fonksiyonuna W üzerinde süreklidir.

Örnek 1.2.24. [40] $\mathbb{R}$ üzerinde alışılmış metriğe göre $T:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu her $\mu\in\mathbb{R}$ için $T(\mu)=\mu^2$ şeklinde tanımlansın. T fonksiyonu süreklidir.

Örnek 1.2.25. [40] $\mathbb{R}$ üzerinde alışılmış metriğe göre $T:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu her $\mu\in\mathbb{R}$ için

$$T(\mu)=\begin{cases}0, & \mu \text{ rasyonel ise}\\ 1, & \mu \text{ irrasyonel ise}\end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. T Dirichlet fonksiyonu sürekli değildir.

Uyarı 1.2.26. [40] Metrik fonksiyonu süreklidir.

Tanım 1.2.27. [40] (W,d_1) ve (Q,d_2) iki metrik uzay olsun. $T:W\to Q$ bir fonksiyon ve $\mu_0\in W$ olmak üzere $\forall\varepsilon>0$ için $d_1(\mu,\mu_0)<\delta$ iken $d_2(T\mu,T\mu_0)<\varepsilon$

koşulunu sağlayan $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa T fonksiyonu $\mu_0 \in W$ noktasında düzgün süreklidir denir.

Örnek 1.2.28. [40] $\mathbb{R}$ üzerinde alışılmış metrik, (W,d) metrik uzay ve $a \in W$ olsun. Her $\mu \in W$ noktası için $f(\mu) = d(\mu, a)$ şeklinde tanımlanan $f : W \to \mathbb{R}$ fonksiyonu hem sürekli hem de düzgün süreklidir.

Uyarı 1.2.29. [40] Düzgün sürekli her fonksiyon süreklidir, fakat tersi her zaman doğru değildir. Örneğin, $\mathbb{R}$ üzerinde alışılmış metriğe göre, $T(\mu) = \mu^3$ şeklinde tanımlanan $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu süreklidir, fakat düzgün sürekli değildir.

Tanım 1.2.30. [39] (W,d_1) ve (Q,d_2) iki metrik uzay, $T : (W,d_1) \to (Q,d_2)$ bir fonksiyon ve $\mu \in W$ verilsin. μ noktasına yakınsayan her $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi için $\{T(\mu_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $T(\mu)$ noktasına yakınsıyorsa T fonksiyonuna μ noktasında dizisel süreklidir denir.

Önerme 1.2.31. [40] (W,d_1) ve (Q,d_2) iki metrik uzay, $T : (W,d_1) \to (Q,d_2)$ bir fonksiyon ve $\mu \in W$ olsun. T fonksiyonu μ_0 noktasında sürekli olması için

$$\mu_n \to \mu_0 \Rightarrow T(\mu_n) \to T(\mu_0) \quad (n \to \infty)$$

koşulu gerek ve yeterlidir.

Uyarı 1.2.32. Bir T sürekli fonksiyonu için

$$T(\mu_n) \to T(\mu_0) \Rightarrow \mu_n \to \mu_0 \quad (n \to \infty)$$

olması her zaman sağlanmaz. Örneğin, $\mathbb{R}$ mutlak değer metriğine göre sürekli olan $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ her $\mu \in \mathbb{R}$ için $T(\mu) = \mu^2$ şeklinde tanımlanan T fonksiyonu ve $\{\mu_n\} = (-1)^{2n+1}$ dizisi için

$$T(\mu_n) = 1 \to T(1) \quad (n \to \infty)$$

dır, fakat $\{\mu_n\} = (-1)^{2n+1}$ dizisi 1 noktasına yakınsamaz.

Önerme 1.2.33. [40] Herhangi bir metrik uzayda süreklilik ile dizisel süreklilik denktir.

Tanım 1.2.34. [40] (W,d) metrik uzayı, bir $\eta \in W$ noktası ve $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin.

$$B(\mu,\varepsilon)=\{\eta \in W : d(\mu,\eta)<\varepsilon\}$$

kümesine μ merkezli ε yarıçaplı bir açık yuvar denir.

Tanım 1.2.35. [40] (W,d) metrik uzayı bir $\eta \in W$ noktası ve $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin.

$$B[\mu,\varepsilon]=\{\eta \in W : d(\mu,\eta)\leq\varepsilon\}$$

kümesine μ merkezli $\varepsilon > 0$ yarıçaplı bir kapalı yuvar denir.

Tanım 1.2.36. [40] (W,d) metrik uzayı, bir $\eta \in W$ noktası ve $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin.

$$S(\mu,\varepsilon)=\{\eta \in W : d(\mu,\eta)=\varepsilon\}$$

kümesine μ merkezli $\varepsilon > 0$ yarıçaplı bir küre denir.

Örnek 1.2.37. [40] $\mathbb{R}$ kümesi üzerinde d mutlak değer metriğine göre her açık aralık bir açık yuvar, her kapalı aralık bir kapalı yuvar ve $(\mathbb{R},d)$ uzayının iki elemanlı bir alt kümesi de bir küredir.

Tanım 1.2.38. [40] (W,d) herhangi bir metrik uzay ve bu uzayın herhangi bir $G \subset W$ alt kümesi verilmiş olsun. Her $\mu \in G$ için $B(\mu,\varepsilon) \subseteq G$ olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ sayısı varsa G kümesine (W,d) metrik uzayında açık küme denir.

Uyarı 1.2.39. [40] Metrik uzayda her açık yuvar açık kümedir.

Tanım 1.2.40. [40] W boş olmayan bir küme ve τ ailesi de $\mathrm{P}(W)$ kuvvet kümesinin herhangi bir alt ailesi olsun. Eğer τ ailesi aşağıdaki özellikleri sağlarsa, τ ailesinin her elaman W kümesinde bir açık küme, aşağıdaki özelliklere de açıklar aksiyomu ve açıklar aksiyomunu sağlayan τ ailesine, topolojik yapı (topoloji) denir. (W,τ) ikilisine de topolojik uzay adı verilir.

i) W ve $\varnothing$ kümeleri, τ ailesine aittir.

ii) τ ailesine ait sonlu ya da sonsuz çokluktaki elemanların birleşimi τ ailesine aittir.

iii) τ ailesine ait sonlu çokluktaki elemanların kesişimi τ ailesine aittir.

Örnek 1.2.41. [40] Bir W kümesi üzerinde

$$\tau = \{A \subset W : A = \varnothing \text{ ya da } W - A \text{ sonlu}\}$$

ailesi bir topolojidir. Bu topolojiye W kümesi üzerinde sonlu tümleyen topolojisi denir.

Tanım 1.2.42. [40] (W,τ) topolojik uzayının herhangi farklı iki noktası verildiğinde, bu noktalardan en az birisinin diğerini içermeyen bir komşuluğu varsa yani;

$$[T_0] \quad \mu,\eta \in W\ (\mu \neq \eta) \text{ için } \exists U \in \vartheta(\mu) \ni \eta \notin U \text{ ya da } \exists V \in \vartheta(\eta) \ni \mu \notin V$$

ise (W,τ) uzayına T_0-uzayı ya da Kolmogorov uzayı denir.

Örnek 1.2.43. [40] Bir $W = \{0,1\}$ kümesi üzerinde $\tau = \{W,\varnothing,\{0\}\}$ topolojisi verilsin. (W,τ) topolojik uzayına, Sierpinski uzayı denir. Her Sierpinski uzayı, bir T_0-uzayıdır. Gerçekten $\{0\} \in \vartheta(0)$ komşuluğu vardır öyle ki $1 \notin \{0\}$ olur.

Tanım 1.2.44. [40] (W,τ) topolojik uzayının herhangi farklı iki noktası verildiğinde, bu noktalardan her birisinin diğerini içermeyen bir komşuluğu varsa, yani;

$$[T_1] \quad \mu,\eta \in W\ (\mu \neq \eta) \text{ için, } \exists U \in \vartheta(\mu) \ni \eta \notin U \text{ ve } \exists V \in \vartheta(\eta) \ni \mu \notin V$$

ise (W,τ) uzayına T_1-uzayı ya da Fréchet uzayı denir.

Örnek 1.2.45. [40] $W = \{a,b,c\}$ kümesi üzerinde

$$\tau = \{W,\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\}\}$$

topolojisi verilsin. (W,τ) uzayında $\{a\} \in \tau$ kümesi için $b \notin \{a\}$ ve $\{b\} \in \tau$ kümesi için $a \notin \{b\}$ olduğundan, T_1-uzayıdır.

Tanım 1.2.46. [40] (W,τ) topolojik uzayının herhangi farklı iki noktası verildiğinde, bu noktaların birbirinden ayrık birer komşuluğu varsa, yani;

$$[T_2] \quad \mu,\eta \in W\ (\mu \neq \eta) \text{ için, } \exists U \in \vartheta(\mu) \text{ ve } \exists V \in \vartheta(\eta) \ni U \cap V = \varnothing$$

ise (W,τ) uzayına T_2-uzayı ya da Hausdorff uzayı denir.

Örnek 1.2.47. [40] Her (W,τ_d) metrik uzayı T_2-uzayıdır.

Uyarı 1.2.48. [40] Her T_2-uzayı bir T_1-uzayı, her T_1-uzayı ise bir T_0-uzayıdır. Yani,

$$T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$$

dır. Fakat bunun tersi genellikle doğru değildir. Örneğin, Sierpinski uzayı bir T_0- uzayıdır fakat T_1-uzayı değildir.

1.3. Sabit Nokta Kavramı ve Banach Daralma Dönüşümü Prensibi

Tanım 1.3.1. [41] W boş kümeden farklı bir küme ve $T:W\to W$ herhangi bir dönüşüm olsun.

$$T\mu=\mu$$

eşitliğini sağlayan bir $\mu\in W$ noktasına T dönüşümünün sabit noktası denir. T dönüşümünün tüm sabit noktalarının kümesi

$$\mathrm{Fix}(T)=F(T)=\{\mu\in W:T\mu=\mu\}$$

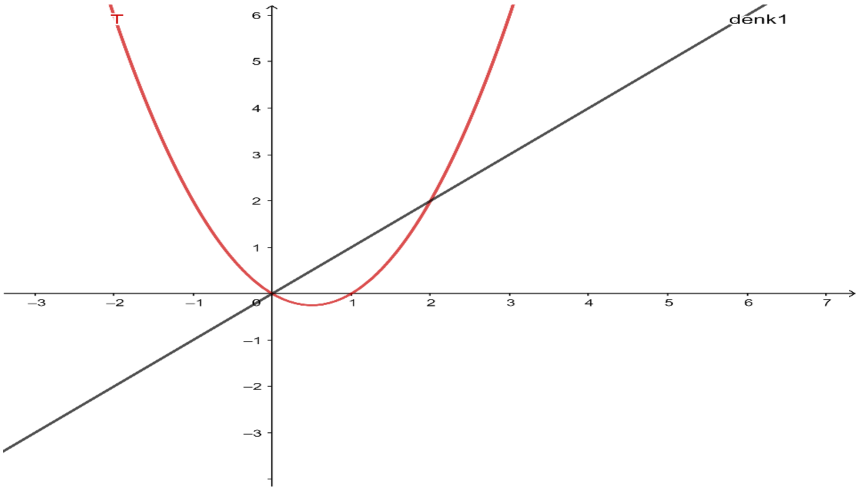
ile gösterilir.

Uyarı 1.3.2. [41] Bir T dönüşümünün hiçbir sabit noktası olmayacağı gibi, tek sabit noktası, birden fazla sabit noktası ya da sonsuz tane sabit noktası da olabilir.

Örnek 1.3.3.

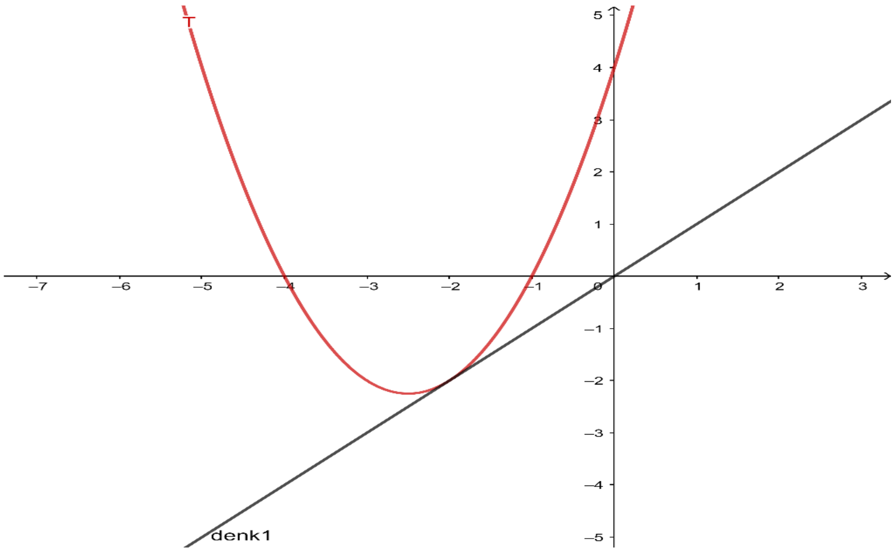
i) $F(T)=\{(\mu,0):\mu\in\mathbb{R}\}$ kümesinin her elemanı, $T(\mu,\eta)=(\mu,-\eta)$ ile tanımlı $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ yansıma fonksiyonunun sabit noktalarının kümesi olup, sonsuz sayıda sabit noktası olduğu açıktır.

ii) $T:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu her $\mu\in\mathbb{R}$ sayısı için $T(\mu)=\mu^2-\mu$ olarak tanımlansın. T fonksiyonunun iki tane sabit noktası vardır. $F(T)=\{0,2\}$ dır.



Şekil 1.1. $T(\mu)=\mu^2-\mu$ fonskiyonunun sabit noktalarının grafiği

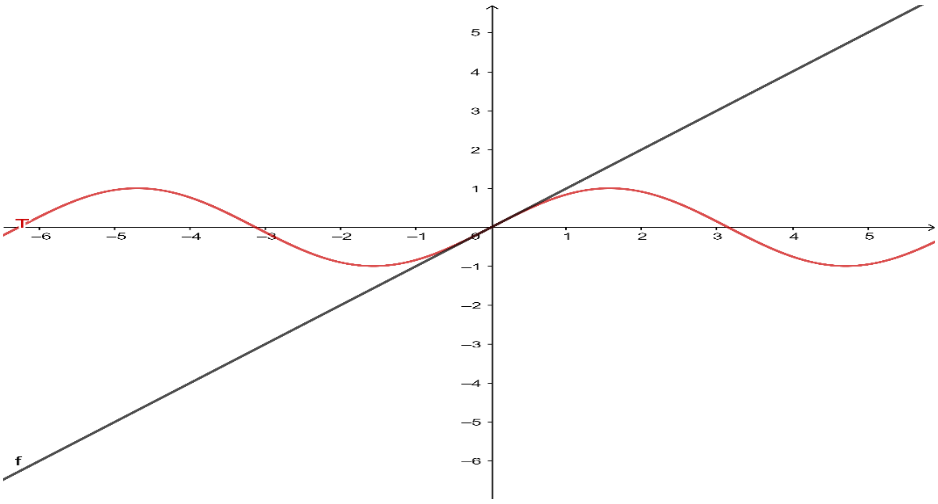
iii) $T:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu her $\mu\in\mathbb{R}$ için $T(\mu)=\mu^2+5\mu+4$ olarak verilsin. T dönüşümünün tek sabit noktası vardır. $F(T)=\{-2\}$ dir.



Şekil 1.2. $T(\mu)=\mu^2+5\mu+4$ fonksiyonunun sabit noktalarının grafiği

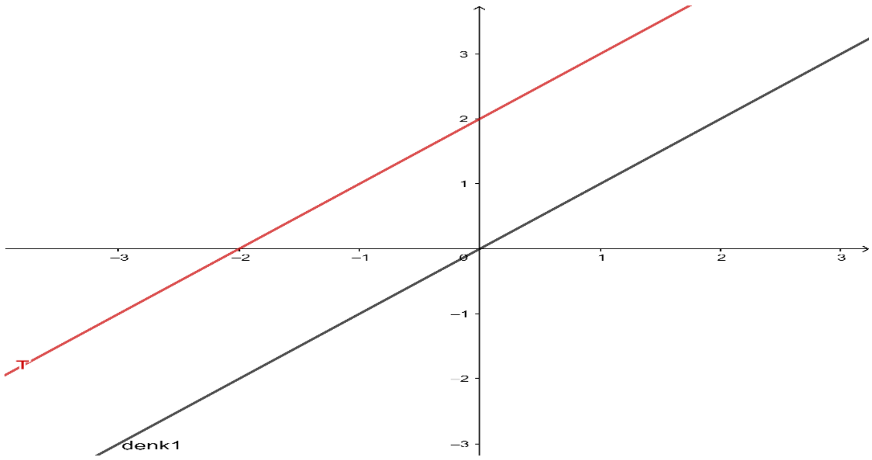
iv) $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, her $\mu,\eta\in\mathbb{R}^2$ için $T(\mu,\eta)=\left(2\mu+\dfrac{1}{2},3\eta+\dfrac{1}{3}\right)$ fonksiyonunun tek sabit noktası vardır. $F(T)=\left\{\left(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{6}\right)\right\}$ dir.

v) Her $\mu\in\mathbb{R}$ için $T:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $T(\mu)=\sin\mu$ olarak tanımlanan fonksiyonun tek bir sabit noktası vardır. $F(T)=\{0\}$ dir.



Şekil 1.3. $T(\mu)=\sin\mu$ fonksiyonunun sabit noktalarının grafiği

vi) $T:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, her $\mu\in\mathbb{R}$ için $T(\mu)=\mu+2$ fonksiyonunun herhangi bir sabit noktası yoktur. $F(T)=\varnothing$ dir.



Şekil 1.4. $T(\mu)=\mu+2$ fonksiyonunun sabit noktalarının grafiği

Tanım 1.3.4. [42] Herhangi W kümesi ve $T:W\to W$ dönüşümü verilsin. Herhangi bir $\mu_0\in W$ için

$$\mu_1=T\mu_0,\quad \mu_2=T\mu_1,\quad \mu_3=T\mu_2,\cdots,\mu_n=T\mu_{n-1}=T\left(T^{n-1}\mu_0\right)$$

şeklindeki $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset W$ dizisine μ_0 başlangıç noktasıyla en iyi yaklaşım dizisi, Picard iterasyon dizisi ya da T altındaki μ_0 noktasının $n.$ iterasyon dizisi denir.

Uyarı 1.3.5 [42] Herhangi W kümesi ve $T:W\to W$ dönüşümü için aşağıdaki ifadeler doğrudur.

i) $F(T)\subset F(T^n)$'dır.

ii) Keyfi bir $n\in\mathbb{N}$ için, $F(T^n)=\{\mu\}$ ise, $F(T)=\{\mu\}$'dır.

Ancak $F(T)=\{\mu\}$ olması, $F(T^n)=\{\mu\}$ olmasını gerektirmez. Yani bu ifadenin tersi her zaman doğru olmayabilir. Örneğin, $T:\{1,2,3\}\to\{1,2,3\}$ dönüşümü $T1=3$, $T2=2$ ve $T3=1$ olarak tanımlansın. $F(T)=\{2\}$ olduğu halde $F(T^2)=\{1,2,3\}\neq\{2\}$ dır.

Tanım 1.3.6. [42] (W,d) metrik uzay ve $T:W\to W$ bir dönüşüm olsun. Eğer $\forall\mu,\eta\in W$ için

$$d(T\mu,T\eta)\le hd(\mu,\eta) \tag{1.1}$$

eşitsizliğini sağlayan $h>0$ sabit sayısı varsa, T dönüşümüne W üzerinde Lipschitzian dönüşümü denir. (1.1) şartına Lipschitzian şartı ve bu şartı sağlayan en küçük $h>0$ sayısına Lipschitzian katsayısı denir.

Örnek 1.3.7. $W=\mathbb{R}$ kümesi üzerinde tanımlı mutlak değer metriği ve $T:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\forall\mu\in\mathbb{R}$ için $T\mu=\frac{5}{2}\mu$ dönüşümü verilsin. Bu durumda,

$$d(T\mu,T\eta)=\left|\frac{5}{2}\mu-\frac{5}{2}\eta\right|=\frac{5}{2}|\mu-\eta|=\frac{5}{2}d(\mu,\eta)\le hd(\mu,\eta)$$

olduğundan $h\ge\frac{5}{2}$ sayısı için T dönüşümü Lipschitzian şartını sağlar.

Önerme 1.3.8. T dönüşümü, Lipschitzian dönüşümü ise düzgün süreklidir.

$\forall\varepsilon>0$ için $d(\mu,\eta)<\delta$ iken

$$d(T\mu,T\eta)\le hd(\mu,\eta)<hd(\mu,\eta)<h\delta=h\frac{\varepsilon}{h}=\varepsilon$$

olacak şekilde $\delta = \frac{\varepsilon}{h}$ sayısı bulunduğundan, T Lipschitzian dönüşümü düzgün süreklidir.

Tanım 1.3.9. [42] (W,d) metrik uzay ve $T:W \to W$ bir dönüşümü Lipschitzian dönüşüm olsun. Eğer (1.1) eşitsizliği $h \in [0,1)$için sağlanıyorsa T dönüşümüne daralma veya Banach daralma dönüşümü denir.

Uyarı 1.3.10. T Lipschitzian dönüşümü düzgün sürekli olduğundan, daralma dönüşümleri de düzgün süreklidir. Yani, T dönüşümü sürekli değilse daralma dönüşümü de olamaz. T dönüşümü daralma dönüşümü olmasa bile, herhangi bir n için T^n daralma dönüşümü olabilir. Örneğin, $T:[0,2] \to [0,2]$ dönüşümü

$$T(\mu) = \begin{cases} 0, & \mu \in [0,1] \text{ ise} \\ 1, & \mu \in (1,2] \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlansın T dönüşümü $\mu = 1$ süreksiz olduğundan daralma dönüşümü değildir. Ancak $T^2:[0,1] \to \{0\}$, $T^2\mu = 0$ olduğundan, T^2 bir daralma dönüşümüdür. Ayrıca $\mu = 0$ T^2 dönüşümünün tek sabit noktasıdır.

Örnek 1.3.11. [42] $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dönüşümü

$$T((\mu_1,\mu_2)) = \left(3 - \frac{1}{3}\mu_1, 4 - \frac{1}{4}\mu_2\right)$$

olarak tanımlansın. $\forall \mu = (\mu_1,\mu_2), \eta = (\eta_1,\eta_2) \in \mathbb{R}^2$ için

$$d(\mu,\eta) = \sqrt{(\mu_1 - \eta_1)^2 + (\mu_2 - \eta_2)^2}$$

Öklid metriğine göre, $d(T\mu,T\eta) \le \frac{1}{3}d(\mu,\eta)$ eşitsizliği sağlanır. Yani T dönüşümü $\mathbb{R}^2$ üzerinde bir daralma dönüşümüdür. $\left(\frac{9}{4},\frac{16}{5}\right) \in \mathbb{R}^2$ noktası T dönüşümünün sabit noktasıdır.

Örnek 1.3.12. [42] $T:\left(0,\frac{1}{2}\right] \to \left(0,\frac{1}{2}\right]$ dönüşümü

$$T(\mu) = \mu^3$$

olarak tanımlansın. $\forall \mu,\eta \in \mathbb{R}$ için mutlak değer metriğine göre

$$d(T\mu,T\eta) \leq \frac{3}{4} d(\mu,\eta)$$

ifadesi sağlanır. Yani T dönüşümü bir daralma dönüşümüdür. Ancak $\left(0,\frac{1}{2}\right]$ kümesi üzerinde tanımlanan T dönüşümünün hiçbir sabit noktası yoktur.

Örnek 1.3.13. [42] $T:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall \mu \in \mathbb{R}$ için $T\mu = \mu$ dönüşümü mutlak değer metriğine göre daralma dönüşümüdür. $\forall \mu \in \mathbb{R}$ noktaları T dönüşümünün sabit noktalarıdır.

S. Banach 1922 yılında tam metrik uzayda daralma şartını sağlayan dönüşümler için sabit noktanın varlığını ve tekliğini ifade eden temel bir teorem ortaya koymuştur.

Teorem 1.3.14. [36] (Banach Sabit Nokta Teoremi) (W,d) tam metrik uzay ve $T:W\to W$ daralma dönüşümü olsun. Bu durumda T dönüşümü W uzayında bir tek sabit noktaya sahiptir.

Örnek 1.3.15. $(\mathbb{R},d)$ alışılmış metrik uzay olsun. $\forall \mu \in \mathbb{R}$ için $T\mu = \frac{\mu+2}{3}$ olarak tanımlanan $T:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dönüşümü verilsin. $\mathbb{R}$ mutlak değer metriğine göre tamdır. $\left|T(\mu)-T(\eta)\right| = \left|\frac{\mu+2}{3}-\frac{\eta+2}{3}\right| = \left|\frac{\mu-\eta}{3}\right| \leq \frac{1}{3}\left|\mu-\eta\right|$ daralma şartı sağlandığından $\mu=1$ noktası T dönüşümünün tek sabit noktasıdır.

Uyarı 1.3.16.

i) Banach sabit nokta teoremindeki uzayın tam olma şartı kaldırılamaz. Çünkü (W,d) tam metrik uzay değilse, $T:W\to W$ daralma dönüşümünün sabit noktası olması gerekmez.

ii) (W,d) tam metrik uzay ve $\forall \mu,\eta \in W$ için $d(T\mu,T\eta) \leq d(\mu,\eta)$ ise T dönüşümünün sabit noktaya sahip olması gerekmez.

Örnek 1.3.17.

i) $W=\left(0,\dfrac{1}{4}\right)$ uzayı üzerinde mutlak değer metriği verilsin. $T:\left(0,\dfrac{1}{4}\right)\rightarrow\left(0,\dfrac{1}{4}\right)$ dönüşümü $\forall\mu\in W=\left(0,\dfrac{1}{4}\right)$ için

$$T(\mu)=\mu^2$$

olarak tanımlansın.

$$d(T\mu,T\eta)\leq\frac{3}{4}d(\mu,\eta)$$

olduğundan T daralma dönüşümüdür. Ancak $W=\left(0,\dfrac{1}{4}\right)$ uzayı mutlak değer metriğine göre tam uzay olmadığından T dönüşümünün sabit noktası yoktur.

ii) $W=\mathbb{R}$ uzayı üzerinde mutlak değer metriği verilsin. $\forall\mu\in\mathbb{R}$ için

$$T(\mu)=\ell n\left(1+e^{\mu}\right)$$

ile $T:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ dönüşümü tanımlansın. $\mathbb{R}$ mutlak değer metriğine göre tamdır.

$$\left|T(\mu)-T(\eta)\right|=\left|\frac{e^c}{1+e^c}\right|\left|\mu-\eta\right|\leq\left|\mu-\eta\right|,\ (\eta<c<\mu)$$

eşitsizliği sağlanır ancak T dönüşümünün sabit noktası yoktur.

iii) $(\mathbb{R},d)$ alışılmış metrik uzay olsun. $\forall\mu\in\mathbb{R}$ için

$$T(\mu)=\ell n\left(1+2e^{\frac{\mu}{2}}\right)$$

ile $T:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ dönüşümü tanımlansın.

$$\left|T(\mu)-T(\eta)\right|=\left|\frac{e^{\frac{c}{2}}}{1+2e^{\frac{c}{2}}}\right|\left|\mu-\eta\right|\leq\left|\mu-\eta\right|,\ (\eta<c<\mu)$$

eşitsizliği sağlanır. T dönüşümünün sabit noktalarının kümesi $F(T)=\left\{\ell n\left(3+2\sqrt{2}\right)\right\}$’dır.

Teorem 1.3.18. [42] (W,d) tam metrik uzay ve $T:W\rightarrow W$ bir dönüşüm olmak üzere $n\in\mathbb{N}$ için

$$T^n = T \circ T \circ \cdots \circ T \quad (n\,\text{defa})$$

bir daralma dönüşümü ise T , W uzayında tek bir sabit noktaya sahiptir.

1.4. Daralma Dönüşümünün Genişlemeleri ve Bazı Temel Teoremler

Bu bölümde birçok yazar tarafından elde edilmiş olan Banach sabit nokta teoremindeki daralma şartının farklı genişlemelerine ve bazı temel teoremlere yer verilmiştir.

Tanım 1.4.1 [43] (W,d) metrik uzay ve $T: W \to W$ bir dönüşüm olsun. Her $\mu,\eta \in W$ için

$$d(T\mu, T\eta) < d(\mu,\eta)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa T dönüşümüne kesin daralma (contractive) dönüşümü denir.

Örnek 1.4.2 $T:[1,\infty) \to [1,\infty)$ dönüşümü $\forall\, \mu \in [1,\infty)$ için $T\mu = \mu + \frac{1}{\mu}$ olarak tanımlansın. Bu uzayda mutlak değer metriği verilsin. Bu durumda

$$\left|T(\mu) - T(\eta)\right| \le \left(1 + \frac{1}{\mu\eta}\right)|\mu - \eta| < |\mu - \eta|$$

eşitsizliği elde edildiğinden T dönüşümü kesin daralmadır. Ancak daralma dönüşümü değildir. Ayrıca sabit noktası yoktur.

Tanım 1.4.3. [43] (W,d) herhangi bir metrik uzay ve $T: W \to W$ bir dönüşüm olsun. Her $\mu,\eta \in W$ için

$$d(T\mu, T\eta) \le d(\mu,\eta)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa T dönüşümüne genişlemeyen (non-expansive) dönüşüm denir.

Örnek 1.4.4. $T:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dönüşümü $\forall \mu \in \mathbb{R}$ için $T\mu = \mu + 5$ olarak tanımlansın. Bu uzayda mutlak değer metriği verilsin. Bu durumda

$$\left|T(\mu) - T(\eta)\right| = |\mu + 5 - \eta - 5| = |\mu - \eta|$$

olup T dönüşümü genişlemeyen dönüşümdür. Ancak daralma dönüşümü ve kesin daralma değildir. Ayrıca sabit noktası da yoktur.

Uyarı 1.4.5 [44] Bir T dönüşümü için

T daralma $\Rightarrow$ T kesin daralma $\Rightarrow$ T genişlemeyen $\Rightarrow$ T Lipschitzian dönüşümüdür.

Ancak bu gerektirmenin tersi her zaman sağlanmaz.

Daralma dönüşümleri sürekli olduğundan Banach sabit nokta teoremi sürekli dönüşümlerde sabit noktanın varlığını ve tekliğini ifade eder. R. Kannan [45] ise 1968 yılında sürekli olmayan dönüşümler için sabit noktanın varlığını ve tekliğini ifade etmiştir.

Tanım 1.4.6. [45] (W,d) metrik uzay ve $T:W\to W$ bir dönüşüm olsun. Her $\mu,\eta\in W$ ve $k\in\left[0,\frac{1}{2}\right)$ için

$$d(T\mu,T\eta)\le k\left[d(\mu,T\mu)+d(\eta,T\eta)\right]$$

eşitsizliği sağlanıyorsa T dönüşümüne Kannan dönüşümü denir.

Kannan dönüşümünün tanımlanmasıyla sürekli olmayan dönüşümler için de sabit nokta bulunduğundan farklı genelleştirilmiş daralma dönüşümleri tanımlanmış ve sabit nokta teoremleri ispatlanmıştır. Bunlardan bazıları aşağıda verilmiştir.

Tanım 1.4.7. [42] (W,d) metrik uzay ve $T:W\to W$ bir dönüşüm olsun. Her $\mu,\eta\in W$ ve $\alpha>1$ için

$$d(T\mu,T\eta)\ge\alpha d(\mu,\eta)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa T dönüşümüne genişleyen (expansive) dönüşüm denir.

Tanım 1.4.8. [46] (W,d) metrik uzay ve $T:W\to W$ bir dönüşüm olsun. Her $\mu,\eta\in W$ $\delta\in(0,1)$ ve $L\ge0$ için

$$d(T\mu,T\eta)\le\delta d(\mu,\eta)+Ld(\mu,T\eta)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa T dönüşümüne hemen hemen daralma dönüşümü adı verilir.

Tanım 1.4.9. [47] (W,d) metrik uzay ve $T:W\to W$ bir dönüşüm olsun. Her $\mu,\eta\in W$ $\delta\in(0,1)$ ve $L\ge0$ için

$$d(T\mu,T\eta)\leq \delta d(\mu,\eta)+L\min\{d(\mu,T\mu),d(\eta,T\eta),d(\mu,T\eta),d(\eta,T\mu)\} \tag{B}$$

ise T dönüşümüne B şartını sağlayan dönüşüm adı verilir.

Teorem 1.4.10. [47] (W,d) tam metrik uzay ve $T:W\to W$ dönüşümü (B) şartını sağlasın. Bu durumda T dönüşümünün W uzayında sabit noktası vardır.

Tanım 1.4.11 [48] (W,d) metrik uzay ve $T:W\to W$ bir dönüşüm olsun. Her $\mu,\eta\in W$, $\delta\in(0,1)$ ve $L\geq 0$ için

$$M_1(\mu,\eta)=\max\left\{d(\mu,\eta),d(\mu,T\mu),d(\eta,T\eta),\frac{1}{2}\left[d(\mu,T\eta),d(\eta,T\mu)\right]\right\}$$

olmak üzere,

$$d(T\mu,T\eta)\leq \delta M_1(\mu,\eta)+L\min\{d(\mu,T\mu),d(\eta,T\eta),d(\mu,T\eta),d(\eta,T\mu)\}$$

eşitsizliği sağlanırsa T dönüşümüne genelleştirilmiş hemen hemen daralma dönüşümü denir.

Tanım 1.4.12. [49] (W,d) metrik uzay ve $T:W\to W$ bir dönüşüm olsun. Her $\mu,\eta\in W$ için

$$d(T\mu,T\eta)\leq ad(\mu,\eta)+bd(\mu,T\mu)+cd(\eta,T\eta)$$

olacak şekilde $a+b+c<1$ özelliğine sahip $a,b,c\in\mathbb{R}^+$ varsa T dönüşümüne Ciric-Reich-Rus daralma dönüşümü adı verilir.

Tanım 1.4.13. [50] (W,d) metrik uzay ve $T:W\to W$ bir dönüşüm olsun. Her $\mu,\eta\in W$ için

$$d(T\mu,T\eta)\leq ad(\mu,\eta)+bd(\mu,T\mu)+cd(\eta,T\eta)+ed(\mu,T\eta)+fd(\eta,T\mu)$$

olacak şekilde $a+b+c+e+f<1$ özelliğine sahip $a,b,c,e,f\in\mathbb{R}^+$ varsa T dönüşümüne Hardy-Rogers daralma dönüşümü denir.

Banach sabit nokta teoreminin diğer bir genelleştirilmesi birden fazla dönüşüm kullanılarak elde edilen sabit nokta teoremleridir.

Tanım 1.4.14. [51] W boş olmayan bir küme ve $S,T:W\to W$ iki farklı dönüşüm olmak üzere $S\mu=T\mu=\mu$ eşitliğini sağlayan $\mu\in W$ noktasına S ve T dönüşümlerinin ortak (common) sabit noktası denir.

Tanım 1.4.15. [51] W boş olmayan bir küme ve $S,T:W\to W$ iki farklı dönüşüm olmak üzere $S\mu=T\mu=\eta$ eşitliğini sağlayan $\mu,\eta\in W$ noktaları varsa $\mu\in W$ noktasına S ve T dönüşümlerinin çakışma noktası (coincidence point), η noktasına ise çakışılan nokta denir.

Örnek 1.4.16. $W=[0,1]$ olmak üzere ve $S,T:W\to W$ iki farklı dönüşüm olsun. Her $\mu\in[0,1]$ için $S\mu=\dfrac{\mu}{4}$ ve $T\mu=\dfrac{\mu}{16}$ tanımlansın. $\mu=0$ noktası T ve S dönüşümlerinin çakışma noktası ve ortak sabit noktasıdır.

L. Ciric ve ark. [52] zayıf daralma dönüşümünü ve genelleştirilmiş zayıf daralma dönüşümünü iki farklı dönüşüm için genelleştirmişlerdir.

Tanım 1.4.17. [52] (W,d) metrik uzay ve $S,T:W\to W$ iki dönüşüm olsun. Her $\mu,\eta\in W$ için

$$\begin{aligned} d(T\mu,S\eta) \le k\max\left\{d(\mu,\eta),d(\mu,T\mu),d(\eta,S\eta),\frac{d(\mu,S\eta)+d(\eta,T\mu)}{2}\right\} \\ +L\min\{d(\mu,T\mu),d(\eta,S\eta),d(\mu,S\eta),d(\eta,T\mu)\} \end{aligned}$$

olacak şekilde $k\in[0,1)$ ve $L\ge 0$ sabitleri varsa T ve S dönüşümlerine genelleştirilmiş Ciric zayıf daralma dönüşümleri adı verilir.

Teorem 1.4.18. [52] (W,d) tam metrik uzay ve T ve S, W üzerinde tanımlı genelleştirilmiş Ciric zayıf daralma dönüşümü ise T ve S dönüşümleri W uzayında bir tek ortak sabit noktaya sahiptir.

B. Samet ve ark. [24] ise aşağıda özellikleri verilen α ve φ fonksiyonlarını kullanarak yeni bir daralma dönüşümü tanımlamışlardır. Diğer yazarlar tarafından da farklı uzaylarda genelleştirmeleri elde edilerek sabit nokta teoremleri ispatlanmıştır [53-60].

Tanım 1.4.19. [61] $\psi=\{\varphi\,|\,\varphi:[0,\infty)\to[0,\infty),\text{ bir fonksiyon}\}$ aşağıdaki özellikleri sağlasın:

i) φ monoton artan bir fonksiyondur. Yani $t < s \Rightarrow \varphi(t) < \varphi(s)$ 'dır.

ii) Her $t > 0$ için $\varphi(t) < t$ 'dır.

iii) $\varphi(0) = 0$ 'dır.

iv) φ sürekli fonksiyondur.

v) Her $t > 0$ için $\lim_{n\to\infty} \varphi^n(t) = 0$, φ^n φ fonksiyonunun *n.* iterasyonudur.

vi) Her $t > 0$ için $\sum_{n=0}^{\infty} \varphi^n(t)$ serisi yakınsak bir seridir.

vii) $\lim_{t\to\infty}(t - \varphi(t)) = \infty$ sağlanır.

viii) φ fonksiyonu alt toplamsaldır.

Tanım 1.4.20. [61] $\psi = \{\varphi | \varphi : [0,\infty) \to [0,\infty), \text{bir fonksiyon}\}$ ailesi verilsin.

a) Tanım 1.4.19. fonksiyon ailesinden i. ve v. özelliklerini sağlayan φ fonksiyonuna kıyaslama (comparison) fonksiyonu denir.
b) Tanım 1.4.19. fonksiyon ailesinden i. ve vi. özelliklerini sağlayan φ fonksiyonuna $c-$kıyaslama (comparison) fonksiyonu denir.

Lemma 1.4.21. [61] Kıyaslama ve $c-$ kıyaslama fonksiyonları aşağıdaki özelliklere sahiptir.

1) Herhangi $c-$kıyaslama fonksiyonu aynı zamanda kıyaslama fonksiyonudur. Tersi her zaman doğru değildir.
2) Herhangi bir kıyaslama fonksiyonu için $\varphi(0) = 0$ özelliği sağlanır.
3) Alt toplamsal kıyaslama fonksiyonu süreklidir.
4) φ kıyaslama fonksiyonu ise $n \in \mathbb{N}$ için φ^n bileşke fonksiyonu da kıyaslama fonksiyonudur.
5) φ, $c-$kıyaslama fonksiyonu olmak üzere,

$$s : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$$
$$t \to s(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi^n(t)$$

fonksiyonu monoton artan bir fonksiyondur ve $s(0) = 0$ özelliğini sağlar.

Örnek 1.4.22. [61]

1) $\lambda \in [0,1)$ olmak üzere $\varphi(t) = \lambda t,\, t \in [0,\infty)$ fonksiyonu φ fonksiyon ailesinin bütün özelliklerini sağladığından bir kıyaslama fonksiyondur.

2) $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$, $\varphi(t) = \dfrac{t}{1+t}$ fonksiyonu kıyaslama fonksiyonudur, fakat $c-$kıyaslama fonksiyonu değildir.

Tanım 1.4.23. [61] (W,d) metrik uzay ve $T : W \to W$ bir dönüşüm olsun. Her $\mu,\eta \in W$ için

$$d(T\mu, T\eta) \le \varphi\big(d(\mu,\eta)\big) + Ld(\eta, T\mu)$$

ifadesini sağlayan $L \ge 0$ sayısı ve φ kıyaslama fonksiyonu varsa T dönüşümüne hemen hemen (φ, L) daralma dönüşümü adı verilir.

Tanım 1.4.24. [62] W boştan farklı bir küme ve $\theta : W \times W \to [1,\infty)$ bir dönüşüm olsun. $\varphi_e : [0,\infty) \to [0,\infty)$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlarsa φ_e fonksiyonuna genişletilmiş kıyaslama (extended comparison) fonksiyonu denir.

1) φ_e fonksiyonu azalandır.

2) $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, W kümesinde herhangi bir dizi; φ_e^n, $n \in \mathbb{N}$ için φ_e fonksiyonunun n. bileşkesi; $m \in \mathbb{N}$ ve $t > 0$ olmak üzere,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_e^n(t) \prod_{i=1}^{n} \theta(\mu_i, \mu_m) < \infty$$

sağlanır.

Genişletilmiş kıyaslama fonksiyonların ailesi ψ_s ile gösterilir.

Eğer $\varphi_e \in \psi_s$ ise $t > 0$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_e^{\,n}(t) \prod_{i=1}^{n} \theta(\mu_i, \mu_m) \ge \varphi_e^{\,n}(t)$$

olduğundan $\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_e^{\,n}(t) < \infty$ ’dır. Bu durumda $\varphi_e(t) < t$ sağlanır.

Tanım 1.4.25. [24] W boştan farklı bir küme, $T:W\to W$ bir dönüşüm ve $\alpha:W^2\to[0,\infty)$ fonksiyon olsun. Her $\mu,\eta\in W$ için

$$\alpha(\mu,\eta)\geq 1\Rightarrow\alpha(T\mu,T\eta)\geq 1$$

ifadesi sağlanıyorsa T dönüşümüne $\alpha-$geçişli (admissible) dönüşüm adı verilir.

Örnek 1.4.26. [24] $W=(0,\infty)$ iken $\forall\mu\in W$ için $T:W\to W$ dönüşümü $T\mu=\ell n\mu$ olarak verilsin. $\alpha:W^2\to[0,\infty)$ fonksiyonu

$$\alpha(\mu,\eta)=\begin{cases}2, & \mu\geq\eta \quad \text{ise}\\ 0, & \mu<\eta \quad \text{ise}\end{cases}$$

biçiminde tanımlansın. T dönüşümü $\alpha-$geçişli dönüşümdür.

Tanım 1.4.27. [24] (W,d) metrik uzay ve $T:W\to W$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $\mu,\eta\in W$ için

$$\alpha(\mu,\eta)d(T\mu,T\eta)\leq\varphi(d(\mu,\eta))$$

ifadesini sağlayan $\alpha:W^2\to[0,\infty)$ ve $\varphi\in\psi$ fonksiyonları mevcut ise T dönüşümüne $\alpha-\varphi-$daralma dönüşümü denir.

Tanım 1.4.28. [54] W boştan farklı bir küme $T:W\to W$ bir dönüşüm ve $\alpha:W^2\to[0,\infty)$ bir fonksiyon olsun. Her $\mu,\eta,\sigma\in W$ için aşağıdaki şartları sağlayan T dönüşümüne üçgensel (triangular) $\alpha-$geçişli dönüşüm denir.

1. $\alpha(\mu,\eta)\geq 1\Rightarrow\alpha(T\mu,T\eta)\geq 1$'dır.
2. $\alpha(\mu,\sigma)\geq 1\, ve\, \alpha(\sigma,\eta)\geq 1\Rightarrow\alpha(\mu,\eta)\geq 1$'dır.

Tanım 1.4.29. [55] W boştan farklı bir küme, $S,T:W\to W$ iki dönüşüm ve $\alpha:W^2\to[0,\infty)$ bir fonksiyon olsun. Her $\mu,\eta\in W$ için

$$\alpha(\mu,\eta)\geq 1\Rightarrow\alpha(S\mu,T\eta)\geq 1 \text{ ve } \alpha(T\eta,S\mu)\geq 1$$

ifadesi sağlanıyorsa (S,T) ikilisine genelleştirilmiş $\alpha-$geçişli dönüşüm çifti adı verilir.

Örnek 1.4.30. [55] $W=[0,\infty)$ kümesinde $S,T:W\to W$ dönüşümleri her $\mu,\eta\in W$ için $T\mu=\mu^2$ ve $S\mu=2\mu$ olarak verilsin. $\alpha:W^2\to[0,\infty)$ fonksiyonu

$$\alpha(\mu,\eta)=\begin{cases} e^{\mu\eta}, & \mu\eta\geq 0 \quad \text{ise} \\ 0, & \mu\eta<0 \quad \text{ise} \end{cases}$$

olmak üzere (S,T) ikilisi genelleştirilmiş $\alpha-$geçişli dönüşüm çiftidir.

Tanım 1.4.31. [53] W boştan farklı bir küme, $T:W\to W$ bir dönüşüm ve $\alpha,\beta:W\to[0,\infty)$ iki fonksiyon olsun. Her $\mu\in W$ için aşağıdaki şartları sağlayan T dönüşümüne döngüsel (cyclic) $(\alpha,\beta)-$geçişli dönüşüm denir.

1) $\alpha(\mu)\geq 1\Rightarrow\beta(T\mu)\geq 1$'dır.

2) $\beta(\mu)\geq 1\Rightarrow\alpha(T\mu)\geq 1$'dır.

Tanım 1.4.32. [53] W boştan farklı bir küme, $S,T:W\to W$ iki dönüşüm ve $\alpha,\beta:W\to[0,\infty)$ iki fonksiyon olsun. Her $\mu\in W$ için aşağıdaki şartları sağlayan (S,T) ikilisine döngüsel $(\alpha,\beta)-$geçişli dönüşüm çifti adı verilir.

1) $\alpha(\mu)\geq 1\Rightarrow\beta(S\mu)\geq 1$'dır.

2) $\beta(\mu)\geq 1\Rightarrow\alpha(T\mu)\geq 1$'dır.

Teorem 1.4.33. [24] (W,d) tam metrik uzay olsun. $T:W\to W$, $\alpha-\varphi-$daralma dönüşümü aşağıdaki şartları sağlasın:

i) T, $\alpha-$geçişli dönüşümdür.

ii) $\alpha(\mu_0,T\mu_0)\geq 1$ olan $\mu_0\in W$ vardır.

iii) $\forall n\in\mathbb{N}$ için $\alpha(\mu_n,\mu_{n+1})\geq 1$ ve $\mu_n\to\mu\ (n\to\infty)$ iken $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset W$ dizisi varsa, $\forall n\in\mathbb{N}$ için $\alpha(\mu_n,\mu)\geq 1$ sağlanır.

Bu durumda T bir sabit noktaya sahiptir.

X. D. Liu ve ark. [63] aşağıda özellikleri verilen D fonksiyonunu kullanarak $(D,\varphi)-$daralma dönüşümünü tanımlamışlardır.

Tanım 1.4.34. [63] $D:(0,\infty)\to(0,\infty)$ fonksiyonu $(D1)-(D3)$ şartlarını sağlar:

$(D1)$ D azalmayan bir fonksiyondur.

$(D2)$ $\lim_{n\to\infty} D(t_n)=0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} t_n=0$ ’dır.

$(D3)$ D sürekli fonksiyondur.

D fonksiyonlarının ailesi Δ ile gösterilir.

Tanım 1.4.35. [63] (W,d) metrik uzay, T bu uzayda kendi üzerine bir dönüşüm olsun. $\varphi\in\psi$ ve $D\in\Delta$ fonksiyonları verilsin. $\Im=\left\{(\mu,\eta)\in W^2 : d\left(T(\mu),T(\eta)\right)>0\right\}$ olmak üzere, $\mu,\eta\in\Im$ için aşağıdaki daralma şartını sağlayan T dönüşümüne $(D,\varphi)-$ daralma dönüşümü denir:

$$D\left(d\left(T(\mu),T(\eta)\right)\right)\leq\varphi\left(D\left(d(\mu,\eta)\right)\right).$$

M. A. Geraghty [64] 1973 yılında aşağıda tanımlanan β fonksiyonu yardımıyla Banach daralma dönüşümünün genelleştirmesi olan yeni bir daralma dönüşümü tanımlamıştır.

Tanım 1.4.36. [64] (W,d) metrik uzay olsun. β fonksiyonlarının ailesi $\Phi=\left\{\beta \middle| \beta:[0,\infty)\to[0,1)\right\}$ olmak üzere,

$$\lim_{n\to\infty}\beta(t_n)=1\Rightarrow\lim_{n\to\infty}t_n=0$$

sağlansın. $\beta\in\Phi$ fonksiyonu ve her $\mu,\eta\in W$ için

$$d(T\mu,T\eta)\leq\beta\left(d(\mu,\eta)\right)d(\mu,\eta)$$

şartını sağlayan $T:W\to W$ dönüşümüne Geraghty daralma dönüşümü denir.

Teorem 1.4.37. [64] (W,d) tam metrik uzay olsun. $T:W\to W$ dönüşümü ve $\beta\in\Phi$ fonksiyonu verilsin. T dönüşümü Geraghty daralma dönüşümü ise tek sabit noktası vardır.

A. Fulga ve M. Proca [65] 2017 yılında β_E-Geraghty daralma dönüşümünü tanımlamıştır.

Tanım 1.4.38. [65] (W,d) herhangi bir metrik uzay olsun. $\beta\in\Phi$ fonksiyonu verilsin. Her $\mu,\eta\in W$ için

$$E(\mu,\eta)=d(\mu,\eta)+\left|d(\mu,T\mu)-d(\eta,T\eta)\right|$$

iken

$$d(T\mu,T\eta)\leq\beta\big(E(\mu,\eta)\big)E(\mu,\eta)$$

şartını sağlayan $T:W\to W$ dönüşümüne β_E-Geraghty daralma dönüşümü denir.

Örnek 1.4.39. [65] $d(\mu,\eta)=|\mu-\eta|$ mutlak değer metriği ve

$$T(\mu)=\begin{cases}0, & \mu\in\left[-\frac{2}{3},0\right] \text{ ise}\\ -\mu, & \mu\in\left(0,\frac{2}{3}\right] \text{ ise}\end{cases}$$

olarak tanımlanan $T:\left[-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right]\to\left[-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right]$ fonksiyonu verilsin.

$$\beta(t)=\begin{cases}\frac{1}{1+t}, & t>0 \text{ ise}\\ \frac{1}{2}, & t=0 \text{ ise}\end{cases}$$

olarak tanımlanan $\beta\in\Phi$ fonksiyonu ile T dönüşümü β_E-Geraghty daralma dönüşümüdür.

Teorem 1.4.40. [65] (W,d) tam metrik uzay olsun. $T:W\to W$ dönüşümü ve $\beta\in\Phi$ fonksiyonu verilsin. T dönüşümü β_E-Geraghty daralma dönüşümü ise tek sabit noktası vardır.

2018 yılında B. Alqahtani ve ark. [66] β_E-Geraghty daralma dönüşümünün bir genellemesi olarak bir fonksiyon çifti için yeni bir daralma şartını tanımlamışlardır.

Tanım 1.4.41. [66] (W,d) metrik uzay olsun. $\beta\in\Phi$ fonksiyonu ve her $\mu,\eta\in W$ için

$$E_{S,T}(\mu,\eta)=d(\mu,\eta)+\left|d(\mu,T\mu)-d(\eta,S\eta)\right|$$

olmak üzere,

$$d(T\mu,S\eta)\leq\beta\left(E_{S,T}(\mu,\eta)\right)E_{S,T}(\mu,\eta)$$

şartını sağlayan $T,S:W\to W$ dönüşümlerine $\beta_{E_{S,T}}-$Geraghty daralma dönüşümleri adı verilir.

H. Aydi ve ark. [67] 2019 yılında β_E-Geraghty daralmasının bir başka genellemesini yapmış ve sabit nokta teorisi ile ilgili sonuçlar elde etmişlerdir.

Tanım 1.4.42. [67] (W,d) metrik uzay olsun. $\alpha:W^2\to[0,\infty)$, $\beta\in\Phi$ fonksiyonları ve her $\mu,\eta\in W$ için

$$E(\mu,\eta)=d(\mu,\eta)+\left|d(\mu,T\mu)-d(\eta,T\eta)\right|$$

iken

$$\alpha(\mu,\eta)\geq 1\Rightarrow d(T\mu,T\eta)\leq\beta\left(E(\mu,\eta)\right)E(\mu,\eta)$$

şartını sağlayan $T:W\to W$ dönüşümüne $\alpha-\beta_E-$Geraghty daralma dönüşümü adı verilir.

B. Samet ve M. Jleli [33] 2014 yılında aşağıda tanımlanan ω fonksiyonu yardımıyla Banach sabit nokta teoreminin farklı bir genellemesini elde etmişlerdir.

Tanım 1.4.43. [33] $\Theta=\left\{\omega\middle|\omega:(0,\infty)\to(1,\infty)\right\}$ aşağıdaki özellikleri sağlayan fonksiyonların bir ailesi olsun.

$\omega_1)$ ω azalmayan fonksiyondur.

$\omega_2)$ Her bir $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset(0,\infty)$ dizisi için $\lim\limits_{n\to\infty}\omega(t_n)\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}t_n=0^+$'dır.

$\omega_3)$ $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{\omega(t)-l}{t^r}$ olacak şekilde $r\in(0,1)$ ve $l\in(0,\infty)$ sabitleri vardır.

Daha sonra ise X. D. Liu ve ark. [63] yukarıda verilen fonksiyon ailesinin 1. ve 2. şartını değiştirerek aşağıdaki şekilde yeniden tanımlamışlardır:

$\tilde{\Theta}=\left\{\omega\middle|\omega:(0,\infty)\to(1,\infty),\ \omega_1^{'}\text{ ve }\omega_2^{'}\text{ sağlanır.}\right\}$ fonksiyon ailesi aşağıdaki özellikleri sağlar:

ω_1') ω azalmayan ve sürekli bir fonksiyondur.

ω_2') $\inf\limits_{a\in(0,\infty)} \omega(a) = 1$'dır.

Tanım 1.4.44. [33] (W,d) metrik uzay ve $T:W\to W$ bir dönüşüm olsun. Her $\mu,\eta\in W$ için

$$d(T\mu,T\eta)\neq 0 \Rightarrow \omega\big(d(T\mu,T\eta)\big)\leq \omega\big[d(\mu,\eta)\big]^k$$

ifadesini sağlayan $\omega\in\Theta$ fonksiyonu ve $k\in[0,1)$ sabiti varsa T dönüşümüne $\omega-$ daralma dönüşümü adı verilir.

Teorem 1.4.45. [33] $T:W\to W$, (W,d) tam metrik uzayı üzerinde bir dönüşüm olsun. $\omega\in\Theta$ fonksiyonu için T bir $\omega-$daralma dönüşümü ise T dönüşümünün tek sabit noktası vardır.

D. Wardowski [68] 2012 yılında aşağıda tanımı yapılan $\aleph$ fonksiyonlar ailesi yardımıyla $F-$daralma dönüşümünü tanımlayarak sabit nokta teorisi ile ilgili sonuçlar elde etmiştir.

Tanım 1.4.46. [68] $\aleph=\{F \mid F:(0,\infty)\to\mathbb{R}, \text{bir fonksiyon}\}$ ailesi aşağıdakileri sağlasın:

F_1) F kesinlikle artan fonksiyondur, yani; $\forall a,b\in(0,\infty)$ için $a<b$ iken $F(a)<F(b)$ sağlanır.

F_2) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ pozitif sayıların herhangi bir dizisi olmak üzere, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} F(a_n) = -\infty$ sağlanır.

F_3) $c\in(0,1)$ sabit sayısı için $\lim\limits_{a\to 0^+} a^c F(a) = 0$ sağlanır.

H. Piri ve P. Kumam [69] $\aleph$ ailesinin bir bir genişlemesini elde etmişlerdir. Bu yeni aile $\aleph$ fonksiyon ailesinin (F_3) şartı yerine,

F'_3) F fonksiyonu süreklidir,

şartı ile değiştirilmesiyle elde edilir. Bu durumda yeni tanımlanan aile

$$\aleph^* = \left\{ F \middle| F : (0,\infty) \to \mathbb{R};\ F \text{ fonksiyonu } F_1, F_2, F_3^{'} \text{ özelliklerini sağlar.} \right\}$$

ile gösterilir.

Tanım 1.4.47. [68] (W,d) tam metrik uzay ve $T : W \to W$ dönüşüm olsun. $d(T\mu, T\eta) > 0$ olan her $\mu, \eta \in W$ için

$$\kappa + F\big(d(T\mu, T\eta)\big) \le F\big(d(\mu,\eta)\big)$$

olacak şekilde $\kappa > 0$ sayısı varsa T dönüşümüne bir $F-$daralma dönüşümü denir.

Örnek 1.4.48. [68] $F : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dönüşümü $F(a) = \ell n\left(a^2 + a\right)$ olarak tanımlansın. Bu durumda $F \in \aleph$ olduğu açıktır. $T : W \to W$ bir $F-$daralma dönüşümü olduğundan $d(T\mu, T\eta) > 0$ şartını sağlayan her $\mu, \eta \in W$ ve $T\mu \neq T\eta$ için

$$\frac{d(T\mu, T\eta)\big(d(T\mu, T\eta) + 1\big)}{d(\mu,\eta)\big(d(T\mu, T\eta) + 1\big)} \le e^{-\kappa}$$

sağlanır.

Uyarı 1.4.49. [68] $F-$daralma dönüşümleri süreklidir.

Teorem 1.4.50. [68] (W,d) tam metrik uzay ve $T : W \to W$ bir $F-$daralma dönüşümü olsun. Bu taktirde T dönüşümü W uzayında bir tek $\sigma \in W$ sabit noktasına sahiptir. Ayrıca $\mu_0 \in W$ için $\left\{T^n \mu_0\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ iterasyon dizisi σ noktasına yakınsar.

Tanım 1.4.51. [70] W ve Q iki topolojik uzay ve $T, S : W \to Q$ sürekli iki dönüşüm olsun. Her $\omega \in W$ için

$$H : W \times [0,1] \to Q$$

$$(\omega, z) \to H(\omega, z) = \begin{cases} T\omega, & z = 0 \text{ ise} \\ S\omega, & z = 1 \text{ ise} \end{cases}$$

olan bir H sürekli fonksiyonu varsa T ve S dönüşümlerine homotopik dönüşümler, H fonksiyonuna ise T ’den S ’ye bir homotopi adı verilir.

(W,d) tam metrik uzay ve U kümesi W kümesinin açık alt kümesi olsun. Bu durumda iki daralma dönüşümü arasında tanımlanan bir homotopi ile sabit noktanın değişmezliği (invariant) aşağıdaki gibi ifade edilir.

Tanım 1.4.52. [71] U kümesinin kapanışı $\bar{U}$ kümesi olmak üzere $T:\bar{U}\to W$ ve $S:\bar{U}\to W$ iki daralma dönüşümü olsun. $H:\bar{U}\times[0,1]\to W$ fonksiyonu için

i) $H(\cdot,0)=T$ ve $H(\cdot,1)=S$ sağlanır,

ii) U kümesinin sınırı ∂U olmak üzere her $\omega\in\partial U$ ve $t\in[0,1]$ için $\omega\neq H(\omega,t)$ dır,

iii) Her $\omega,\gamma\in\bar{U}$ ve $t\in[0,1]$ için

$$d\big(H(\omega,t),H(\gamma,t)\big)\leq\delta d(\omega,\gamma)$$

olan $\delta\in[0,1)$ vardır,

iv) Her $\omega\in\bar{U}$ ve $t,s\in[0,1]$ için

$$d\big(H(\omega,t),H(\omega,s)\big)\leq M|t-s|$$

olan $M\geq 0$ vardır,

özellikleri sağlanıyorsa T ve S dönüşümlerine homotopik daralma dönüşümleri adı verilir.

Teorem 1.4.53. [71] (W,d) tam metrik uzay ve U kümesi W kümesinin açık alt kümesi olsun. Ayrıca $T:\bar{U}\to W$ ve $S:\bar{U}\to W$ iki homotopik daralma dönüşümü ve S dönüşümü U kümesinde bir sabit noktaya sahip olsun. Bu durumda T dönüşümü de U kümesinde bir sabit noktaya sahiptir.

2. BAZI GENEL METRİK YAPILARI

Bu bölümde, çalışma boyunca kullanılacak olan metrik uzayın genellemeleri olan kısmi (partial) metrik uzaylar, $b-$metrik uzaylar, genişletilmiş (extended) $b-$metrik uzaylar, asimetrik (quasi) metrik uzaylar tanıtılmış ve bu uzayların topolojik yapıları incelenmiştir.

2.1. Kısmi (Partial) Metrik Uzaylar ve Bazı Topolojik Özellikleri

Uzaklık kavramı matematik kadar eski bir kavramdır. Bu kavram F. Hausdorff [38] tarafından metrik olarak adlandırılıp, aksiyomatik yapısı kurulmuştur. Açıkçası metrik kavramı, sadece analiz veya matematiğin birçok dalı için değil sayısal bilimler için de bir köşe taşıdır. Dolayısıyla metrik modern günlük hayatımızda kaçınılmaz bir yere sahiptir [4-10]. Aslında bu kavramı kullanarak sosyal bilimlerden sayısal bilimlere kadar birçok alanda kullanılacak yeni kavramlar oluşturulabilir. Metrik kavramının günlük hayattaki problemlerden birine çözüm olarak akıllı cep telefonları gösterilebilir. Bu telefonlardaki navigasyon programları örnek olarak verilebilir. Navigasyon programları $\mathbb{R}^2$'deki mutlak değer metriğine dayanır. Bu metrik,

$$\forall(\mu_1,\mu_2),(\eta_1,\eta_2)\in\mathbb{R}^2 \text{ için, } d\big((\mu_1,\mu_2),(\eta_1,\eta_2)\big)=|\mu_1-\eta_1|+|\mu_2-\eta_2|$$

metriğidir. Dahası, bu metrik ve yolun trafik yoğunluğu birlikte düşünülerek yeni bir metrik de oluşturulabilir. Bu yeni metrik, bir noktadan diğer noktaya para, mesafe ve zaman gibi hususlarda maksimum yararla ulaşmak için kullanılabilir. Buna göre, bu parametrelerle akıllı telefon uygulaması olarak ortaya çıkan bilgisayar programı birçok farklı durum bulundurur.

Yukarıdaki örnekte zaman ve uzaklık ana parametreler olarak düşünülmüştür. Yakın gelecekte hem dikey hem de yatay olarak hareket edecek hava aracı için

$$d(A,B)=\sum_{i=1}^{3}|a_i-b_i|,\ A=(a_1,a_2,a_3),B=(b_1,b_2,b_3)\in\mathbb{R}^3$$

metriği mümkün olabilir. Görüldüğü gibi metrik kavramı şimdiye kadar önemli olduğu gibi gelecek için de önemli olmaya devam edecektir. Peki ne oldu da metrikten farklı bir kavram tanımlama ihtiyacı duyuldu?

Metrik uzaylardan bilindiği üzere, bir noktanın kendine olan uzaklığı sıfırdır. Yani $\mu=\eta$ dır ancak ve ancak $d(\mu,\eta)=0$ olup metriğin en önemli aksiyomlarından biridir. Buna karşın biri $p(\mu,\mu)\neq 0$ olduğunu duyduğunda bunun saçma, rasyonel olmayan bir aksiyom olduğunu düşünebilir. Fakat bilgisayar biliminin gelişmesiyle $d(\mu,\mu)$, yani bir noktanın kendine olan uzaklığının sıfır olamayabileceği gündeme gelmiştir. Metrik uzaydan bazı örnekleri inceleyerek bir noktanın kendine olan uzaklığının sıfır olamayacağı fikrinin düşünmeye değer olduğu açıklanabilir. Öncelikle S^w, S kümesini kapsayan bütün sonsuz dizilerin bir kümesi olsun. d uzaklık fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$\forall \mu,\eta\in S^w \text{ için, } d:S^w\times S^w\to[0,\infty),\ d(\mu,\eta)=2^{-\sup\{n:\forall i<n \ni \mu_i=\eta_i\}}$$

dır. Bu d fonksiyonu standart metriğin tüm aksiyomlarını sağlar ve (S^w,d) ikilisine Baire metrik uzayı denir. Burada sonsuz diziler kullanılır ki, matematikçiler için sonsuz dizilerin araştırılması ilgi çekici olsa da, bilgisayar biliminde sonlu diziler tercih edilir. Bu noktada, bilgisayar bilimindeki araştırmacıların bakış açısı da dahil edilmelidir. Bilgisayar ile ilgilenen bilim adamları özellikle yazılım programlarında sonlu dizileri kullanırlar. $\mu_0,\mu_1,\ldots,\mu_n$ olacak şekilde devam eden sonlu dizisinin herhangi bir ekranda nasıl çıktı alacaklarını, nasıl bir program yazmaları gerektiğini düşünürler. Eğer program sonsuz bir diziye dayanarak sonsuz döngüde devam edip durmuyorsa bu program bu alandaki bilim adamları tarafından “iyi”, “doğru” ve “ekonomik” bir program olarak adlandırılamaz. Çünkü programların belli bir adımdan sonra sonlanması beklenir. Fakat sonsuz diziyle çalışıldığında μ sonsuz, zaman sonlu olduğu için hiçbir şekilde iyi bir program yazılamaz. Bu nedenle bilim adamları μ_n dizisinin parçalarından oluşan sonlu dizilerle ilgilenirler. Sonsuz dizinin parçalarından oluşan $(\mu_0,\mu_1,\ldots,\mu_k)$ sonlu dizisi ile iyi ve ekonomik bir program yazılabilir [78,79].

Bu durum 20. yüzyıl matematikçileri arasında güncel bilgisayar deneyimi ve metrik uzay teorileriyle ilgi çekici hale gelmiştir. Bu nedenle 1992 yılında S. Matthews [72-

73,77], (S^w, d) Baire metrik uzayını bütün sonlu dizilerin kümesi olan S^* ile oluşan $S^* \cup S^w$ kümesi ile değiştirip aşağıdaki fonksiyonu tanımlamıştır:

$$d : S^w \cup S^* \times S^w \cup S^* \to [0,\infty), \forall \mu,\eta \in S^w \cup S^* \to d(\mu,\eta) = 2^{-\sup\{n \mid \forall i<n \ \ni \ \mu_i = \eta_i\}}.$$

Burada $d(\mu,\mu)$ sıfır olmak zorunda değildir. Örneğin, $n \in \mathbb{N}$ için $\mu = (\mu_0, \mu_1, ..., \mu_k) \in S^*$ dizisi ele alınırsa, $d(\mu,\mu) = \dfrac{1}{2^n} \neq 0$ elde edilir [74,80].

Bunun gibi örnekler göz önünde bulundurularak, S. G. Matthews [72,73] iyi ve ekonomik bilgisayar programlarının yazılımı için standart metrikten farklı olarak kısmi metriği tanımladı. Buradaki amaç sadece standart metriğe alternatif bulmak değil aynı zamanda söz konusu metriği genişletmektir. Bu iki metriğin sadece aksiyomlarında değil topolojik yapılarında da farklılıklar vardır.

Kısmi metrik bu yeni yapısıyla yazılım programlama problemini bir sabit nokta operatörü kullanmak şartıyla sabit nokta problemine dönüştürmüş ve böylece programı durdurmak mümkün hale gelmiştir. Bu nedenledir ki, 1922 yılında S. Banach tarafından ortaya konan Banach Sabit Nokta teoremini, S. G. Matthews kısmi metrik uzaya uyarlamıştır [72-73]. Yani, Banach Sabit Nokta Teoreminin bir versiyonunu kısmi metrikte ispatlamıştır. Daha sonra da birçok matematikçi tarafından kısmi metrik uzayda sabit nokta teoremleri çalışılmaya devam edilmiştir [80,82].

Tanım 2.1.1. [72] W boştan farklı bir küme olsun. Her $\mu,\eta,\sigma \in W$ için aşağıdaki aksiyomları sağlar:

$(p1)$ $\mu = \eta \Leftrightarrow p(\mu,\mu) = p(\mu,\eta) = p(\eta,\eta)$,

$(p2)$ $p(\mu,\mu) \leq p(\mu,\eta)$,

$(p3)$ $p(\mu,\eta) = p(\eta,\mu)$,

$(p4)$ $p(\mu,\eta) \leq p(\mu,\sigma) + p(\sigma,\eta) - p(\sigma,\sigma)$

özelliklerini sağlayan $p : W \times W \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonuna kısmi metrik (W, p) ikilisine bir kısmi metrik uzay denir.

Uyarı 2.1.2. [73] Her metrik, kısmi metriktir. Ancak bunun tersi her zaman sağlanmayabilir. d , W üzerinde metrik olmak üzere

$(p1)$ $\Rightarrow)$ $\mu=\eta$ ise, $d(\mu,\mu)=0$, $d(\mu,\eta)=0$, $d(\eta,\eta)=0$ olduğundan,

$$d(\mu,\mu)=d(\mu,\eta)=d(\eta,\eta)$$

sağlanır.

$\Leftarrow)$ $d(\mu,\mu)=d(\mu,\eta)=d(\eta,\eta)=0$ ise

$$\mu=\eta$$

sağlanır.

$(p2)$

$$d(\mu,\mu)=0\leq d(\mu,\eta)$$

sağlanır.

$(p3)$

$$d(\mu,\eta)=d(\eta,\mu)$$

sağlanır.

$(p4)$ $d(\sigma,\sigma)=0$ olduğundan,

$$d(\mu,\eta)\leq d(\mu,\sigma)+d(\sigma,\eta)-d(\sigma,\sigma)$$

sağlanır.

Metrik, kısmi metrik şartlarını her zaman sağlar ancak kısmi metrik, metrik şartlarını her zaman sağlamayabilir. Çünkü, metriğin 1.aksiyomu olan $(d1)$ her $\mu,\eta,\sigma\in W$ için $\mu=\eta\Leftrightarrow d(\mu,\eta)=0$ aksiyomunun yarısını sağlar. Açıkça görülüyor ki, eğer $p(\mu,\eta)=0$ ise $(p1)$ ve $(p2)$ aksiyomlarından, $\mu=\eta$ elde edilir. Fakat $\mu=\eta$ ise $p(\mu,\eta)=0$ olmak zorunda değildir. Çünkü, $\mu=\eta$ ise $p(\mu,\mu)=p(\mu,\eta)=p(\eta,\eta)$ olduğu biliniyor. Fakat bunların 0'a eşit olup olmadığı bilinmiyor.

Uyarı 2.1.3. [81] Aşağıdaki gibi kısmi metriğe bağlı şekilde tanımlanan yeni fonksiyon, bir metrik belirtir. p , W uzayında bir kısmı metrik olsun.

$$d_p(\mu,\eta)=2p(\mu,\eta)-p(\mu,\mu)-p(\eta,\eta) \qquad (2.1)$$

ile tanımlanan $d_p : W\times W \to [0,\infty)$ fonksiyonu W uzayında bir metriktir.

$(d1)$ $\forall\mu,\eta\in W$ için $d_p(\mu,\eta)=0 \Leftrightarrow \mu=\eta$ sağlanmalıdır.

$\Leftarrow)$ $d_p(\mu,\eta)=0 \Rightarrow 2p(\mu,\eta)-p(\mu,\eta)-p(\eta,\eta)=0$

olur ki buradan

$$p(\mu,\eta)-p(\mu,\mu)+p(\mu,\eta)-p(\eta,\eta)=0$$

şeklinde düşünüldüğünde, $p(\mu,\eta)-p(\mu,\mu)\geq 0$, $p(\mu,\eta)-p(\eta,\eta)\geq 0$ olduğundan

$$p(\mu,\eta)-p(\mu,\mu)=0\,,\; p(\mu,\eta)-p(\eta,\eta)=0$$

olduğu anlaşılır. Dolayısıyla

$$p(\mu,\eta)=p(\mu,\mu),\; p(\mu,\eta)=p(\eta,\eta)$$

elde edilir. Buradan, $p(\mu,\eta)=p(\mu,\mu)=p(\eta,\eta)$ 'dır. p kısmi metrik olduğundan

$$\mu=\eta$$

elde edilir.

$\Rightarrow)$ $\mu=\eta$ olsun.

$$\begin{aligned} d_p(\mu,\eta) &= 2p(\mu,\eta)-p(\mu,\mu)-p(\eta,\eta) \\ &= 2p(\mu,\mu)-p(\mu,\mu)-p(\mu,\mu) \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$d_p(\mu,\eta)=0 \Leftrightarrow \mu=\eta$$

sağlanır.

$(d2)$ Her $\mu,\eta,\sigma\in W$ için $d_p(\mu,\eta)\geq 0$ olmalıdır. (2.1) tanımından ve

$$p(\mu,\eta)-p(\mu,\mu)\geq 0\,,\ p(\mu,\eta)-p(\eta,\eta)\geq 0$$

olduğundan.

$$d_p(\mu,\eta)\geq 0$$

elde edilir.

$(d3)$ Her $\mu,\eta,\sigma\in W$ için $d_p(\mu,\eta)=d_p(\eta,\mu)$ olmalıdır. p kısmi metrik olduğundan, $p(\mu,\eta)=p(\eta,\mu)$'dır. Buradan,

$$\begin{aligned} d_p(\mu,\eta) &= 2p(\mu,\eta)-p(\mu,\mu)-p(\eta,\eta) \\ &= 2p(\eta,\mu)-p(\eta,\eta)-p(\mu,\mu) \\ &= d_p(\eta,\mu) \end{aligned}$$

bulunur.

$(d4)$ Her $\mu,\eta,\sigma\in W$ için $d_p(\mu,\eta)\leq d_p(\mu,\sigma)+d_p(\sigma,\eta)$ sağlanmalıdır.

$$\begin{aligned} d_p(\mu,\eta) &= 2p(\mu,\eta)-p(\mu,\mu)-p(\eta,\eta) \\ &= p(\mu,\eta)+p(\mu,\eta)-p(\mu,\mu)-p(\eta,\eta) \\ &\leq p(\mu,\sigma)+p(\eta,\sigma)-p(\sigma,\sigma)+p(\mu,\sigma) \\ &\quad +p(\eta,\sigma)-p(\sigma,\sigma)-p(\mu,\mu)-p(\eta,\eta) \\ &= 2p(\mu,\sigma)-p(\mu,\mu)-p(\sigma,\sigma)+2p(\eta,\sigma)-p(\eta,\eta)-p(\sigma,\sigma) \\ &= d_p(\mu,\sigma)+d_p(\sigma,\eta) \end{aligned}$$

olur.

Tanım 2.1.4. [81] (W,p) kısmi metrik uzay olsun.

$$d_w(\mu,\eta)=\max\{p(\mu,\eta)-p(\mu,\mu),\,p(\mu,\eta)-p(\eta,\eta)\} \tag{2.2}$$

ile tanımlanan $d_w : W\times W\to\mathbb{R}^+$ fonksiyonu da W üzerinde bir metriktir.

$(d1)$ Her $\mu,\eta\in W$ için

$$p(\mu,\mu)\leq p(\mu,\eta)\Rightarrow p(\mu,\eta)-p(\mu,\mu)\geq 0\,,$$

$$p(\eta,\eta)\leq p(\mu,\eta)\Rightarrow p(\mu,\eta)-p(\eta,\eta)\geq 0\,,$$

olup buradan,

$$d_w(\mu,\eta)=\max\{p(\mu,\eta)-p(\mu,\mu),p(\mu,\eta)-p(\eta,\eta)\}\geq 0$$

elde edilir.

$(d2)$ Her $\mu,\eta\in W$ için

$\Rightarrow)$ $d_w(\mu,\eta)=0$ olsun. O halde

$$d_w(\mu,\eta)=\max\{p(\mu,\eta)-p(\mu,\mu),p(\mu,\eta)-p(\eta,\eta)\}=0$$

$$p(\mu,\eta)-p(\mu,\mu)=0\Rightarrow p(\mu,\eta)=p(\mu,\mu),$$

$$p(\mu,\eta)-p(\eta,\eta)=0\Rightarrow p(\mu,\eta)=p(\eta,\eta)$$

olduğundan

$$p(\mu,\eta)=p(\mu,\mu)=p(\eta,\eta)\Rightarrow \mu=\eta$$

sağlanır.

$\Leftarrow)$ $\mu=\eta$ olsun.

$$\begin{aligned}d_w(\mu,\eta)&=\max\{p(\mu,\eta)-p(\mu,\mu),p(\mu,\eta)-p(\eta,\eta)\}\\&=\max\{p(\mu,\mu)-p(\mu,\mu),p(\mu,\mu)-p(\mu,\mu)\}\\&=\max\{0,0\}=0\end{aligned}$$

dır.

$(d3)$ Her $\mu,\eta\in W$ için kısmi metriğin simetri özelliğinden $p(\mu,\eta)=p(\eta,\mu)$ sağlanır.

$d_w(\mu,\eta)$ ifadesinde kısmi metriğin simetri özelliğini kullanılırsa

$$\begin{aligned}d_w(\mu,\eta)&=\max\{p(\mu,\eta)-p(\mu,\mu),p(\mu,\eta)-p(\eta,\eta)\}\\&=\max\{p(\eta,\mu)-p(\eta,\eta),p(\eta,\mu)-p(\mu,\mu)\}\\&=d_w(\eta,\mu)\end{aligned}$$

elde edilir.

$(d4)$ Her $\mu,\eta\in W$ için kısmi metriğin $(p4)$ özelliği $d_w(\mu,\eta)$ ifadesinde kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
d_w(\mu,\eta) &= \max\{p(\mu,\eta)-p(\mu,\mu),\, p(\mu,\eta)-p(\eta,\eta)\} \\
&\le \max\left\{\begin{matrix} p(\mu,\sigma)+p(\sigma,\eta)-p(\sigma,\sigma)-p(\mu,\mu), \\ p(\mu,\sigma)+p(\sigma,\eta)-p(\sigma,\sigma)-p(\eta,\eta) \end{matrix}\right\} \\
&= \max\{p(\mu,\sigma)-p(\mu,\mu),\, p(\mu,\sigma)-p(\sigma,\sigma)\} \\
&\quad + \max\{p(\sigma,\eta)-p(\sigma,\sigma),\, p(\sigma,\eta)-p(\eta,\eta)\} \\
&= d_w(\mu,\sigma)+d_w(\sigma,\eta)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Örnek 2.1.5. [83] $W=[0,\infty)$ olmak üzere $p:W\times W\to\mathbb{R}^+$ fonksiyonu $\forall\mu,\eta\in W$ için $p(\mu,\eta)=\max\{\mu,\eta\}$ olarak tanımlansın. O zaman (W,p) bir kısmi metrik uzaydır. Ancak bir metrik uzay değildir. Kısmi metriğe bağlı tanımlanan $d_p(\mu,\eta)=|\mu-\eta|$ fonksiyonu ile (W,d_p) metrik uzaydır.

$(p1)$

$$
\begin{aligned}
\mu=\eta \Rightarrow p(\mu,\mu) &= \max\{\mu,\mu\}=\mu \\
p(\mu,\eta) &= \max\{\mu,\eta\}=\mu \\
p(\eta,\eta) &= \max\{\eta,\eta\}=\mu
\end{aligned}
$$

dır. Dolayısıyla, $p(\mu,\mu)=p(\mu,\eta)=p(\eta,\eta)$'dır. Diğer taraftan,

$$
\begin{gathered}
\Rightarrow p(\mu,\mu)=p(\mu,\eta)=p(\eta,\eta) \\
\max(\mu,\mu)=\max(\mu,\eta)=\max(\eta,\eta) \\
\mu=\max(\mu,\eta)=\eta \\
\mu=\eta
\end{gathered}
$$

dır. Yani $\mu=\eta \Leftrightarrow p(\mu,\mu)=p(\mu,\eta)=p(\eta,\eta)$'dır.

$(p2)$

$$
p(\mu,\mu)=\max\{\mu,\mu\}=\mu\le\max\{\mu,\eta\}=p(\mu,\eta)
$$

dır.

$(p3)$

$$p(\mu,\eta)=\max\{\mu,\eta\}=\max\{\eta,\mu\}=p(\eta,\mu)$$

dır.

$(p4)$

$$\begin{aligned} p(\mu,\eta) &= \max\{\mu,\eta\} \\ &= \max\{\mu+\sigma-\sigma,\eta+\sigma-\sigma\} \\ &\leq \max\{\mu,\sigma\}+\max\{\sigma,\eta\}-\max\{\sigma,\sigma\} \\ &= p(\mu,\sigma)+p(\sigma,\eta)-p(\sigma,\sigma) \end{aligned}$$

dır. Kısmi metriğin şartları sağlanır. Ancak metrik olma şartlarından $(d1)$ sağlanmaz. $\forall\mu,\eta\in W$ için $d(\mu,\eta)=0 \Leftrightarrow \mu=\eta$ olmalıdır.

$\Rightarrow)$ $\quad p(\mu,\eta)=\max\{\mu,\eta\}=0 \Rightarrow \mu=\eta$

dır.

$\Leftarrow)$ $\quad \mu=\eta \Rightarrow p(\mu,\eta)=\max\{\mu,\eta\}=\max\{\mu,\mu\}=\mu$

dır. Ancak μ her zaman sıfır olmayabilir. $(d1)$ iki taraflı olarak sağlanmadığından $p(\mu,\eta)=\max\{\mu,\eta\}$ fonksiyonu metrik değildir. Ancak (2.1) ifadesinin metrik olduğu bilindiğinden buradan

$$\begin{aligned} d_p(\mu,\eta) &= 2p(\mu,\eta)-p(\mu,\mu)-p(\eta,\eta) \\ &= 2\max\{\mu,\eta\}-\max\{\mu,\mu\}-\max\{\eta,\eta\} \\ &= 2\max\{\mu,\eta\}-\mu-\eta \end{aligned}$$

dır. Buradan $\mu>\eta$ ise sonuç $\mu-\eta$ çıkar. $\eta>\mu$ ise sonuç $\eta-\mu$ olur. Yani, $d_p(\mu,\eta)=|\mu-\eta|$ olur ki bu şekilde metrik şartları sağlanır.

Örnek 2.1.6. [83] $W=\{[a,b]:a,b\in\mathbb{R},a\leq b\}$ kümesi üzerinde aşağıdaki gibi tanımlanan

$$p([a,b],[c,d])=\max\{b,d\}-\min\{a,c\}$$

$p: W \times W \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu için, (W, p) bir kısmi metrik uzaydır.

$(p1)$

$\Rightarrow$) $[a,b]=[c,d]$ olsun.

$$p([a,b],[\mathrm{a},\mathrm{b}]) = \max\{b,b\} - \min\{a,a\} = b-a$$
$$p([a,b],[c,d]) = \max\{b,d\} - \min\{a,c\} = b-a$$
$$p([c,d],[c,d]) = \max\{d,d\} - \min\{c,c\} = d-c = b-a$$

dır. Yani, $p([a,b],[a,b]) = p([a,b],[c,d]) = p([c,d],[c,d])$ olur.

$\Leftarrow$) $p([a,b],[a,b]) = p([a,b],[c,d]) = p([c,d],[c,d])$ ise

$$b-a = p([a,b],[c,d]) = d-c$$

olup buradan $[a,b]=[c,d]$ olduğu anlaşılır.

$(p2)$

$$\begin{aligned} p([a,b],[a,b]) &= \max\{b,b\} - \max\{a,a\} \\ &= b-a \\ &\leq \max\{b,d\} - \min\{a,c\} \\ &= p([a,b],[c,d]) \end{aligned}$$

dır.

$(p3)$

$$\begin{aligned} p([a,b],[c,d]) &= \max\{b,d\} - \min\{a,c\} \\ &= \max\{d,b\} - \min\{c,a\} \\ &= p([c,d],[\mathrm{a},\mathrm{b}]) \end{aligned}$$

dır.

$(p4)$

$$
\begin{aligned}
p([a,b],[c,d]) &= \max\{b,d\} - \min\{a,c\} \\
&= \max\{b+f-f, d+f-f\} - \min\{a+e-e, c+e-e\} \\
&\leq \max\{b,f\} + \max\{f,d\} - \max\{f,f\} \\
&\quad - \min\{a,e\} - \min\{e,c\} + \min\{e,e\} \\
&= \max\{b,f\} - \min\{a,e\} + \max\{f,d\} - \min\{e,c\} \\
&\quad - (\max\{f,f\} - \min\{e,e\}) \\
&= p([a,b],[e,f]) + p([e,f],[c,d]) - p([e,f],[e,f])
\end{aligned}
$$

dır. Bütün aksiyomlar sağlandığından (W,p) kısmi metrik uzaydır.

Örnek 2.1.7. [81] $W = [0,1] \cup [2,3]$ kümesi üzerinde p fonksiyonu $p: W \times W \to \mathbb{R}^+$

$$
p(\mu,\eta) = \begin{cases} \max\{\mu,\eta\}, & \{\mu,\eta\} \cap [2,3] \text{ ise} \\ |\mu-\eta|, & \{\mu,\eta\} \subset [0,1] \text{ ise} \end{cases}
$$

olarak tanımlansın. O zaman (W,p) kısmi metrik uzaydır.

$(p1)$ $\Rightarrow)$ $\mu = \eta$ olsun.

i) $\{\mu,\eta\} = \{\mu,\mu\} \cap [2,3] \neq \varnothing \Rightarrow p(\mu,\mu) = p(\mu,\eta) = p(\eta,\eta) = \max\{\mu,\mu\} = \mu$

ii) $\{\mu,\eta\} = \{\mu,\mu\} \subset [0,1] \Rightarrow p(\mu,\mu) = p(\mu,\eta) = p(\eta,\eta) = |\mu-\mu| = 0$

elde edilir.

$\Leftarrow)$ $p(\mu,\mu) = p(\mu,\eta) = p(\eta,\eta)$ mıdır?

i) $\{\mu,\eta\} \cap [2,3] \neq \varnothing \Rightarrow p(\mu,\mu) = \mu,\ p(\eta,\eta) = \eta \Rightarrow \mu = \eta$

ii)

$$
\begin{aligned}
\{\mu,\eta\} \subset [0,1] \Rightarrow p(\mu,\mu) &= |\mu-\mu| = 0, \\
p(\eta,\eta) &= |\eta-\eta| = 0, \\
p(\mu,\eta) &= |\mu-\eta|
\end{aligned}
$$

olur. Yani, $|\mu-\eta| = 0$ 'dır. Buradan da $\mu = \eta$ olduğu anlaşılır.

$(p2)$

i) $\{\mu,\eta\}\cap[2,3]\Rightarrow p(\mu,\mu)=\max\{\mu,\mu\}=\mu\leq\max\{\mu,\eta\}=p(\mu,\eta)$,

ii) $\{\mu,\eta\}\subset[0,1]\Rightarrow p(\mu,\mu)=|\mu-\mu|=0\leq|\mu-\eta|=p(\mu,\eta)$

dır.

$(p3)$

i) $\{\mu,\eta\}\cap[2,3]\neq\emptyset\Rightarrow p(\mu,\eta)=\max\{\mu,\eta\}=\max\{\eta,\mu\}=p(\eta,\mu)$,

ii) $\{\mu,\eta\}\subset[0,1]\Rightarrow p(\mu,\eta)=|\mu-\eta|=|-(\eta-\mu)|=|\eta-\mu|=p(\eta,\mu)$

bulunur.

$(p4)$

i)

$$\begin{aligned}\{\mu,\eta\}\cap[2,3]\neq\emptyset\Rightarrow p(\mu,\eta)&=\max\{\mu,\eta\}\\&\leq\max\{\mu,\sigma\}+\max\{\sigma,\eta\}-\max\{\sigma,\sigma\}\\&=p(\mu,\sigma)+p(\sigma,\eta)-p(\sigma,\sigma)\end{aligned}$$

sağlanır.

ii)

$$\begin{aligned}\{\mu,\eta\}\subset[0,1]\Rightarrow p(\mu,\eta)=|\mu-\eta|&=|\mu-\eta+\sigma-\sigma|\\&=|\mu-\sigma+\sigma-\eta|\\&\leq|\mu-\sigma|+|\sigma-\eta|\\&=|\mu-\sigma|+|\sigma-\eta|-|\sigma-\sigma|\\&=p(\mu,\sigma)+p(\sigma,\eta)-p(\sigma,\sigma)\end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek 2.1.8. $W=\mathbb{R}$ ve $\forall\mu,\eta\in W$ için

$$p(\mu,\eta)=e^{\max\{\mu,\eta\}}$$

olsun. Bu durumda (W,p) bir kısmi metrik uzaydır.

$(p1)\Rightarrow)$ $\mu=\eta$ ise,

$$\left.\begin{array}{l} p(\mu,\eta)=e^{\max\{\mu,\eta\}}=e^{\mu} \\ p(\mu,\mu)=e^{\max\{\mu,\eta\}}=e^{\mu} \\ p(\eta,\eta)=e^{\max\{\eta,\eta\}}=e^{\eta}=e^{\mu} \end{array}\right\} p(\mu,\eta)=p(\mu,\mu)=p(\eta,\eta)$$

bulunur.

$\Leftarrow)$ $p(\mu,\mu)=p(\mu,\eta)=p(\eta,\eta)$ olsun.

$$\begin{aligned} & e^{\max\{\mu,\mu\}}=e^{\max\{\mu,\eta\}}=e^{\max\{\eta,\eta\}} \\ & e^{\mu}=e^{\max\{\mu,\eta\}}=e^{\eta} \\ & \mu=\max\{\mu,\eta\}=\eta \\ & \quad \mu=\eta \end{aligned}$$

olur. Bu durumda birinci aksiyom sağlanır.

$(p2)$ $\max\{\mu,\mu\}=\mu\le\max\{\mu,\eta\}$ olup,

$$e^{\max\{\mu,\mu\}}\le e^{\max\{\mu,\eta\}}\Rightarrow p(\mu,\mu)\le p(\mu,\eta)$$

elde edilir.

$(p3)$

$$p(\mu,\eta)=e^{\max\{\mu,\eta\}}=e^{\max\{\eta,\mu\}}=p(\eta,\mu)$$

sağlanır.

$(p4)$ $\max\{\mu,\eta\}\le\max\{\mu,\sigma\}+\max\{\sigma,\eta\}-\max\{\sigma,\sigma\}$ olduğundan

$$e^{\max\{\mu,\eta\}}\le e^{\max\{\mu,\sigma\}}+e^{\max\{\sigma,\eta\}}-e^{\max\{\sigma,\sigma\}}\Rightarrow p(\mu,\eta)\le p(\mu,\sigma)+p(\sigma,\eta)-p(\sigma,\sigma)$$

dır. Kısmi metriğin bütün şartları sağlandığından (W,p) kısmi metrik uzaydır.

Şimdi ise metrik ile kısmi metriğin topolojileri karşılaştırılıp, incelenecektir.

Tanım 2.1.9. [86] (W,p) herhangi kısmi metrik uzay olmak üzere,

$\forall\mu\in W$ ve $\varepsilon>0$ için

$$B_p(\mu,\varepsilon)=\{\eta\in W : p(\mu,\eta)<p(\mu,\mu)+\varepsilon\}$$

biçiminde tanımlanan kümeye $\mu \in W$ merkezli, $\varepsilon > 0$ yarıçaplı açık $p-$yuvarı denir. Benzer şekilde,

$$B_p[\mu,\varepsilon] = \{\eta \in W : p(\mu,\eta) \le p(\mu,\mu)+\varepsilon\}$$

$\mu \in W$ merkezli, $\varepsilon > 0$ yarıçaplı kapalı $p-$yuvarı denir.

(W,p) kısmi metrik uzayında $\{B_p(\mu,\varepsilon) : \mu \in W, \varepsilon > 0\}$ bazı ile W üzerinde üretilen topoloji τ_p ile gösterilir.

Örnek 2.1.10. $W = [0,1] \cup [2,3]$ kümesi üzerinde p fonksiyonu $p : W \times W \to \mathbb{R}^+$

$$p(\mu,\eta) = \begin{cases} \max\{\mu,\eta\}, & \{\mu,\eta\} \cap [2,3] \text{ ise} \\ |\mu-\eta|, & \{\mu,\eta\} \subset [0,1] \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlansın. (W,p) ikilisinin kısmi metrik uzaydır. Kısmi metrikte açık yuvar tanımı $B_p(\mu,\varepsilon) = \{\sigma \in W : p(\mu,\sigma) < p(\mu,\mu)+\varepsilon\}$ olduğundan,

i) $\{\mu,\sigma\} \cap [2,3] \neq \emptyset$ ise

$$\max\{\mu,\sigma\} < \mu+\varepsilon$$

$$\mu > \sigma \Rightarrow 0 < \varepsilon \text{ (her } \sigma \text{ için sağlanır.)}$$

$$\mu < \sigma \Rightarrow \sigma < \mu+\varepsilon$$

olur.

ii) $\{\mu,\sigma\} \subset [0,1]$ ise

$$\begin{aligned} &\Rightarrow |\mu-\sigma| < \varepsilon \\ &\Rightarrow -\varepsilon < \mu-\sigma < \varepsilon \\ &\Rightarrow -\varepsilon-\mu < -\sigma < \varepsilon-\mu \\ &\Rightarrow \sigma \in (\mu-\varepsilon, \mu+\varepsilon) \end{aligned}$$

dır. Böylece,

$$B_p(\mu,\varepsilon)=\begin{cases}[2,3], & \mu>\sigma,\{\mu,\sigma\}\cap[2,3]\neq\varnothing \text{ ise}\\ (\mu,\mu+\varepsilon), & \mu<\sigma,\{\mu,\sigma\}\cap[2,3]\neq\varnothing \text{ ise}\\ (\mu-\varepsilon,\mu+\varepsilon), & \{\mu,\sigma\}\subset[0,1] \text{ ise}\end{cases}$$

olarak elde edilir.

Örnek 2.1.11. $W=[0,\infty)$ olmak üzere $p:W\times W\to\mathbb{R}^+$ fonksiyonu her $\mu,\eta\in W$ için $p(\mu,\eta)=\max\{\mu,\eta\}$ olarak tanımlansın. (W,p) bir kısmi metrik uzaydır. Kısmi metrikteki açık yuvar tanımı $\forall\mu\in W$ ve $\varepsilon>0$ için $B_p(\mu,\varepsilon)=\{\sigma\in W: p(\mu,\sigma)<p(\mu,\mu)+\varepsilon\}$ olduğundan bu kısmi metrik uzayın açık yuvarı

$$B_p(\mu,\varepsilon)=\begin{cases}[0,\infty), & \mu\geq\sigma \text{ ise}\\ (\mu,\mu+\varepsilon), & \mu<\sigma \text{ ise}\end{cases}$$

ile tanımlıdır.

Teorem 2.1.12. [73] Kısmi metrik topolojisi T_0-dır.

İspat : $(p1)$ ve $(p2)$ özelliklerinden $\mu\neq\eta$ için $p(\mu,\mu)<p(\mu,\eta)$ ya da $p(\eta,\eta)<p(\mu,\eta)$'dır. Burada, $p(\mu,\mu)<p(\mu,\eta)$ kullanılırsa,

$\mu\in B_p(\mu,\varepsilon)$ ve $\eta\notin B_p(\mu,\varepsilon)$ öyle ki $\varepsilon=\dfrac{p(\mu,\eta)-p(\mu,\mu)}{2}$ olarak seçilirse, (W,p) kısmi metrik uzayı T_0-uzayıdır. $\eta\in B_p(\mu,\varepsilon)$ olsun.

$$\begin{aligned}&p(\mu,\eta)<p(\mu,\mu)+\varepsilon\\ &p(\mu,\eta)<p(\mu,\mu)-\frac{p(\mu,\mu)}{2}+\frac{p(\mu,\eta)}{2}\\ &2p(\mu,\eta)<2p(\mu,\mu)-p(\mu,\mu)+p(\mu,\eta)\\ &p(\mu,\eta)<p(\mu,\mu)\end{aligned}$$

elde edilir ki bu $p(\mu,\mu)<p(\mu,\eta)$ olmasıyla çelişir. O halde, $\eta\in B_p(\mu,\varepsilon)$ kabulü yanlıştır. Bu durumda (W,p) uzayının T_0-uzayı olduğu elde edilir.

Uyarı 2.1.13. Kısmi metrik topolojisi T_1-uzayı olmak zorunda değildir. Örneğin, $W=[0,\infty)$ ile $p:W\times W\to\mathbb{R}^+$ fonksiyonu her $\mu,\eta\in W$ için $p(\mu,\eta)=\max\{\mu,\eta\}$ olarak tanımlansın. (W,p) bir kısmi metrik uzayının açık yuvarı

$$B_p(\mu,\varepsilon)=\begin{cases}[0,\infty), & \mu\geq\sigma \quad \text{ise}\\ (\mu,\mu+\varepsilon), & \mu<\sigma \quad \text{ise}\end{cases}$$

olup $W=[0,\infty)$uzayında herhangi iki farklı nokta alınsın. $\mu=4\neq 2=\eta$ ve $\varepsilon=1$, $\sigma=1$ olarak seçilirse:

$B_p(4,1)=[0,\infty)$ ve $B_p\left(2,\frac{1}{2}\right)=[0,\infty)$ olduğundan bu (W,p)'nin T_1-uzayı olmadığını gösterir.

Uyarı 2.1.14. Kısmi metrik topolojisi T_2-değildir.

Örneğin, $W=[0,1]\cup[2,3]$ kümesi üzerinde $p:W\times W\to\mathbb{R}^+$ fonksiyonu,

$$p(\mu,\eta)=\begin{cases}\max\{\mu,\eta\}, & \{\mu,\eta\}\cap[2,3] \quad \text{ise}\\ |\mu-\eta|, & \{\mu,\eta\}\subset[0,1] \quad \text{ise}\end{cases}$$

olarak tanımlansın. (W,p) kısmi metrik uzaydır ve

$$B_p(\mu,\varepsilon)=\begin{cases}[2,3], & \mu>\sigma,\{\mu,\sigma\}\cap[2,3]\neq\varnothing \text{ ise}\\ (\mu,\mu+\varepsilon), & \mu<\sigma,\{\mu,\sigma\}\cap[2,3]\neq\varnothing \text{ ise}\\ (\mu-\varepsilon,\mu+\varepsilon), & \{\mu,\sigma\}\subset[0,1] \quad \text{ise}\end{cases}$$

dır. (W,p) kısmi metrik uzayında herhangi iki farklı nokta μ ve σ verilsin.

$W=[0,1]\cup[2,3]$ kümesinde $\mu<\sigma$ için $\{\mu,\sigma\}\cap[2,3]\neq\varnothing$ olmak üzere μ noktası alınsın. Bu noktanın açık yuvarı $(\mu,\mu+\varepsilon)$'dır.

$W=[0,1]\cup[2,3]$ kümesinde $\eta>\sigma$ için $\{\eta,\sigma\}\cap[2,3]\neq\varnothing$ olmak üzere η noktası alınsın. Bu noktanın açık yuvarı $[2,3]$'dır.

Bu iki farklı noktanın açık yuvarları hangi şartta alınırsa alınsın $(\mu,\mu+\varepsilon)\cap[2,3]\neq\varnothing$ olduğundan burada tanımlanan (W,p) kısmi metrik uzayı T_2-uzayı değildir.

$W=[0,\infty)$ ile $p:W\times W\to\mathbb{R}^+$ fonksiyonu her $\mu,\eta\in W$ için

$$p(\mu,\eta)=\max\{\mu,\eta\}$$

olarak tanımlansın. (W,p) bir kısmi metrik uzaydır ve

$$B_p(\mu,\varepsilon)=\begin{cases}[0,\infty), & \mu>\sigma \quad \text{ise}\\ (\mu,\mu+\varepsilon), & \mu<\sigma \quad \text{ise}\end{cases}$$

dır. (W,p) kısmi metrik uzayında herhangi iki farklı nokta μ ve σ olsun.

$W=[0,\infty)$ kümesinde $\mu>\sigma$ için μ noktası alınsın. Bu noktanın açık yuvarı $B_p(\mu,\varepsilon)=[0,\infty)$'dır.

$W=[0,\infty)$ kümesinde $\eta<\sigma$ için μ noktası alınsın. Bu noktanın açık yuvarı $B_p(\eta,\varepsilon)=(\eta,\eta+\varepsilon)$'dır.

Bu iki farklı noktanın açık yuvarlarının kesişimi $B_p(\mu,\varepsilon)\cap B_p(\eta,\varepsilon)\neq\varnothing$'dır. Dolayısıyla (W,p) kısmi metrik uzayı T_2-uzayı değildir.

Kısmi metriğin topolojik yapısı tanımlandığından yakınsaklık, Cauchy dizisi ve tamlık tanımları yapılabilir.

Tanım 2.1.15. [81] (W,p) bir kısmi metrik uzay olsun.

i) (W,p) kısmi metrik uzayında bir $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi bir $\mu\in W$ noktasına yakınsaktır $\Leftrightarrow p(\mu,\mu)=\lim\limits_{n\to\infty}p(\mu,\mu_n)$'dır.

ii) (W,p) kısmi metrik uzayında bir $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi Cauchy dizisidir $\Leftrightarrow \lim\limits_{n,m\to\infty}p(\mu_n,\mu_m)$ limiti mevcuttur ve sonludur.

iii) Yakınsak her $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy dizisi, τ_p topolojisine göre bir $\mu\in W$ noktasına yakınsak yani, $\lim\limits_{n,m\to\infty}p(\mu_n,\mu_m)=p(\mu,\mu)$ ise (W,p) uzayına tam kısmi metrik uzay denir.

iv) $T:W\to W$ dönüşümü $\mu_0\in W$ noktasında süreklidir $\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon>0$ için

$$T\left(B_p\left(\mu_0,\delta\right)\right)\subset B_p\left(T\mu_0,\varepsilon\right)$$

olan $\delta>0$ sayısı vardır.

Uyarı 2.1.16. [86] Kısmi metrik uzayda bir dizinin limiti tek olmak zorunda değildir. Örneğin, $p:W\times W\to\mathbb{R}^+$ olmak üzere $p(\mu,\eta)=\max\{\mu,\eta\}$ kısmi metriği verilsin. $\forall\mu,\eta\in W$ için (W,p) uzayında $\left\{\frac{1}{n+1}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi ele alınsın. Kısmi metrik uzayda bir $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi bir $\mu\in W$ noktasına yakınsıyorsa, $p(\mu,\mu)=\lim_{n\to\infty}p(\mu,\mu_n)$ olduğundan

$$\lim_{n\to\infty}p\left(0,\frac{1}{n+1}\right)=0=p(0,0),$$

$$\lim_{n\to\infty}p\left(1,\frac{1}{n+1}\right)=1=p(1,1)$$

elde edilir. Buradan bu kısmi metrik örneği için aynı dizinin $\mu=0$ ve $\mu=1$ olmak üzere birden fazla limit noktası vardır. Ancak aşağıdaki şart kısmi metrik uzayda dizinin limitinin tek olduğu durumu gösterir.

Lemma 2.1.17. [84] (W,p) kısmi metrik uzay ve $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, W uzayında bir dizi olsun. τ_p topolojisine göre $\lim_{n\to\infty}p(\mu_n,\mu)=p(\mu,\mu)$ ve $\lim_{n\to\infty}p(\mu_n,\eta)=p(\eta,\eta)$ iken $\lim_{n\to\infty}p(\mu_n,\mu_n)=p(\mu,\mu)=p(\eta,\eta)$ ise $\mu=\eta$ 'dir.

Teorem 2.1.18. [81] (W,p) kısmi metrik uzay olsun.

i) $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, (W,p) uzayında bir Cauchy dizisidir $\Leftrightarrow$ $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, (W,d_p) metrik uzayında bir Cauchy dizisidir.

ii) Bir (W,p) kısmi metrik uzayı tamdır $\Leftrightarrow$ (W,d_p) metrik uzayı tamdır.

$$\lim_{n\to\infty}d_p(\mu_n,\mu)=0\Leftrightarrow p(\mu,\mu)=\lim_{n\to\infty}p(\mu_n,\mu)=\lim_{n,m\to\infty}p(\mu_n,\mu_m)$$

sağlanır.

İspat :

i) $\Rightarrow$) $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, (W,p) uzayında bir Cauchy dizisi olsun. Bu durumda $\lim_{n,m\to\infty} p(\mu_n,\mu_m)$ mevcut ve sonludur. (2.1) eşitliğinde her iki tarafta limit alınırsa, $\lim_{n,m\to\infty} d_p(\mu_n,\mu_m)$ elde edilir ki, bu da $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin (W,d_p) uzayında Cauchy dizisi olduğunu gösterir.

$\Leftarrow$) $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (W,d_p) uzayında Cauchy dizisi olsun. Bu durumda $\lim_{n,m\to\infty} d_p(\mu_n,\mu_m)=0$ sağlanır. (2.1) eşitliğinde her iki tarafta limit alınırsa,

$$0=\lim_{n,m\to\infty}\left[2p(\mu_n,\mu_m)-p(\mu_n,\mu_n)-p(\mu_m,\mu_m)\right]$$

olur ki bu da $\lim_{n,m\to\infty} p(\mu_n,\mu_m)$ ifadesinin mevcut ve sonlu olması anlamına gelir. Bu da $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin (W,p) uzayında bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir.

ii) $\Rightarrow$) (W,p) kısmi metrik uzayı tam olsun. Bu durumda τ_p topolojisine göre her $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}\in W$ Cauchy dizisi $\mu\in W$ noktasına yakınsar ki, $p(\mu,\mu)=\lim_{n,m\to\infty} p(\mu_n,\mu_m)$ sağlanır. $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, (W,d_p) uzayında bir Cauchy dizisi olsun. $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin (W,p) uzayında bir Cauchy dizisi olduğu gösterilecektir. $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, (W,d_p) uzayında bir Cauchy dizisi olduğundan $\lim_{n,m\to\infty} d_p(\mu_n,\mu_m)=0$ sağlanır. (2.1) eşitliğinde limit alınırsa, $p(\mu,\mu)=\lim_{n,m\to\infty} p(\mu_n,\mu_m)$ elde edilir. Bu nedenle $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (W,p) uzayında bir Cauchy dizisidir. (W,p) tam olduğundan τ_p topolojisine göre $\mu\in W$ noktasına yakınsar. $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin (W,d_p) uzayında yakınsak olması için $\lim_{n\to\infty} d_p(\mu_n,\mu)=0$ olduğu gösterilecektir. (2.1) eşitliğinde limit alınırsa,

$$\lim_{n\to\infty} d_p(\mu_n,\mu_m)=\lim_{n\to\infty} 2p(\mu_n,\mu_m)-\lim_{n\to\infty} p(\mu_n,\mu_n)-\lim_{n\to\infty} p(\mu_m,\mu_m)$$

olur. $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, (W,p) uzayında yakınsak olduğundan

$$p(\mu,\mu)=\lim_{n\to\infty} p(\mu_n,\mu_n)=\lim_{n\to\infty} p(\mu_n,\mu)$$

bulunur. Bu nedenle $\lim_{n\to\infty} d_p(\mu_n,\mu)=0$ elde edilir. Dolayısıyla, $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi (W,d_p)uzayında yakınsaktır. Buradan $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy dizisi uzayda bir noktaya yakınsadığından (W,d_p) uzayı tamdır.

$\Leftarrow$) (W,d_p) metrik uzayı tam olsun. Bu durumda τ_p topolojisine göre $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in W$ her Cauchy dizisi $\mu \in W$ noktasına yakınsar ki, $\lim_{n\to\infty} d_p(\mu_n,\mu) = \lim_{n,m\to\infty} d_p(\mu_n,\mu_m)=0$ sağlanır. $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi (W,p) uzayında bir Cauchy dizisi olsun. $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin (W,d_p) uzayında Cauchy dizisi olduğu gösterilecektir. $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, (W,p) uzayında Cauchy dizisi olduğundan $p(\mu,\mu)=\lim_{n,m\to\infty} p(\mu_n,\mu_m)$ sağlanır. (2.1) ifadesinde limit alınırsa, $\lim_{n,m\to\infty} d_p(\mu_n,\mu_m)=0$ bulunur. Böylece $p(\mu,\mu)=\lim_{n,m\to\infty} p(\mu_n,\mu_m)$ sağlanır. Dolayısıyla $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi (W,d_p) uzayında Cauchy dizisidir. (W,d_p) tam olduğundan uzayda bir $\mu \in W$ noktasına yakınsar.

$\Rightarrow$) $\lim_{n\to\infty} d_p(\mu_n,\mu)=0$ olsun.

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\big(2p(\mu_n,\mu)-p(\mu_n,\mu_n)-p(\mu,\mu)\big)=0\\
&\lim_{n\to\infty} p(\mu_n,\mu)-\lim_{n\to\infty} p(\mu_n,\mu_n)-\lim_{n\to\infty} p(\mu,\mu)=0\\
&\lim_{n\to\infty} p(\mu_n,\mu)=\lim_{n,m\to\infty} p(\mu_n,\mu_m)=p(\mu,\mu)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

$\Leftarrow$) $\lim_{n\to\infty} p(\mu_n,\mu)=\lim_{n,m\to\infty} p(\mu_n,\mu_m)=p(\mu,\mu)$ olsun. (2.1)'den dolayı,

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} d_p(\mu_n,\mu) &= \lim_{n\to\infty}\big[2p(\mu_n,\mu)-p(\mu_n,\mu_n)-p(\mu,\mu)\big]\\
&=\lim_{n\to\infty} 2p(\mu_n,\mu)-\lim_{n\to\infty} p(\mu_n,\mu)-\lim_{n\to\infty} p(\mu,\mu)\\
&=0
\end{aligned}
$$

bulunur.

Teorem 2.1.19. [81] (W,p) kısmi metrik uzay olsun.

1) Eğer $p(\mu,\eta)=0$ ise o zaman, $\mu=\eta$ sağlanır.

2) Eğer $\mu \neq \eta$ ise o zaman, $p(\mu,\eta) > 0$ sağlanır.

İspat :

1) $p(\mu,\eta) = 0$ ise p kısmi metrik olduğundan $(p2)$ gereği,

$p(\mu,\mu) \leq p(\mu,\eta)$ veya $p(\eta,\eta) \leq p(\mu,\eta)$'dır. $0 \leq p(\mu,\mu) \leq 0$, $0 \leq p(\eta,\eta) \leq 0$ olduğundan $p(\mu,\mu) = 0$ ve $p(\eta,\eta) = 0$ 'dır. $p(\mu,\mu) = p(\mu,\eta) = p(\eta,\eta) = 0$ olduğundan p kısmı metrik olduğunda göre $(p1)$'den $\mu = \eta$ bulunur.

2) $\mu \neq \eta$ ise $p(\mu,\mu) \leq p(\mu,\eta)$ eşitsizliğinin sadece $p(\mu,\mu) < p(\mu,\eta)$ kısmı sağlanır. O halde, $0 \leq p(\mu,\mu) < p(\mu,\eta)$, yani $p(\mu,\eta) > 0$ olur.

Aşağıdaki teorem kısmi metriğin sürekliliği ile ilgili olan teoremdir.

Teorem 2.1.20. [81] (W,p) kısmi metrik uzayında $\lim_{n\to\infty} \mu_n = \sigma$ olduğunda $p(\sigma,\sigma) = 0$ 'dır. Bu durumda her $\sigma,\eta \in W$ için $\lim_{n\to\infty} p(\mu_n,\eta) = p(\sigma,\eta)$ sağlanır.

İspat : $\lim_{n\to\infty} p(\mu_n,\eta) = p(\sigma,\sigma) = 0$ olduğu biliniyor. Şimdi kısmi metriğin $(p4)$ özelliği kullanılırsa,

$$p(\mu_n,\eta) \leq p(\mu_n,\sigma) + p(\sigma,\eta) - p(\sigma,\sigma) \Rightarrow p(\mu_n,\eta) \leq p(\mu_n,\sigma) + p(\sigma,\eta) \tag{2.3}$$

$$p(\sigma,\eta) \leq p(\sigma,\mu_n) + p(\mu_n,\eta) - p(\mu_n,\mu_n) \Rightarrow p(\sigma,\eta) \leq p(\sigma,\mu_n) + p(\mu_n,\eta) \tag{2.4}$$

bulunur. (2.3)'den dolayı,

$$p(\mu_n,\eta) - p(\sigma,\eta) \leq p(\mu_n,\sigma) \tag{2.5}$$

elde edilir. (2.4)'den

$$-p(\mu_n,\sigma) \leq p(\mu_n,\eta) - p(\sigma,\eta) \tag{2.6}$$

bulunur. (2.5) ve (2.6) ifadelerinden ise

$$-p(\mu_n,\sigma) \le p(\mu_n,\eta) - p(\sigma,\eta) \le p(\mu_n,\sigma)$$
$$0 \le \left|p(\mu_n,\eta) - p(\sigma,\eta)\right| \le p(\mu_n,\sigma)$$
$$\lim_{n\to\infty} 0 \le \lim_{n\to\infty}\left|p(\mu_n,\eta) - p(\sigma,\eta)\right| \le \lim_{n\to\infty} p(\mu_n,\sigma) = 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|p(\mu_n,\eta) - p(\sigma,\eta)\right| = 0$$
$$\left|\lim_{n\to\infty} p(\mu_n,\eta) - \lim_{n\to\infty} p(\sigma,\eta)\right| = 0$$
$$\left|\lim_{n\to\infty} p(\mu_n,\eta) - p(\sigma,\eta)\right| = 0$$
$$\lim_{n\to\infty} p(\mu_n,\eta) - p(\sigma,\eta) = 0$$
$$\lim_{n\to\infty} p(\mu_n,\eta) = p(\sigma,\eta)$$

sağlanır.

2.2. $b-$Metrik Uzaylar ve Bazı Topolojik Özellikleri

1989 yılında $b-$metrik uzay kavramı I. A. Bakhtin [88] tarafından tanımlandı. 1993 yılında ise S. Czerwik [89] tarafından bu uzayın topolojik yapısı ayrıntılı olarak verildi. Bundan sonra bir çok yazar bu uzayda çalışmalar yaptı [14,15,55,56,67,88-94]. $b-$metrik uzay kavramı metrik uzay kavramından daha genel olmasına karşın, topolojik yapı olarak farklı özellikler göstermektedir. Örneğin, metrik uzayda her açık yuvar açık küme olduğu halde $b-$metrik uzayda her açık yuvar açık küme olmadığından, yani topolojisi sadece açık küme olan açık yuvarlarla kurulabileceğinden, topolojisi oluşturulurken daha sınırlı bir alanda çalışılır. Yani metrikten daha genel aksiyomlara sahip olmasına karşın, topolojik yapı olarak metrikten daha genel bir topolojik yapısı yoktur.

Tanım 2.2.1. [89] $W \ne \varnothing$ herhangi bir küme, $s \ge 1$ olacak biçimde bir reel sayı olsun. $b: W\times W \to [0,\infty)$ fonksiyonu, $\forall \mu,\eta,\sigma \in W$ için

$(b1)$ $b(\mu,\eta) = 0 \Leftrightarrow \mu = \eta$,

$(b2)$ $b(\mu,\eta) = b(\eta,\mu)$,

$(b3)$ $b(\mu,\eta) \le s\left[b(\mu,\sigma) + b(\sigma,\eta)\right]$

şartlarını sağlıyorsa b fonksiyonuna W kümesinde bir $b-$metrik ve (W,b) ikilisine de bir $b-$metrik uzay adı verilir.

Uyarı 2.2.2. [90] $s=1$ alınırsa b fonksiyonu bir metriktir. Bu durumda her metrik bir $b-$metriktir. Ancak bunun tersi her zaman doğru değildir.

Örnek 2.2.3. [91] (W,d) metrik uzay olmak üzere $b:W\times W\to[0,\infty)$ fonksiyonu $\forall\mu,\eta,\sigma\in W$ olmak üzere $p>1$ için

$$b(\mu,\eta)=\left[d(\mu,\eta)\right]^p$$

biçiminde tanımlansın. $s=2^{p-1}$ alınırsa b fonksiyonu $b-$metriktir, ancak bir metrik değildir.

$(b1)$

$$\begin{aligned} b(\mu,\eta)=0 &\Leftrightarrow \left[d(\mu,\eta)\right]^p=0 \\ &\Leftrightarrow d(\mu,\eta)=0 \\ &\Leftrightarrow \mu=\eta \end{aligned}$$

dır.

$(b2)$

$$b(\mu,\eta)=\left[d(\mu,\eta)\right]^p=\left[d(\eta,\mu)\right]^p=b(\eta,\mu)$$

dır.

$(b3)$ $\forall\mu,\eta,\sigma\in W$ için

$$\begin{aligned} b(\mu,\eta)&=\left[d(\mu,\eta)\right]^p \\ &\leq\left[d(\mu,\sigma)+d(\sigma,\eta)\right]^p \\ &\leq 2^{p-1}\left\{\left[d(\mu,\sigma)\right]^p+\left[d(\sigma,\eta)\right]^p\right\} \\ &\leq s\left[b(\mu,\sigma)+b(\sigma,\eta)\right] \end{aligned}$$

olur ki buradan $b(\mu,\eta) \le s\left[b(\mu,\sigma)+b(\sigma,\eta)\right]$, $s=2^{p-1}\ge 1$ için sağlanır. Burada (W,d) metrik uzay olarak $d(\mu,\eta)=|\mu-\eta|$ mutlak değer metriği düşünülürse, $b(\mu,\eta)=|\mu-\eta|^2$ bir $b-$metriktir ancak bir metrik değildir. Çünkü,

$(d1)$

$\Rightarrow)$ $\mu=\eta$ olsun.

$$b(\mu,\eta)=|\mu-\eta|^2=|\mu-\mu|^2=0$$

dır.

$\Leftarrow)$ $b(\mu,\eta)=0$ olsun.

$$b(\mu,\eta)=|\mu-\eta|^2=0 \Rightarrow |\mu-\eta|=0 \Rightarrow \mu=\eta$$

dır.

$(d2)$

$$b(\mu,\eta)=|\mu-\eta|^2=|\eta-\mu|^2=b(\eta,\mu)$$

dır.

$(d3)$

$$b(\mu,\eta)=|\mu-\eta|^2=|\mu-\sigma+\sigma-\eta|^2 \le 2\left(|\mu-\sigma|^2+|\sigma-\eta|^2\right)=2\left(b(\mu,\sigma)+b(\sigma,\eta)\right)$$

olduğundan $s=2$ için $b-$metriktir. Ancak $s=1$ için üçgen eşitsizliği sağlanmadığından metrik değildir.

Örnek 2.2.4. [91] $W=\{\mu,\eta,\sigma\}$ ve $b:W\times W\to[0,\infty)$ olsun.

$$b(\mu,\mu)=b(\eta,\eta)=b(\sigma,\sigma)=0$$

$$b(\mu,\eta)=b(\eta,\mu)=\frac{2}{9}$$

$$b(\mu,\sigma)=b(\sigma,\mu)=\frac{5}{4}$$

$$b(\eta,\sigma)=b(\sigma,\eta)=\frac{1}{7}$$

olarak tanımlanan (W,b) bir $b-$metrik uzaydır. Ancak metrik uzay değildir.

$(b1)$ $\forall \mu,\eta \in W$ için

$$b(\mu,\eta)=0 \Leftrightarrow \mu=\eta$$

olduğu b 'nin tanımından açıktır.

$(b2)$ $\forall \mu,\eta \in W$ için

$$b(\mu,\eta)=b(\eta,\mu)$$

olduğu b 'nin tanımından açıktır.

$(b3)$ $\forall \mu,\eta,\sigma \in W$ için $b(\mu,\eta)\le s\left[b(\mu,\sigma)+b(\sigma,\eta)\right]$ sağlanır mı?

$$\text{i) } \frac{5}{4}=b(\mu,\sigma)\le s\left[b(\mu,\eta)+b(\eta,\sigma)\right]=s\left[\frac{2}{9}+\frac{1}{7}\right]\Rightarrow s\ge 3,42$$

$$\text{ii) } \frac{2}{9}=b(\mu,\eta)\le s\left[b(\mu,\sigma)+b(\sigma,\eta)\right]=s\left[\frac{5}{4}+\frac{1}{7}\right]\Rightarrow s\ge 0,15$$

$$\text{iii) } \frac{1}{7}=b(\eta,\sigma)\le s\left[b(\eta,\mu)+b(\mu,\sigma)\right]=s\left[\frac{2}{9}+\frac{5}{4}\right]\Rightarrow s\ge 0,09$$

dır. $\forall \mu,\eta,\sigma \in W$ için $s=3,42$ alırsak $b-$metriğin üçgen eşitsizliği şartı da sağlanmış olur. Fakat $s=1$ aldığımızda kümenin tüm elemanları için üçgen eşitsizliği sağlanmayacağından metrik değildir.

Örnek 2.2.5. [92] $W=\{0,1,2\}$ ve $b:W\times W\to[0,\infty)$ olsun.

$$b(0,0)=b(1,1)=b(2,2)=0$$

$$b(1,2)=b(2,1)=b(1,0)=b(0,1)=1$$

$$b(2,0)=b(0,2)=m\ge 2$$

olarak tanımlanan (W,b), $s=\dfrac{m}{2}$ için bir $b-$metrik uzaydır. Ancak metrik değildir.

$(b1)$ $\forall \mu,\eta \in W$ için

$$b(\mu,\eta)=0 \Leftrightarrow \mu=\eta$$

olduğu b 'nin tanımından açıktır.

$(b2)$ $\forall \mu,\eta \in W$ için

$$b(\mu,\eta)=b(\eta,\mu)$$

olduğu b 'nin tanımından açıktır.

$(b3)$ $\forall \mu,\eta,\sigma \in W$ için, $b(\mu,\eta)\le s\left[b(\mu,\sigma)+b(\sigma,\eta)\right]$ sağlanır mı?

1) $\mu=0,\eta=1,\sigma=2$ için

$$b(0,1)\le \frac{m}{2}\left[b(0,2)+b(2,1)\right] \Rightarrow 1\le \frac{m}{2}[m+1]$$

2) $\mu=0,\eta=2,\sigma=1$ için

$$b(0,2)\le \frac{m}{2}\left[b(0,1)+b(1,2)\right] \Rightarrow m\le \frac{m}{2}[1+1]$$

3) $\mu=1,\eta=2,\sigma=0$ için

$$b(1,2)\le \frac{m}{2}\left[b(1,0)+b(0,2)\right] \Rightarrow 1\le \frac{m}{2}[m+1]$$

4) $\mu=2,\eta=1,\sigma=0$ için

$$b(2,1)\le \frac{m}{2}\left[b(2,0)+b(0,1)\right] \Rightarrow 1\le \frac{m}{2}[m+1]$$

5) $\mu=2,\eta=0,\sigma=1$ için

$$b(2,0)\le \frac{m}{2}\left[b(2,1)+b(1,0)\right] \Rightarrow m\le \frac{m}{2}[1+1]$$

6) $\mu=0,\eta=1,\sigma=1$ için

$$b(0,1)\leq \frac{m}{2}\left[b(0,1)+b(1,1)\right]\Rightarrow 1\leq \frac{m}{2}[1+0]$$

7) $\mu=0,\eta=2,\sigma=2$ için

$$b(0,2)\leq \frac{m}{2}\left[b(0,2)+b(2,2)\right]\Rightarrow m\leq \frac{m}{2}[m+0]$$

8) $\mu=0,\eta=0,\sigma=0$ için

$$b(0,0)\leq \frac{m}{2}\left[b(0,0)+b(0,0)\right]\Rightarrow 0\leq \frac{m}{2}[0+0]$$

9) $\mu=1,\eta=0,\sigma=0$ için

$$b(1,0)\leq \frac{m}{2}\left[b(1,0)+b(0,0)\right]\Rightarrow 1\leq \frac{m}{2}[1+0]$$

10) $\mu=1,\eta=2,\sigma=2$ için

$$b(1,2)\leq \frac{m}{2}\left[b(1,2)+b(2,2)\right]\Rightarrow 1\leq \frac{m}{2}[1+0]$$

11) $\mu=1,\eta=1,\sigma=1$ için

$$b(1,1)\leq \frac{m}{2}\left[b(1,1)+b(1,1)\right]\Rightarrow 0\leq \frac{m}{2}[0+0]$$

12) $\mu=2,\eta=1,\sigma=1$ için

$$b(2,1)\leq \frac{m}{2}\left[b(2,1)+b(1,1)\right]\Rightarrow 1\leq \frac{m}{2}[1+0]$$

13) $\mu=2,\eta=0,\sigma=0$ için

$$b(2,0)\leq \frac{m}{2}\left[b(2,0)+b(0,0)\right]\Rightarrow m\leq \frac{m}{2}[m+0]$$

14) $\mu=2,\eta=2,\sigma=2$ için

$$b(2,2)\leq \frac{m}{2}\left[b(2,2)+b(2,2)\right]\Rightarrow 0\leq \frac{m}{2}[0+0]$$

15) $\mu=1,\eta=0,\sigma=2$ için

$$b(1,0) \leq \frac{m}{2}\left[b(1,2)+b(2,0)\right] \Rightarrow 1 \leq \frac{m}{2}[1+m]$$

olur. Kümenin tüm elemanları için $s=\frac{m}{2}$ alındığında $b-$metriğin üçgen eşitsizliği sağlanmış olur. Ancak, metrik değildir. Çünkü,

$$b(0,2) \leq b(0,1)+b(1,2) \Rightarrow m \leq 1+1 \Rightarrow m \leq 2$$

olur ki, $m \geq 2$ olması ile çelişir. Dolayısıyla b fonksiyonu metrik değildir.

Örnek 2.2.6. [93] $W=\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ve $b: W \times W \to [0,\infty)$

$$b(\mu,\eta)=\begin{cases} 0, & \mu=\eta \quad \text{ise} \\ \left|\frac{1}{\mu}-\frac{1}{\eta}\right|, & \mu=2k \text{ veya } \eta=2k \text{ yada } \mu.\eta=\infty \quad \text{ise} \\ 5, & \mu=2k+1 \text{veya } \eta=2k+1 \text{yada } \mu.\eta=\infty \quad \text{ise} \\ 2, & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

fonksiyonu $s=\frac{5}{2}$ olmak üzere, W üzerinde bir $b-$metriktir.

$(b1)$ $\forall \mu,\eta \in W$ için

$$b(\mu,\eta)=0 \Leftrightarrow \mu=\eta$$

olduğu b fonksiyonunun tanımından açıktır.

$(b2)$ $\forall \mu,\eta,\sigma \in W$ için

$$b(\mu,\eta)=\begin{cases} 0, & \mu=\eta \quad \text{ise} \\ \left|\frac{1}{\mu}-\frac{1}{\eta}\right|, & \mu=2k \text{ veya } \eta=2k \text{ yada } \mu.\eta=\infty \quad \text{ise} \\ 5, & \mu=2k+1 \text{veya } \eta=2k+1 \text{yada } \mu.\eta=\infty \quad \text{ise} \\ 2, & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

$$
=\begin{cases} 0, & \mu=\eta \quad \text{ise} \\ \left|\dfrac{1}{\eta}-\dfrac{1}{\mu}\right|, & \mu=2k \text{ veya } \eta=2k \text{ yada } \mu.\eta=\infty \quad \text{ise} \\ 5, & \mu=2k+1 \text{ veya } \eta=2k+1 \text{ yada } \mu.\eta=\infty \quad \text{ise} \\ 2, & \text{diğer durumlar} \end{cases}
$$

$$
=b(\eta,\mu)
$$

dır.

$(b3)$ $\forall \mu,\eta,\sigma \in W$ için, $b(\mu,\eta) \le s[b(\mu,\sigma)+b(\sigma,\eta)]$ sağlanır mı?

1) $\mu=\eta$ olsun. σ'nın tüm durumları için

$$
0=b(\mu,\eta) \le s[b(\mu,\sigma)+b(\sigma,\eta)]
$$

sağlanır.

2) μ ve η'den biri çift veya diğeri çift ya da sonsuz ise

i) σ çift ise

$$
b(\mu,\eta)=\left|\frac{1}{\mu}-\frac{1}{\eta}\right|=\left|\frac{1}{\mu}-\frac{1}{\sigma}+\frac{1}{\sigma}-\frac{1}{\eta}\right| \le s.\left(\left|\frac{1}{\mu}-\frac{1}{\sigma}\right|+\left|\frac{1}{\sigma}-\frac{1}{\eta}\right|\right)=s\big(b(\mu,\sigma)+b(\sigma,\eta)\big)
$$

ii) $\mu=\sigma$ veya $\sigma=\eta$ ise

$$
b(\mu,\eta)=\left|\frac{1}{\mu}-\frac{1}{\eta}\right| \le s(0+2)=s\big(b(\mu,\sigma)+b(\sigma,\eta)\big)
$$

3) μ ve η den biri tek veya diğeri tek ya da sonsuz ise

$$
b(\mu,\eta)=5 \le s\big(b(\mu,\sigma)+b(\sigma,\eta)\big)
$$

sağlanır. En azından σ'nın μ veya η ile eşit olduğu ve diğeriyle de diğer durumlar sağlansa bile

$$
b(\mu,\eta)=5 \le s(0+2) \Rightarrow 5 \le 2s \Rightarrow s \ge \frac{5}{2}
$$

olur.

4) μ ve η için diğer durumlar varsa

$$b(\mu,\eta) = 2 \le s\big(b(\mu,\sigma) + b(\sigma,\eta)\big)$$

sağlanır. Herhangi ikisi eşit olsa ve diğer ikisi arasında da diğer durum olsa,

$$b(\mu,\eta) = 2 \le s(0+2) \Rightarrow 2 \le s2 \Rightarrow s \ge 1$$

bulunur. Dört durumu da sağlayan, $s = \frac{5}{2}$ alınırsa (W,b) $b-$metrik uzaydır.

Örnek 2.2.7. [56] $l_p(0<p<1)$, $l_p = \left\{ (\mu_n) \subset \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} |\mu_n|^p < \infty \right\}$ olsun.

Bu durumda $\mu = \mu_n$, $\eta = \eta_n \in l_p(\mathbb{R})$ için, $b : l_p \times l_p \to [0,\infty)$

$$b(\mu,\eta) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\mu_n - \eta_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

fonksiyonu $s = 2^{\frac{1}{p}} > 1$ katsayısı ile bir $b-$metriktir.

$(b1)$ $\forall \mu,\eta \in l_p(\mathbb{R})$ için

$\Rightarrow)$ $\mu = \eta$ olsun. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $(\mu_n) = (\eta_n)$'dır.

$$b(\mu,\eta) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\mu_n - \eta_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\mu_n - \mu_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} = 0$$

sağlanır.

$\Leftarrow)$ $b(\mu,\eta) = 0$ olsun.

$$0 = b(\mu,\eta) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\mu_n - \eta_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \Rightarrow 0 = \sum_{n=1}^{\infty} |\mu_n - \eta_n|^p$$

olduğundan bu serinin sonucu sıfır ise, bu serinin kısmi toplamlar dizisinin limiti sıfırdır. Yani,

$$\lim_{n\to\infty} S_k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left|\mu_k-\eta_k\right|^p = 0$$

sağlanır. Bu toplamın sıfıra eşit olması ancak her bir terimin sıfıra eşit olmasıyla sağlanır. Yani,

$$\left|\mu_1-\eta_1\right|^p = 0 \Rightarrow \left|\mu_1-\eta_1\right| = 0 \Rightarrow \mu_1=\eta_1$$

$$\left|\mu_2-\eta_2\right|^p = 0 \Rightarrow \left|\mu_2-\eta_2\right| = 0 \Rightarrow \mu_2=\eta_2$$

$$\vdots$$

$$\left|\mu_n-\eta_n\right|^p = 0 \Rightarrow \left|\mu_n-\eta_n\right| = 0 \Rightarrow \mu_n=\eta_n$$

ve $\forall n\in\mathbb{N}$ için $(\mu_n)=(\eta_n)\Rightarrow \mu=\eta$ elde edilir.

$(b2)$ $\forall \mu,\eta\in l_p(\mathbb{R})$ için

$$b(\mu,\eta)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|\mu_n-\eta_n\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|\eta_n-\mu_n\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}=b(\eta,\mu)$$

dır.

$(b3)$ $\forall \mu,\eta\in l_p(\mathbb{R})$ için

$$\begin{aligned}
b(\mu,\eta)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|\mu_n-\eta_n\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|\mu_n-\sigma_n+\sigma_n-\eta_n\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\le \left(\sum_{n=1}^{\infty}2\left(\left|\mu_n-\sigma_n\right|^p+\left|\sigma_n-\eta_n\right|^p\right)\right)^{\frac{1}{p}}\\
&= 2^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left|\mu_n-\sigma_n\right|^p+\left|\sigma_n-\eta_n\right|^p\right)\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\le 2^{\frac{1}{p}}\left[\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|\mu_n-\sigma_n\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|\sigma_n-\eta_n\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right]\\
&= 2^{\frac{1}{p}}\left[b(\mu,\sigma)+b(\sigma,\eta)\right]
\end{aligned}$$

olduğundan $s=2^{\frac{1}{p}}>1$ için $\left(l_p\left(\mathbb{R}\right),b\right)$ bir $b-$metrik uzaydır.

Örnek 2.2.8. [94] $0<p<1$ için, $l_p\left[0,1\right]=\left\{\mu\left(t\right)\in\mathbb{R},t\in\left[0,1\right]:\int_0^1\left|\mu\left(t\right)\right|^p dt<\infty\right\}$

$l_p\left[0,1\right]$ kümesi veriliyor. $\mu=\mu\left(t\right),\eta=\eta\left(t\right)\in l_p\left[0,1\right]$ ve $s=2^{\frac{1}{p}}>1$ katsayısı ile,

$$b\left(\mu,\eta\right)=\left[\int_0^1\left|\mu\left(t\right)-\eta\left(t\right)\right|^p dt\right]^{\frac{1}{p}}$$

fonksiyonu $b-$metriktir. $\left(b,l_p\left[0,1\right]\right)$ ikilisi de bir $b-$metrik uzaydır.

$\left(b1\right)$ $\forall\mu,\eta\in l_p\left[0,1\right]$ olsun.

$\Rightarrow)$ $\mu=\eta$ olsun. $t\in\left[0,1\right]$ için, $\mu\left(t\right)=\eta\left(t\right)$'dır.

$$b\left(\mu,\eta\right)=\left[\int_0^1\left|\mu\left(t\right)-\eta\left(t\right)\right|^p dt\right]^{\frac{1}{p}}=\left[\int_0^1\left|\mu\left(t\right)-\mu\left(t\right)\right|^p dt\right]^{\frac{1}{p}}=0$$

bulunur.

$\Leftarrow)$ $b\left(\mu,\eta\right)=0$ olsun.

$$0=b\left(\mu,\eta\right)=\left[\int_0^1\left|\mu\left(t\right)-\eta\left(t\right)\right|^p dt\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$0=\int_0^1\left|\mu\left(t\right)-\eta\left(t\right)\right|^p dt$$

$$0=\left|\mu\left(t\right)-\eta\left(t\right)\right|$$

$$0=\mu\left(t\right)-\eta\left(t\right),\forall t\in\left[0,1\right]$$

$$\mu\left(t\right)=\eta\left(t\right)$$

$$\mu=\eta$$

sağlanır.

$(b2)$ $\forall \mu,\eta \in l_p[0,1]$ için

$$b(\mu,\eta)=\left[\int_0^1 |\mu(t)-\eta(t)|^p dt\right]^{\frac{1}{p}}=\left[\int_0^1 |\eta(t)-\mu(t)|^p dt\right]^{\frac{1}{p}}=b(\eta,\mu)$$

sağlanır.

$(b3)$ $\forall \mu,\eta,\sigma \in l_p[0,1]$ için

$$\begin{aligned}
b(\mu,\eta)=\left[\int_0^1 |\mu(t)-\eta(t)|^p dt\right]^{\frac{1}{p}} &= \left[\int_0^1 |\mu(t)-\sigma(t)+\sigma(t)-\eta(t)|^p dt\right]^{\frac{1}{p}} \\
&\le \left(2\left[\int_0^1 |\mu(t)-\sigma(t)|^p dt+\int_0^1 |\sigma(t)-\eta(t)|^p dt\right]\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\le 2^{\frac{1}{p}}\left[\left(\int_0^1 |\mu(t)-\sigma(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_0^1 |\sigma(t)-\eta(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\right] \\
&= 2^{\frac{1}{p}}\left[b(\mu,\sigma)+b(\sigma,\eta)\right]
\end{aligned}$$

olduğundan $s=2^{\frac{1}{p}}>1$ katsayısı ile $(l_p[0,1],b)$ bir $b-$metrik uzaydır.

Örnek 2.2.9. [56] W, $card(W)\ge 3$ olan bir küme olsun. $W=W_1\cup W_2$ olan kümenin bir parçası $card(W_1)\ge 2$ olsun. $s>1$ sabiti ile

$$b(\mu,\eta)=\begin{cases} 0, & \mu=\eta \quad \text{ise} \\ 2s, & \mu,\eta\in W \quad \text{ise} \\ 1, & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

olarak tanımlanan $b: W\times W\to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu W kümesinde bir $b-$metriktir.

$(b1)$ $\forall \mu,\eta \in W$ için

$$b(\mu,\eta)=0 \Leftrightarrow \mu=\eta$$

olduğu b fonksiyonunun tanımından açıktır.

$(b2)$ $\forall \mu,\eta \in W$ için

$$b(\mu,\eta)=\begin{cases} 0, & \mu=\eta \quad \text{ise} \\ 2s, & \mu,\eta \in W \quad \text{ise} \\ 1, & \text{diğer durumlar} \end{cases} = \begin{cases} 0, & \eta=\mu \quad \text{ise} \\ 2s, & \eta,\mu \in W \quad \text{ise} \\ 1, & \text{diğer durumlar} \end{cases} = b(\eta,\mu)$$

dır.

$(b3)$ $\forall \mu,\eta,\sigma \in W$ için $b(\mu,\eta) \le s\left[b(\mu,\sigma)+b(\sigma,\eta)\right]$ sağlanır mı?

1) $\mu=\eta$ olsun.

$$0=b(\mu,\eta) \le s\left[b(\mu,\sigma)+b(\sigma,\eta)\right]=s\left[b(\mu,\sigma)+b(\sigma,\mu)\right]=2sb(\mu,\sigma)$$

dır. Bu eşitsizlik $\forall \sigma \in W$ için sağlanır.

2) $\mu,\eta \in W_1$ ise

$$b(\mu,\eta)=2s \le s\left[b(\mu,\sigma)+b(\sigma,\eta)\right]$$

dır.

i) $\mu=\sigma \in W_1$ ise

$$2s \le s\left[0+2s\right]$$

dır.

ii) $\eta=\sigma \in W_1$ ise

$$2s \le s\left[2s+0\right]$$

dır.

iii) μ,η ile σ arasında diğer durumlar varsa

$$2s \le s\left[1+1\right]$$

dır.

3) μ ile η arasında diğer durumlar varsa

$$b(\mu,\eta)=1 \le s\left[b(\mu,\sigma)+b(\sigma,\eta)\right]$$

olmak üzere

i) $\mu = \sigma$ ise

$$1 \le s[0+1]$$

dır.

ii) $\eta = \sigma$ ise

$$1 \le s[1+0]$$

dır.

iii) μ, η ile σ arasında diğer durumlar varsa

$$1 \le s[1+1]$$

dır. Her durumda eşitsizlik sağlandığından (W,b) bir $b-$metrik uzaydır.

Şimdi $b-$metrik uzayda yuvar tanımı yapılıp topolojik yapısı oluşturulup, metrik uzaydan farklı olan özellikleri incelenecektir.

Tanım 2.2.10. [95-96] (W,b) herhangi bir $b-$metrik uzay olmak üzere

$$B_b(\mu,\varepsilon) = \{\eta \in W : b(\mu,\eta) < \varepsilon, \varepsilon > 0\}$$

biçiminde tanımlanan kümeye $\mu \in W$ merkezli, $\varepsilon > 0$ yarıçaplı $b-$açık yuvar denir. $b-$açık yuvarlarının ailesi $\{B_b(\mu,\varepsilon) : \mu \in W, \varepsilon > 0\}$ 'dır.

$$B_b[\mu,\varepsilon] = \{\eta \in W : b(\mu,\eta) \le \varepsilon, \varepsilon > 0\}$$

biçiminde tanımlanan kümeye $\mu \in W$ merkezli, $\varepsilon > 0$ yarıçaplı $b-$kapalı yuvar denir. (W,b) $b-$metrik uzayında $\{B_b(\mu,\varepsilon) : \mu \in W, \varepsilon > 0\}$ bazı ile W üzerinde üretilen topoloji τ_b ile gösterilir.

Tanım 2.2.11. [96] Herhangi bir $b-$metrik uzayda

i) her elemanı için o eleman merkezli, en az bir açık yuvarı kapsayan kümeye açık küme denir. (W,b) $b-$metrik uzay, $A\subseteq W$, $\mu\in A$ için, $B_b(\mu,\varepsilon)\subset A$ dır.

ii) Tümleyeni açık olan kümeye kapalı küme denir.

Tanım 2.2.12. [95] (W,b) bir $b-$metrik uzay, $\mu\in W$ ve $A\subseteq W$ olsun. $B_b(\mu,\varepsilon)\cap A\neq\varnothing$ özelliğini sağlayan μ noktasına A kümesinin kapanış noktası denir. A kümesinin kapanış noktalarının kümesine A kümesinin kapanışı denir ve $\bar{A}$ ile gösterilir.

Uyarı 2.2.13. [96] $B_b(\mu,\varepsilon)=\{\eta\in W: b(\mu,\eta)<\varepsilon,\varepsilon>0\}$ yuvarları τ_b topolojisine göre açık küme olmak zorunda değildir. Örneğin,

$\varepsilon>0$ sabit olsun. $W=\mathbb{N}_0=\{0,1,2,...\}$ için, $m,n\geq 2$ olmak üzere

$b(0,1)=1,\ b(0,m)=1+\varepsilon$, $b(1,m)=\dfrac{1}{m}$, $b(m,n)=\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}$ olarak verilen $b(n,n)=0$ ve simetri aksiyomunu sağlayan $b: W\times W\to W$ fonksiyonu $b-$metriktir.

$$B\left(0,1+\frac{\varepsilon}{2}\right)=\left\{\eta\in W: b(0,\eta)<1+\frac{\varepsilon}{2}\right\}=\{0,1\},$$

$$B(1,r)=\{\eta\in W: b(1,\eta)<r,r>0\}=\{1,2,3,...\}$$

olup $1\in B\left(0,1+\frac{\varepsilon}{2}\right)$'dır.Ayrıca $1\in B(1,r)$'dır. Fakat $\forall r>0$ için $B(1,r)\not\subset B\left(0,1+\frac{\varepsilon}{2}\right)$ olduğundan $B\left(0,1+\frac{\varepsilon}{2}\right)$ yuvarı τ_b-açık değildir.

Uyarı 2.2.14. Topolojiler açık kümelerle kurulduğuna göre $b-$metrikte açık küme olan yuvarlarla topoloji kurulabilir. Aslında $b-$metrik şartları incelenince metrikten daha genel olarak ifade edilmesine rağmen topolojik olarak daha dar anlamda bir topolojisi vardır.

Uyarı 2.2.15. [96] Eğer bazı $0<p<1$ için $b-$metrik W kümesinde $\forall\mu,\eta,\sigma\in W$ için

$$b(\mu,\eta)^p \le b(\mu,\sigma)^p + b(\sigma,\eta)^p$$

ifadesini sağlarsa, o zaman $b-$metriğindeki yuvarlar, τ_b topolojisine göre açıktır.

İspat : $B(\mu,r)$, (W,b) uzayında bir yuvar ve $\eta \in B(\mu,r)$ olsun. $B(\eta',r') \subseteq B(\mu,r)$ olacak şekilde $r' > 0$ sayısının olduğu gösterilecektir.

$$\eta \in B(\mu,r) \Rightarrow b(\mu,\eta) < r \Rightarrow b(\mu,\eta)^p < r^p$$

dır. $r' = \sqrt[p]{r^p - b(\mu,\eta)^p} > 0$ olmak üzere $\sigma \in B(\eta,r')$ olsun. Bu durumda $b(\eta,\sigma) < r'$ olur ki, verilen eşitsizlikten

$$\begin{aligned} b(\mu,\sigma)^p &\le b(\mu,\eta)^p + b(\eta,\sigma)^p \\ &< b(\mu,\eta)^p + r^p - b(\mu,\eta)^p \\ &< r^p \end{aligned}$$

bulunur. Yani, $b(\mu,\sigma) < r$ olur ki bu da $\sigma \in B(\mu,r)$ olduğunu gösterir. Dolayısıyla $B(\eta',r') \subseteq B(\mu,r)$ elde edilir. Böylece $B(\mu,r)$ yuvarı açık küme olur.

Teorem 2.2.16. Herhangi bir $b-$metrik uzay bir Hausdorff uzayıdır.

İspat : Herhangi $m,n \in W\,(m \ne n)$ noktaları verilsin. (W,b) $b-$metrik uzay olduğundan, $m \ne n$ için $b(m,n) > 0$ olup $b(m,n) = r$ ile gösterilsin.

$$B\left(m,\frac{r}{3s}\right) = \left\{\mu \in W : b(m,\mu) < \frac{r}{3s}\right\}$$

ve

$$B\left(n,\frac{r}{3s}\right) = \left\{\eta \in W : b(n,\eta) < \frac{r}{3s}\right\}$$

açık yuvarları alınsın. Bu durumda, $B\left(m,\frac{r}{3s}\right) \cap B\left(n,\frac{r}{3s}\right) = \varnothing$ bulunur. $B\left(m,\frac{r}{3s}\right) \cap B\left(n,\frac{r}{3s}\right) \ne \varnothing$ olsun. Bu durumda bir $c \in B\left(m,\frac{r}{3s}\right) \cap B\left(n,\frac{r}{3s}\right)$ elemanı vardır öyle ki $c \in B\left(m, \frac{r}{3s}\right)$ ve $c \in B\left(n, \frac{r}{3s}\right)$'dır. Bundan dolayı $b(m,c) < \frac{r}{3s}$ ve $b(n,c) < \frac{r}{3s}$ olur. Üçgen eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned} b(m,n) &\leq s.\left[b(m,c)+b(c,n)\right] \\ &= s.b(m,c)+s.b(c,n) \\ &< s.\frac{r}{3s}+s.\frac{r}{3s} \\ &= \frac{2r}{3} \end{aligned}$$

$b(m,n) < \frac{2r}{3}$ bulunur. Bu ise $b(m,n) = r$ olmasıyla çelişir. Dolayısıyla, $B\left(m, \frac{r}{3s}\right) \cap B\left(n, \frac{r}{3s}\right) = \varnothing$'dır. Yani, $b-$metrik uzayı bir Hausdorff uzayıdır.

Uyarı 2.2.17. $b-$metrik uzayı bir Hausdorff uzay yani T_2 olduğundan, aynı zamanda T_1 ve T_0'dır.

Tanım 2.2.18. [97] (W,b) herhangi bir $b-$metrik uzay $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq W$ biçiminde tanımlanan bir dizi olsun. $\mu \in W$ olmak üzere, eğer $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $\forall n \geq n_0$ için $b(\mu_n, \mu) < \varepsilon$ olacak biçimde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $\mu \in W$ noktasına yakınsaktır denir ve

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n = \mu,\ \lim_{n\to\infty} b(\mu_n, \mu) = 0 \text{ veya } \mu_n \to \mu\,(n \to \infty)$$

ifadelerinden herhangi biriyle gösterilir.

Teorem 2.2.19. [97] (W,b) herhangi bir $b-$metrik uzay olmak üzere, $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi W üzerinde yakınsak bir dizi ise $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin limiti tektir.

İspat: $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi yakınsak olsun. $\mu \neq \eta$ için $\lim_{n\to\infty} b(\mu_n, \mu) = 0$ ve $\lim_{n\to\infty} b(\mu_n, \eta) = 0$ sağlansın. Yani, yakınsak bir dizinin iki farklı limit noktası olsun. Buradan,

$$\lim_{n\to\infty} b(\mu_n,\mu)=0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0 \text{ için } \exists n_1\in\mathbb{N} \ni \forall n>n_1 \text{ için } b(\mu_n,\mu)<\frac{\varepsilon}{2s}$$

$$\lim_{n\to\infty} b(\mu_n,\eta)=0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0 \text{ için } \exists n_2\in\mathbb{N} \ni \forall n>n_2 \text{ için } b(\mu_n,\eta)<\frac{\varepsilon}{2s}$$

olur. $\max\{n_1,n_2\}=N$ olsun. $\forall n>N\in\mathbb{N}$ için,

$$0<b(\mu,\eta)\leq s\left[b(\mu,\mu_n)+b(\mu_n,\eta)\right]=sb(\mu,\mu_n)+sb(\mu_n,\eta)<s\frac{\varepsilon}{2s}+s\frac{\varepsilon}{2s}=\varepsilon$$

$$0<b(\mu,\eta)<\varepsilon \Rightarrow b(\mu,\eta)=0 \Rightarrow \mu=\eta$$

bulunur. Bu ise $\mu\neq\eta$ kabulüyle çelişir. Yani, $b-$metrik uzayda yakınsak bir dizinin limiti tektir.

Teorem 2.2.20. [97] (W,b) herhangi bir $b-$metrik uzay olmak üzere, $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi W üzerinde yakınsak bir dizi ise, $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin her alt dizisi de aynı noktaya yakınsar.

İspat : $\mu_n\to\mu(n\to\infty)$ olsun. Yani, $\forall\varepsilon>0$ için $\exists n_0\in\mathbb{N}$ öyle ki $\forall n>n_0$ için $b(\mu_n,\mu)<\varepsilon$ olur. Herhangi bir $\{\mu_{n_k}\}\subseteq\{\mu_n\}$ alt dizisi alınsın. Her $n\in\mathbb{N}$ için $n_k\geq n$ şartını sağlayan $k\in\mathbb{N}$ sayısı vardır. Böylece, $n>n_0 \Rightarrow n_k\geq n\geq n_0 \Rightarrow n_k\geq n_0$ 'dır. Buradan $b(\mu_{n_k},\mu)<\varepsilon$ olur. Yani, $\lim_{k\to\infty} b(\mu_{n_k},\mu)=0$ 'dır.

Tanım 2.2.21. [97] (W,b) herhangi bir $b-$metrik uzay ve $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq W$ bir dizi olmak üzere $\forall\varepsilon>0$ sayısına karşılık, her $m,n\geq n_0$ için $b(\mu_n,\mu_m)<\varepsilon$ olacak biçimde bir $n_0\in\mathbb{N}$ varsa $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisine W uzayında Cauchy dizisi adı verilir.

Önerme 2.2.22. [92] (W,b) herhangi bir $b-$metrik uzay olsun. $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq W$ dizisinin bir Cauchy dizisi olması için gerek ve yeter şart $b(\mu_n,\mu_m)\to 0\ (n,m\to\infty)$ olmasıdır.

Önerme 2.2.23. [97] (W,b) herhangi bir $b-$metrik uzay olsun. W uzayında her yakınsak dizi bir Cauchy dizisidir.

İspat : $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi, (W,b) $b-$metrik uzayında $\mu \in W$ noktasına yakınsak olsun. Bu durumda

$\forall \varepsilon > 0$ sayısına karşılık $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $\forall n \geq n_0$ için $b(\mu_n,\mu) < \dfrac{\varepsilon}{2s}$

sağlanır. $m,n \in \mathbb{N}$ ve $m,n \geq n_0$ için, $b-$metriğin üçgen eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned} b(\mu_n,\mu_m) &\leq s\left[b(\mu_n,\mu)+b(\mu,\mu_m)\right] \\ &= sb(\mu_n,\mu)+sb(\mu,\mu_m) \\ &< s\frac{\varepsilon}{2s}+s\frac{\varepsilon}{2s} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

sağlandığından $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi bir Cauchy dizisidir.

Ancak bu ifadenin tersi her zaman doğru değildir. Yani $b-$metrik uzayda her Cauchy dizisi yakınsak olmayabilir.

Önerme 2.2.24. [97] (W,b) herhangi bir $b-$metrik uzay, $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq W$ bir Cauchy dizisi ve $\mu \in W$ olsun. $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin μ noktasına yakınsayan bir alt dizisi varsa, $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi de aynı μ noktasına yakınsar.

İspat : $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ bir Cauchy dizisi, $\{\mu_{n_k}\}$ ise $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin yakınsak alt dizisi olsun. $\{\mu_{n_k}\}$ bir alt dizi olduğundan $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ olmak üzere $\{\mu_{n_k}\} = \{\mu_{n_1},\mu_{n_2},\ldots\}$ biçimindedir. $\lim\limits_{k\to\infty} b(\mu_{n_k},\mu) = 0$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists N \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $\forall n, n_k \geq N$ olmak üzere $b(\mu_{n_k},\mu) < \dfrac{\varepsilon}{2s}$ ve $b(\mu_n,\mu_{n_k}) < \dfrac{\varepsilon}{2s}$ sağlanır. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} b(\mu_n,\mu) &\leq s\left[b(\mu_n,\mu_{n_k})+b(\mu_{n_k},\mu)\right] \\ &= sb(\mu_n,\mu_{n_k})+sb(\mu_{n_k},\mu) \\ &< s\frac{\varepsilon}{2s}+s\frac{\varepsilon}{2s} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $n \to \infty$ için limit alınırsa

$0 \le \lim_{n\to\infty} b\left(\mu_n, \mu\right) \le 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} b\left(\mu_n, \mu\right) = 0$ bulunur. Yani $\left\{\mu_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi de μ noktasına yakınsaktır.

Tanım 2.2.25. [91] $\left(W,b\right)$ bir $b-$metrik uzay olmak üzere, W kümesindeki her Cauchy dizisi W uzayındaki bir noktaya yakınsak ise, $\left(W,b\right)$ uzayına $b-$tam metrik uzay (tam $b-$metrik uzay) adı verilir.

Önerme 2.2.26. [91] $\left(W,b\right)$ herhangi bir $b-$metrik uzay olmak üzere, $\left\{\mu_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ ve $\left\{\eta_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizileri sırasıyla μ ve η noktalarına yakınsak olsun. Bu durumda,

i) $\frac{1}{s^2} b\left(\mu,\eta\right) \le \liminf_{n\to\infty} b\left(\mu_n,\eta_n\right) \le \limsup_{n\to\infty} b\left(\mu_n,\eta_n\right) \le s^2 b\left(\mu,\eta\right)$’dır.

ii) Eğer $\mu=\eta$ ise, $\lim_{n\to\infty} b\left(\mu_n,\eta_n\right)=0$’dır.

iii) $\forall \sigma \in W$ için,
$\frac{1}{s} b\left(\mu,\sigma\right) \le \liminf_{n\to\infty} b\left(\mu_n,\sigma\right) \le \limsup_{n\to\infty} b\left(\mu_n,\sigma\right) \le s b\left(\mu,\eta\right)$’dır.

İspat : b fonksiyonu bir $b-$metrik olduğundan,

$$\begin{aligned} b\left(\mu,\eta\right) &\le s\left[b\left(\mu,\mu_n\right)+b\left(\mu_n,\eta\right)\right] \\ &= sb\left(\mu,\mu_n\right)+sb\left(\mu_n,\eta\right) \\ &\le sb\left(\mu,\mu_n\right)+ss\left[b\left(\mu_n,\eta_n\right)+b\left(\eta_n,\eta\right)\right] \\ &= sb\left(\mu,\mu_n\right)+s^2 b\left(\mu_n,\eta_n\right)+s^2 b\left(\eta_n,\eta\right) \end{aligned}$$

$$b\left(\mu,\eta\right) \le sb\left(\mu,\mu_n\right)+s^2 b\left(\mu_n,\eta_n\right)+s^2 b\left(\eta_n,\eta\right) \tag{2.7}$$

ifadesi sağlanır. Benzer olarak,

$$\begin{aligned} b\left(\mu_n,\eta_n\right) &\le s\left[b\left(\mu_n,\mu\right)+b\left(\mu,\eta_n\right)\right] \\ &= sb\left(\mu_n,\mu\right)+sb\left(\mu,\eta_n\right) \\ &\le sb\left(\mu_n,\mu\right)+ss\left[b\left(\mu,\eta\right)+b\left(\eta,\eta_n\right)\right] \\ &= sb\left(\mu_n,\mu\right)+s^2 b\left(\mu,\eta\right)+s^2 b\left(\eta,\eta_n\right) \end{aligned}$$

$$b\left(\mu_n,\eta_n\right) \le sb\left(\mu_n,\mu\right)+s^2 b\left(\mu,\eta\right)+s^2 b\left(\eta,\eta_n\right) \tag{2.8}$$

sağlanır. (2.8) eşitsizliğinde $n \to \infty$ için alt limit ve (2.7) eşitsizliğinde üst limit alınırsa,

$\lim_{n\to\infty} b(\mu_n,\mu)=0 \Rightarrow \liminf_{n\to\infty} b(\mu_n,\mu)=0$ ve $\lim_{n\to\infty} b(\eta_n,\eta)=0 \Rightarrow \limsup_{n\to\infty} b(\eta_n,\eta)=0$ elde edilir. Buradan

$$\liminf_{n\to\infty} b(\mu,\eta)=b(\mu,\eta)\le \liminf_{n\to\infty} s^2 b(\mu_n,\eta_n) \tag{2.9}$$

ve

$$\limsup_{n\to\infty} b(\mu_n,\eta_n)\le \liminf_{n\to\infty} s^2 b(\mu,\eta)=s^2 b(\mu,\eta) \tag{2.10}$$

olur. (2.9) ve (2.10) ifadelerinden

$$\frac{1}{s^2} b(\mu,\eta)\le \liminf_{n\to\infty} b(\mu_n,\eta_n)\le \limsup_{n\to\infty} b(\mu_n,\eta_n)\le s^2 b(\mu,\eta)$$

elde edilir.

Önerme 2.2.27. [96] (W,b) herhangi bir $b-$metrik uzay, $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ve $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizileri bu uzayda iki dizi olsun. $\lim_{n\to\infty}\mu_n=t\in W$ ve $\lim_{n\to\infty} b(\mu_n,\eta_n)=0$ ise, $\lim_{n\to\infty}\eta_n=t$ sağlanır.

İspat : $b-$metrik fonksiyonu için üçgen eşitsizliği kullanılarak,

$$\begin{aligned} b(\eta_n,t) &\le s\left[b(\eta_n,\mu_n)+b(\mu_n,t)\right] \\ &= sb(\eta_n,\mu_n)+sb(\mu_n,t) \end{aligned}$$

bulunur. Burada $n\to\infty$ için limit alınırsa

$$0\le \lim_{n\to\infty} b(\eta_n,t)\le s\lim_{n\to\infty} b(\eta_n,\mu_n)+s\lim_{n\to\infty} b(\mu_n,t)=s0+s0=0$$

$$0\le \lim_{n\to\infty} b(\eta_n,t)\le 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} b(\eta_n,t)=0$$

elde edilir. Bu da $\lim_{n\to\infty}\eta_n=t$ olduğunu gösterir.

Tanım 2.2.28. [96] (W,b_1) ve (Y,b_2) iki $b-$metrik uzay olsun. $T:W\to Y$ herhangi bir fonksiyon ve $\mu_0\in W$ olmak üzere

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ için } b_1(\mu,\mu_0) < \delta \Rightarrow b_2(T\mu, T\mu_0) < \varepsilon$$

koşulunu sağlayan bir $\delta > 0$ sayısı varsa T fonksiyonu $\mu_0 \in W$ noktasında süreklidir denir. T fonksiyonu W kümesindeki her noktada sürekli ise T fonksiyonuna W üzerinde süreklidir denir.

Uyarı 2.2.29. [93,95] Metrik fonksiyonu süreklidir. Ancak $b-$metrik fonksiyonu genelde sürekli değildir. Metrik fonksiyonu için

$$\mu_n \to \mu,\ \eta_n \to \eta \text{ iken } d(\mu_n,\eta_n) \to d(\mu,\eta) \quad (n \to \infty)$$

ifadesi sağlanır. Çünkü metrikte süreklilik ile dizisel süreklilik eşdeğerdir. Yani dizisel sürekli olmayan fonksiyon sürekli de değildir. $b-$metrik fonksiyonu için de benzer şekilde ifade edilir. Örneğin,

$W = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ve $b : W \times W \to [0,\infty)$,

$$b(\mu,\eta) = \begin{cases} 0, & \mu = \eta \quad \text{ise} \\ \left|\dfrac{1}{\mu} - \dfrac{1}{\eta}\right|, & \mu = 2k \text{ veya } \eta = 2k \text{ yada } \mu.\eta = \infty \quad \text{ise} \\ 5, & \mu = 2k+1 \text{ veya } \eta = 2k+1 \text{ yada } \mu.\eta = \infty \text{ ise} \\ 2, & \text{diğer durumlar} \quad \text{ise} \end{cases}$$

fonksiyonu W üzerinde $s = \dfrac{5}{2}$ katsayılı $b-$metriktir.

$(\mu_n) = 2n$ dizisi için $n \to \infty$ iken $2n \to \infty$ sağlanır. Buradan

$$b(\mu_n,\infty) = \left|\frac{1}{2n} - \frac{1}{\infty}\right| \to 0\,(n \to \infty),$$

$$\mu_n \to \mu \Rightarrow b(\mu_n,a) \to b(\mu,a)\,(n \to \infty)$$

olmalıdır. $a = 1$ alınırsa, $b(\mu_n,1) = b(2n,1) = 2$ ve $b(\infty,1) = 5$ bulunur.

$$b(\mu_n,1) \to b(\infty,1)\,(n \to \infty)$$

olmalıdır. Ancak $2 \neq 5$ olduğundan $b-$metrik fonksiyonu sürekli değildir.

2.3. Genişletilmiş (Extended) $b-$Metrik Uzaylar ve Bazı Topolojik Özellikleri

T. Kamran ve ark. [100] 2017 yılında $b-$metrik uzayın bir genellemesi olan genişletilmiş $b-$metrik uzay kavramını tanımlayarak topolojik yapısını oluşturdular. Halen başka araştırmacılar tarafından bu uzayda çalışmalar yapılmaya devam edilmektedir $[62,101-106]$.

Tanım 2.3.1. [100] $W \neq \emptyset$ bir küme ve $\theta : W \times W \to [1,\infty)$ bir fonksiyon olsun. $d_\theta : W \times W \to [0,\infty)$ fonksiyonu $\forall \mu,\eta,\sigma \in W$ için

$(e1)$ $d_\theta(\mu,\eta) = 0 \Leftrightarrow \mu = \eta$

$(e2)$ $d_\theta(\mu,\eta) = d_\theta(\eta,\mu)$

$(e3)$ $d_\theta(\mu,\eta) \leq \theta(\mu,\eta)\left[d_\theta(\mu,\sigma) + d_\theta(\sigma,\eta)\right]$

özelliklerini sağlıyorsa d_θ fonksiyonuna genişletilmiş $b-$metrik denir. (W,d_θ) ikilisine ise genişletilmiş $b-$metrik uzay denir.

Uyarı 2.3.2. [100] Eğer $s \geq 1$ için $\theta(\mu,\eta) = s$ ise $b-$metrik fonksiyonu elde edilir.

Uyarı 2.3.3. Her $b-$metrik uzay genişletilmiş $b-$metrik uzaydır. Fakat tersi her zaman doğru değildir. Genişletilmiş $b-$metrik uzay, $b-$metrik uzaydan daha geneldir. Dolayısıyla her genişletilmiş $b-$metrik, $b-$metrik olmak zorunda değildir. Ayrıca her metrik uzay, genişletilmiş $b-$metrik uzaydır.

Örnek 2.3.2. [101] $W = \{1,2,3,...\}$ olsun. $\theta : W \times W \to [1,\infty)$ ve $d_\theta : W \times W \to [0,\infty)$ fonksiyonları $\forall \mu,\eta \in W$ için

$$\theta(\mu,\eta) = \begin{cases} |\mu-\eta|^3, & \mu \neq \eta \text{ ise} \\ 1, & \mu = \eta \text{ ise} \end{cases} \qquad \text{ve} \qquad d_\theta(\mu,\eta) = (\mu-\eta)^4$$

olarak tanımlansın. d_θ genişletilmiş $b-$metriktir.

$(e1)$ $\Rightarrow)$ $\mu = \eta$ olsun.

$$d_\theta(\mu,\eta) = (\mu-\eta)^4 = (\mu-\mu)^4 = 0$$

olur.

$\Leftarrow$) $d_\theta(\mu,\eta)=0$ olsun.

$$0=d_\theta(\mu,\eta)=(\mu-\eta)^4\Rightarrow\mu=\eta$$

sağlanır.

$(e2)$

$$d_\theta(\mu,\eta)=(\mu-\eta)^4=(\eta-\mu)^4=d_\theta(\eta,\mu)$$

dır.

$(e3)$

i) $a=\mu-\sigma=0$ ve $b=\sigma-\eta=0$ seçilsin. Yani, $\mu=\eta=\sigma$ olsun.

$$\begin{aligned} d_\theta(\mu,\eta)&=0\\ &\le 1[0+0]\\ &=\theta(\mu,\eta)\left[d_\theta(\mu,\sigma)+d_\theta(\sigma,\eta)\right]\end{aligned}$$

sağlanır.

ii) $|a|=|\mu-\sigma|\ge 1$ ve $|b|=|\sigma-\eta|\ge 1$ olsun.

$$\begin{aligned} d_\theta(\mu,\eta)=(\mu-\eta)^4=(a+b)^4&=\frac{(a+b)^4}{a^4+b^4}\left(a^4+b^4\right)\\ &\le\frac{(a+b)^4}{|a+b|}\left(a^4+b^4\right)\\ &\le|a+b|^3\left(a^4+b^4\right)\\ &\le|\mu-\eta|^3\left((\mu-\sigma)^4+(\sigma-\eta)^4\right)\\ &=\theta(\mu,\eta)\left(d_\theta(\mu,\sigma)+d_\theta(\sigma,\eta)\right)\end{aligned}$$

olduğundan her iki durumda da üçüncü şart sağlanır. Ancak $\forall s\ge 1$ sayısı için $b-$ metrik değildir. Çünkü, $\mu=9$, $\eta=2$, $\sigma=6$ seçilirse

$$\begin{aligned} d_\theta(\mu,\eta)&\le s\left[d_\theta(\mu,\sigma)+d_\theta(\sigma,\eta)\right]\\ 7^4&\le s\left[3^4+4^4\right]\end{aligned}$$

olduğundan $s \geq 7{,}12$ için $b-$metrik olur. Ancak, $s \leq 7$ için $b-$metrik olmaz. $s=1$ için ise metrik olmaz.

Örnek 2.3.3. [100] $W=\{1,2,3\}$ olmak üzere $\theta: W \times W \to [1,\infty)$ ve $d_\theta: W \times W \to [0,\infty)$ fonksiyonları,

$$\theta(\mu,\eta)=1+\mu+\eta,$$

$$d_\theta(1,1)=d_\theta(2,2)=d_\theta(3,3)=0$$

$$d_\theta(1,2)=d_\theta(2,1)=80$$

$$d_\theta(1,3)=d_\theta(3,1)=1000$$

$$d_\theta(2,3)=d_\theta(3,2)=600$$

olarak tanımlansın. (W,d_θ) genişletilmiş $b-$metrik uzaydır. $\forall \mu,\eta,\sigma \in W$ için

$(e1)$

$$d_\theta(\mu,\eta)=0 \Leftrightarrow \mu=\eta$$

olduğu d_θ fonksiyonunun tanımından görülür.

$(e2)$

$$d_\theta(\mu,\eta)=d_\theta(\eta,\mu)$$

d_θ fonksiyonunun tanımından görülür.

$(e3)$

1.durum: $\mu=1,\eta=1,\sigma=1$ olsun.

$$d_\theta(\mu,\eta)=0=3[0+0]\leq \theta(\mu,\eta)\left[d_\theta(\mu,\sigma)+d_\theta(\sigma,\eta)\right]$$

sağlanır.

2.durum: $\mu=1,\eta=1,\sigma=2$ olsun.

$$d_\theta(\mu,\eta)=0\le 3[80+80]=\theta(\mu,\eta)\left[d_\theta(\mu,\sigma)+d_\theta(\sigma,\eta)\right]$$

sağlanır.

3.durum: $\mu=1,\eta=1,\sigma=3$ olsun.

$$d_\theta(\mu,\eta)=0\le 3[1000+1000]=\theta(\mu,\eta)\left[d_\theta(\mu,\sigma)+d_\theta(\sigma,\eta)\right]$$

sağlanır.

4.durum: $\mu=1,\eta=2,\sigma=1$ olsun.

$$d_\theta(\mu,\eta)=80\le 4[0+80]=\theta(\mu,\eta)\left[d_\theta(\mu,\sigma)+d_\theta(\sigma,\eta)\right]$$

sağlanır.

5.durum: $\mu=1,\eta=2,\sigma=2$ olsun.

$$d_\theta(\mu,\eta)=80\le 4[80+0]=\theta(\mu,\eta)\left[d_\theta(\mu,\sigma)+d_\theta(\sigma,\eta)\right]$$

sağlanır.

6.durum: $\mu=1,\eta=2,\sigma=3$ olsun.

$$d_\theta(\mu,\eta)=80\le 4[1000+600]=\theta(\mu,\eta)\left[d_\theta(\mu,\sigma)+d_\theta(\sigma,\eta)\right]$$

sağlanır.

7.durum: $\mu=1,\eta=3,\sigma=1$ olsun.

$$d_\theta(\mu,\eta)=1000\le 5[0+1000]=\theta(\mu,\eta)\left[d_\theta(\mu,\sigma)+d_\theta(\sigma,\eta)\right]$$

sağlanır.

8.durum: $\mu=1,\eta=3,\sigma=2$ olsun.

$$d_\theta(\mu,\eta)=1000\le 5[80+600]=\theta(\mu,\eta)\left[d_\theta(\mu,\sigma)+d_\theta(\sigma,\eta)\right]$$

sağlanır.

9.durum: $\mu=1,\eta=3,\sigma=3$ olsun.

$$d_\theta(\mu,\eta)=1000\le 5[1000+0]=\theta(\mu,\eta)\left[d_\theta(\mu,\sigma)+d_\theta(\sigma,\eta)\right]$$

sağlanır.

10.durum: $\mu=2,\eta=1,\sigma=1$ olsun.

$$d_\theta(\mu,\eta)=80\leq 4[80+0]=\theta(\mu,\eta)\left[d_\theta(\mu,\sigma)+d_\theta(\sigma,\eta)\right]$$

sağlanır.

11.durum: $\mu=2,\eta=1,\sigma=2$ olsun.

$$d_\theta(\mu,\eta)=80\leq 4[0+80]=\theta(\mu,\eta)\left[d_\theta(\mu,\sigma)+d_\theta(\sigma,\eta)\right]$$

sağlanır.

12.durum: $\mu=2,\eta=1,\sigma=3$ olsun.

$$d_\theta(\mu,\eta)=80\leq 4.[600+1000]=\theta(\mu,\eta).\left[d_\theta(\mu,\sigma)+d_\theta(\sigma,\eta)\right]$$

sağlanır.

13.durum: $\mu=2,\eta=2,\sigma=1$ olsun.

$$d_\theta(\mu,\eta)=0\leq 5[80+80]=\theta(\mu,\eta)\left[d_\theta(\mu,\sigma)+d_\theta(\sigma,\eta)\right]$$

sağlanır.

14.durum: $\mu=2,\eta=2,\sigma=2$ olsun.

$$d_\theta(\mu,\eta)=0=5[0+0]\leq\theta(\mu,\eta)\left[d_\theta(\mu,\sigma)+d_\theta(\sigma,\eta)\right]$$

sağlanır.

15.durum: $\mu=2,\eta=2,\sigma=3$ olsun.

$$d_\theta(\mu,\eta)=0\leq 5[600+600]=\theta(\mu,\eta)\left[d_\theta(\mu,\sigma)+d_\theta(\sigma,\eta)\right]$$

sağlanır.

16.durum: $\mu=2,\eta=3,\sigma=1$ olsun.

$$d_\theta(\mu,\eta)=600\leq 6[80+1000]=\theta(\mu,\eta)\left[d_\theta(\mu,\sigma)+d_\theta(\sigma,\eta)\right]$$

sağlanır.

17.durum: $\mu=2,\eta=3,\sigma=2$ olsun.

$$d_\theta(\mu,\eta)=600\leq 6[0+600]=\theta(\mu,\eta)\left[d_\theta(\mu,\sigma)+d_\theta(\sigma,\eta)\right]$$

sağlanır.

18.durum: $\mu=2,\eta=3,\sigma=3$ olsun.

$$d_\theta(\mu,\eta)=600\leq 6[600+0]=\theta(\mu,\eta)\left[d_\theta(\mu,\sigma)+d_\theta(\sigma,\eta)\right]$$

sağlanır.

19.durum: $\mu=3,\eta=1,\sigma=1$ olsun.

$$d_\theta(\mu,\eta)=1000\leq 5[1000+0]=\theta(\mu,\eta)\left[d_\theta(\mu,\sigma)+d_\theta(\sigma,\eta)\right]$$

sağlanır.

20.durum: $\mu=3,\eta=1,\sigma=2$ olsun.

$$d_\theta(\mu,\eta)=1000\leq 5[600+80]=\theta(\mu,\eta)\left[d_\theta(\mu,\sigma)+d_\theta(\sigma,\eta)\right]$$

sağlanır.

21.durum: $\mu=3,\eta=1,\sigma=3$ olsun.

$$d_\theta(\mu,\eta)=1000\leq 5[0+1000]=\theta(\mu,\eta)\left[d_\theta(\mu,\sigma)+d_\theta(\sigma,\eta)\right]$$

sağlanır.

22.durum: $\mu=3,\eta=2,\sigma=1$ olsun.

$$d_\theta(\mu,\eta)=600\leq 6[1000+80]=\theta(\mu,\eta)\left[d_\theta(\mu,\sigma)+d_\theta(\sigma,\eta)\right]$$

sağlanır.

23.durum: $\mu=3,\eta=2,\sigma=2$ olsun.

$$d_\theta(\mu,\eta)=600\leq 6[600+0]=\theta(\mu,\eta)\left[d_\theta(\mu,\sigma)+d_\theta(\sigma,\eta)\right]$$

sağlanır.

24.durum: $\mu=3,\eta=2,\sigma=3$ olsun.

$$d_\theta(\mu,\eta)=600\leq 6[0+600]=\theta(\mu,\eta)[d_\theta(\mu,\sigma)+d_\theta(\sigma,\eta)]$$

sağlanır.

25.durum: $\mu=3,\eta=3,\sigma=1$ olsun.

$$d_\theta(\mu,\eta)=0\leq 7[1000+1000]=\theta(\mu,\eta)[d_\theta(\mu,\sigma)+d_\theta(\sigma,\eta)]$$

sağlanır.

26.durum: $\mu=3,\eta=3,\sigma=2$ olsun.

$$d_\theta(\mu,\eta)=0\leq 7[600+600]=\theta(\mu,\eta)[d_\theta(\mu,\sigma)+d_\theta(\sigma,\eta)]$$

sağlanır.

27.durum: $\mu=3,\eta=3,\sigma=3$ olsun.

$$d_\theta(\mu,\eta)=0=7[0+0]\leq\theta(\mu,\eta)[d_\theta(\mu,\sigma)+d_\theta(\sigma,\eta)]$$

sağlanır. Her durumda üçüncü şart sağlandığından, d_θ fonksiyonu genişletilmiş $b-$ metriktir.

Örnek 2.3.4. [102] $W=[0,1]$ olmak üzere $\theta:W\times W\to[1,\infty)$ ve $d_\theta:W\times W\to[0,\infty)$ fonksiyonları

$$\theta(\mu,\eta)=\frac{1+\mu+\eta}{\mu+\eta},$$

$$d_\theta(\mu,\eta)=\frac{1}{\mu\eta},\quad \mu,\eta\in[0,1],\mu\neq\eta$$

$$d_\theta(\mu,\eta)=0,\quad \mu,\eta\in[0,1],\mu=\eta$$

$$d_\theta(\mu,0)=d_\theta(0,\mu)=\frac{1}{\mu},\quad \mu\in(0,1]$$

olarak tanımlansın. (W,d_θ) genişletilmiş $b-$metrik uzaydır. $\forall\mu,\eta,\sigma\in W$ için

$(e1)$

$$d_\theta(\mu,\eta)=0\Leftrightarrow\mu=\eta$$

d_θ fonksiyonunun tanımından görülür.

$(e2)$ d_θ fonksiyonunun tanımından,

$$d_\theta(\mu,\eta)=\frac{1}{\mu\eta}=\frac{1}{\eta\mu}=d_\theta(\eta,\mu),\quad \mu,\eta\in[0,1],\mu\neq\eta$$

$$d_\theta(\mu,\eta)=0=d_\theta(\eta,\mu),\quad \mu,\eta\in[0,1],\mu=\eta$$

$$d_\theta(\mu,0)=d_\theta(0,\mu)=\frac{1}{\mu},\quad \mu\in(0,1],$$

simetri özelliğinin sağlandığı görülür.

$(e3)$

1.durum: $\mu=\eta\neq\sigma\in[0,1]$ olsun.

$$d_\theta(\mu,\eta)=0\leq 2\left[\frac{1}{\mu\sigma}+\frac{1}{\eta\sigma}\right]=\theta(\mu,\eta)\left[d_\theta(\mu,\sigma)+d_\theta(\sigma,\eta)\right]$$

dır.

2.durum: $\mu\in(0,1],\eta=0,\sigma\in[0,1],\mu\neq\sigma$ olsun.

$$d_\theta(\mu,\eta)=\frac{1}{\mu}\leq\frac{1+\mu}{\mu}\left[\frac{1}{\mu\sigma}+\frac{1}{\sigma}\right]=\theta(\mu,\eta)\left[d_\theta(\mu,\sigma)+d_\theta(\sigma,\eta)\right]$$

dır.

3.durum: $\mu=\eta=\sigma\in[0,1]$ olsun.

$$d_\theta(\mu,\eta)=0\leq\frac{1+2\mu}{2\mu}[0+0]=\theta(\mu,\eta)\left[d_\theta(\mu,\sigma)+d_\theta(\sigma,\eta)\right]$$

dır.

4.durum: $\mu\neq\eta\neq\sigma\in[0,1]$ olsun.

$$d_\theta(\mu,\eta)=\frac{1}{\mu\eta}\leq\frac{1+\mu+\eta}{\mu+\eta}\left[\frac{1}{\mu\sigma}+\frac{1}{\sigma\eta}\right]=\theta(\mu,\eta)\left[d_\theta(\mu,\sigma)+d_\theta(\sigma,\eta)\right]$$

dır.

5.durum: $\mu \in (0,1], \eta \in [0,1], \sigma = 0, \quad \mu \neq \eta$ olsun.

$$d_\theta(\mu,\eta) = \frac{1}{\mu\eta} \leq \frac{1+\mu+\eta}{\mu+\eta}\left[\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\eta}\right] = \theta(\mu,\eta)\left[d_\theta(\mu,\sigma)+d_\theta(\sigma,\eta)\right]$$

dır.

6.durum: $\mu = 0, \eta = \sigma \in [0,1]$ olsun.

$$d_\theta(\mu,\eta) = \frac{1}{\eta} \leq \frac{1+\eta}{\eta}\left[\frac{1}{\sigma}+0\right] = \theta(\mu,\eta)\left[d_\theta(\mu,\sigma)+d_\theta(\sigma,\eta)\right]$$

dır. Her durumda üçüncü şart sağlandığından, d_θ fonksiyonu genişletilmiş $b-$metriktir.

Örnek 2.3.5. $S = [0,\infty)$ olsun. $\delta_e : S \times S \to [0,\infty)$ fonksiyonu $\delta_e(\mu,\eta) = (\mu-\eta)^2$ olarak ve $w : S \times S \to [1,\infty)$ fonksiyonu ise $w(\mu,\eta) = 3\mu + 2\eta + 6$ olarak tanımlansın. O zaman, (S,δ_e) bir genişletilmiş $b-$metrik uzaydır.

$(e1)$ $\Rightarrow$) $\quad \mu = \eta$ olsun.

$$\delta_e(\mu,\eta) = (\mu-\eta)^2 = (\mu-\mu)^2 = 0$$

sağlanır.

$\Leftarrow$) $\quad \delta_e(\mu,\eta) = 0$ olsun. $0 = \delta_e(\mu,\eta) = (\mu-\eta)^2$ olduğundan

$$(\mu-\eta)^2 = 0 \Rightarrow \mu-\eta = 0 \Rightarrow \mu = \eta$$

sağlanır.

$(e2)$

$$\delta_e(\mu,\eta) = (\mu-\eta)^2 = (\eta-\mu)^2 = \delta_e(\eta,\mu)$$

sağlanır.

$(e3)$

$$
\begin{aligned}
\delta_e(\mu,\eta) &= (\mu-\eta)^2 \\
&= (\mu-\sigma+\sigma-\eta)^2 \\
&\le 2.\left[(\mu-\sigma)^2+(\sigma-\eta)^2\right] \\
&\le (3\mu+2\eta+6).\left[(\mu-\sigma)^2+(\sigma-\eta)^2\right] \\
&= w(\mu,\eta).\left[\delta_e(\mu,\sigma)+\delta_e(\sigma,\eta)\right]
\end{aligned}
$$

sağlanır. Üç şart da sağlandığından (S,δ_e) genişletilmiş $b-$metrik uzaydır.

Örnek 2.3.6. [103] $W=\{2,3,4\}$ olsun. $\theta: W\times W\to[1,\infty)$ ve $d_\theta: W\times W\to[0,\infty)$ fonksiyonları

$$\theta(\mu,\eta)=2+\mu+\eta \ ,$$

$$d_\theta(2,2)=d_\theta(3,3)=d_\theta(4,4)=0$$

$$d_\theta(2,3)=d_\theta(3,2)=30$$

$$d_\theta(2,4)=d_\theta(4,2)=200$$

$$d_\theta(3,4)=d_\theta(4,3)=2000$$

olarak tanımlansın. (W,d_θ) genişletilmiş $b-$metrik uzaydır. $\forall\mu,\eta,\sigma\in W$ için

$(e1)$ $d_\theta(2,2)=d_\theta(3,3)=d_\theta(4,4)=0$ olduğundan

$$d_\theta(\mu,\eta)=0\Leftrightarrow\mu=\eta$$

d_θ fonksiyonunun tanımından açıktır.

$(e2)$ $d_\theta(2,3)=d_\theta(3,2)$, $d_\theta(2,4)=d_\theta(4,2)$, $d_\theta(3,4)=d_\theta(4,3)$ olduğundan

$$d_\theta(\mu,\eta)=d_\theta(\eta,\mu)$$

d_θ fonksiyonunun tanımından açıktır.

$(e3)$

1.durum: $\mu = 2, \eta = 2, \sigma = 2$ olsun.

$$d_\theta(\mu,\eta) = 0 = 6[0+0] \le \theta(\mu,\eta)\left[d_\theta(\mu,\sigma) + d_\theta(\sigma,\eta)\right]$$

dır.

2.durum: $\mu = 2, \eta = 2, \sigma = 3$ olsun.

$$d_\theta(\mu,\eta) = 0 \le 6[30+30] = \theta(\mu,\eta)\left[d_\theta(\mu,\sigma) + d_\theta(\sigma,\eta)\right]$$

dır.

3.durum: $\mu = 2, \eta = 2, \sigma = 4$ olsun.

$$d_\theta(\mu,\eta) = 0 \le 6[200+200] = \theta(\mu,\eta)\left[d_\theta(\mu,\sigma) + d_\theta(\sigma,\eta)\right]$$

dır.

4.durum: $\mu = 2, \eta = 3, \sigma = 2$ olsun.

$$d_\theta(\mu,\eta) = 30 \le 7[0+30] = \theta(\mu,\eta)\left[d_\theta(\mu,\sigma) + d_\theta(\sigma,\eta)\right]$$

dır.

5.durum: $\mu = 2, \eta = 3, \sigma = 3$ olsun.

$$d_\theta(\mu,\eta) = 30 \le 7[30+0] = \theta(\mu,\eta)\left[d_\theta(\mu,\sigma) + d_\theta(\sigma,\eta)\right]$$

dır.

6.durum: $\mu = 2, \eta = 3, \sigma = 4$ olsun.

$$d_\theta(\mu,\eta) = 30 \le 7[200+2000] = \theta(\mu,\eta)\left[d_\theta(\mu,\sigma) + d_\theta(\sigma,\eta)\right]$$

dır.

7.durum: $\mu = 2, \eta = 4, \sigma = 2$ olsun.

$$d_\theta(\mu,\eta) = 200 \le 8[0+200] = \theta(\mu,\eta)\left[d_\theta(\mu,\sigma) + d_\theta(\sigma,\eta)\right]$$

dır.

8.durum: $\mu = 2, \eta = 4, \sigma = 3$ olsun.

$$d_\theta(\mu,\eta) = 200 \le 8[30+2000] = \theta(\mu,\eta)\left[d_\theta(\mu,\sigma)+d_\theta(\sigma,\eta)\right]$$

dır.

9.durum: $\mu = 2, \eta = 4, \sigma = 4$ olsun.

$$d_\theta(\mu,\eta) = 200 \le 8[200+0] = \theta(\mu,\eta)\left[d_\theta(\mu,\sigma)+d_\theta(\sigma,\eta)\right]$$

dır.

10.durum: $\mu = 3, \eta = 2, \sigma = 2$ olsun.

$$d_\theta(\mu,\eta) = 30 \le 7[30+0] = \theta(\mu,\eta)\left[d_\theta(\mu,\sigma)+d_\theta(\sigma,\eta)\right]$$

dır.

11.durum: $\mu = 3, \eta = 2, \sigma = 3$ olsun.

$$d_\theta(\mu,\eta) = 30 \le 7[0+30] = \theta(\mu,\eta)\left[d_\theta(\mu,\sigma)+d_\theta(\sigma,\eta)\right]$$

dır.

12.durum: $\mu = 3, \eta = 2, \sigma = 4$ olsun.

$$d_\theta(\mu,\eta) = 30 \le 7[2000+200] = \theta(\mu,\eta)\left[d_\theta(\mu,\sigma)+d_\theta(\sigma,\eta)\right]$$

dır.

13.durum: $\mu = 3, \eta = 3, \sigma = 2$ olsun.

$$d_\theta(\mu,\eta) = 0 \le 8[30+30] = \theta(\mu,\eta)\left[d_\theta(\mu,\sigma)+d_\theta(\sigma,\eta)\right]$$

dır.

14.durum: $\mu = 3, \eta = 3, \sigma = 3$ olsun.

$$d_\theta(\mu,\eta) = 0 \le 8[0+0] = \theta(\mu,\eta)\left[d_\theta(\mu,\sigma)+d_\theta(\sigma,\eta)\right]$$

dır.

15.durum: $\mu = 3, \eta = 3, \sigma = 4$ olsun.

$$d_\theta(\mu,\eta)=0\leq 8[2000+2000]=\theta(\mu,\eta)\left[d_\theta(\mu,\sigma)+d_\theta(\sigma,\eta)\right]$$

dır.

16.durum: $\mu=3,\eta=4,\sigma=2$ olsun.

$$d_\theta(\mu,\eta)=2000\leq 9[30+200]=\theta(\mu,\eta)\left[d_\theta(\mu,\sigma)+d_\theta(\sigma,\eta)\right]$$

dır.

17.durum: $\mu=3,\eta=4,\sigma=3$ olsun.

$$d_\theta(\mu,\eta)=2000\leq 9[0+2000]=\theta(\mu,\eta)\left[d_\theta(\mu,\sigma)+d_\theta(\sigma,\eta)\right]$$

dır.

18.durum: $\mu=3,\eta=4,\sigma=4$ olsun.

$$d_\theta(\mu,\eta)=2000\leq 9[2000+0]=\theta(\mu,\eta)\left[d_\theta(\mu,\sigma)+d_\theta(\sigma,\eta)\right]$$

dır.

19.durum: $\mu=4,\eta=2,\sigma=2$ olsun.

$$d_\theta(\mu,\eta)=200\leq 8[200+0]=\theta(\mu,\eta)\left[d_\theta(\mu,\sigma)+d_\theta(\sigma,\eta)\right]$$

dır.

20.durum: $\mu=4,\eta=2,\sigma=3$ olsun.

$$d_\theta(\mu,\eta)=200\leq 8[2000+30]=\theta(\mu,\eta)\left[d_\theta(\mu,\sigma)+d_\theta(\sigma,\eta)\right]$$

dır.

21.durum: $\mu=4,\eta=2,\sigma=4$ olsun.

$$d_\theta(\mu,\eta)=200\leq 8[0+200]=\theta(\mu,\eta)\left[d_\theta(\mu,\sigma)+d_\theta(\sigma,\eta)\right]$$

dır.

22.durum: $\mu=4,\eta=3,\sigma=2$ olsun.

$$d_\theta(\mu,\eta)=2000\leq 9[200+30]=\theta(\mu,\eta)\left[d_\theta(\mu,\sigma)+d_\theta(\sigma,\eta)\right]$$

dır.

23.durum: $\mu=4,\eta=3,\sigma=3$ olsun.

$$d_\theta(\mu,\eta)=2000\leq 9[2000+0]=\theta(\mu,\eta)\left[d_\theta(\mu,\sigma)+d_\theta(\sigma,\eta)\right]$$

dır.

24.durum: $\mu=4,\eta=3,\sigma=4$ olsun.

$$d_\theta(\mu,\eta)=2000\leq 9[200+200]=\theta(\mu,\eta)\left[d_\theta(\mu,\sigma)+d_\theta(\sigma,\eta)\right]$$

dır.

25.durum: $\mu=4,\eta=4,\sigma=2$ olsun.

$$d_\theta(\mu,\eta)=0\leq 10[200+200]=\theta(\mu,\eta)\left[d_\theta(\mu,\sigma)+d_\theta(\sigma,\eta)\right]$$

dır.

26.durum: $\mu=4,\eta=4,\sigma=3$ olsun.

$$d_\theta(\mu,\eta)=0\leq 10[2000+2000]=\theta(\mu,\eta)\left[d_\theta(\mu,\sigma)+d_\theta(\sigma,\eta)\right]$$

dır.

27.durum: $\mu=4,\eta=4,\sigma=4$ olsun.

$$d_\theta(\mu,\eta)=0\leq 10[0+0]=\theta(\mu,\eta)\left[d_\theta(\mu,\sigma)+d_\theta(\sigma,\eta)\right]$$

dır. Her durumda üçüncü şart sağlandığından d_θ fonksiyonu genişletilmiş $b-$ metriktir.

Örnek 2.3.7. [62] $W=\{-1,1,2\}$ olsun. $\theta:W\times W\to[1,\infty)$ ve $d_\theta:W\times W\to[0,\infty)$ fonksiyonları

$$\theta(\mu,\eta)=|\mu|+|\eta|,$$

$$d_\theta(2,2)=d_\theta(1,1)=d_\theta(-1,-1)=0,$$

$$d_\theta(1,2)=d_\theta(2,1)=\frac{1}{2},$$

$$d_\theta(1,-1)=d_\theta(-1,1)=d_\theta(2,-1)=d_\theta(-1,2)=\frac{1}{3}$$

olarak tanımlansın. (W,d_θ) genişletilmiş $b-$metrik uzaydır. $\forall \mu,\eta,\sigma\in W$ için

$(e1)$

$$d_\theta(\mu,\eta)=0 \Leftrightarrow \mu=\eta$$

d_θ fonksiyonunun tanımından görülür.

$(e2)$

$$d_\theta(\mu,\eta)=d_\theta(\eta,\mu)$$

olduğu d_θ fonksiyonunun tanımından açıktır.

$(e3)$

1.durum: $\mu=-1,\eta=-1,\sigma=-1$ olsun.

$$d_\theta(\mu,\eta)=0=2[0+0]\le\theta(\mu,\eta)[d_\theta(\mu,\sigma)+d_\theta(\sigma,\eta)]$$

dır.

2.durum: $\mu=-1,\eta=-1,\sigma=1$ olsun.

$$d_\theta(\mu,\eta)=0\le 2\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right]=\theta(\mu,\eta)[d_\theta(\mu,\sigma)+d_\theta(\sigma,\eta)]$$

dır.

3.durum: $\mu=-1,\eta=-1,\sigma=2$ olsun.

$$d_\theta(\mu,\eta)=0\le 2\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right]=\theta(\mu,\eta)[d_\theta(\mu,\sigma)+d_\theta(\sigma,\eta)]$$

dır.

4.durum: $\mu=-1,\eta=1,\sigma=-1$ olsun.

$$d_\theta(\mu,\eta)=\frac{1}{3}\le 2\left[0+\frac{1}{3}\right]=\theta(\mu,\eta)[d_\theta(\mu,\sigma)+d_\theta(\sigma,\eta)]$$

dır.

5.durum: $\mu=-1,\eta=1,\sigma=1$ olsun.

$$d_\theta(\mu,\eta)=\frac{1}{3}\le 2\left[\frac{1}{3}+0\right]=\theta(\mu,\eta)\left[d_\theta(\mu,\sigma)+d_\theta(\sigma,\eta)\right]$$

dır.

6.durum: $\mu=-1,\eta=1,\sigma=2$ olsun.

$$d_\theta(\mu,\eta)=\frac{1}{3}\le 2\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right]=\theta(\mu,\eta)\left[d_\theta(\mu,\sigma)+d_\theta(\sigma,\eta)\right]$$

dır.

7.durum: $\mu=-1,\eta=2,\sigma=-1$ olsun.

$$d_\theta(\mu,\eta)=\frac{1}{3}\le 3\left[0+\frac{1}{3}\right]=\theta(\mu,\eta)\left[d_\theta(\mu,\sigma)+d_\theta(\sigma,\eta)\right]$$

dır.

8.durum: $\mu=-1,\eta=2,\sigma=1$ olsun.

$$d_\theta(\mu,\eta)=\frac{1}{3}\le 3\left[0+\frac{1}{2}\right]=\theta(\mu,\eta)\left[d_\theta(\mu,\sigma)+d_\theta(\sigma,\eta)\right]$$

dır.

9.durum: $\mu=-1,\eta=2,\sigma=2$ olsun.

$$d_\theta(\mu,\eta)=\frac{1}{3}\le 3\left[\frac{1}{3}+0\right]=\theta(\mu,\eta)\left[d_\theta(\mu,\sigma)+d_\theta(\sigma,\eta)\right]$$

dır.

10.durum: $\mu=1,\eta=-1,\sigma=-1$ olsun.

$$d_\theta(\mu,\eta)=\frac{1}{3}\le 2\left[\frac{1}{3}+0\right]=\theta(\mu,\eta)\left[d_\theta(\mu,\sigma)+d_\theta(\sigma,\eta)\right]$$

dır.

11.durum: $\mu=1,\eta=-1,\sigma=1$ olsun.

$$d_\theta(\mu,\eta)=\frac{1}{3}\le 2\left[0+\frac{1}{3}\right]=\theta(\mu,\eta)\left[d_\theta(\mu,\sigma)+d_\theta(\sigma,\eta)\right]$$

dır.

12.durum: $\mu=1,\eta=-1,\sigma=2$ olsun.

$$d_\theta(\mu,\eta)=\frac{1}{3}\le 2\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right]=\theta(\mu,\eta)\left[d_\theta(\mu,\sigma)+d_\theta(\sigma,\eta)\right]$$

dır.

13.durum: $\mu=1,\eta=1,\sigma=-1$ olsun.

$$d_\theta(\mu,\eta)=0\le 2\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right]=\theta(\mu,\eta)\left[d_\theta(\mu,\sigma)+d_\theta(\sigma,\eta)\right]$$

dır.

14.durum: $\mu=1,\eta=1,\sigma=1$ olsun.

$$d_\theta(\mu,\eta)=0\le 2[0+0]=\theta(\mu,\eta)\left[d_\theta(\mu,\sigma)+d_\theta(\sigma,\eta)\right]$$

dır.

15.durum: $\mu=1,\eta=1,\sigma=2$ olsun.

$$d_\theta(\mu,\eta)=0\le 2\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right]=\theta(\mu,\eta)\left[d_\theta(\mu,\sigma)+d_\theta(\sigma,\eta)\right]$$

dır.

16.durum: $\mu=1,\eta=2,\sigma=-1$ olsun.

$$d_\theta(\mu,\eta)=\frac{1}{2}\le 3\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right]=\theta(\mu,\eta)\left[d_\theta(\mu,\sigma)+d_\theta(\sigma,\eta)\right]$$

dır.

17.durum: $\mu=1,\eta=2,\sigma=1$ olsun.

$$d_\theta(\mu,\eta)=\frac{1}{2}\le 3\left[0+\frac{1}{2}\right]=\theta(\mu,\eta)\left[d_\theta(\mu,\sigma)+d_\theta(\sigma,\eta)\right]$$

dır.

18.durum: $\mu=1,\eta=2,\sigma=2$ olsun.

$$d_\theta(\mu,\eta)=\frac{1}{2}\leq 3\left[\frac{1}{2}+0\right]=\theta(\mu,\eta)\left[d_\theta(\mu,\sigma)+d_\theta(\sigma,\eta)\right]$$

dır.

19.durum: $\mu=2,\eta=-1,\sigma=-1$ olsun.

$$d_\theta(\mu,\eta)=\frac{1}{3}\leq 3\left[\frac{1}{3}+0\right]=\theta(\mu,\eta)\left[d_\theta(\mu,\sigma)+d_\theta(\sigma,\eta)\right]$$

dır.

20.durum: $\mu=2,\eta=-1,\sigma=1$ olsun.

$$d_\theta(\mu,\eta)=\frac{1}{3}\leq 3\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right]=\theta(\mu,\eta)\left[d_\theta(\mu,\sigma)+d_\theta(\sigma,\eta)\right]$$

dır.

21.durum: $\mu=2,\eta=-1,\sigma=2$ olsun.

$$d_\theta(\mu,\eta)=\frac{1}{3}\leq 3\left[0+\frac{1}{3}\right]=\theta(\mu,\eta)\left[d_\theta(\mu,\sigma)+d_\theta(\sigma,\eta)\right]$$

dır.

22.durum: $\mu=2,\eta=1,\sigma=-1$ olsun.

$$d_\theta(\mu,\eta)=\frac{1}{2}\leq 3\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right]=\theta(\mu,\eta)\left[d_\theta(\mu,\sigma)+d_\theta(\sigma,\eta)\right]$$

dır.

23.durum: $\mu=2,\eta=1,\sigma=1$ olsun.

$$d_\theta(\mu,\eta)=\frac{1}{2}\leq 3\left[\frac{1}{3}+0\right]=\theta(\mu,\eta)\left[d_\theta(\mu,\sigma)+d_\theta(\sigma,\eta)\right]$$

dır.

24.durum: $\mu=2,\eta=1,\sigma=2$ olsun.

$$d_\theta(\mu,\eta)=\frac{1}{2}\leq 3\left[0+\frac{1}{2}\right]=\theta(\mu,\eta)\left[d_\theta(\mu,\sigma)+d_\theta(\sigma,\eta)\right]$$

dır.

25.durum: $\mu=2,\eta=2,\sigma=-1$ olsun.

$$d_\theta(\mu,\eta)=0\leq 4\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right]=\theta(\mu,\eta)\left[d_\theta(\mu,\sigma)+d_\theta(\sigma,\eta)\right]$$

dır.

26.durum: $\mu=2,\eta=2,\sigma=1$ olsun.

$$d_\theta(\mu,\eta)=0\leq 4\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right]=\theta(\mu,\eta)\left[d_\theta(\mu,\sigma)+d_\theta(\sigma,\eta)\right]$$

dır.

27.durum: $\mu=2,\eta=2,\sigma=2$ olsun.

$$d_\theta(\mu,\eta)=0\leq 4[0+0]=\theta(\mu,\eta)\left[d_\theta(\mu,\sigma)+d_\theta(\sigma,\eta)\right]$$

dır. Her durumda üçüncü şart sağlandığından d_θ fonksiyonu genişletilmiş $b-$metriktir.

Örnek 2.3.8. [103] $\varepsilon>0$ sabit olsun. $W=\mathbb{N}_0=\{0,1,2,...\}$ olmak üzere $d_\theta : W\times W\to[1,\infty)$ fonksiyonu

$$d_\theta(0,1)=1,\ d_\theta(0,m)=1+\varepsilon,\ m\geq 2$$

$$d_\theta(1,m)=\frac{1}{m},\ d_\theta(n,m)=\frac{1}{n}+\frac{1}{m}, n\geq 2,\ d_\theta(n,n)=0,$$

ve $w:W\times W\to[1,\infty)$ fonksiyonu

$$w(n,m)=\begin{cases}1 & m=0 \text{ veya } n=0 \text{ veya ikisi birden sıfır ise}\\ 1+\frac{1}{n}+\frac{1}{m} & m,n\neq 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \text{ise}\end{cases}$$

olarak tanımlansın. (W,d_θ) genişletilmiş $b-$metrik uzaydır.

$(e1)$ d_θ fonksiyonunun tanımından

$$m = n \Leftrightarrow d_\theta(n,m) = 0$$

sağlanır.

$(e2)$ d_θ fonksiyonunun tanımından simetri özelliği sağlanır.

$(e3)$

1.durum: $m = n = k$ olsun.

$$d_\theta(m,n) = 0 \le 1[0+0] = w(m,n)\left[d_\theta(m,k) + d_\theta(k,n)\right]$$

dır.

2.durum: $m = n \ne k$, $k \ge 2$ olsun.

$$d_\theta(m,n) = 0 \le 1\left[\frac{1}{m} + \frac{1}{k} + \frac{1}{k} + \frac{1}{n}\right] = w(m,n)\left[d_\theta(m,k) + d_\theta(k,n)\right]$$

dır.

3.durum: $m \ne n \ne k$, $n \ge 2$ olsun.

$$d_\theta(m,n) = \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \le \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)\left[d_\theta(m,k) + \frac{1}{k} + \frac{1}{n}\right] = w(m,n)\left[d_\theta(m,k) + d_\theta(k,n)\right]$$

dır. $d_\theta(m,k)$ için hangi durum yazılırsa yazılsın eşitsizlik sağlanır.

4.durum: $m = 0, n = 1, k \ge 2$ olsun.

$$d_\theta(m,n) = 1 \le 1\left[1 + \varepsilon + \frac{1}{k}\right] = w(m,n)\left[d_\theta(m,k) + d_\theta(k,n)\right]$$

dır.

5.durum: $m = 2, n = 0, k \ge 2$ olsun.

$$d_\theta(m,n) = (1+\varepsilon) \le 1\left[\frac{1}{m} + \frac{1}{k} + 1 + \varepsilon\right] = w(m,n)\left[d_\theta(m,k) + d_\theta(k,n)\right]$$

dır.

6.durum: $m=0, n\geq 2, k=0$ olsun.

$$d_\theta(m,n)=(1+\varepsilon)\leq 1[0+1+\varepsilon]=w(m,n)\left[d_\theta(m,k)+d_\theta(k,n)\right]$$

dır. Üç şart da sağlandığından (W,d_θ) genişletilmiş $b-$metrik uzaydır.

Tanım 2.3.9. [103] (W,d_θ) herhangi bir genişletilmiş $b-$metrik uzay olmak üzere,

$$B_\theta(\mu,\varepsilon)=\{\eta\in W: d_\theta(\mu,\eta)<\varepsilon, \varepsilon>0\}$$

biçiminde tanımlanan kümeye $\mu\in W$ merkezli, $\varepsilon>0$ yarıçaplı açık yuvar denir. $\theta-$ açık yuvarlarının ailesi, $\{B_\theta(\mu,\varepsilon): \mu\in W, \varepsilon>0\}$'dır.

(W,d_θ) genişletilmiş $b-$metrik uzayında $\{B_\theta(\mu,\varepsilon): \mu\in W, \varepsilon>0\}$ bazı ile W üzerinde üretilen topoloji τ_θ ile gösterilir.

$$B_\theta[\mu,\varepsilon]=\{\eta\in W: d_\theta(\mu,\eta)\leq\varepsilon, \varepsilon>0\}$$

biçiminde tanımlanan kümeye $\mu\in W$ merkezli, $\varepsilon>0$ yarıçaplı kapalı yuvar denir.

Örnek 2.3.10. $S=[0,\infty)$ olsun. $\delta_\theta: S\times S\to[0,\infty)$ fonksiyonu $\delta_\theta(\mu,\eta)=(\mu-\eta)^2$ olarak ve $w: S\times S\to[1,\infty)$ fonksiyonu $w(\mu,\eta)=3\mu+2\eta+6$ olarak tanımlansın. Bu durumda, (S,δ_θ) bir genişletilmiş metrik uzayı için açık yuvarı

$$\begin{aligned}
B_\theta(a,r)&=\{\eta\in S:\delta_e(a,\eta)<r\}\\
&=\left\{\eta\in S:(a-\eta)^2<r\right\}\\
&=\left\{\eta\in S:-\sqrt{r}<a-\eta<\sqrt{r}\right\}\\
&=\left\{\eta\in S:a-\sqrt{r}<\eta<a+\sqrt{r}\right\}\\
&=\left(a-\sqrt{r},a+\sqrt{r}\right)
\end{aligned}$$

olarak tanımlıdır.

Örnek 2.3.11. $S=[0,1]$, $w:S\times S\to[1,\infty)$, $w(\mu,\eta)=\dfrac{\mu\eta+1}{\mu+\eta}$ ve $w(0,0)=\dfrac{3}{2}$ olsun.

$$\delta_\theta(\mu,\eta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\mu\eta} & \mu,\eta\in(0,1],\mu\neq\eta \text{ ise}\\ 0 & \mu,\eta\in[0,1],\mu=\eta \text{ ise}\end{cases}$$

$$\delta_\theta(\eta,0)=\delta_\theta(0,\eta)=\frac{1}{\eta},\eta\in(0,1)$$

için w ve δ_θ fonksiyonları tanımlansın. Bu durumda (S,δ_θ) genişletilmiş $b-$metrik uzayında $B_\theta(\mu,\varepsilon)=\{\eta\in S:\delta_\theta(\mu,\eta)<\varepsilon\}$ için:

i) aşağıdaki ifade her zaman sağlanır:

$$\mu,\eta\in[0,1] \text{ ve } \mu=\eta \text{ ise, } \delta_\theta(\mu,\eta)=0<\varepsilon$$

dır.

ii)

$$\mu,\eta\in(0,1] \text{ ve } \mu\neq\eta \text{ ise, } \delta_\theta(\mu,\eta)=\frac{1}{\mu\eta}<\varepsilon\Rightarrow\eta>\frac{1}{\mu\varepsilon}$$

dır.

iii)

$$\mu=0,\eta\in(0,1) \text{ ise, } \delta_\theta(\mu,\eta)=\frac{1}{\eta}<\varepsilon\Rightarrow\eta>\frac{1}{\varepsilon}$$

dır. Buradan

$$B_\theta(\mu,\varepsilon)=\begin{cases}[0,1], & \mu,\eta\in[0,1],\ \mu=\eta \quad \text{ise}\\ \left(\dfrac{1}{\mu\varepsilon},1\right], & \mu,\eta\in(0,1],\ \mu\neq\eta \quad \text{ise}\\ \left(\dfrac{1}{\varepsilon},1\right), & \mu=0,\ \eta\in(0,1) \qquad \text{ise}\end{cases}$$

bulunur.

Tanım 2.3.12. [103] (W, d_θ) herhangi bir genişletilmiş $b-$metrik uzay olsun.

1) $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset W$ bir dizi olsun. $\mu \in W$ olmak üzere, eğer $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $\forall n \geq n_0$ için $d_\theta(\mu_n, \mu) < \varepsilon$ olacak biçimde $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi μ noktasına yakınsaktır denir.
2) Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $\forall n, m \geq n_0$ için $d_\theta(\mu_n, \mu_m) < \varepsilon$ olacak biçimde $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisine W üzerinde bir Cauchy dizisi denir.
3) Eğer W üzerinde her Cauchy dizisi bu uzayda bir noktaya yakınsak ise (W, d_θ) uzayı genişletilmiş $b-$metrik uzayı tamdır.
4) $(W, d_{\theta 1})$ ve $(Q, d_{\theta 2})$ iki genişletilmiş $b-$metrik uzay ve $T : W \to Q$ herhangi bir fonksiyon olsun. $\mu_0 \in W$ olmak üzere her $\varepsilon > 0$ için
$$d_{\theta 1}(\mu, \mu_0) < \delta \Rightarrow d_{\theta 2}(T\mu, T\mu_0) < \varepsilon$$
koşulunu sağlayan bir $\delta > 0$ sayısı varsa T fonksiyonu $\mu_0 \in W$ noktasında süreklidir denir. T fonksiyonu W kümesindeki her noktada sürekli ise T fonksiyonuna W üzerinde süreklidir denir.

Tanım 2.3.13. [103] (W, d_θ) herhangi bir genişletilmiş $b-$metrik uzay olsun.

1) Eğer herhangi $a \in A$ için, $B_e(a, r) \subset A$ olacak şekilde $r > 0$ bulunuyorsa $A \subset W$ kümesi açık kümedir.

2) Eğer herhangi $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\lim_{n\to\infty} \mu_n = \mu$ ve $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ iken $\mu \in B$ ise $B \subset W$ kapalı kümedir.

Tanım 2.3.14. [103] $A \subset W$ kümesi açıktır $\Leftrightarrow A^t = W - A$ kümesi kapalıdır.

Önerme 2.3.15. [103] (W, d_θ) herhangi bir genişletilmiş $b-$metrik uzay olsun. Eğer d_θ herhangi $a \in W$ için bir değişkene göre sürekli ve $r > 0$ ise

1) $B_\theta(a, r)$ açık yuvarı açık kümedir.
2) $B_\theta[a, r]$ kapalı yuvarı kapalı kümedir.

İspat :

1) $(B_e(a, r))^t$ kümesinin kapalı olduğunu göstermek yeterlidir. $\lim_{n\to\infty} \mu_n = \mu$ olacak biçimde $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset (B_\theta(a, r))^t$ bir dizi olsun. $d_\theta(\mu, a) = \lim_{n\to\infty} d_\theta(\mu_n, a) \geq r$ olup buradan $\mu \in (B_\theta(a, r))^t$ olur ki, bu da

$\left(B_\theta\left(a,r\right)\right)^t$ kümesinin kapalı olduğunu gösterir. Dolayısıyla $B_\theta\left(a,r\right)$ açık kümedir.

2) $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B_\theta\left[a,r\right]$ ve $\lim_{n\to\infty}\mu_n = \mu$ olsun. $d_\theta\left(\mu,a\right)=\lim_{n\to\infty} d_\theta\left(\mu_n,a\right)\le r$ olduğundan $\mu\in B_\theta\left[\mu,a\right]$ olur ki, $B_\theta\left[a,r\right]$ kümesinin kapalı olduğu anlaşılır.

Uyarı 2.3.16. [103] $\left(W,b\right)$ $b-$metrik uzayında

1) $b-$metrik fonksiyonu her durumda sürekli olmak zorunda değildir,

2) $b-$metrik uzayında her açık yuvar açık küme olmak zorunda değildir,

ifadeleri genişletilmiş $b-$metrik için de doğrudur.

Örnek 2.3.17. [103] $\varepsilon>0$ sabit sayı olsun. $W=\mathbb{N}_0=\{0,1,2,\ldots\}$ olmak üzere

$d_\theta : W\times W \to [1,\infty)$ fonksiyonu

$$d_\theta\left(0,1\right)=1,\ d_\theta\left(0,m\right)=1+\varepsilon,\ m\ge 2$$

$$d_\theta\left(1,m\right)=\frac{1}{m},\ d_\theta\left(n,m\right)=\frac{1}{n}+\frac{1}{m},\ n\ge 2,\ d_\theta\left(n,n\right)=0$$

ve $w: W\times W\to[1,\infty)$ fonksiyonu

$$w\left(n,m\right)=\begin{cases} 1, & m=0 \text{ veya } n=0 \text{ veya ikisi birden sıfır ise} \\ 1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{m}, & m,n\neq 0 \quad \text{ise} \end{cases}$$

olarak tanımlansın. $\left(W,d_\theta\right)$ genişletilmiş $b-$metrik uzaydır. Bu metriğe göre açık yuvarlar için

$$B_\theta\left(0,1+\frac{\varepsilon}{2}\right)=\left\{\eta\in W : d_\theta\left(0,\eta\right)<1+\frac{\varepsilon}{2}\right\}=\{0,1\},$$

$$B_\theta\left(1,r\right)=\left\{\eta\in W : d_\theta\left(1,\eta\right)<r,\ r>0\right\}=\{1,2,3,...\}$$

dır. $1\in B_\theta\left(0,1+\dfrac{\varepsilon}{2}\right)$ olduğundan $\forall r>0$ için $B_\theta\left(1,r\right)\not\subset B_\theta\left(0,1+\dfrac{\varepsilon}{2}\right)$ sağlanır. Bu durumda $B_\theta\left(0,1+\dfrac{\varepsilon}{2}\right)$ açık yuvarı açık küme değildir.

Örnek 2.3.18. $S=[0,1]$, $w:S\times S\to[1,\infty)$, $w(\mu,\eta)=\dfrac{\mu\eta+1}{\mu+\eta}$ ve $w(0,0)=\dfrac{3}{2}$ olsun.

$$\delta_\theta(\mu,\eta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\mu\eta}, & \mu,\eta\in(0,1], \mu\neq\eta \quad \text{ise}\\ 0, & \mu,\eta\in[0,1], \mu=\eta \quad \text{ise}\end{cases}$$

$$\delta_\theta(\eta,0)=\delta_\theta(0,\eta)=\frac{1}{\eta}, \eta\in(0,1)$$

için w ve δ_θ fonksiyonları verilsin. (S,δ_θ) genişletilmiş $b-$metrik uzaydır. Bu uzaydaki, $(\mu_n)=\left(\dfrac{1}{n+1}\right)$ dizisi için $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}=0\in S$ sağlanır.

Genişletilmiş $b-$metrik uzayda süreklilik için $\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n=\mu$ olmak üzere $\lim\limits_{n\to\infty}\delta_\theta(\mu_n,a)=\delta_\theta(\mu,a)$ olmalıdır.

$a=\dfrac{1}{2}$ seçilirse,

$$\lim_{n\to\infty}\delta_\theta\left(\frac{1}{n+1},\frac{1}{2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{2}}=\lim_{n\to\infty}2n+2=\infty$$

ve

$$\delta_\theta\left(0,\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$$

olur ancak $2\neq\infty$ 'dır. Dolayısıyla, genişletilmiş $b-$metrik fonksiyonu her zaman sürekli değildir.

Önerme 2.3.19. [103] (W,d_θ) genişletilmiş $b-$metrik uzay olsun. Eğer d_θ değişkenlerden birine göre sürekli ise diğer değişkene göre de süreklidir.

İspat : Genelliği bozmadan, d_θ fonksiyonu ilk değişkenine göre sürekli olsun. Herhangi $\mu\in W$ için eğer $\lim\limits_{n\to\infty}\eta_n=\eta$ ise bu durumda

$$\lim_{n\to\infty} d_\theta(\mu,\eta_n) = \lim_{n\to\infty} d_\theta(\eta_n,\mu) = d_\theta(\eta,\mu) = d_\theta(\mu,\eta)$$

sağlanır.

Önerme 2.3.20. [100] (W,d_θ) genişletilmiş $b-$metrik uzay olsun. Eğer genişletilmiş $b-$metrik fonksiyonu sürekli ise, yakınsak her dizinin bir tek limit noktası vardır.

Önerme 2.3.21. Herhangi bir $b-$metrik uzay Hausdorff uzayı olduğundan bu uzayın bir genellemesi olan genişletilmiş $b-$metrik uzay da Hausdoff uzayıdır.

2.4. Asimetrik (Quasi) Metrik Uzaylar ve Bazı Topolojik Özellikleri

Asimetrik metrik kavramı ilk olarak 1931 yılında W. A. Wilson [107] tarafından tanımlandı. Asimetrik metrik yapısı ile ilgili literatürde birçok çalışma yer almaktadır [108-116].

Asimetrik metrik uzay da kısmi metrik uzay gibi sadece matematik alanında değil bilgisayar bilimi, biyoloji, madde bilimi gibi birçok alanda araştırma konusu olmuştur. Örneğin, DNA dizilimleri arasındaki uzaklıkları ölçmek için asimetrik metrik kavramı kullanılmıştır. Simetri özelliğinin olmaması günlük hayatta birçok durumda ortaya çıkan asimetrik metrik örneklerinde görülebilir. Örneğin, caddelerin tek yönlü çalıştığı bir şehirde belli bir A noktasından belli bir B noktasına giden yol ile belli bir B noktasından belli bir A noktasına giden yol farklı olacağından böyle bir şehirde iki yer arasındaki tanımlanan uzaklık bir asimetrik metrik fonksiyonu oluşturur [108-116].

Asimetrik metrik fonksiyonu metrik fonksiyonundan farklı olarak simetri özelliğine sahip olmadığından metrikteki yakınsaklık, Cauchy dizisi gibi bir çok kavram farklı yaklaşımlarla incelenir.

Tanım 2.4.1. [107] $W \neq \varnothing$ bir küme ve $q : W \times W \to \mathbb{R}^+$ bir dönüşüm olsun. Eğer $\forall \mu,\eta,\sigma \in W$ için q dönüşümü

$(q1)$ $q(\mu,\mu)=0$

$(q2)$ $q(\mu,\eta) \leq q(\mu,\sigma)+q(\sigma,\eta)$

şartlarını sağlıyorsa q dönüşümüne W üzerinde asimetrik yarı metrik adı verilir ve (W,q) ikilisine de asimetrik yarı metrik uzay denir. Eğer q dönüşümü

$(q3)$ $q(\mu,\eta)=q(\eta,\mu)=0 \Rightarrow \mu=\eta$

şartını da sağlıyorsa bir asimetrik metrik adı verilir ve (W,q) ikilisine de asimetrik metrik uzay denir. Bir asimetrik metrik,

$(q4)$ $q(\mu,\eta)=0 \Rightarrow \mu=\eta$

özelliğini sağlıyorsa, q dönüşümüne T_1-asimetrik metrik adı verilir.

Tanım 2.4.2. [108]

$$\bar{q}(\mu,\eta)=q(\eta,\mu)$$

ile tanımlı $\bar{q}:W\times W\to\mathbb{R}^+$ dönüşümü de W üzerinde asimetrik (yarı) metriktir ve q fonksiyonunun eşlenik asimetrik (yarı) metriği olarak adlandırılır. $\forall\mu,\eta,\sigma\in W$ için

$$q^s(\mu,\eta)=\max\left\{q(\mu,\eta),\bar{q}(\mu,\eta)\right\}$$

dönüşümü bir (yarı) metriktir. Bu fonksiyonlar için

$$q(\mu,\eta)\le q^s(\mu,\eta)$$
$$\bar{q}(\mu,\eta)\le q^s(\mu,\eta)$$

olduğu açıktır.

Uyarı 2.4.3. Her metrik asimetrik metriktir, fakat tersi her zaman doğru değildir.

Örnek 2.4.4. [109] $W=\mathbb{R}$ olsun. $q:W\times W\to[0,\infty)$ fonksiyonu $\alpha>0$ ve $\forall\mu,\eta\in\mathbb{R}$ için

$$q(\mu,\eta)=\begin{cases}\eta-\mu, & \mu\le\eta \text{ ise}\\ \alpha(\mu-\eta), & \mu>\eta \text{ ise}\end{cases}$$

olarak tanımlansın. q fonksiyonu W üzerinde asimetrik metriktir.

$(q1)$ $\forall \mu \in \mathbb{R}$ için $q(\mu,\mu)=\mu-\mu=0$'dır.

$(q2)$ $\forall \mu,\eta \in \mathbb{R}$ için

$$q(\mu,\eta)=0 \Rightarrow \mu \leq \eta,$$

$$q(\eta,\mu)=0 \Rightarrow \eta \leq \mu$$

ve $\mu,\eta \in \mathbb{R}$ olduğundan $\mu \leq \eta, \eta \leq \mu \Rightarrow \eta=\mu$ sağlanır.

$(q3)$ $\forall \mu,\eta,\sigma \in \mathbb{R}$ olsun.

i) $\mu \leq \eta$ sağlansın.

$$\mu \leq \eta < \sigma \text{ için, } q(\mu,\eta)=\eta-\mu \leq \sigma-\mu+\alpha(\sigma-\eta)=q(\mu,\sigma)+q(\sigma,\eta)$$

$$\sigma < \mu \leq \eta \text{ için, } q(\mu,\eta)=\eta-\mu \leq \alpha(\mu-\sigma)+\eta-\sigma=q(\mu,\sigma)+q(\sigma,\eta)$$

bulunur.

ii) $\eta < \mu$ sağlansın.

$$\mu=\sigma \text{ için } q(\mu,\eta)=\alpha.(\mu-\eta) \leq 0+\alpha(\sigma-\eta)=q(\mu,\sigma)+q(\sigma,\eta)$$

ve

$$\sigma=\eta \text{ için } q(\mu,\eta)=\alpha.(\mu-\eta) \leq \alpha(\mu-\sigma)+0=q(\mu,\sigma)+q(\sigma,\eta)$$

olur.

$\mu \neq \sigma$ ve $\sigma \neq \eta$ için,

$$\sigma < \eta < \mu \Rightarrow q(\mu,\eta)=\alpha(\mu-\eta) \leq \alpha(\mu-\sigma)+\eta-\sigma=q(\mu,\sigma)+q(\sigma,\eta),$$

$$\eta < \sigma < \mu \Rightarrow q(\mu,\eta)=\alpha(\mu-\eta) \leq \alpha(\mu-\sigma)+\alpha(\sigma-\eta)=q(\mu,\sigma)+q(\sigma,\eta),$$

$$\eta < \mu < \sigma \Rightarrow q(\mu,\eta)=\alpha(\mu-\eta) \leq \sigma-\mu+\alpha(\sigma-\eta)=q(\mu,\sigma)+q(\sigma,\eta)$$

olur. Üç şart da sağlandığından q asimetrik metriktir. Ancak simetri özelliği sağlanmadığından, q metrik değildir. Örneğin, $\mu=1, \eta=3 \in \mathbb{R}$ için, $q(1,3)=2$ ve

$q(3,1)=2\alpha$ olup, $\alpha>0$ olduğundan $2\neq 2\alpha$'dır. Dolayısıyla simetri özelliği sağlanmaz.

Örnek 2.4.5. $W=\mathbb{R}$ olsun. Aşağıdaki gibi tanımlanan q fonksiyonu W üzerinde bir asimetrik metriktir ancak metrik değildir.

$$q(\mu,\eta)=\begin{cases} 0, & \mu\leq\eta \quad \text{ise} \\ \mu-\eta, & \mu>\eta \quad \text{ise}\end{cases}$$

$(q1)$ $\forall\mu\in\mathbb{R}$ için $\mu\leq\mu$ olduğundan $q(\mu,\mu)=0$'dır.

$(q2)$ $\forall\mu,\eta\in\mathbb{R}$ için $d(\mu,\eta)=0\Rightarrow\mu\leq\eta$ ve $q(\eta,\mu)=0\Rightarrow\eta\leq\mu$'dır. $\mu\leq\eta$ ve $\eta\leq\mu$ olduğundan $\mu=\eta$'dır. Yani, $q(\mu,\eta)=q(\eta,\mu)=0\Rightarrow\mu=\eta$ sağlanır.

$(q3)$ $\forall\mu,\eta,\sigma\in\mathbb{R}$ olsun.

i) $\mu\leq\eta$ için

$$\sigma<\mu\leq\eta\Rightarrow q(\mu,\eta)=0\leq 0=q(\mu,\sigma)+0=\mu-\sigma,$$

$$\mu<\sigma<\eta\Rightarrow q(\mu,\eta)=0\leq\sigma-\mu+\eta-\sigma=\eta-\mu$$

dır.

ii) $\eta<\mu$ olsun.

$\Rightarrow\mu=\sigma$ ya da $\sigma=\eta$ ise,

$$\begin{aligned} q(\mu,\eta)&\leq q(\mu,\sigma)+q(\sigma,\eta) \\ \mu-\eta&\leq 0+\sigma-\eta \\ \mu&\leq\sigma \end{aligned} \qquad \text{ve} \qquad \begin{aligned} q(\mu,\eta)&\leq q(\mu,\sigma)+q(\sigma,\eta) \\ \mu-\eta&\leq\mu-\sigma+0 \\ \sigma&\leq\eta \end{aligned}$$

sağlanır.

$\Rightarrow\mu\neq\sigma$ ve $\sigma\neq\eta$ olsun.

$$\sigma<\eta<\mu\Rightarrow q(\mu,\eta)\leq q(\mu,\sigma)+q(\sigma,\eta)\Rightarrow\mu-\eta\leq\mu-\sigma+0\Rightarrow\sigma\leq\eta,$$

$$\eta<\sigma<\mu\Rightarrow q(\mu,\eta)\leq q(\mu,\sigma)+q(\sigma,\eta)\Rightarrow\mu-\eta\leq\mu-\sigma+\sigma-\eta\Rightarrow 0\leq 0,$$

$$\eta<\mu<\sigma\Rightarrow q(\mu,\eta)\leq q(\mu,\sigma)+q(\sigma,\eta)\Rightarrow\mu-\eta\leq 0+\sigma-\eta\Rightarrow\mu\leq\sigma$$

sağlanır. Böylece $(q3)$ şartı sağlanmış olur. Üç şart da sağlandığından q, $\mathbb{R}$ üzerinde bir asimetrik metriktir. Ancak metrik değildir. Çünkü simetri özelliği sağlanmaz. $2,5\in\mathbb{R}$ için $q(2,5)=0$ ve $q(5,2)=3$ olduğundan, $q(2,5)\neq q(5,2)$ bulunur. Simetri şartı sağlanmadığından q metrik değildir.

Örnek 2.4.6. $q^*:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu

$$q^*(\mu,\eta)=q(\eta,\mu)=\begin{cases}0, & \eta\leq\mu \quad \text{ise}\\ \eta-\mu, & \eta>\mu \quad \text{ise}\end{cases}$$

olarak tanımlansın. q^* fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde asimetrik metriktir.

$(q1)$ $\forall\mu\in\mathbb{R}$ için $\mu\leq\mu$ olduğundan $q^*(\mu,\mu)=0$ 'dır.

$(q2)$ $\forall\mu,\eta\in\mathbb{R}$ için $q^*(\mu,\eta)=0\Rightarrow\eta\leq\mu$ ve $q^*(\eta,\mu)=0\Rightarrow\mu\leq\eta$ 'dır. $\mu\leq\eta$ ve $\eta\leq\mu$ olduğundan $\mu=\eta$ 'dır. Yani, $q^*(\mu,\eta)=q^*(\eta,\mu)=0\Rightarrow\mu=\eta$ sağlanır.

$(q3)$ $\forall\mu,\eta,\sigma\in\mathbb{R}$ olsun.

i) $\eta\leq\mu$ için

$$\eta\leq\mu<\sigma\Rightarrow q^*(\mu,\eta)=0\leq q^*(\mu,\sigma)+0=\sigma-\mu$$

ve

$$\eta<\sigma<\mu\Rightarrow q^*(\mu,\eta)=0\leq\mu-\sigma+\sigma-\eta=\mu-\eta$$

olur.

ii) $\eta<\mu$ olsun.

$\Rightarrow\mu=\sigma$ ya da $\sigma=\eta$ ise,

$$\begin{array}{c} q^*(\mu,\eta)\leq q^*(\mu,\sigma)+q^*(\sigma,\eta)\\ 0\leq 0+0\end{array} \quad \text{ve} \quad \begin{array}{c} q^*(\mu,\eta)\leq q^*(\mu,\sigma)+q^*(\sigma,\eta)\\ 0\leq 0+0\end{array}$$

sağlanır.

$\Rightarrow\mu\neq\sigma$ ve $\sigma\neq\eta$ olsun.

$$\sigma < \eta < \mu \Rightarrow q^*(\mu,\eta) \le q^*(\mu,\sigma) + q^*(\sigma,\eta) \Rightarrow 0 \le 0 + \eta - \sigma \Rightarrow \sigma \le \eta\,,$$

$$\eta < \sigma < \mu \Rightarrow q^*(\mu,\eta) \le q^*(\mu,\sigma) + q^*(\sigma,\eta) \Rightarrow 0 \le 0 + 0 \Rightarrow 0 \le 0\,,$$

$$\eta < \mu < \sigma \Rightarrow q^*(\mu,\eta) \le q^*(\mu,\sigma) + q^*(\sigma,\eta) \Rightarrow 0 \le \sigma - \mu + 0 \Rightarrow \mu \le \sigma$$

dır. Böylece $(q3)$ şartı sağlanmış olur. Üç şart da sağlandığından q^* fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde bir asimetrik metriktir.

$$q^s(\mu,\eta) = \max\{q(\mu,\eta), q^*(\mu,\eta)\} = \max\{\mu-\eta, 0, \eta-\mu\} = |\mu-\eta|$$

olur ki

$$q^s(\mu,\eta) = |\mu-\eta|$$

alışılmış metrik fonksiyondur.

Örnek 2.4.7. $W \ne \emptyset$ bir küme, $q(\mu,\eta)$ ve $q^*(\mu,\eta)$ asimetrik metrikler olmak üzere

$$\bar{q}(\mu,\eta) = \frac{1}{2}\left[q(\mu,\eta), q^*(\mu,\eta)\right]$$

fonksiyonu W üzerinde bir metriktir.

$(d1)$ $\forall \mu,\eta \in W(\mu \ne \eta)$ için $q(\mu,\eta)$ ve $q^*(\mu,\eta)$ asimetrik metrik olduğundan pozitif tanımlıdır. Dolayısıyla,

$$\bar{d}(\mu,\eta) = \frac{1}{2}\left[d(\mu,\eta), d^*(\mu,\eta)\right] > 0$$

elde edilir.

$(d2)$

$\Rightarrow)$ $\bar{q}(\mu,\eta) = 0$ olsun.

$$\bar{q}(\mu,\eta) = \frac{1}{2}\left[q(\mu,\eta), q^*(\mu,\eta)\right] = 0$$

dır. Bu ise $q(\mu,\eta) = 0,\ q^*(\mu,\eta) = 0$ olmasını gerektirir. Yani,

$$q(\mu,\eta)=0=q^{*}(\mu,\eta)=q(\eta,\mu)\Rightarrow \mu=\eta$$

bulunur.

$\Leftarrow)$ $\mu=\eta$ olsun.

$$\begin{aligned}\bar{q}(\mu,\eta)&=\frac{1}{2}\left[q(\mu,\eta),q^{*}(\mu,\eta)\right]\\&=\frac{1}{2}\left[q(\mu,\eta),q(\eta,\mu)\right]\\&=\frac{1}{2}\left[q(\mu,\mu),q(\mu,\mu)\right]\\&=0\end{aligned}$$

dır.

$(d3)$ $\forall\mu,\eta\in W$ için

$$\begin{aligned}\bar{q}(\mu,\eta)=\frac{1}{2}\left[q(\mu,\eta),q^{*}(\mu,\eta)\right]&=\frac{1}{2}\left[q(\mu,\eta),q(\eta,\mu)\right]\\&=\frac{1}{2}\left[q(\eta,\mu),q(\mu,\eta)\right]\\&=\frac{1}{2}\left[q(\eta,\mu),q^{*}(\eta,\mu)\right]\\&=\bar{q}(\eta,\mu)\end{aligned}$$

sağlanır.

$(d4)$ $\forall\mu,\eta,\sigma\in W$ için $q(\mu,\eta)$ ve $q^{*}(\mu,\eta)$ asimetrik metrik olduklarından üçgen eşitsizliği sağlanır.

$$\begin{aligned}\bar{q}(\mu,\eta)&=\frac{1}{2}\left[q(\mu,\eta),q^{*}(\mu,\eta)\right]\\&\leq\frac{1}{2}\left[q(\mu,\sigma)+q(\sigma,\eta),q^{*}(\mu,\sigma)+q^{*}(\sigma,\eta)\right]\\&=\frac{1}{2}\left[\left\{q(\mu,\sigma),q^{*}(\mu,\sigma)\right\}+\left\{q(\sigma,\eta),q^{*}(\sigma,\eta)\right\}\right]\\&\leq\frac{1}{2}\left[q(\mu,\sigma),q^{*}(\mu,\sigma)\right]+\frac{1}{2}.\left[q(\sigma,\eta),q^{*}(\sigma,\eta)\right]\\&=\bar{q}(\mu,\sigma)+\bar{q}(\sigma,\eta)\end{aligned}$$

olur. Böylece üçgen eşitsizliği de sağlanır. Dört şart da sağlandığından $\bar{q}$ fonksiyonu W üzerinde bir metriktir.

Örnek 2.4.8. [110] $W=[0,1]$ ve aşağıdaki şekilde tanımlanan $q:W\times W\to\mathbb{R}^+$ fonksiyonu verilsin:

$$q(\mu,\eta)=\begin{cases}\eta-\mu, & \mu\leq\eta \quad \text{ise} \\ 1, & \mu>\eta \quad \text{ise}\end{cases}.$$

q fonksiyonu asimetrik metriktir ve T_1-asimetrik metriktir.

$(q1)$ $\forall\mu\in W$ için $q(\mu,\mu)=\mu-\mu=0$'dır.

$(q2)$ $\forall\mu,\eta\in W$ için

$$q(\mu,\eta)=0\Rightarrow\mu\leq\eta\,,$$

$$q(\eta,\mu)=0\Rightarrow\eta\leq\mu$$

dır. $\mu,\eta\in W$ olduğundan, $\mu\leq\eta,\eta\leq\mu\Rightarrow\eta=\mu$ sağlanır.

$(q3)$ $\mu,\eta,\sigma\in W$ olsun.

i)

$$\mu<\eta<\sigma \text{ için } q(\mu,\eta)=\eta-\mu\leq\sigma-\mu+1=q(\mu,\sigma)+q(\sigma,\eta)$$

dır.

ii)

$$\mu<\sigma<\eta \text{ için } q(\mu,\eta)=\eta-\mu\leq\sigma-\mu+\eta-\sigma=q(\mu,\sigma)+q(\sigma,\eta)$$

dır.

iii)

$$\sigma<\eta<\mu \text{ için } q(\mu,\eta)=1\leq1+\eta-\sigma=q(\mu,\sigma)+q(\sigma,\eta)$$

dır.

iv)

$$\sigma < \mu < \eta \text{ için } q(\mu,\eta) = \eta - \mu \leq 1 + \eta - \sigma = q(\mu,\sigma) + q(\sigma,\eta)$$

dır.

v)

$$\eta < \mu < \sigma \text{ için } q(\mu,\eta) = \eta - \mu \leq \sigma - \mu + 1 = q(\mu,\sigma) + q(\sigma,\eta)$$

dır.

vi)

$$\eta < \sigma < \mu \text{ için } q(\mu,\eta) = 1 \leq 1 + 1 = q(\mu,\sigma) + q(\sigma,\eta)$$

dır. Her durumda eşitsizlik sağlandığından q fonksiyonu asimetrik metriktir.

$(q4)$ $q(\mu,\eta) = 0 \Rightarrow \mu = \eta$ olmalı ki $T_1 -$asimetrik metrik olsun. $q(\mu,\eta) = 0 \Rightarrow \eta - \mu = 0 \Rightarrow \eta = \mu$ sağlanır. Yani, verilen metrik $T_1 -$asimetrik metriktir.

Tanım 2.4.9. [109,111] (W,q) asimetrik metrik uzayında, $\mu \in W$ ve $\varepsilon > 0$ olmak üzere

$$B_q(\mu,\varepsilon) = \{\eta \in W : q(\mu,\eta) < \varepsilon\}$$

kümesine μ merkezli $\varepsilon > 0$ yarıçaplı açık küme denir.

$$B_q[\mu,\varepsilon] = \{\eta \in W : q(\mu,\eta) \leq \varepsilon\}$$

kümesine μ merkezli $\varepsilon > 0$ yarıçaplı kapalı küme denir.

(W,q) asimetrik metrik uzayında $\{B_q(\mu,\varepsilon) : \mu \in W,\, \varepsilon > 0\}$ bazı ile W üzerinde üretilen topoloji τ_q ile gösterilir.

Örnek 2.4.10. $W = \mathbb{R}$ olsun. $q(\mu,\eta) = \max\{\eta^2 - \mu^2, 0\}$ fonksiyonu verilsin. (W,q) metrik ve asimetrik metrik uzayında $\forall \mu_0 \in W$ için

i) $\mu > \mu_0$ için

$$
\begin{aligned}
B_q(\mu_0,\varepsilon) &= \{\mu \in W : q(\mu_0,\mu) < \varepsilon, \varepsilon > 0\} \\
&= \left\{\mu \in W : \max\left\{\mu^2 - {\mu_0}^2, 0\right\} < \varepsilon\right\} \\
&= \left\{\mu \in W : \mu^2 - {\mu_0}^2 < \varepsilon\right\} \\
&= \left\{\mu \in W : \mu^2 < \varepsilon + {\mu_0}^2\right\} \\
&= \left\{\mu \in W : -\sqrt{\varepsilon + {\mu_0}^2} < \mu < \sqrt{\varepsilon + {\mu_0}^2}\right\} \\
&= \left(-\sqrt{\varepsilon + {\mu_0}^2}, \sqrt{\varepsilon + {\mu_0}^2}\right)
\end{aligned}
$$

ii) $\mu \leq \mu_0$ için $B_q(\mu_0,\varepsilon) = \mathbb{R}$

kümeleri açık yuvardır.

Örnek 2.4.11. $W = \mathbb{R}$ üzerinde $q : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$

$$
q(\mu,\eta) = \begin{cases} \eta - \mu, & \mu \leq \eta \text{ ise} \\ 1, & \mu > \eta \text{ ise} \end{cases}
$$

asimetrik metriği tanımlansın. (W,q) $T_1 -$asimetrik metrik uzayında

$\varepsilon \leq 1$ için

$$
\begin{aligned}
B_q(\mu_0,\varepsilon) &= \{\mu \in W : q(\mu_0,\mu) < \varepsilon, \varepsilon > 0\} \\
&= \{\mu \in W : \mu - \mu_0 < \varepsilon, \mu_0 \leq \mu\} \\
&= \{\mu \in W : \mu < \mu_0 + \varepsilon, \mu_0 \leq \mu\} \\
&= [\mu_0, \mu_0 + \varepsilon)
\end{aligned}
$$

dır.

$\varepsilon > 1$ için

$$
\begin{aligned}
B_q(\mu_0,\varepsilon) &= \{\mu \in W : q(\mu_0,\mu) < \varepsilon, \varepsilon > 0\} \\
&= \{\mu \in W : 1 \leq \varepsilon, \mu_0 > \mu\} \\
&= (-\infty, \mu_0 + \varepsilon)
\end{aligned}
$$

dır. Bu uzaydaki tüm açık yuvarlar $\{(-\infty,a) : a \in \mathbb{R}\}$ veya $\{[a,b) : a,b \in \mathbb{R}\}$ şeklindedir.

Her asimetrik metrik ile tanımlı olduğu kümede bir τ_q topolojisi oluşturulabilir. Bu topolojinin bazı $\{B_q(\mu,\varepsilon):\mu\in W,\varepsilon>0\}$ kümesidir. Asimetrik metrik uzayda τ_q, T_0 topolojisidir. T_1 asimetrik metrik uzayda ise τ_q, T_1 topolojisidir. $\{(-\infty,a):a\in\mathbb{R}\}$ ve $\{[a,b):a,b\in\mathbb{R}\}$ komşulukları için herhangi farklı iki noktanın ayrık komşulukları olduğundan T_2 topolojisine sahiptir.

Teorem 2.4.12. Herhangi bir asimetrik metrik uzayda τ_q topolojisi T_0 dır.

İspat : $\mu\neq\eta$ iken $\mu\in B_q(\mu,\varepsilon)$ ve $\eta\notin B_q(\mu,\varepsilon)$ olmak üzere $q(\mu,\eta)>q(\eta,\mu)$ için $\varepsilon=\dfrac{q(\mu,\eta)-q(\eta,\mu)}{2}>0$ olsun. Bu durumda τ_q topolojisi T_0 dır.

Tersine, $\eta\in B_q(\mu,\varepsilon)$ olsun. Bu durumda, $q(\mu,\eta)<\varepsilon$ sağlanır. Buradan,

$$q(\mu,\eta)<\frac{q(\mu,\eta)-q(\eta,\mu)}{2}$$
$$q(\mu,\eta)<-q(\eta,\mu)$$

elde edilir. $q(\mu,\eta)+q(\eta,\mu)<0$ olur bu ise asimetrik metriğin pozitif tanımlı olmasıyla çelişir. Dolayısıyla $\eta\in B_q(\mu,\varepsilon)$ kabulü yanlıştır. Bu durumda asimetrik metriğin topolojisi T_0 'dır.

Uyarı 2.4.13. Asimetrik metrik olduğu bilinen metriğin topolojisi T_0 'dır. Örneğin, $W=\mathbb{R}$ olsun. $q(\mu,\eta)=\max\{\eta^2-\mu^2,0\}$ olarak tanımlanan q fonksiyonunun açık yuvarı $B_q(\mu_0,\varepsilon)=\left(-\sqrt{\varepsilon+\mu_0{}^2},\sqrt{\varepsilon+\mu_0{}^2}\right)$ kümesidir. q metriğinin asimetrik metrik olduğu gösterilirse T_0 olduğu da söylenmiş olur. Ancak bu komşuluklardan iki farklı nokta alındığında birbirini içermeyen komşuluğu bulunmadığından T_1 topolojisi değildir.

$(q1)$ $\forall\mu\in\mathbb{R}$ için $q(\mu,\mu)=\max\{\mu^2-\mu^2,0\}=0$ dır.

$(q2)$ $\forall\mu,\eta\in\mathbb{R}$ için $q(\mu,\eta)=q(\eta,\mu)=0$ olsun.

$$q(\mu,\eta)=0 \Rightarrow \max\{\eta^2-\mu^2,0\}=0 \Rightarrow \eta^2=\mu^2 \Rightarrow \eta=-\mu,\eta=\mu\,,$$

$$q(\eta,\mu)=0 \Rightarrow \max\{\mu^2-\eta^2,0\}=0 \Rightarrow \mu^2=\eta^2 \Rightarrow \mu=-\eta,\mu=\eta$$

olduğundan $\mu=\eta$ sağlanır.

$(q3)$ $\forall \mu,\eta,\sigma \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} q(\mu,\eta) &= \max\{\eta^2-\mu^2,0\} \\ &= \max\{\eta^2-\sigma^2+\sigma^2-\mu^2,0+0\} \\ &\le \max\{\eta^2-\sigma^2,0\}+\max\{\sigma^2-\mu^2,0\} \\ &= \max\{\sigma^2-\mu^2,0\}+\max\{\eta^2-\sigma^2,0\} \\ &= q(\mu,\sigma)+q(\sigma,\eta) \end{aligned}$$

olur. Üç şart da sağlandığından q fonksiyonu asimetrik metriktir. T_1-asimetrik metrik midir?

$$q(\mu,\eta)=0 \Rightarrow \max\{\eta^2-\mu^2,0\}=0 \Rightarrow \eta^2=\mu^2 \Rightarrow \eta=-\mu,\eta=\mu$$

olduğundan her zaman $\mu=\eta$ olması gerekmez. Yani, T_1-topolojisine sahiptir denemez.

Asimetrik metrik uzayda yakınsaklık, Cauchy dizisi ve tamlık kavramları metrik uzaydaki tanımlarından farklıdır. I. L. Reilly [112], Y. U. Gaba [113] ve I. Altun [114] tarafından bu tanımlar sınıflandırılmıştır.

Tanım 2.4.14. [112] (W,q) bir asimetrik metrik uzay ve $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ bu uzayda bir dizi olsun. $\sigma \in W$ için

$$\lim_{n\to\infty} q(\sigma,\mu_n)=0$$

oluyorsa $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi σ noktasına $q-$yakınsaktır denir.

$$\lim_{n\to\infty} q^*(\sigma,\mu_n)=\lim_{n\to\infty} q(\mu_n,\sigma)=0$$

oluyorsa $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi σ noktasına q^*-yakınsaktır denir.

$$\lim_{n\to\infty} q^s(\mu_n,\sigma)=0$$

oluyorsa $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi σ noktasına q^s-yakınsaktır denir.

Önerme 2.4.15. [112] Bir dizisinin q^s-yakınsak olması için gerek ve yeter şart hem $q-$yakınsak hem de q^*-yakınsak olmasıdır.

Örnek 2.4.16. $W=\left\{\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}\right\}$ kümesi üzerinde $q:W\times W\to\mathbb{R}^+$ fonksiyonu

$$q\left(\frac{1}{n},\frac{1}{m}\right)=\begin{cases}\frac{1}{n}, & n \text{ tek}, m \text{ çift ve } n<m \quad \text{ise}\\ 0, & n=m \quad \text{ise}\\ 1, & \text{diğer durumlar} \quad \text{ise}\end{cases}$$

asimetrik metriktir. $(\mu_n)=\left(\frac{1}{2n}\right)$ dizisi için:

$\lim_{n\to\infty} q(\sigma,\mu_n)=0$ oluyorsa $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi σ noktasına $q-$yakınsaktır. $\lim_{n\to\infty} q\left(\sigma,\frac{1}{2n}\right)=0$ olması ancak $\sigma=\frac{1}{2n}$ olmasıyla mümkündür. Ancak, $\sigma=\frac{1}{2n}\notin W$ olup, dizinin yakınsamak istediği nokta uzaya ait olmadığından $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $q-$yakınsak değildir.

Örnek 2.4.17. $W=\mathbb{R}$ olmak üzere,

$$q(\mu,\eta)=\begin{cases}\eta-\mu, & \mu\le\eta \quad \text{ise}\\ 1, & \mu>\eta \quad \text{ise}\end{cases}$$

$q:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ asimetrik metriğine göre $(\mu_n)=\left(\frac{1}{n}\right)$ dizisi için:

$\lim_{n\to\infty} q(\sigma,\mu_n)=0$ oluyorsa $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi σ noktasına $q-$yakınsaktır.

$$\lim_{n\to\infty} q\left(\sigma,\frac{1}{n}\right)=0\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}-\sigma=0\Rightarrow\sigma=0\in W$$

olduğundan, $q-$yakınsaktır.

$$\lim_{n\to\infty} q^*\left(\sigma,\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty} q\left(\frac{1}{n},\sigma\right)=0\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sigma-\frac{1}{n}=0\Rightarrow \sigma=0\in W$$

olur ancak, $\frac{1}{n}\le 0$ olmadığından

$$\lim_{n\to\infty} q^*\left(\sigma,\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty} q\left(\frac{1}{n},\sigma\right)=1$$

olur. Dolayısıyla bu asimetrik metrikte $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi q^*-yakınsak değildir.

Örnek 2.4.18. $W=[0,1)$ üzerinde $q(\mu,\eta)=\max\{\eta-\mu,0\}$ olarak tanımlanan q fonksiyonu asimetrik metriktir. $(\mu_n)=\left(\frac{n}{n+1}\right)$ dizisinin q-yakınsaklık ve q^*- yakınsaklık durumları için:

$(q1)$ $\forall\mu\in W$ için

$$q(\mu,\mu)=\max\{\mu-\mu,0\}=0$$

dır.

$(q2)$ $\forall\mu,\eta\in W$ için $q(\mu,\eta)=q(\eta,\mu)=0$ olsun.

$$q(\mu,\eta)=0=\max\{\eta-\mu,0\}\Rightarrow \eta-\mu=0\Rightarrow \mu=\eta\,,$$

$$q(\eta,\mu)=0=\max\{\mu-\eta,0\}\Rightarrow \mu-\eta=0\Rightarrow \mu=\eta$$

dır.

$(q3)$ $\forall\mu,\eta,\sigma\in W$ için

$$\begin{aligned}q(\mu,\eta)&=\max\{\eta-\mu,0\}\\&=\max\{\eta-\sigma+\sigma-\mu,0+0\}\\&\le\max\{\sigma-\mu,0\}+\max\{\eta-\sigma,0\}\\&=q(\mu,\sigma)+q(\sigma,\eta)\end{aligned}$$

olur. Üç şart sağlandığından q fonksiyonu asimetrik metriktir.

$\lim_{n\to\infty} q(\mu,\mu_n)=0$ ise $q-$yakınsaktır.

$$\lim_{n\to\infty}\max\left\{\frac{n}{n+1}-\mu,0\right\}=0\Rightarrow 1-\mu=0\Rightarrow \mu=1$$

dır. Ancak, $\mu=1\notin[0,1)$'dır. Dolayısıyla, $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ $q-$yakınsak değildir.

$\lim_{n\to\infty} q^*(\mu,\mu_n)=0$ ise $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ q^*-yakınsaktır. Yani,

$$\lim_{n\to\infty} q^*(\mu,\mu_n)=\lim_{n\to\infty} q(\mu_n,\mu)=0$$

'dır. Buradan,

$$\lim_{n\to\infty}\max\left\{\mu-\frac{n}{n+1},0\right\}=0\Rightarrow \mu-1=0\Rightarrow \mu=1$$

bulunur. Ancak $\mu=1\notin[0,1)$'dır. Dolayısıyla, $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ q^*-yakınsak değildir.

Örnek 2.4.19. $W=\mathbb{R}$ üzerinde $q:W\times W\to\mathbb{R}^+$ fonksiyonu asimetrik metriktir.

$$q(a,b)=\begin{cases} b-a, & b\geq a \text{ ise} \\ 1, & a>b \text{ ise} \end{cases}.$$

$\mu\in W$ olmak üzere $(\mu_n)=\mu\left(1+\frac{1}{n}\right)$ dizisi için:

$\lim_{n\to\infty} d(\sigma,\mu_n)=0$ ise $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ $q-$yakınsaktır.

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\mu\left(1+\frac{1}{n}\right)-\sigma\right\}=0\Rightarrow \mu=\sigma$$

olup $\mu\left(1+\frac{1}{n}\right)>\mu$ olduğundan, $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ $q-$yakınsaktır.

$\lim_{n\to\infty} d^*(\sigma,\mu_n)=0$ ise $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ q^s-yakınsaktır.

$$\lim_{n\to\infty} d^*(\sigma,\mu_n)=\lim_{n\to\infty} d(\mu_n,\sigma)=0$$

olup, $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\sigma-\mu\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\}=0 \Rightarrow \mu=\sigma$ olur ki, $\mu>\mu\left(1+\frac{1}{n}\right)$ olmasıyla bu eşitlik sağlanır. Ancak $\mu<\mu\left(1+\frac{1}{n}\right)$ olduğundan $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ q^*-yakınsak değildir. Ayrıca q^*-yakınsak olmadığından, q^s-yakınsak da değildir.

Uyarı 2.4.20. Herhangi bir asimetrik metrik uzayda bir dizinin

i) $q-$yakınsak olması q^*-yakınsak olmasını gerektirmez.

ii) q^*-yakınsak olması $q-$yakınsak olmasını gerektirmez.

iii) q^s-yakınsak olması hem q-yakınsak hem de q^*-yakınsak olması demektir.

Tanım 2.4.21. [113-114] (W,q) herhangi bir asimetrik metrik uzay ve $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ bu uzayda bir dizi olsun.

i) $\forall\varepsilon>0$ için $\exists\mu\in W$ ve $\exists k\in\mathbb{N}$ vardır öyle ki $\forall m\geq k$ iken $q(\mu,\mu_m)<\varepsilon$ oluyorsa $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisine sol $q-$Cauchy dizisi denir.

ii) $\forall\varepsilon>0$ için $\exists\mu\in W$ ve $\exists k\in\mathbb{N}$ vardır öyle ki $\forall m\geq k$ iken $q(\mu_m,\mu)<\varepsilon$ oluyorsa $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisine sağ $q-$Cauchy dizisi denir.

iii) $\forall\varepsilon>0$ için $\exists k\in\mathbb{N}$ vardır öyle ki $\forall r,s\geq k$ iken $q(\mu_r,\mu_s)<\varepsilon$ oluyorsa $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisine $q-$Cauchy dizisi denir.

iv) $\forall\varepsilon>0$ için $\exists k\in\mathbb{N}$ vardır öyle ki $r\geq s\geq k$ ifadesini sağlayan $\forall r,s$ için, $q(\mu_r,\mu_s)<\varepsilon$ oluyorsa $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisine sağ K-Cauchy dizisi denir.

v) $\forall\varepsilon>0$ için $\exists k\in\mathbb{N}$ vardır öyle ki $r\geq s\geq k$ ifadesini sağlayan $\forall r,s$ için, $q(\mu_s,\mu_r)<\varepsilon$ oluyorsa $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisine sol K-Cauchy dizisi denir.

vi) Eğer $\forall\varepsilon>0$ sayısına karşılık bir $n_0\in\mathbb{N}$ sayısı $n\geq n_0$ özelliğindeki her $n\in\mathbb{N}$ için $q(\mu_{n_0},\mu_n)<\varepsilon$ ($q(\mu_n,\mu_{n_0})<\varepsilon$) olacak şekilde bulunabiliyorsa $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisine zayıf sol (sağ) K-Cauchy dizisi denir.

Örnek 2.4.22. $W=[0,1]$ uzayı üzerinde

$$q(\mu,\eta)=\begin{cases}0, & \mu\le\eta \quad \text{ise}\\ 1, & \mu>\eta \quad \text{ise}\end{cases}$$

asimetrik metriği ve

$$(\mu_n)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^n}, & n \text{ tek} \quad \text{ise}\\ \dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^n}, & n \text{ çift} \quad \text{ise}\end{cases}$$

dizisi verilsin.

$\lim\limits_{n\to\infty} q(\mu,\mu_n)=0$ ise $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ $q-$yakınsaktır.

n çift ise, $\lim\limits_{n\to\infty} q\left(\mu,\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^n}\right)=0$, bu eşitliğin sağlanması için $\mu\le\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^n}$ olmalıdır. $\mu=\dfrac{1}{3}\in[0,1]$ sağlar.

n tek ise, $\lim\limits_{n\to\infty} q\left(\mu,\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^n}\right)=0$, bu eşitliğin sağlanması için $\mu\le\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^n}$ olmalıdır. $\mu=\dfrac{1}{2}\in[0,1]$ için sağlanır.

$\lim\limits_{n\to\infty} d^*(\mu,\mu_n)=0$ ise $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ q^*-yakınsaktır.

n çift ise, $\lim\limits_{n\to\infty} q\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^n},\mu\right)=0$, bu eşitliğin sağlanması için $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^n}\le\mu$ olmalıdır. $\mu\in[0,1]$ için sağlanır.

n tek ise, $\lim\limits_{n\to\infty} q\left(\mu,\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^n}\right)=0$, bu eşitliğin sağlanması için $\mu\le\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^n}$ olmalıdır. $\mu\in[0,1]$ için sağlanır.

$q(\mu_r,\mu_s)<\varepsilon$ eşitsizliği r ve s'den birinin tek diğerinin çift olma durumunda sağlanmayacağından sağ veya sol K-Cauchy dizisi değildir.

Örnek 2.4.23. $W=[0,1]$ uzayı ve

$$q(\mu,\eta)=\begin{cases}\mu-\eta, & \mu\le\eta \quad \text{ise}\\ 1, & \mu>\eta \quad \text{ise}\end{cases}$$

ile tanımlanan asimetrik metrik fonksiyonu verilsin. Bu uzayda $\{\mu_n\}=\dfrac{1}{n+1}$ dizisi tanımlansın.

$\lim\limits_{n\to\infty} q(\mu,\mu_n)=0$ ise $q-$yakınsaktır.

$\lim\limits_{n\to\infty} q\left(\mu,\dfrac{1}{n+1}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\mu-\dfrac{1}{n+1}=0\Rightarrow\mu=0$'dır. Ancak $\mu\ge\dfrac{1}{n+1}$ olmalıydı. $\mu=0$ olması halinde bu eşitsizlik sağlanmaz. Dolayısıyla $q-$yakınsak değildir. Ayrıca sol $q-$Cauchy dizisi değildir.

$\lim\limits_{n\to\infty} q^*(\mu,\mu_n)=0$ ise $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ q^*-yakınsaktır.

$\lim\limits_{n\to\infty} q^*\left(\mu,\dfrac{1}{n+1}\right)=\lim\limits_{n\to\infty} q\left(\dfrac{1}{n+1},\mu\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}-\mu\right)=0\Rightarrow\mu=0$'dır.

$\dfrac{1}{n+1}\ge\mu=0$ olduğundan $\mu=0\in[0,1]$ için bu dizi q^*-yakınsaktır. Ayrıca sağ $q-$Cauchy dizisidir.

$\forall r<s$ için $r+1<s+1\Rightarrow\dfrac{1}{s+1}<\dfrac{1}{r+1}$ olduğundan, $\mu_r=\dfrac{1}{r+1}$ ve $\mu_s=\dfrac{1}{s+1}$ olup $\mu_r>\mu_s$'dır.

$q(\mu_s,\mu_r)=q\left(\dfrac{1}{s+1},\dfrac{1}{r+1}\right)=1$ olup $\lim\limits_{r,s\to\infty} q(\mu_s,\mu_r)=1$'dır.

$q(\mu_r,\mu_s)=q\left(\dfrac{1}{r+1},\dfrac{1}{s+1}\right)=\dfrac{1}{r+1}-\dfrac{1}{s+1}$ olup $\lim\limits_{r,s\to\infty} q(\mu_s,\mu_r)=0$'dır.

$\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sol K-Cauchy dizisi olur. Ancak, sağ sol K-Cauchy dizisi değildir.

Tanım 2.4.24. [114] (W,q) bir asimetrik metrik uzay olsun.

i) Eğer bu uzaydaki her sol q-Cauchy dizisi sol $q-$yakınsak ($q-$yakınsak) ise W uzayına sol $q-$dizisel tam uzay denir.

ii) Eğer bu uzaydaki her sağ $q-$Cauchy dizisi sağ $q-$yakınsak ($q^{*}-$yakınsak) ise W uzayına sağ $q-$dizisel tam uzay denir.

iii) Eğer bu uzaydaki her sol K-Cauchy dizisi sol $q-$yakınsak ($q-$yakınsak) ise W uzayına sol K-dizisel tam uzay denir.

iv) Eğer bu uzaydaki her sağ K-Cauchy dizisi sağ $q-$yakınsak ($q-$yakınsak) ise W uzayına sağ K-dizisel tam uzay denir.

v) Eğer bu uzaydaki her $q^{s}-$Cauchy dizisi sol $q-$yakınsak ($q-$yakınsak) ise W uzayına $q^{s}-$dizisel tam uzay denir.

vi) Her sağ K-Cauchy dizisi $q^{s}-$yakınsak ise W uzayına sağ Symth dizisel tam uzay denir.

vii) Her sol K-Cauchy dizisi $q^{s}-$yakınsak ise W uzayına sol Symth dizisel tam uzay denir.

viii) Eğer her $q^{s}-$Cauchy dizisi $q^{s}-$yakınsak ise W uzayına bi tam uzay adı verilir.

Yani, (W,q^{s}) metrik uzayı tam uzay ise (W,q) asimetrik metrik uzayına bi tam uzay adı verilir. (W,q) bi tam asimetrik normlu uzayına bi Banach uzayı adı verilir.

Önerme 2.4.25. [112-114] (W,q) asimetrik metrik uzay, $\mu\in W$ ve $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ bu uzayda bir sol K-Cauchy dizisi olsun.

1) Eğer $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin μ noktasına sol $q-$yakınsak alt dizisi varsa bu durumda $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi μ noktasına sol $q-$yakınsaktır.
2) Eğer $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin μ noktasına sağ $q-$yakınsak alt dizisi varsa bu durumda $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi μ noktasına sağ $q-$yakınsaktır.

İspat :

1) $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sol K-Cauchy dizisi ve $\lim\limits_{k\to\infty} q\left(\mu,\mu_{n_k}\right)=0$ olacak şekilde $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin bir $\left(\mu_{n_k}\right)$ alt dizisi verilsin. $\varepsilon>0$ için $n_0\le m<n$ olacak şekilde $n_0\in\mathbb{N}$ seçilsin. $q(\mu_m,\mu_n)<\dfrac{\varepsilon}{2}$'dır. $n_{k_0}\ge n_0$ olacak şekilde $k_0\in\mathbb{N}$ olsun. $\forall k\ge k_0$ için $q\left(\mu,\mu_{n_k}\right)<\dfrac{\varepsilon}{2}$'dır. $n\ge n_{k_0}$ için

$$\begin{aligned} q(\mu,\mu_n) &\le q\left(\mu,\mu_{n_{k_0}}\right)+q\left(\mu_{n_{k_0}},\mu_n\right) \\ &<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} \\ &=\varepsilon \end{aligned}$$

sağlanır. Yani, $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ μ noktasına sol q-yakınsaktır.

2) $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sol K-Cauchy dizisi ve $\left(\mu_{n_k}\right)$, $\mu\in W$ noktasına sağ $q-$yakınsak olan $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin alt dizisi olsun. $\varepsilon>0$ olmak üzere $\forall k\ge k_0$, $q\left(\mu_{n_k},\mu\right)<\dfrac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde $k_0\in\mathbb{N}$ seçilsin. $n_0\in\mathbb{N}$ iken $\forall n,m\in\mathbb{N}$, $n_0\le m<n$ için $q(\mu_m,\mu_n)<\dfrac{\varepsilon}{2}$ sağlansın. $n>n_0$ iken $n_k>n$ olacak şekilde $k\ge k_0$ var olsun. Buradan

$$\begin{aligned} q(\mu_n,\mu) &\le q\left(\mu_n,\mu_{n_k}\right)+q\left(\mu_{n_k},\mu\right) \\ &<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} \\ &=\varepsilon \end{aligned}$$

olur. Bu ise, $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin, μ noktasına sağ $q-$yakınsak olması demektir.

Uyarı 2.4.26. (W,q) asimetrik metrik uzay olsun.

1) Bu uzayda bir dizi
q^s Cauchy $\Rightarrow$ sol (sağ) $K-$Cauchy $\Rightarrow$ zayıf sol (sağ) $K-$Cauchy
$\Rightarrow$ sol (sağ) $q-$Cauchy'dir.

2) Bu uzayda bir dizinin q asimetrik metriğine göre belli bir anlamda sol Cauchy dizisi olması için gerek ve yeter şart dizinin $\bar{q}$ eşlenik asimetrik metriğine göre aynı anlamda sağ Cauchy dizisi olmasıdır.

3) Bir dizinin q^s-Cauchy dizisi olması için gerek ve yeter şart hem sol hem de sağ $K-$Cauchy dizisi olmasıdır.
4) Sol $q-$yakınsak dizi sol $q-$Cauchy dizisi ve sağ $q-$yakınsak dizi sağ $q-$Cauchy dizisidir.

3. KISMİ $b-$METRİK UZAYLAR VE SABİT NOKTA TEORİSİ

Bu bölümün birinci kısmında kısmi (partial) $b-$metrik uzay yapısı tanıtılıp bazı topolojik özellikleri incelenmiştir. İkinci bölümünde ise $\alpha_i^j-\left(D_\varphi\left(\beta_E\right)\right)$ daralma şartı tanımlanarak bu daralma şartını sağlayan sabit nokta teoremi ispatlanmıştır. Bunlara bağlı olarak bazı sonuçlar da elde edilmiştir.

3.1. Kısmi $b-$Metrik Uzaylar ve Bazı Topolojik Özellikleri

$b-$metrik uzay, metrik uzayın bir genellemesi olarak I. A. Bakhtin ve S. Czerwik tarafından tanımlanmıştır. Kısmi metrik uzay ise, noktanın kendine olan uzaklığını metriktekinden farklı düşünülerek S. G. Matthews tarafından 1994 yılında tanımlanmıştır. $b-$metrik ve kısmi metrik uzayın ortak özellikleriyle oluşturulan yeni uzay ise S. Shukla [117] tarafından tanımlanmıştır ve bu yeni tanımlanan uzayda Banach daralma prensibi ispatlanmıştır. Daha sonra ise birçok araştırmacı bu uzayda çalışmalara devam etmiştir [118-127].

Tanım 3.1.1. [110] $W\neq\varnothing$ bir küme olmak üzere $p_b:W\times W\to\mathbb{R}^+$ fonksiyonu $\forall\mu,\eta,\sigma\in W$ ve $s\geq 1$ katsayısı için

(p_b1) $\mu=\eta\Leftrightarrow p_b(\mu,\mu)=p_b(\mu,\eta)=p_b(\eta,\eta)$,

(p_b2) $p_b(\mu,\mu)\leq p_b(\mu,\eta)$,

(p_b3) $p_b(\mu,\eta)=p_b(\eta,\mu)$,

(p_b4) $p_b(\mu,\eta)\leq s\left[p_b(\mu,\sigma)+p_b(\sigma,\eta)\right]-p_b(\sigma,\sigma)$

şartlarını sağlarsa p_b fonksiyonuna W kümesinde bir kısmi $b-$metrik, (W,p_b) ikilisine ise kısmi $b-$metrik uzay denir.

Uyarı 3.1.2. [118-120] Her $b-$metrik uzay kısmi $b-$metrik uzaydır. Fakat tersi her zaman doğru olmayabilir. Yani, her kısmi $b-$metrik uzay $b-$metrik uzay olmayabilir. (W,b) $b-$metrik uzay olsun. Kısmi $b-$metrik uzay mıdır?

(p_b1) $\Rightarrow)$ $\mu=\eta$ olsun. $b-$metrik özelliğinden $b(\mu,\mu)=0$ ve $b(\eta,\eta)=0$ olduğundan $b(\mu,\mu)=b(\mu,\eta)=b(\eta,\eta)$'dır.

$\Leftarrow)$ $b(\mu,\mu)=b(\mu,\eta)=b(\eta,\eta)$ olsun. $b-$metrik özelliğinden $b(\mu,\mu)=0$ olduğundan $b(\mu,\eta)=0$ olur ki

$$\mu=\eta$$

sağlanır.

(p_b2)

$$b(\mu,\mu)=0\le b(\mu,\eta)$$

sağlanır.

(p_b3) $b-$metrik özelliğinden

$$b(\mu,\eta)=b(\eta,\mu)$$

sağlanır.

(p_b4) $b-$metrik özelliğinden $b(\mu,\eta)\le s\left[b(\mu,\sigma)+b(\sigma,\eta)\right]$ ve $b(\sigma,\sigma)=0$ olduğundan

$$b(\mu,\eta)\le s\left[b(\mu,\sigma)+b(\sigma,\eta)\right]-b(\sigma,\sigma)$$

sağlanır.

Dolayısıyla $b-$metrik, kısmi $b-$metrik olma şartlarını sağlar. Ancak kısmi $b-$metrik $b-$metriğin 1.aksiyomunu sağlamaz.

$\Rightarrow \mu=\eta$ olsun. $p_b(\mu,\mu)=p_b(\mu,\eta)=p_b(\eta,\eta)$ olduğu biliniyor fakat bu eşitliğin 0'a eşit olduğu her zaman söylenemez.

Her kısmi metrik, kısmi $b-$metriktir. Ancak tersi her zaman doğru değildir. $s=1$ haricinde kısmi $b-$metrik, kısmi metrik olmadığından tersi için genelleme yapılamaz.

Örnek 3.1.3. [117] $W=\mathbb{R}^+$ olsun. $p>1$ sabit olmak üzere $p_b:W\times W\to\mathbb{R}^+$ fonksiyonu $\forall\mu,\eta\in W$ için

$$p_b(\mu,\eta)=\left[\max\{\mu,\eta\}\right]^p+|\mu-\eta|^p$$

olarak tanımlansın. p_b bir kısmi $b-$metriktir. (W,p_b) ikilisi $s=2^p>1$ sabiti ile kısmi $b-$metrik uzaydır. Ancak $b-$metrik ve kısmi metrik uzay değildir.

$(p_b1)\Rightarrow)$ $\mu=\eta$ olsun.

$$p_b(\mu,\eta)=\left[\max\{\mu,\eta\}\right]^p+|\mu-\eta|^p=\left[\max\{\mu,\mu\}\right]^p+|\mu-\mu|^p=\mu^p$$
$$p_b(\mu,\mu)=\left[\max\{\mu,\mu\}\right]^p+|\mu-\mu|^p=\mu^p$$
$$p_b(\eta,\eta)=\left[\max\{\eta,\eta\}\right]^p+|\eta-\eta|^p=\eta^p=\mu^p$$

olur. Dolayısıyla,

$$p_b(\mu,\mu)=p_b(\mu,\eta)=p_b(\eta,\eta)$$

elde edilir.

$\Leftarrow)$ $p_b(\mu,\mu)=p_b(\mu,\eta)=p_b(\eta,\eta)$ olsun.

$$\mu^p=\left[\max\{\mu,\mu\}\right]^p+|\mu-\mu|^p=\eta^p\Rightarrow\mu^p=\eta^p\Rightarrow\mu=\eta$$

bulunur.

(p_b2) $p_b(\mu,\mu)=\left[\max\{\mu,\mu\}\right]^p+|\mu-\mu|^p=\mu^p$ dir.

$\mu<\eta$ ise

$$p_b(\mu,\mu)=\mu^p\leq|\mu|^p\leq|\eta|^p+|\mu-\eta|^p=\left[\max\{\mu,\eta\}\right]^p+|\mu-\eta|^p=p_b(\mu,\eta)$$

olur.

$\mu>\eta$ ise

$$p_b(\mu,\mu)=\mu^p\leq|\mu|^p\leq|\mu|^p+|\mu-\eta|^p=\left[\max\{\mu,\eta\}\right]^p+|\mu-\eta|^p=p_b(\mu,\eta)$$

olur.

(p_b3)

$$p_b(\mu,\eta)=\left[\max\{\mu,\eta\}\right]^p+|\mu-\eta|^p=\left[\max\{\eta,\mu\}\right]^p+|\eta-\mu|^p=p_b(\eta,\mu)$$

bulunur.

$(p_b 4)$

$$
\begin{aligned}
p_b(\mu,\eta) &= \left[\max\{\mu,\eta\}\right]^p + |\mu-\eta|^p \\
&= \left[\max\{\mu+\sigma-\sigma,\eta+\sigma-\sigma\}\right]^p + |\mu-\sigma+\sigma-\eta|^p \\
&\le \left[\max\{\mu,\sigma\}+\max\{\sigma,\eta\}\right]^p - \max\{\sigma,\sigma\}^p + |\mu-\sigma+\sigma-\eta|^p - |\sigma-\sigma|^p \\
&\le 2^p\left(\left[\max\{\mu,\sigma\}\right]^p + \left[\max\{\sigma,\eta\}\right]^p\right) - \max\{\sigma,\sigma\}^p \\
&\quad + 2^p\left(|\mu-\sigma|^p + |\sigma-\eta|^p\right) - |\sigma-\sigma|^p \\
&= 2^p\left(\left[\max\{\mu,\sigma\}\right]^p + |\mu-\sigma|^p + \left[\max\{\sigma,\eta\}\right]^p + |\sigma-\eta|^p\right) \\
&\quad - \left(\max\{\sigma,\sigma\}^p + |\sigma-\sigma|^p\right) \\
&= 2^p\left[p_b(\mu,\sigma) + p_b(\sigma,\eta)\right] - p_b(\sigma,\sigma) \\
&= s\left[p_b(\mu,\sigma) + p_b(\sigma,\eta)\right] - p_b(\sigma,\sigma)
\end{aligned}
$$

olur. Dört şart sağlandığından p_b kısmi $b-$metriktir. Ancak, $\mu=\eta$ için

$$
p_b(\mu,\eta) = \left[\max\{\mu,\eta\}\right]^p + |\mu-\eta|^p = \left[\max\{\mu,\mu\}\right]^p + |\mu-\mu|^p = \mu^p
$$

olur ki burada μ değerinin sıfır olduğu bilinmediğinden $p_b(\mu,\eta)=0$ eşitliği her zaman gerçekleşmediğinden $b-$metriğin 1.aksiyomu sağlanmaz. Dolayısıyla, her kısmi $b-$metrik, $b-$metrik değildir.

Ayrıca, $\mu=5,\eta=1,\sigma=4$ için

$$
\begin{aligned}
p_b(\mu,\eta) &= 5^p + 4^p \\
p_b(\mu,\sigma) &= 5^p + 1 \\
p_b(\sigma,\eta) &= 4^p + 3^p \\
p_b(\sigma,\sigma) &= 4^p
\end{aligned}
$$

olup $p=2$ için

$$
\begin{aligned}
p_b(\mu,\eta) &> p_b(\mu,\sigma) + p_b(\sigma,\eta) - p_b(\sigma,\sigma) \\
5^p + 4^p &> 5^p + 1 + 4^p + 3^p - 4^p \\
41 &> 35
\end{aligned}
$$

olur ki kısmi metriğin 4.aksiyomu sağlanmadığından her kısmi $b-$metrik kısmi metrik değildir.

Örnek 3.1.4. [117] $W=\mathbb{R}^{+}$ olsun. $a>0$ bir sabit ve $p_b:W\times W\to\mathbb{R}^{+}$ fonksiyonu $\forall\mu,\eta\in W$ için

$$p_b(\mu,\eta)=\max\{\mu,\eta\}+a$$

olarak tanımlansın. Bu durumda, (W,p_b) ikilisi $s\geq 1$ sabiti ile kısmi $b-$metrik uzaydır.

$(p_b1)\Rightarrow)$ $\mu=\eta$ olsun.

$$\begin{aligned}
p_b(\mu,\mu)&=\max\{\mu,\mu\}+a=\mu+a\\
p_b(\mu,\eta)&=\max\{\mu,\eta\}+a=\max\{\mu,\mu\}+a=\mu+a\\
p_b(\eta,\eta)&=\max\{\eta,\eta\}+a=\eta+a=\mu+a
\end{aligned}$$

olduğundan,

$$p_b(\mu,\mu)=p_b(\mu,\eta)=p_b(\eta,\eta)$$

sağlanır.

$\Leftarrow)$ $p_b(\mu,\mu)=p_b(\mu,\eta)=p_b(\eta,\eta)$ olsun.

$$\mu+a=\max\{\mu,\eta\}+a=\eta+a\Rightarrow\mu=\eta$$

sağlanır.

(p_b2)

$$p_b(\mu,\mu)=\mu+a\leq\max\{\mu,\eta\}+a=p_b(\mu,\eta)$$

sağlanır.

(p_b3)

$$p_b(\mu,\eta)=\max\{\mu,\eta\}+a=\max\{\eta,\mu\}+a=p_b(\eta,\mu)$$

sağlanır.

(p_b4)

$$\begin{aligned} p_b(\mu,\eta) &= \max\{\mu,\eta\}+a \\ &= \max\{\mu+\sigma-\sigma,\eta+\sigma-\sigma\}+a+a-a \\ &\leq \max\{\mu,\sigma\}+\max\{\sigma,\eta\}-\max\{\sigma,\sigma\}+a+a-a \\ &= \max\{\mu,\sigma\}+a+\max\{\sigma,\eta\}+a-(\max\{\sigma,\sigma\}+a) \\ &= p_b(\mu,\sigma)+p_b(\sigma,\eta)-p_b(\sigma,\sigma) \\ &\leq s\left[p_b(\mu,\sigma)+p_b(\sigma,\eta)\right]-p_b(\sigma,\sigma) \end{aligned}$$

sağlanır. Dört şart da sağlandığından (W,p_b) kısmi $b-$metrik uzaydır.

Örnek 3.1.5. [117] (W,p) kısmi metrik uzay olsun. $q\geq 1$ olmak üzere $p_b : W\times W\to\mathbb{R}^+$ fonksiyonu

$$p_b(\mu,\eta)=\left[p(\mu,\eta)\right]^q$$

olarak tanımlansın. (W,p_b) ikilisi $s=2^{q-1}$ sabitiyle kısmi $b-$metrik uzaydır.

$(p_b1)\Rightarrow)$ $\mu=\eta$ olsun.

$$\begin{aligned} p_b(\mu,\mu) &= \left[p(\mu,\mu)\right]^q \\ p_b(\mu,\eta) &= \left[p(\mu,\eta)\right]^q=\left[p(\mu,\mu)\right]^q \\ p_b(\eta,\eta) &= \left[p(\eta,\eta)\right]^q=\left[p(\mu,\mu)\right]^q \end{aligned}$$

olup

$$p_b(\mu,\mu)=p_b(\mu,\eta)=p_b(\eta,\eta)$$

sağlanır.

$\Leftarrow)$ $p_b(\mu,\mu)=p_b(\mu,\eta)=p_b(\eta,\eta)$ olsun.

$$\left[p(\mu,\mu)\right]^q=\left[p(\mu,\eta)\right]^q=\left[p(\eta,\eta)\right]^q$$

olur ki $q\geq 1$ olduğundan

$$p(\mu,\mu)=p(\mu,\eta)=p(\eta,\eta)$$

elde edilir. Kısmi metriğin özelliğinden $\mu=\eta$ sağlanır.

(p_b2) p kısmi metrik ve $q\geq 1$ olduğundan

$$p(\mu,\mu)\leq p(\mu,\eta)\Rightarrow\left[p(\mu,\mu)\right]^q\leq\left[p(\mu,\eta)\right]^q\Rightarrow p_b(\mu,\mu)\leq p_b(\mu,\eta)$$

elde edilir.

(p_b3) p kısmi metrik olduğundan $p(\mu,\eta)=p(\eta,\mu)$'dır. Dolayısıyla,

$$p_b(\mu,\eta)=\left[p(\mu,\eta)\right]^q=\left[p(\eta,\mu)\right]^q=p_b(\eta,\mu)$$

eşitliği elde edilir.

(p_b4) p kısmi metrik olduğundan $p(\mu,\eta)\leq p(\mu,\sigma)+p(\sigma,\eta)-p(\sigma,\sigma)$ eşitsizliği sağlanır.

$$\begin{aligned}p_b(\mu,\eta)=\left[p(\mu,\eta)\right]^q&\leq\left[p(\mu,\sigma)+p(\sigma,\eta)-p(\sigma,\sigma)\right]^q\\&\leq\left[p(\mu,\sigma)+p(\sigma,\eta)\right]^q-\left[p(\sigma,\sigma)\right]^q\\&\leq 2^{q-1}\left(\left[p(\mu,\sigma)\right]^q+\left[p(\sigma,\eta)\right]^q\right)-\left[p(\sigma,\sigma)\right]^q\\&=s\left(p_b(\mu,\sigma)+p_b(\sigma,\eta)\right)-p_b(\sigma,\sigma)\end{aligned}$$

bulunur. Dört şart da sağlandığından (W,p_b) ikilisi kısmi $b-$metrik uzaydır.

Örnek 3.1.6. [117] $W=\{1,2,3,4\}$ kümesi üzerinde

$$p_b(\mu,\eta)=\begin{cases}|\mu-\eta|^2+\max\{\mu,\eta\}, & \mu\neq\eta \text{ ise}\\ \mu, & \mu=\eta\neq 1 \text{ ise}\\ 0, & \mu=\eta=1 \text{ ise}\end{cases}$$

ile tanımlanan $p_b:W\times W\to\mathbb{R}^+$ fonksiyonu verilsin. (W,p_b) ikilisi $s=4$ sabitiyle kısmi $b-$metrik uzaydır.

$(p_b1)\Rightarrow)$ $\mu=\eta$ olsun.

i) $\mu=\eta=1$ ise

$$p_b(\mu,\mu)=0,\ p_b(\mu,\eta)=p_b(\mu,\mu)=0,\ p_b(\eta,\eta)=0$$

olduğundan

$$p_b(\mu,\mu)=p_b(\mu,\eta)=p_b(\eta,\eta)$$

bulunur.

ii) $\mu=\eta\neq 1$ ise

$$p_b(\mu,\mu)=\mu,\ p_b(\mu,\eta)=p_b(\mu,\mu)=\mu,\ p_b(\eta,\eta)=\eta$$

olduğundan,

$$p_b(\mu,\mu)=p_b(\mu,\eta)=p_b(\eta,\eta)$$

elde edilir.

$\Leftarrow)$ $p_b(\mu,\mu)=p_b(\mu,\eta)=p_b(\eta,\eta)$ olsun. Bu durumda

$$\mu=|\mu-\eta|^2+\max\{\mu,\eta\}=\eta\Rightarrow\mu=\eta$$

elde edilir.

$(p_b 2)$

$$\mu=\eta=1 \text{ ise, } p_b(\mu,\mu)=0\leq 0=p_b(\mu,\eta)$$

$$\mu=\eta\neq 1 \text{ ise, } p_b(\mu,\mu)=\mu\leq\mu=p_b(\mu,\eta)$$

$$\mu\neq\eta \text{ ise, } p_b(\mu,\mu)=\mu\leq|\mu-\eta|^2+\max\{\mu,\eta\}=p_b(\mu,\eta)$$

ifadeleri sağlanır.

$(p_b 3)$

$$p_b(\mu,\eta)=\begin{cases}|\mu-\eta|^2+\max\{\mu,\eta\}, & \mu\neq\eta \quad \text{ise}\\ \mu, & \mu=\eta\neq 1 \, \text{ise}\\ 0, & \mu=\eta=1 \quad \text{ise}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}|\eta-\mu|^2+\max\{\eta,\mu\}, & \mu\neq\eta \quad \text{ise}\\ \eta, & \mu=\eta\neq 1 \, \text{ise}\\ 0, & \mu=\eta=1 \quad \text{ise}\end{cases}$$

$$=p_b(\eta,\mu)$$

sağlanır.

$(p_b 4)$

$$\begin{aligned}
p_b(\mu,\eta)&=|\mu-\eta|^2+\max\{\mu,\eta\}\\
&=|\mu-\sigma+\sigma-\eta|^2+\max\{\mu+\sigma-\sigma,\eta+\sigma-\sigma\}\\
&\leq 2^2\left(|\mu-\sigma|^2+|\sigma-\eta|^2\right)+\max\{\mu,\sigma\}+\max\{\sigma,\eta\}-\max\{\sigma,\sigma\}\\
&=4|\mu-\sigma|^2+4|\sigma-\eta|^2-|\sigma-\sigma|^2+\max\{\mu,\sigma\}+\max\{\sigma,\eta\}-\max\{\sigma,\sigma\}\\
&\leq 4|\mu-\sigma|^2+4\max\{\mu,\sigma\}+4|\sigma-\eta|^2+4\max\{\sigma,\eta\}-\left(|\sigma-\sigma|^2+\max\{\sigma,\sigma\}\right)\\
&=4\left(|\mu-\sigma|^2+\max\{\mu,\sigma\}\right)+4\left(|\sigma-\eta|^2+\max\{\sigma,\eta\}\right)-\left(|\sigma-\sigma|^2+\max\{\sigma,\sigma\}\right)\\
&=4\left(p_b(\mu,\sigma)\right)+4\left(p_b(\sigma,\eta)\right)-p_b(\sigma,\sigma)\\
&=4\left[p_b(\mu,\sigma)+p_b(\sigma,\eta)\right]-p_b(\sigma,\sigma)
\end{aligned}$$

olur. $s\geq 4$ için dört şart da sağlandığından (W,p_b) ikilisi kısmi $b-$metrik uzaydır.

Örnek 3.1.7. [117] $W\neq\varnothing$ bir küme, (W,p) kısmi metrik uzay ve $s\geq 1$ sabiti ile (W,b) $b-$metrik uzay olsun. $\forall\mu,\eta\in W$ için

$$p_b(\mu,\eta)=p(\mu,\eta)+b(\mu,\eta)$$

olarak tanımlanan $p_b:W\times W\to[0,\infty)$ fonksiyonu $s\geq 1$ sabiti ile W üzerinde kısmi $b-$metriktir.

$(p_b 1)\Rightarrow)$ $\mu=\eta$ olsun.

$$\begin{aligned} p_b(\mu,\mu) &= p(\mu,\mu)+b(\mu,\mu) \\ p_b(\eta,\eta) &= p(\eta,\eta)+b(\eta,\eta) = p(\mu,\mu)+b(\mu,\mu) \\ p_b(\mu,\eta) &= p(\mu,\eta)+b(\mu,\eta) = p(\mu,\mu)+b(\mu,\mu) \end{aligned}$$

olduğundan

$$p_b(\mu,\mu) = p_b(\mu,\eta) = p_b(\eta,\eta)$$

eşitliği elde edilir.

$\Leftarrow$) $p_b(\mu,\mu) = p_b(\mu,\eta) = p_b(\eta,\eta)$ olsun. Bu durumda,

$$p(\mu,\mu)+b(\mu,\mu) = p(\mu,\eta)+b(\mu,\eta) = p(\eta,\eta)+b(\eta,\eta)$$

olur ki buradan

$$p(\mu,\mu) = p(\mu,\eta) = p(\eta,\eta) \text{ ve } b(\mu,\mu) = b(\mu,\eta) = b(\eta,\eta)$$

olacağından p kısmi metrik, b fonksiyonu $b-$metrik olduğundan $\mu = \eta$ sağlanır.

(p_b2) p kısmi metrik, b fonksiyonu $b-$metrik olduğundan

$$\begin{aligned} p_b(\mu,\mu) &= p(\mu,\mu)+b(\mu,\mu) \\ &\le p(\mu,\eta)+b(\mu,\eta) \\ &= p_b(\mu,\eta) \end{aligned}$$

sağlanır.

(p_b3) p kısmi metrik, b fonksiyonu $b-$metrik olduğundan

$$\begin{aligned} p_b(\mu,\eta) &= p(\mu,\eta)+b(\mu,\eta) \\ &= p(\eta,\mu)+b(\eta,\mu) \\ &= p_b(\eta,\mu) \end{aligned}$$

sağlanır.

(p_b4) p kısmi metrik, b fonksiyonu $b-$metrik olduğundan

$$
\begin{aligned}
p_b(\mu,\eta) &= p(\mu,\eta)+b(\mu,\eta) \\
&\le p(\mu,\sigma)+p(\sigma,\eta)-p(\sigma,\sigma)+s\left[b(\mu,\sigma)+b(\sigma,\eta)\right]-b(\sigma,\sigma) \\
&\le s\left[p(\mu,\sigma)+p(\sigma,\eta)\right]+s\left[b(\mu,\sigma)+b(\sigma,\eta)\right]-\left[p(\sigma,\sigma)+b(\sigma,\sigma)\right] \\
&\le s\left[p(\mu,\sigma)+b(\mu,\sigma)+p(\sigma,\eta)+b(\sigma,\eta)\right]-\left[p(\sigma,\sigma)+b(\sigma,\sigma)\right] \\
&= s\left[p_b(\mu,\sigma)+p_b(\sigma,\eta)\right]-p_b(\sigma,\sigma)
\end{aligned}
$$

sağlanır. s sabiti ile (W, p_b) ikilisi kısmi $b-$metrik uzaydır.

Örnek 3.1.8. [118] $W=[0,\infty)$ olsun. $p_b : W\times W \to [0,\infty)$ fonksiyonu $\forall \mu,\eta \in W$ için

$$p_b(\mu,\eta)=\left[\max\{\mu,\eta\}\right]^2$$

olarak tanımlansın. Bu durumda (W, p_b) ikilisi $s=2$ sabiti ile kısmi $b-$metrik uzaydır.

$(p_b 1)\Rightarrow)$ $\mu=\eta$ olsun.

$$
\begin{aligned}
p_b(\mu,\mu) &= \left[\max\{\mu,\mu\}\right]^2=\mu^2 \\
p_b(\mu,\eta) &= \left[\max\{\mu,\eta\}\right]^2=\left[\max\{\mu,\mu\}\right]^2=\mu^2 \\
p_b(\eta,\eta) &= \left[\max\{\eta,\eta\}\right]^2=\eta^2=\mu^2
\end{aligned}
$$

dır. Buradan

$$p_b(\mu,\mu)=p_b(\mu,\eta)=p_b(\eta,\eta)$$

elde edilir.

$\Leftarrow)$ $p_b(\mu,\mu)=p_b(\mu,\eta)=p_b(\eta,\eta)$ olsun.

$$\mu^2=\left[\max\{\mu,\eta\}\right]^2=\eta^2 \Rightarrow \mu=\eta$$

dır.

$(p_b 2)$

$$p_b(\mu,\mu)=\left[\max\{\mu,\mu\}\right]^2=\mu^2\le\left[\max\{\mu,\eta\}\right]^2=p_b(\mu,\eta)$$

sağlanır.

(p_b3)

$$p_b(\mu,\eta)=\left[\max\{\mu,\eta\}\right]^2=\left[\max\{\eta,\mu\}\right]^2=p_b(\eta,\mu)$$

sağlanır.

(p_b4)

$$\begin{aligned}p_b(\mu,\eta)&=\left[\max\{\mu,\eta\}\right]^2\\&=\left[\max\{\mu-\sigma+\sigma,\eta-\sigma+\sigma\}\right]^2\\&\leq\left[\max\{\mu,\sigma\}+\max\{\sigma,\eta\}-\max\{\sigma,\sigma\}\right]^2\\&\leq 2\left[\left(\max\{\mu,\sigma\}\right)^2+\left(\max\{\sigma,\eta\}\right)^2\right]-\left(\max\{\sigma,\sigma\}\right)^2\\&=2\left[p_b(\mu,\sigma)+p_b(\sigma,\eta)\right]-p_b(\sigma,\sigma)\end{aligned}$$

dır. Dört şart da sağlandığından (W,p_b) ikilisi kısmi $b-$metrik uzaydır.

Örnek 3.1.9. [118] $W=[1,\infty)$ olmak üzere $\forall\mu,\eta\in W$ için

$$p_b(\mu,\eta)=|\mu-\eta|^2+2$$

ile tanımlanan $p_b:W\times W\to[0,\infty)$ fonksiyonu verilsin. $s=2$ sabitiyle (W,p_b) ikilisi kısmi $b-$metrik uzaydır.

$(p_b1)\Rightarrow)$ $\mu=\eta$ olsun.

$$\begin{aligned}p_b(\mu,\mu)&=|\mu-\mu|^2+2=2\\p_b(\mu,\eta)&=|\mu-\eta|^2+2=|\mu-\mu|^2+2=2\\p_b(\eta,\eta)&=|\eta-\eta|^2+2=2\end{aligned}$$

sağlanır. Bu durumda

$$p_b(\mu,\mu)=p_b(\mu,\eta)=p_b(\eta,\eta)$$

elde edilir.

$\Leftarrow)$ $p_b(\mu,\mu)=p_b(\mu,\eta)=p_b(\eta,\eta)$ olsun.

Bu durumda

$$2=|\mu-\eta|^2+2=2 \Rightarrow |\mu-\eta|=0 \Rightarrow \mu=\eta$$

elde edilir.

$(p_b 2)$

$$p_b(\mu,\mu)=2\leq|\mu-\eta|^2+2=p_b(\mu,\eta)$$

sağlanır.

$(p_b 3)$

$$p_b(\mu,\eta)=|\mu-\eta|^2+2=|\eta-\mu|^2+2=p_b(\eta,\mu)$$

sağlanır.

$(p_b 4)$

$$\begin{aligned} p_b(\mu,\eta) &= |\mu-\eta|^2+2 \\ &= |\mu-\sigma+\sigma-\eta|^2+2 \\ &\leq 2\left(|\mu-\sigma|^2+|\sigma-\eta|^2\right)+2+4+4-4-|\sigma-\sigma|^2 \\ &= 2\left(|\mu-\sigma|^2+2+|\sigma-\eta|^2+2\right)-\left(|\sigma-\sigma|^2+2\right) \\ &\leq 2\left[p_b(\mu,\sigma)+p_b(\sigma,\eta)\right]-p_b(\sigma,\sigma) \end{aligned}$$

elde edilir. Dört şart da sağlandığından (W,p_b) ikilisi kısmi $b-$metrik uzaydır.

Örnek 3.1.10. $W=(0,1]\cup\{2,3,4,\ldots\}$ olmak üzere $q\geq 1$ için $p_b: W\times W\to\mathbb{R}^+$

$$p_b(\mu,\eta)=\begin{cases} \left|\dfrac{1}{\mu}-\dfrac{1}{\eta}\right|^q+1, & \mu,\eta\in(0,1],\ \mu\neq\eta \quad \text{ise} \\ e^{\max\{\mu,\eta\}-\min\{\mu,\eta\}}, & \mu,\eta\in\{2,3,4,\ldots\},\ \mu\neq\eta \quad \text{ise} \\ 1, & \mu=\eta \quad \text{ise} \end{cases}$$

olarak tanımlanan fonksiyon $s=2^{q-1}$ katsayısı ile kısmi $b-$metriktir. (W,p_b) ise kısmi $b-$metrik uzaydır.

$(p_b 1)\Rightarrow)$ $\mu=\eta$ olsun. Bu durumda

i) $\mu,\eta\in(0,1]$ için

$$p_b(\mu,\eta)=\left|\frac{1}{\mu}-\frac{1}{\eta}\right|^q+1=\left|\frac{1}{\mu}-\frac{1}{\mu}\right|^q+1=1$$
$$p_b(\mu,\mu)=1$$
$$p_b(\eta,\eta)=1$$

dır. Buradan

$$p_b(\mu,\mu)=p_b(\mu,\eta)=p_b(\eta,\eta)$$

elde edilir.

ii) $\mu,\eta\in\{2,3,4,...\}$ için

$$p_b(\mu,\eta)=e^{\max\{\mu,\eta\}-\min\{\mu,\eta\}}=e^{\max\{\mu,\mu\}-\min\{\mu,\mu\}}=e^{\mu-\mu}=e^0=1$$
$$p_b(\mu,\mu)=1$$
$$p_b(\eta,\eta)=1$$

olduğundan

$$p_b(\mu,\mu)=p_b(\mu,\eta)=p_b(\eta,\eta)$$

elde edilir.

$\Leftarrow)$ $p_b(\mu,\mu)=p_b(\mu,\eta)=p_b(\eta,\eta)$ olsun.

i) $\mu,\eta\in(0,1]$ için

$$1=1+\left|\frac{1}{\mu}-\frac{1}{\eta}\right|^q=1\Rightarrow\left|\frac{1}{\mu}-\frac{1}{\eta}\right|^q=0\Rightarrow\frac{1}{\mu}-\frac{1}{\eta}=0\Rightarrow\frac{1}{\mu}=\frac{1}{\eta}\Rightarrow\mu=\eta$$

sağlanır.

ii) $\mu,\eta\in\{2,3,4,...\}$ için

$$1=e^{\max\{\mu,\eta\}-\min\{\mu,\eta\}}=1\Rightarrow\max\{\mu,\eta\}-\min\{\mu,\eta\}=0\Rightarrow\max\{\mu,\eta\}=\min\{\mu,\eta\}\Rightarrow\mu=\eta$$

sağlanır.

(p_b2)

i) $\mu,\eta\in(0,1]$, $\mu\neq\eta$ için

$$p_b(\mu,\mu)=1\leq 1+\left|\frac{1}{\mu}-\frac{1}{\eta}\right|^q = p_b(\mu,\eta)$$

sağlanır.

ii) $\mu,\eta\in\{2,3,4,...\}$, $\mu\neq\eta$ için

$$p_b(\mu,\mu)=1=e^0\leq e^{\max\{\mu,\eta\}-\min\{\mu,\eta\}} = p_b(\mu,\eta)$$

sağlanır.

(p_b3)

i) $\mu,\eta\in(0,1]$, $\mu\neq\eta$ için

$$p_b(\mu,\eta)=1+\left|\frac{1}{\mu}-\frac{1}{\eta}\right|^q=1+\left|\frac{1}{\eta}-\frac{1}{\mu}\right|^q = p_b(\eta,\mu)$$

sağlanır.

ii) $\mu,\eta\in\{2,3,4,...\}$, $\mu\neq\eta$ için

$$p_b(\mu,\eta)=e^{\max\{\mu,\eta\}-\min\{\mu,\eta\}}=e^{\max\{\eta,\mu\}-\min\{\eta,\mu\}} = p_b(\eta,\mu)$$

sağlanır.

(p_b4)

i) $\mu,\eta,\sigma\in(0,1]$, $\mu\neq\eta\neq\sigma$ için

$$\begin{aligned}
p_b(\mu,\eta)&=1+\left|\frac{1}{\mu}-\frac{1}{\eta}\right|^q=1+\left|\frac{1}{\mu}-\frac{1}{\sigma}+\frac{1}{\sigma}-\frac{1}{\eta}\right|^q\\
&\leq 1+2^{q-1}\left[\left|\frac{1}{\mu}-\frac{1}{\sigma}\right|^q+\left|\frac{1}{\sigma}-\frac{1}{\eta}\right|^q\right]\\
&\leq 2^{q-1}\left[\left|\frac{1}{\mu}-\frac{1}{\sigma}\right|^q+1+\left|\frac{1}{\sigma}-\frac{1}{\eta}\right|^q+1\right]-1-\left|\frac{1}{\sigma}-\frac{1}{\sigma}\right|^q\\
&=2^{q-1}\left[p_b(\mu,\sigma)+p_b(\sigma,\eta)\right]-p_b(\sigma,\sigma)\\
&=s\left[p_b(\mu,\sigma)+p_b(\sigma,\eta)\right]-p_b(\sigma,\sigma)
\end{aligned}$$

sağlanır.

ii) $\mu,\eta \in (0,1]$, $\mu \neq \eta$ ve $\mu = \sigma$ için

$$\begin{aligned}
p_b(\mu,\eta) &= 1+\left|\frac{1}{\mu}-\frac{1}{\eta}\right|^q = 1+\left|\frac{1}{\sigma}-\frac{1}{\eta}\right|^q +1-1-\left|\frac{1}{\sigma}-\frac{1}{\sigma}\right|^q \\
&\le 2^{q-1}\left[1+\left|\frac{1}{\sigma}-\frac{1}{\eta}\right|^q +1-1-\left|\frac{1}{\sigma}-\frac{1}{\sigma}\right|^q\right] \\
&\le 2^{q-1}\left[1+\left|\frac{1}{\sigma}-\frac{1}{\eta}\right|^q +1\right]-\left[1+\left|\frac{1}{\sigma}-\frac{1}{\sigma}\right|^q\right] \\
&= 2^{q-1}\left[p_b(\mu,\sigma)+p_b(\sigma,\eta)\right]-p_b(\sigma,\sigma) \\
&= s\left[p_b(\mu,\sigma)+p_b(\sigma,\eta)\right]-p_b(\sigma,\sigma)
\end{aligned}$$

elde edilir.

iii) $\mu,\sigma \in (0,1]$, $\mu \neq \sigma$, $\mu = \eta$ için de benzer durum geçerlidir.

iv) $\mu,\eta,\sigma \in \{2,3,4,...\}$, $\mu \neq \eta \neq \sigma$ için

$$\begin{aligned}
\max\{\mu,\eta\}-\min\{\mu,\eta\} &= \max\{\mu+\sigma-\sigma,\eta+\sigma-\sigma\}-\min\{\mu+\sigma-\sigma,\eta+\sigma-\sigma\} \\
&\le \max\{\mu,\sigma\}+\max\{\sigma,\eta\}-\max\{\sigma,\sigma\} \\
&\quad -\min\{\mu,\sigma\}-\min\{\sigma,\eta\}+\min\{\sigma,\sigma\} \\
&= \max\{\mu,\sigma\}-\min\{\mu,\sigma\}+\max\{\sigma,\eta\}-\min\{\sigma,\eta\} \\
&\quad -\left[\max\{\sigma,\sigma\}-\min\{\sigma,\sigma\}\right]
\end{aligned}$$

olduğundan

$$e^{\max\{\mu,\eta\}-\min\{\mu,\eta\}} \le e^{\max\{\mu,\sigma\}-\min\{\sigma,\eta\}} + e^{\max\{\sigma,\eta\}-\min\{\sigma,\eta\}} - e^{\max\{\sigma,\sigma\}-\min\{\sigma,\sigma\}}$$

elde edilir ki

$$\begin{aligned}
p_b(\mu,\eta) &\le p_b(\mu,\sigma)+p_b(\sigma,\eta)-p_b(\sigma,\sigma) \\
&= s\left[p_b(\mu,\sigma)+p_b(\sigma,\eta)\right]-p_b(\sigma,\sigma)
\end{aligned}$$

sağlanır.

v) $\mu,\eta \in \{2,3,4,...\}$ olmak üzere $\mu \neq \eta$ ve $\mu = \sigma$ için

$$\begin{aligned}
\max\{\mu,\eta\}-\min\{\mu,\eta\} &= \max\{\sigma,\eta\}-\min\{\sigma,\eta\} \\
&= 0+\max\{\sigma,\eta\}-\min\{\sigma,\eta\}-0
\end{aligned}$$

olduğundan

$$e^{\max\{\mu,\eta\}-\min\{\mu,\eta\}} = e^0 + e^{\max\{\sigma,\eta\}-\min\{\sigma,\eta\}} - e^0$$
$$p_b(\mu,\eta) = 1 + p_b(\sigma,\eta) - 1$$
$$\leq s\left[p_b(\mu,\sigma) + p_b(\sigma,\eta)\right] - p_b(\sigma,\sigma)$$

elde edilir.

vi) $\mu,\sigma \in \{2,3,4,...\}$, $\mu \neq \sigma$ ve $\mu = \eta$ için de benzer durum geçerlidir.

Dört şart sağlandığından $s = 2^{q-1}$ katsayısı ile kısmi $b-$metriktir. Ancak, $\mu = \eta$ için, $p_b(\mu,\eta) = 1$ olduğundan $p_b(\mu,\eta) = 0$ eşitliği gerçekleşmediğinden $b-$metriğin 1.aksiyomu sağlanmaz. Dolayısıyla, her kısmi $b-$metrik $b-$metrik değildir.

Örnek 3.1.11. $W = \mathbb{N}$ üzerinde aşağıda tanımlanan $p_b : W \times W \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu verilsin.

$$p_b(\mu,\eta) = \begin{cases} e^{\max\left\{|\mu-\eta|, \frac{\mu+\eta}{2}\right\}}, \mu \leq \eta & \text{ise} \\ e^{\frac{|\mu-\eta|^2+\mu+\eta}{2}}, \quad \mu > \eta & \text{ise} \end{cases}$$

olarak tanımlanan fonksiyon $s = 4$ katsayısı ile kısmi $b-$metriktir. $(\mathbb{N}, p_b)$ kısmi $b-$metrik uzaydır.

$(p_b1) \Rightarrow)\, \mu = \eta$ olsun. Bu durumda

i) $\mu \leq \eta$ için

$$p_b(\mu,\eta) = e^{\max\left\{|\mu-\eta|, \frac{\mu+\eta}{2}\right\}} = e^{\max\left\{|\mu-\mu|, \frac{\mu+\mu}{2}\right\}} = e^{\mu}$$
$$p_b(\mu,\mu) = e^{\mu}$$
$$p_b(\eta,\eta) = e^{\eta} = e^{\mu}$$

olur. Buradan da

$$p_b(\mu,\mu) = p_b(\mu,\eta) = p_b(\eta,\eta)$$

elde edilir.

ii) $\mu > \eta$ için

$$p_b(\mu,\eta) = e^{\frac{|\mu-\eta|^2+\mu+\eta}{2}} = e^{\frac{|\mu-\mu|^2+\mu+\mu}{2}} = e^{\mu}$$
$$p_b(\mu,\mu) = e^{\mu}$$
$$p_b(\eta,\eta) = e^{\eta} = e^{\mu}$$

olup buradan

$$p_b(\mu,\mu) = p_b(\mu,\eta) = p_b(\eta,\eta)$$

elde edilir.

$\Leftarrow$) $p_b(\mu,\mu) = p_b(\mu,\eta) = p_b(\eta,\eta)$ olsun.

i) $\mu \leq \eta$ için

$$e^{\mu} = e^{\max\left\{|\mu-\eta|, \frac{\mu+\eta}{2}\right\}} = e^{\eta}$$
$$\mu = \max\left\{|\mu-\eta|, \frac{\mu+\eta}{2}\right\} = \eta \Rightarrow \mu = \eta$$

sağlanır.

ii) $\mu > \eta$ için

$$e^{\mu} = e^{\frac{|\mu-\eta|^2+\mu+\eta}{2}} = e^{\eta}$$
$$\mu = \frac{|\mu-\eta|^2+\mu+\eta}{2} = \eta \Rightarrow \mu = \eta$$

sağlanır.

$(p_b 2)$

i) $\mu \leq \eta$ için

$$p_b(\mu,\mu) = e^{\mu} \leq e^{\max\left\{|\mu-\eta|, \frac{\mu+\eta}{2}\right\}} = p_b(\mu,\eta)$$

olur.

ii) $\mu > \eta$ için

$$p_b(\mu,\mu) = e^{\mu} \leq e^{\frac{|\mu-\eta|^2+\mu+\eta}{2}} = p_b(\mu,\eta)$$

olur.

$(p_b 3)$

i) $\mu \le \eta$ için

$$p_b(\mu,\eta)=e^{\max\left\{|\mu-\eta|,\frac{\mu+\eta}{2}\right\}}=e^{\max\left\{|\eta-\mu|,\frac{\eta+\mu}{2}\right\}}=p_b(\eta,\mu)$$

sağlanır.

ii) $\mu > \eta$ için

$$p_b(\mu,\eta)=e^{\frac{|\mu-\eta|^2+\mu+\eta}{2}}=e^{\frac{|\eta-\mu|^2+\eta+\mu}{2}}=p_b(\eta,\mu)$$

sağlanır.

$(p_b 4)$

i) $\mu \le \sigma \le \eta$ için

$$\begin{aligned}\max\left\{|\mu-\eta|,\frac{\mu+\eta}{2}\right\}&=\max\left\{|\mu-\sigma+\sigma-\eta|,\frac{\mu+\sigma+\sigma+\eta}{2}-\sigma\right\}\\&\le \max\left\{|\mu-\sigma|+|\sigma-\eta|,\frac{\mu+\sigma}{2}+\frac{\sigma+\eta}{2}-\sigma\right\}\\&=\max\left\{|\mu-\sigma|,\frac{\mu+\sigma}{2}\right\}+\max\left\{|\sigma-\eta|,\frac{\sigma+\eta}{2}\right\}-\max\left\{|\sigma-\sigma|,\frac{\sigma+\sigma}{2}\right\}\end{aligned}$$

olduğundan

$$e^{\max\left\{|\mu-\eta|,\frac{\mu+\eta}{2}\right\}}\le e^{\max\left\{|\mu-\sigma|,\frac{\mu+\sigma}{2}\right\}}+e^{\max\left\{|\sigma-\eta|,\frac{\sigma+\eta}{2}\right\}}-e^{\max\left\{|\sigma-\sigma|,\frac{\sigma-\sigma}{2}\right\}}$$

sağlanır. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}p_b(\mu,\eta)&\le p_b(\mu,\sigma)+p_b(\sigma,\eta)-p_b(\sigma,\sigma)\\&\le s\left[p_b(\mu,\sigma)+p_b(\sigma,\eta)\right]-p_b(\sigma,\sigma)\end{aligned}$$

olup $s \ge 1$ için sağlanır.

ii) $\mu \leq \eta \leq \sigma$ için

$$\begin{aligned}
\max\left\{|\mu-\eta|,\frac{\mu+\eta}{2}\right\} &= \max\left\{|\mu-\sigma+\sigma-\eta|,\frac{\mu+\sigma+\sigma+\eta}{2}-\sigma\right\} \\
&\leq \max\left\{|\mu-\sigma|+|\sigma-\eta|,\frac{\mu+\sigma}{2}+\frac{\sigma+\eta}{2}-\sigma\right\} \\
&= \max\left\{|\mu-\sigma|,\frac{\mu+\sigma}{2}\right\}+\max\left\{|\sigma-\eta|,\frac{\sigma+\eta}{2}\right\}-\max\left\{|\sigma-\sigma|,\frac{\sigma+\sigma}{2}\right\} \\
&\leq \max\left\{|\mu-\sigma|,\frac{\mu+\sigma}{2}\right\}+\frac{|\sigma-\eta|^2+\sigma+\eta}{2}-\max\left\{|\sigma-\sigma|,\frac{\sigma+\sigma}{2}\right\}
\end{aligned}$$

olduğundan

$$e^{\max\left\{|\mu-\eta|,\frac{\mu+\eta}{2}\right\}} \leq e^{\max\left\{|\mu-\sigma|,\frac{\mu+\sigma}{2}\right\}}+e^{\frac{|\sigma-\eta|^2+\sigma+\eta}{2}}-e^{\max\left\{|\sigma-\sigma|,\frac{\sigma+\sigma}{2}\right\}}$$

sağlanır. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}
p_b(\mu,\eta) &\leq p_b(\mu,\sigma)+p_b(\sigma,\eta)-p_b(\sigma,\sigma) \\
&\leq s\left[p_b(\mu,\sigma)+p_b(\sigma,\eta)\right]-p_b(\sigma,\sigma)
\end{aligned}$$

ifadesi $s \geq 1$ için sağlanır.

iii) $\sigma \leq \mu \leq \eta$ için

$$\begin{aligned}
\max\left\{|\mu-\eta|,\frac{\mu+\eta}{2}\right\} &= \max\left\{|\mu-\sigma+\sigma-\eta|,\frac{\mu+\sigma+\sigma+\eta}{2}-\sigma\right\} \\
&\leq \max\left\{|\mu-\sigma|+|\sigma-\eta|,\frac{\mu+\sigma}{2}+\frac{\sigma+\eta}{2}-\sigma\right\} \\
&= \max\left\{|\mu-\sigma|,\frac{\mu+\sigma}{2}\right\}+\max\left\{|\sigma-\eta|,\frac{\sigma+\eta}{2}\right\}-\max\left\{|\sigma-\sigma|,\frac{\sigma+\sigma}{2}\right\} \\
&\leq \frac{|\mu-\sigma|^2+\mu+\sigma}{2}+\max\left\{|\sigma-\eta|,\frac{\sigma+\eta}{2}\right\}-\max\left\{|\sigma-\sigma|,\frac{\sigma+\sigma}{2}\right\}
\end{aligned}$$

olduğundan

$$e^{\max\left\{|\mu-\eta|,\frac{\mu+\eta}{2}\right\}} \leq e^{\frac{|\mu-\sigma|^2+\mu+\sigma}{2}}+e^{\max\left\{|\sigma-\eta|,\frac{\sigma+\eta}{2}\right\}}-e^{\max\left\{|\sigma-\sigma|,\frac{\sigma+\sigma}{2}\right\}}$$

sağlanır. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}
p_b(\mu,\eta) &\leq p_b(\mu,\sigma)+p_b(\sigma,\eta)-p_b(\sigma,\sigma) \\
&\leq s\left[p_b(\mu,\sigma)+p_b(\sigma,\eta)\right]-p_b(\sigma,\sigma)
\end{aligned}$$

dır. $s\geq 1$ için sağlanır.

iv) $\mu>\sigma>\eta$ için

$$\begin{aligned}\frac{|\mu-\eta|^2+\mu+\eta}{2}&=\frac{|\mu-\sigma+\sigma-\eta|^2+\mu+\sigma-\sigma+\eta}{2}-\sigma\\&\leq 2^2\left[\frac{|\mu-\sigma|^2}{2}+\frac{|\sigma-\eta|^2}{2}\right]+\frac{\mu+\sigma}{2}+\frac{\sigma+\eta}{2}-\sigma\\&\leq 2^2\left[\frac{|\mu-\sigma|^2+\mu+\sigma}{2}+\frac{|\sigma-\eta|^2+\sigma+\eta}{2}\right]-\max\left\{|\sigma-\sigma|,\frac{\sigma+\sigma}{2}\right\}\end{aligned}$$

olduğundan

$$e^{\frac{|\mu-\eta|^2+\mu+\eta}{2}}\leq 2^2\left[e^{\frac{|\mu-\sigma|^2+\mu+\sigma}{2}}+e^{\frac{|\sigma-\eta|^2+\sigma+\eta}{2}}\right]-e^{\max\left\{|\sigma-\sigma|,\frac{\sigma+\sigma}{2}\right\}}$$

$$\begin{aligned}p_b(\mu,\eta)&\leq 4\left[p_b(\mu,\sigma)+p_b(\sigma,\eta)\right]-p_b(\sigma,\sigma)\\&\leq s\left[p_b(\mu,\sigma)+p_b(\sigma,\eta)\right]-p_b(\sigma,\sigma)\end{aligned}$$

ifadesi $s=4$ için sağlanır.

v) $\mu>\eta>\sigma$ için

$$\begin{aligned}\frac{|\mu-\eta|^2+\mu+\eta}{2}&=\frac{|\mu-\sigma|^2+\mu+\sigma-\sigma+\eta}{2}-\sigma\\&=\frac{|\mu-\sigma|^2+\mu+\sigma}{2}+\frac{\sigma+\eta}{2}-\sigma\\&\leq\frac{|\mu-\sigma|^2+\mu+\sigma}{2}+\max\left\{|\sigma-\eta|,\frac{\sigma+\eta}{2}\right\}-\max\left\{|\sigma-\sigma|,\frac{\sigma+\sigma}{2}\right\}\end{aligned}$$

olduğundan

$$e^{\frac{|\mu-\eta|^2+\mu+\eta}{2}}\leq e^{\frac{|\mu-\sigma|^2+\mu+\sigma}{2}}+e^{\max\left\{|\sigma-\eta|,\frac{\sigma+\eta}{2}\right\}}-e^{\max\left\{|\sigma-\sigma|,\frac{\sigma+\sigma}{2}\right\}}$$

$$\begin{aligned}p_b(\mu,\eta)&\leq p_b(\mu,\sigma)+p_b(\sigma,\eta)-p_b(\sigma,\sigma)\\&\leq s\left[p_b(\mu,\sigma)+p_b(\sigma,\eta)\right]-p_b(\sigma,\sigma)\end{aligned}$$

ifadesi $s\geq 1$ için sağlanır.

vi) $\sigma > \mu > \eta$ için

$$\frac{|\mu-\eta|^2+\mu+\eta}{2} \le \frac{|\sigma-\eta|^2+\sigma+\eta}{2} + 2\max\left\{|\mu-\sigma|, \frac{\mu+\sigma}{2}\right\} - \max\left\{|\sigma-\sigma|, \frac{\sigma+\sigma}{2}\right\}$$
$$\le 2\left[\max\left\{|\mu-\sigma|, \frac{\mu+\sigma}{2}\right\} + \frac{|\sigma-\eta|^2+\sigma+\eta}{2}\right] - \max\left\{|\sigma-\sigma|, \frac{\sigma+\sigma}{2}\right\}$$

olduğundan

$$e^{\frac{|\mu-\eta|^2+\mu+\eta}{2}} \le 2\left[e^{\max\left\{|\mu-\sigma|, \frac{\mu+\sigma}{2}\right\}} + e^{\frac{|\sigma-\eta|^2+\sigma+\eta}{2}}\right] - e^{\max\left\{|\sigma-\sigma|, \frac{\sigma+\sigma}{2}\right\}}$$

$$p_b(\mu,\eta) \le 2\left[p_b(\mu,\sigma)+p_b(\sigma,\eta)\right] - p_b(\sigma,\sigma)$$
$$\le s\left[p_b(\mu,\sigma)+p_b(\sigma,\eta)\right] - p_b(\sigma,\sigma)$$

ifadesi $s=2$ için sağlanır.

Dört şart sağlandığından $s=4$ katsayısı ile p_b fonksiyonu kısmi $b-$metriktir.

Z. Mustafa ve ark. [118] 2013 yılında kısmi $b-$metriğin dördüncü şartını değiştirerek kısmi $b-$fonksiyonunu yeniden tanımlamışlardır.

Tanım 3.1.12. [118] Her $\forall \mu,\eta \in W$ için

$(p_b 4)$:

$$p_b(\mu,\eta) \le s\left[p_b(\mu,\sigma)+p_b(\sigma,\eta)-p_b(\sigma,\sigma)\right] + \frac{1-s}{2}\left(p_b(\mu,\mu)+p_b(\eta,\eta)\right)$$

dır.

Önerme 3.1.13. [118] (W, p_b) kısmi $b-$metrik uzayı olsun. p_b fonksiyonu $\forall \mu,\eta \in W$ için

$$d_{p_b}(\mu,\eta) = 2p_b(\mu,\eta) - p_b(\mu,\mu) - p_b(\eta,\eta) \tag{3.1}$$

eşitliğini sağlarsa W üzerinde $b-$metrik fonksiyonunun özelliklerini sağlar.

$(b1) \Rightarrow)$ $\mu = \eta$ olsun.

$$\begin{aligned} d_{p_b}(\mu,\eta) &= 2p_b(\mu,\eta) - p_b(\mu,\mu) - p_b(\eta,\eta) \\ &= 2p_b(\mu,\mu) - p_b(\mu,\mu) - p_b(\mu,\mu) \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur.

$\Leftarrow)$ $d_{p_b}(\mu,\eta) = 0$ olsun.

$$0 = d_{p_b}(\mu,\eta) = 2p_b(\mu,\eta) - p_b(\mu,\mu) - p_b(\eta,\eta)$$

olduğundan

$$0 = p_b(\mu,\eta) - p_b(\mu,\mu) + p_b(\mu,\eta) - p_b(\eta,\eta)$$

olur ki kısmi $b-$metriğin özelliğinden $p_b(\mu,\eta) - p_b(\mu,\mu) \geq 0$ ve $p_b(\mu,\eta) - p_b(\eta,\eta) \geq 0$ sağlanır. Bu nedenle yukarıdaki eşitlik ancak, ikisinin de sıfır olmasıyla mümkündür. Yani, $p_b(\mu,\eta) = p_b(\mu,\mu)$ ve $p_b(\mu,\eta) = p_b(\eta,\eta)$'dır.

$$p_b(\mu,\mu) = p_b(\mu,\eta) = p_b(\eta,\eta)$$

olur. Kısmi $b-$metriğin özelliğinden $\mu = \eta$ sağlanır.

$(b2)$ Kısmi $b-$metriğin simetri özelliğinden

$$\begin{aligned} d_{p_b}(\mu,\eta) &= 2p_b(\mu,\eta) - p_b(\mu,\mu) - p_b(\eta,\eta) \\ &= 2p_b(\eta,\mu) - p_b(\eta,\eta) - p_b(\mu,\mu) \\ &= d_{p_b}(\eta,\mu) \end{aligned}$$

doğrudur.

$(b3)$ Kısmi $b-$metriğin üçgen eşitsizliği özelliğinden

$$\begin{aligned} d_{p_b}(\mu,\eta) &= 2p_b(\mu,\eta) - p_b(\mu,\mu) - p_b(\eta,\eta) \\ &\leq 2\left[p_b(\mu,\sigma) + p_b(\sigma,\eta) - p_b(\sigma,\sigma)\right] - p_b(\mu,\mu) - p_b(\eta,\eta) \\ &\leq 2p_b(\mu,\sigma) - p_b(\mu,\mu) - p_b(\sigma,\sigma) + 2p_b(\sigma,\eta) - p_b(\sigma,\sigma) - p_b(\eta,\eta) \\ &= d_{p_b}(\mu,\sigma) + d_{p_b}(\sigma,\eta) \\ &\leq s\left[d_{p_b}(\mu,\sigma) + d_{p_b}(\sigma,\eta)\right] \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. $b-$metriğin üç şartı da sağlandığından d_{p_b} fonksiyonu $b-$metriktir.

Tanım 3.1.14. [117] (W,p_b) kısmi $b-$metrik uzay ve $\varepsilon>0$ olmak üzere,

$$B_{p_b}(\mu,\varepsilon)=\{\eta\in W: p_b(\mu,\eta)<p_b(\mu,\mu)+\varepsilon\}$$

ile tanımlanan kümeye μ merkezli, ε yarıçaplı p_b-açık yuvarı denir. Benzer şekilde,

$$B_{p_b}[\mu,\varepsilon]=\{\eta\in W: p_b(\mu,\eta)\le p_b(\mu,\mu)+\varepsilon\}$$

$\mu\in W$ merkezli, ε yarıçaplı kapalı p_b-yuvarı denir.

(W,p_b) kısmi $b-$metrik uzayında $\{B_{p_b}(\mu,\varepsilon):\mu\in W,\varepsilon>0\}$ bazı ile W üzerinde üretilen topoloji τ_{p_b} ile gösterilir.

Örnek 3.1.15. $W=\mathbb{R}^+$ olsun. $a>0$ bir sabit ve $p_b:W\times W\to\mathbb{R}^+$ fonksiyonu, $\forall\mu,\eta\in W$ için $p_b(\mu,\eta)=\max\{\mu,\eta\}+a$ ile tanımlansın. Bu durumda (W,p_b) ikilisi $s\ge 1$ sabiti ile kısmi $b-$metrik uzaydır. Yuvar tanımından $\varepsilon>0$ için

$$B_{p_b}(\mu,\varepsilon)=\{\eta\in W\,|\,p_b(\mu,\eta)<p_b(\mu,\mu)+\varepsilon\}$$
$$B_{p_b}(\mu,\varepsilon)=\{\eta\in W\,|\max\{\mu,\eta\}+a<\mu+a+\varepsilon\}$$
$$B_{p_b}(\mu,\varepsilon)=\begin{cases}\mathbb{R}^+, & \mu\ge\eta \text{ ise}\\ (\mu,\mu+\varepsilon), & \mu<\eta \text{ ise}\end{cases}$$

bulunur.

Örnek 3.1.16. $W=(0,1)$ olsun. $\forall\mu,\eta\in W$ için $p_b:W\times W\to\mathbb{R}^+$ fonksiyonu $p_b(\mu,\eta)=|\mu-\eta|+1$ ile tanımlansın. $s\ge 1$ sabiti ile (W,p_b) kısmi $b-$metrik uzaydır. Yuvar tanımından $\varepsilon>0$ için

$$B_{p_b}(\mu,\varepsilon)=\{\eta\in W\,|\,p_b(\mu,\eta)<p_b(\mu,\mu)+\varepsilon\}$$
$$B_{p_b}(\mu,\varepsilon)=\{\eta\in W\,|\,|\mu-\eta|+1<1+\varepsilon\}$$
$$B_{p_b}(\mu,\varepsilon)=\{\eta\in W\,|\,\mu-\varepsilon<\eta<\mu+\varepsilon\}$$
$$B_{p_b}(\mu,\varepsilon)=(\mu-\varepsilon,\mu+\varepsilon)$$

elde edilir.

Örnek 3.1.17. $W=\mathbb{R}^+$ olsun. $\forall \mu,\eta \in W$ için $p_b(\mu,\eta)=(\mu-\eta)^2+5$ olarak tanımlanan $p_b : W\times W \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu verilsin. $s=2$ sabitiyle (W,p_b) bir kısmi $b-$metrik uzaydır. Yuvar tanımından $\varepsilon>0$ için

$$\begin{aligned}
B_{p_b}(\mu,\varepsilon)&=\left\{\eta\in W \middle| p_b(\mu,\eta)<p_b(\mu,\mu)+\varepsilon\right\}\\
B_{p_b}(\mu,\varepsilon)&=\left\{\eta\in W \middle| (\mu-\eta)^2+5<5+\varepsilon\right\}\\
B_{p_b}(\mu,\varepsilon)&=\left\{\eta\in W \middle| \mu-\sqrt{\varepsilon}<\eta<\mu+\sqrt{\varepsilon}\right\}\\
B_{p_b}(\mu,\varepsilon)&=\left(\mu-\sqrt{\varepsilon},\mu+\sqrt{\varepsilon}\right)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 3.1.18. Kısmi $b-$metrik uzay, T_0- topolojisi ile donatılmıştır.

İspat : $\mu\neq\eta$ için, (p_b1) ve (p_b2) şartlarından $p_b(\mu,\mu)<p_b(\mu,\eta)$ ya da $p_b(\eta,\eta)<p_b(\mu,\eta)$ ifadelerini sağlar. $p_b(\mu,\mu)<p_b(\mu,\eta)$ olsun.

$\mu\in B_{p_b}(\mu,\varepsilon)$ ve $\eta\notin B_{p_b}(\mu,\varepsilon)$ olmak üzere

$$\varepsilon=\frac{p_b(\mu,\eta)-p_b(\mu,\mu)}{2}$$

olarak seçilsin. (W,p_b) kısmi metrik uzayı T_0- uzayıdır.

$\eta\in B_{p_b}(\mu,\varepsilon)$ olsun.

$$\begin{aligned}
&p_b(\mu,\eta)<p_b(\mu,\mu)+\varepsilon\\
&p_b(\mu,\eta)<p_b(\mu,\mu)-\frac{p_b(\mu,\mu)}{2}+\frac{p_b(\mu,\eta)}{2}\\
&2p_b(\mu,\eta)<2p_b(\mu,\mu)-p_b(\mu,\mu)+p_b(\mu,\eta)\\
&p_b(\mu,\eta)<p_b(\mu,\mu)
\end{aligned}$$

sağlanır. Ancak $p_b(\mu,\mu)<p_b(\mu,\eta)$ olduğu biliniyor. Bu ise çelişkidir. O halde, $\eta\in B_{p_b}(\mu,\varepsilon)$ kabulü yanlıştır. Bu durumda (W,p_b) T_0-uzayıdır.

Uyarı 3.1.19. Kısmi $b-$metrik uzay, T_1 topolojisine sahip olmak zorunda değildir. Kısmi metrik her zaman T_1 topolojisine sahip olmadığından kısmi $b-$metrik uzay da her zaman T_1 topolojisine sahip olmayabilir. Örneğin, $W=\mathbb{R}^+$ üzerinde $a>0$ bir sabit ve $p_b : W \times W \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu $\forall \mu, \eta \in W$ için $p_b(\mu, \eta) = \max\{\mu, \eta\} + a$ ile tanımlansın. Bu durumda (W, p_b) ikilisinin $s \geq 1$ sabiti ile kısmi $b-$metrik uzayının açık yuvarı

$$B_{p_b}(\mu, \varepsilon) = \begin{cases} \mathbb{R}^+, & \mu \geq \eta \quad \text{ise} \\ (\mu, \mu + \varepsilon), & \mu < \eta \quad \text{ise} \end{cases}$$

olup burada herhangi iki farklı sayının en azından birinin diğerini içermeyen komşuluğu bulunmadığından T_1 topolojisine sahip değildir.

Uyarı 3.1.20. Kısmi $b-$metrik uzay, T_2 topolojisine sahip değildir.

$W = \mathbb{R}^+$ olsun. $a > 0$ bir sabit ve $p_b : W \times W \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu $\forall \mu, \eta \in W$ için $p_b(\mu, \eta) = \max\{\mu, \eta\} + a$ ile tanımlansın. Bu durumda (W, p_b), $s \geq 1$ sabiti ile kısmi $b-$metrik uzaydır ve açık yuvarı

$$B_{p_b}(\mu, \varepsilon) = \begin{cases} \mathbb{R}^+, & \mu > \eta \quad \text{ise} \\ (\mu, \mu + \varepsilon), & \mu < \eta \quad \text{ise} \end{cases}$$

olup (W, p_b) kısmi $b-$metrik uzayında herhangi iki farklı nokta alınıp ve bu noktaların açık yuvarlarının kesişimine bakılırsa $W = \mathbb{R}^+$ kümesinde $\mu < \sigma$ olmak üzere μ noktası seçilirse bu noktaya göre açık yuvarı $(\mu, \mu + \varepsilon)$ kümesidir.

$W = \mathbb{R}^+$ kümesinde $\eta > \sigma$ olmak üzere η noktası seçilirse bu noktaya göre açık yuvarı $\mathbb{R}^+$ kümesidir.

Bu iki farklı noktanın açık yuvarlarının kesişimi $(\mu, \mu + \varepsilon) \cap \mathbb{R}^+ \neq \emptyset$ olduğundan burada tanımlanan (W, p_b) kısmi $b-$metrik uzay T_2 topolojisine sahip değildir.

Tanım 3.1.21. [118] (W, p_b) $s \geq 1$ sabitiyle kısmi $b-$metrik uzay, $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ W kümesinde bir dizi ve $\mu \in W$ olsun.

i) Eğer $\lim\limits_{n \to \infty} p_b(\mu_n, \mu) = p_b(\mu, \mu)$ ise $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisine μ noktasına yakınsaktır denir.

ii) Eğer $\lim\limits_{n,m \to \infty} p_b(\mu_n, \mu_m)$ limiti var ve sonlu ise $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisine Cauchy dizisi denir.

iii) Eğer W kümesindeki her Cauchy dizisi için

$$\lim_{n,m\to\infty} p_b(\mu_n,\mu_m)=\lim_{n\to\infty} p_b(\mu_n,\mu)=p_b(\mu,\mu)$$

olan $\mu\in W$ bulunuyorsa (W,p_b) uzayına tam kısmi $b-$metrik uzay denir.

Uyarı 3.1.22. [118] Kısmi $b-$metrik uzayda yakınsak bir dizinin limiti tek olmak zorunda değildir.

$W=\mathbb{R}^+$ olsun. $a>0$ bir sabit ve $p_b:W\times W\to\mathbb{R}^+$ fonksiyonu, $\forall\mu,\eta\in W$ için $p_b(\mu,\eta)=\max\{\mu,\eta\}+a$ ile tanımlansın. Bu durumda, (W,p_b) $s\geq 1$ sabiti ile kısmi $b-$metrik uzaydır. Bu uzayda $\forall n\in\mathbb{N}$ için, $\mu_n=1$ olarak tanımlanan $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}\in W$ dizisi verilsin. Eğer $\eta\geq 1$ ise, $\lim_{n\to\infty} p_b(\mu_n,\eta)=\eta+a=p_b(\eta,\eta)$ olur ki, $\eta\geq 1$ için her η değeri için farklı limit noktası çıkar.

Bir başka örnekle açıklanırsa:

$p_b:W\times W\to\mathbb{R}^+$ fonksiyonu $\forall\mu,\eta\in W$ için, $p_b(\mu,\eta)=\max\{\mu,\eta\}$ ile tanımlanırsa $(\mathbb{R}^+,p_b)$ ikilisi $s\geq 1$ sabiti ile kısmi $b-$metrik uzaydır. Bu uzayda $\left\{\frac{1}{n+1}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi ele alınsın.

$$\lim_{n\to\infty} p_b\left(1,\frac{1}{n+1}\right)=1=p_b(1,1),$$

$$\lim_{n\to\infty} p_b\left(2,\frac{1}{n+1}\right)=2=p_b(2,2)$$

ifadelerini sağlar. Burada görüldüğü gibi aynı dizinin birden fazla limit noktası vardır. İki örnekten de anlaşıldığı üzere kısmi $b-$metrik uzayda yakınsak dizinin limiti tek olmak zorunda değildir.

Uyarı 3.1.22. [118] (W,p_b) kısmi $b-$metrik uzay olsun.

1) Eğer $\lim_{n,m\to\infty} p_b(\mu_n,\mu_m)=0$ ise $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}\in W$ dizisine $0-$Cauchy dizisi denir.
2) Eğer W kümesindeki herhangi $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ $0-$Cauchy dizisi için,
   $\lim_{n,m\to\infty} p_b(\mu_n,\mu_m)=\lim_{n\to\infty} p_b(\mu_n,\mu)=p_b(\mu,\mu)=0$
   ifadesi sağlanırsa (W,p_b) uzayına $0-$tamdır denir.

Kısmi $b-$metrik uzayın tamlığı ve 0-tamlığı arasındaki ilişki aşağıda verilmiştir.

Önerme 3.1.23. [118] (W, p_b) kısmi $b-$metrik uzay olsun. Eğer (W, p_b) tam ise 0-tamdır.

İspat : $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, (W, p_b) uzayında $0-$Cauchy dizisi olsun. Bu durumda $\lim\limits_{n,m\to\infty} p_b(\mu_n, \mu_m) = 0$ 'dır. Bu, (W, p_b) uzayında $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin Cauchy dizisi olduğunu ispatlar. (W, p_b) tam olduğundan,

$$\lim_{n,m\to\infty} p_b(\mu_n, \mu_m) = \lim_{n\to\infty} p_b(\mu_n, \mu) = p_b(\mu, \mu)$$

olan $\mu \in W$ vardır. $\lim\limits_{n,m\to\infty} p_b(\mu_n, \mu_m) = 0$ olduğundan

$$\lim_{n,m\to\infty} p_b(\mu_n, \mu_m) = \lim_{n\to\infty} p_b(\mu_n, \mu) = p_b(\mu, \mu) = 0$$

olur ki, bu da (W, p_b) uzayının $0-$tam olduğunu ispatlar.

Önerme 3.1.24. $s \geq 1$ sabiti ile (W, p_b) kısmi $b-$metrik uzay olsun. $\forall \mu, \eta \in W$ için,

$$d_b(\mu,\eta) = \begin{cases} 0, & \mu = \eta \quad \text{ise} \\ p_b(\mu,\eta), & \mu \neq \eta \quad \text{ise} \end{cases}$$

olsun.

1) d_b, $s \geq 1$ katsayısıyla W üzerinde $b-$metriktir.
2) (W, d_b) uzayında $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n = \mu$ ise, (W, p_b) uzayında $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n = \mu$ 'dır.
3) (W, p_b) uzayı 0-tamdır $\Leftrightarrow$ (W, d_b) uzayı tamdır.

İspat :

1)

$(b1)$ $\Rightarrow)$ $\mu = \eta$ olsun. d_b fonksiyonunun tanımı gereği $d_b(\mu,\eta) = 0$ 'dır.

$\Leftarrow)$ $d_b(\mu,\eta) = 0$ olsun. d_b fonksiyonunun tanımı gereği $\mu = \eta$ 'dır.

$(b2)$ p_b kısmi $b-$metrik olduğundan $p_b(\mu,\eta) = p_b(\eta,\mu)$ 'dır. Bu kullanılırsa,

$$d_b(\mu,\eta) = \begin{cases} 0, & \mu = \eta \quad \text{ise} \\ p_b(\mu,\eta), & \mu \neq \eta \quad \text{ise} \end{cases} = \begin{cases} 0, & \mu = \eta \quad \text{ise} \\ p_b(\eta,\mu), & \mu \neq \eta \quad \text{ise} \end{cases} = d_b(\eta,\mu)$$

sağlanır.

$(b3)$ p_b kısmi $b-$metrik olduğundan üçgen eşitsizliği sağlanır.

i) $\mu \neq \eta \neq \sigma$ için

$$\begin{aligned} d_b(\mu,\eta) = p_b(\mu,\eta) &\leq s\left[p_b(\mu,\sigma)+p_b(\sigma,\eta)\right]-p_b(\sigma,\sigma) \\ &\leq s\left[d_b(\mu,\sigma)+d_b(\sigma,\eta)\right] \end{aligned}$$

sağlanır.

ii) $\mu=\eta$ veya $\eta=\sigma$ veya $\sigma=\mu$ ise,

$$d_b(\mu,\eta)=0\leq d_b(\mu,\sigma)+d_b(\sigma,\eta)\leq s\left[d_b(\mu,\sigma)+d_b(\sigma,\eta)\right]$$

$$d_b(\mu,\eta)=0+d_b(\mu,\eta)=d_b(\mu,\sigma)+d_b(\sigma,\eta)\leq s\left[d_b(\mu,\sigma)+d_b(\sigma,\eta)\right]$$

$$d_b(\mu,\eta)=d_b(\mu,\sigma)+0=d_b(\mu,\sigma)+d_b(\sigma,\eta)\leq s\left[d_b(\mu,\sigma)+d_b(\sigma,\eta)\right]$$

sağlanır. Böylece bütün şartlar sağlandığından d_b fonksiyonu s katsayısıyla $b-$metriktir.

2) Eğer $\forall n \geq n_0$ için $\mu_n=\mu$ olan n_0 bulunuyorsa, $\lim_{n\to\infty} p_b(\mu_n,\mu)=p_b(\mu,\mu)$ sağlanır. Bu (W,p_b) uzayında $\lim_{n\to\infty}\mu_n=\mu$ olduğunu ispatlar. $\forall n\in\mathbb{N}$ için, $\mu_n\neq\mu$ olsun. Bu durumda $d_b(\mu_n,\mu)=p_b(\mu_n,\mu)$ sağlanır. (W,d_b) uzayında $\lim_{n\to\infty}\mu_n=\mu$ olduğundan, $\lim_{n\to\infty} d_b(\mu_n,\mu)=d_b(\mu,\mu)=0$ 'dır. $0=\lim_{n\to\infty} d_b(\mu_n,\mu)=\lim_{n\to\infty} p_b(\mu_n,\mu)$ elde edilir. Kısmi $b-$metriğin özelliğinden $\forall n\in\mathbb{N}$ için $0\leq p_b(\mu,\mu)\leq p_b(\mu_n,\mu)$ olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} 0 \leq \lim_{n\to\infty} p_b(\mu,\mu)\leq \lim_{n\to\infty} p_b(\mu_n,\mu)$$

olur ki buradan,

$$0\leq \lim_{n\to\infty} p_b(\mu,\mu)\leq 0 \Rightarrow p_b(\mu,\mu)=0$$

elde edilir. Böylece, $\lim_{n\to\infty} p_b(\mu_n,\mu)=p_b(\mu,\mu)$ olacağından, (W,p_b) uzayında $\lim_{n\to\infty}\mu_n=\mu$ elde edilir.

3)$\Rightarrow$) (W,d_b) uzayında $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ bir Cauchy dizisi olsun. Bu durumda $\lim\limits_{n,m\to\infty} d_b(\mu_n,\mu_m)=0$ 'dır. Eğer $\forall n\geq n_0$ için $\mu_n=\mu$ olan n_0 varsa (W,d_b) uzayında $\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n=\mu$ bulunur. $\forall n\neq m$ için $\mu_n\neq\mu_m$ olsun. Buradan

$$\lim_{n,m\to\infty} d_b(\mu_n,\mu_m)=\lim_{n,m\to\infty} p_b(\mu_n,\mu_m)=0$$

olur. O zaman, $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi (W,p_b) uzayında 0-Cauchy dizisidir. (W,p_b) 0-tam olduğundan,

$$\lim_{n,m\to\infty} p_b(\mu_n,\mu_m)=\lim_{n\to\infty} p_b(\mu_n,\mu)=p_b(\mu,\mu)=0$$

olan $\mu\in W$ vardır. $\forall n\in\mathbb{N}$ için $0\leq d_b(\mu_n,\mu)\leq p_b(\mu_n,\mu)$ olduğundan,

$$0\leq\lim_{n\to\infty} d_b(\mu_n,\mu)\leq\lim_{n\to\infty} p_b(\mu_n,\mu)=0\Rightarrow\lim_{n\to\infty} d_b(\mu_n,\mu)=0$$

dır. Bu da (W,d_b) uzayında $\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n=\mu$ olduğunu ispatlar. Böylece (W,d_b) uzayında herhangi Cauchy dizisi uzayda bir noktaya yakınsadığından tamdır.

$\Leftarrow$) (W,p_b) uzayında $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ bir 0-Cauchy dizisi olsun. Bu durumda, $\lim\limits_{n,m\to\infty} p_b(\mu_n,\mu_m)=0$ 'dır. $\forall n,m\in\mathbb{N}$ için

$$0\leq\lim_{n,m\to\infty} d_b(\mu_n,\mu_m)\leq\lim_{n,m\to\infty} p_b(\mu_n,\mu_m)=0\Rightarrow\lim_{n,m\to\infty} d_b(\mu_n,\mu_m)=0$$

olur. Bu da $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin (W,d_b) uzayında bir Cauchy dizisi olduğunu ispatlar. (W,d_b) tam olduğundan $\lim\limits_{n\to\infty} d_b(\mu_n,\mu)=0$ $\mu\in W$ vardır. Eğer $\forall n\geq n_0$ için, $\mu_n=\mu$ olan n_0 bulunuyorsa $\lim\limits_{n,m\to\infty} p_b(\mu_n,\mu_m)=\lim\limits_{n\to\infty} p_b(\mu_n,\mu)=p_b(\mu,\mu)$ sağlanır. $\lim\limits_{n,m\to\infty} p_b(\mu_n,\mu_m)=0$ olduğundan $\lim\limits_{n,m\to\infty} p_b(\mu_n,\mu_m)=\lim\limits_{n\to\infty} p_b(\mu_n,\mu)=p_b(\mu,\mu)=0$ olduğu elde edilir. $\forall n,m\in\mathbb{N}$ için $\mu_n\neq\mu_m$ olsun. Bu durumda

$$\lim_{n\to\infty} d_b(\mu_n,\mu)=\lim_{n\to\infty} p_b(\mu_n,\mu)=0$$

dır.

$\forall n\in\mathbb{N}$ için $0\leq p_b(\mu,\mu)\leq p_b(\mu_n,\mu)$ sağlanır. Dolayısıyla,

$$0 \le \lim_{n\to\infty} p_b(\mu,\mu) \le \lim_{n\to\infty} p_b(\mu_n,\mu) \Rightarrow 0 \le \lim_{n\to\infty} p_b(\mu,\mu) \le 0$$

olur ki buradan $\lim_{n\to\infty} p_b(\mu,\mu)=0$ olduğu görülür. Bu nedenle

$$\lim_{n,m\to\infty} p_b(\mu_n,\mu_m) = \lim_{n\to\infty} p_b(\mu_n,\mu) = p_b(\mu,\mu) = 0$$

elde edilir. Bu ise (W,p_b) ikilisinin 0-tam olduğunu gösterir.

Tanım 3.1.25. [119] (W,p_{b_1}) ve (Q,p_{b_2}) iki kısmi $b-$metrik uzay olsun. $T:W\to Q$ herhangi bir fonksiyon verilsin. $\mu_0 \in W$ olmak üzere $\forall \varepsilon > 0$ için

$$p_{b_1}(\mu,\mu_0) < \delta \Rightarrow p_{b_2}(T\mu,T\mu_0) < \varepsilon$$

koşulunu sağlayan bir $\delta > 0$ sayısı varsa T fonksiyonu $\mu_0 \in W$ noktasında süreklidir denir. T fonksiyonu W üzerindeki her noktada sürekli ise T fonksiyonuna W üzerinde süreklidir denir.

Uyarı 3.1.26. [119] Herhangi bir $b-$metrik fonksiyonu her zaman sürekli olmadığından kısmi $b-$metrik fonksiyonu da her zaman her sürekli olmayabilir.

$W=\{1,2,3,4\}$ kümesi üzerinde

$$p_b(\mu,\eta) = \begin{cases} |\mu-\eta|^2 + \max\{\mu,\eta\}, & \mu \ne \eta \quad \text{ise} \\ \mu, & \mu=\eta\ne 1 \quad \text{ise} \\ 0, & \mu=\eta\ne 1 \quad \text{ise} \end{cases}$$

ile tanımlanan $p_b : W\times W \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu $s=4$ sabitiyle kısmi $b-$metrik, (W,p_b) ikilisi kısmi $b-$metrik uzaydır.

$(\mu_n)=1$ sabit dizisi için $\lim_{n\to\infty}\mu_n = 1$'dır.

$$p_b(\mu_n,1) = |1-1|^2 + \max\{1,1\},$$

$$\lim_{n\to\infty} p_b(\mu_n,1) = \lim_{n\to\infty} |1-1|^2 + \max\{1,1\} = 1$$

elde edilir. Kısmi $b-$metrik uzayda dizisel süreklilik tanımı gereği

$$\mu_n \to \mu \Rightarrow p_b(\mu_n,a) \to p_b(\mu,a) \quad (n\to\infty)$$

olur. $a=1$ alınırsa $p_b(1,1)=0$ olup $p_b(\mu_n,1)\to 1\neq 0 \quad (n\to\infty)$ olduğundan kısmi $b-$metrik fonksiyonu sürekli değildir.

Örnek 3.1.27. $[119]$ $W=\mathbb{N}\cup\{\infty\}$ olsun. $p_b : W\times W\to\mathbb{R}^+$ fonksiyonu

$$p_b(k,l)=\begin{cases} 0, & k=l \quad \text{ise} \\ \left|\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{l}\right|, & k \text{ ve } l\text{'den biri tek ve diğerleri tek veya } k\cdot l=\infty \quad \text{ise} \\ 5, & k \text{ ve } l\text{'den biri çift ve diğerleri çift } k\neq l \text{ veya } \infty \quad \text{ise} \\ 2, & \text{diğer} \quad \text{ise} \end{cases}$$

olarak tanımlansın. (W,p_b) ikilisi $s=3$ ile kısmi $b-$metrik uzaydır. $n\in\mathbb{N}$ olmak üzere $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}=\{2n+3\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi verilsin. Bu durumda $\mu_n\to\infty$ ve $p_b(2n+3)=\dfrac{1}{2n+3}\to 0\ (n\to\infty)$ sağlanır. Fakat $\lim\limits_{n\to\infty} p_b(\mu_n,4)=2\neq 5=p_b(\infty,4)$ dır.

Dolayısıyla kısmi $b-$metrik fonksiyonu sürekli değildir.

Önerme 3.1.28. $[119]$ (W,p_b) bir kısmi $b-$metrik uzay ve $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi μ noktasına, $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi η noktasına yakınsak olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\begin{aligned}\frac{1}{s^2}p_b(\mu,\eta)-\frac{1}{s}p_b(\mu,\mu)-p_b(\eta,\eta) &\leq \liminf_{n\to\infty} p_b(\mu_n,\eta_n) \\ &\leq \limsup_{n\to\infty} p_b(\mu_n,\eta_n) \\ &\leq sp_b(\mu,\mu)+s^2p_b(\eta,\eta)+s^2p_b(\mu,\eta)\end{aligned}$$

3.2. Kısmi $b-$Metrik Uzayda Sabit Nokta Teorisi

Bu bölümde $\alpha_i^j-(D_\varphi(\beta_E))$ daralma şartı tanımlanarak bu daralma şartını sağlayan sabit nokta teoremi ispatlanmıştır. Bunlara bağlı olarak bazı sonuçlar elde edilmiş ve yeni bazı daralma şartları verilmiştir.

Aksi belirtilmedikçe bu çalışma boyunca i ve j keyfi pozitif tamsayılar olarak ele alınacaktır.

Tanım 3.2.1. $s \geq 1$ katsayısı ile (W, p_b) bir kısmi $b-$metrik uzay ve $\alpha_i^j : W^2 \to [0,\infty)$ bir fonksiyon olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan $T, S : W \to W$ dönüşümlerine $\mu \in W$ ve $f \geq 2$ için $\alpha_i^j -$yörüngesel geçişli (orbital admissible) dönüşüm denir:

$$\alpha_i^j\left(\mu, T^i\mu\right) \geq s^f \Rightarrow \alpha_i^j\left(T^i\mu, S^jT^i\mu\right) \geq s^f$$

ve

$$\alpha_i^j\left(\mu, S^j\mu\right) \geq s^f \Rightarrow \alpha_i^j\left(S^j\mu, T^iS^j\mu\right) \geq s^f$$

dir.

Tanım 3.2.2. $s \geq 1$ katsayısı ile (W, p_b) bir kısmi $b-$metrik uzay ve $\alpha_i^j : W^2 \to [0,\infty)$ bir fonksiyon olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan $T, S : W \to W$ dönüşüm çiftine $\mu \in W$ ve $f \geq 2$ için üçgensel (triangular) $\alpha_i^j -$yörüngesel geçişli dönüşümü adı verilir:

i) T, S $\alpha_i^j -$geçişli dönüşümdür.

ii) $f \geq 2$ sabiti ile $\alpha_i^j(\mu,\eta) \geq s^f, \alpha_i^j\left(\eta, T^i\eta\right) \geq s^f$ ve $\alpha_i^j\left(\eta, S^j\eta\right) \geq s^f$ sağlanır öyle ki $\alpha_i^j\left(\mu, T^i\eta\right) \geq s^f$ ve $\alpha_i^j\left(\mu, S^j\eta\right) \geq s^f$ 'dır.

Önerme 3.2.3. $s \geq 1$ katsayısı ile (W, p_b) bir kısmi $b-$metrik uzay ve $T, S : W \to W$ iki dönüşüm olsun. (T, S) dönüşüm çifti üçgensel $\alpha_i^j -$yörüngesel geçişli dönüşümdür. $\alpha_i^j\left(\mu_0, T^i\mu_0\right) \geq s^f$ olacak şekilde $\mu_0 \in W$ olsun. (W, p_b) uzayında

$$\mu_{2n} = S^j\mu_{2n-1},\ \mu_{2n+1} = T^i\mu_{2n} \quad ,\ n = 0,1,2,\ldots$$

olarak tanımlanan bir $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi için $m > n$ ve $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ iken $\alpha_i^j(\mu_n, \mu_m) \geq s^f$ sağlanır.

Tanım 3.2.4. $s \geq 1$ katsayısı ile (W, p_b) kısmi $b-$metrik uzay ve $\alpha_i^j : W^2 \to [0,\infty)$ bir simetrik fonksiyon olsun. Eğer aşağıdaki şartı sağlayan $D \in \Delta$, φ kıyaslama fonksiyon ve $\beta \in \Phi_s$ fonksiyonları varsa $T, S : W \to W$ dönüşümlerine $\alpha_i^j - \left(D_\varphi\left(\beta_E\right)\right)$ daralma dönüşümü denir: $f \geq 2$ sabiti, $\forall \mu, \eta \in W$, $\alpha_i^j(\mu,\eta) \geq s^f$ ve $p_b\left(T^i\mu, S^j\eta\right) > 0$ için

$$E_{S,T}(\mu,\eta) = p_b(\mu,\eta) + \left| p_b\left(\mu, T^i\mu\right) - p_b\left(\eta, S^j\eta\right) \right|$$

iken

$$D\left(\alpha_i^j(\mu,\eta)\,p_b\left(T^i\mu,S^j\eta\right)\right)\leq\varphi\left(D\left(\beta\left(E_{S,T}(\mu,\eta)\right)E_{S,T}(\mu,\eta)\right)\right) \tag{3.2}$$

sağlanır.

Teorem 3.2.5. (W,p_b) tam kısmi $b-$metrik uzay ve $\alpha_i^j:W\times W\to[0,\infty)$ bir simetrik fonksiyon olsun. $T,S:W\to W$ dönüşümleri aşağıdaki şartları sağlasın:

1) T, S dönüşümleri $\alpha_i^j-\left(D_\varphi\left(\beta_E\right)\right)$ daralma dönüşümüdür,

2) (T,S) çifti üçgensel α_i^j-yörüngesel geçişli dönüşüm çiftidir,

3) $\alpha_i^j\left(\mu_0,T^i\mu_0\right)\geq s^f$ olan $\mu_0\in W$ vardır,

4)

i) T^i ve S^j süreklidir.

veya

ii) Eğer her $n\in\mathbb{N}$ için $\alpha_i^j\left(\mu_n,\mu_{n+1}\right)\geq s^f$ ve $\mu_n\to\sigma$ $(n\to\infty)$ olacak şekilde W uzayında $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi varsa her $k\in\mathbb{N}$ için $\alpha_i^j\left(\mu_{n_k},\sigma\right)\geq s^f$ olacak şekilde $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin $\{\mu_{n_k}\}$ alt dizisi vardır.

5) $F\left(T^i\right)$, T^i dönüşümünün sabit noktalarının kümesi olmak üzere, her $\sigma,w\in F\left(T^i\cap S^j\right)$ için $\alpha_i^j(\sigma,w)\geq s^f$'dır.

Bu durumda T^i ve S^j dönüşümlerinin tek ortak sabit noktası vardır. Dolayısıyla T ve S dönüşümleri tek ortak sabit noktaya sahiptir.

İspat : $\mu_0\in W$ keyfi bir nokta ve $\alpha_i^j\left(\mu_0,T^ix_0\right)\geq s^f$ olsun. W uzayında $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ iterasyon dizisi

$$n\geq 0 \text{ için } \mu_{2n+2}=T^i\mu_{2n+1} \text{ ve } \mu_{2n+1}=S^j\mu_{2n}$$

olarak tanımlansın. $\mu_{n_0}=\mu_{n_0+1}$ olacak şekilde $n_0\in\mathbb{N}^+$ pozitif tam sayısı var olsun. Bu dizinin yerine alt dizilerini incelemek yeterli olacaktır. O halde, $\mu_{2n_0}=\mu_{2n_0+1}$ olsun. Bu durumda μ_{2n_0} noktası T ve S dönüşümlerinin sabit noktasıdır. Aslında,

$\mu_{2n_0} = \mu_{2n_0+1} = S^j \mu_{2n_0}$ sağlanır. Bu nedenle μ_{2n_0}, S^j dönüşümünün sabit noktasıdır. $p_b\left(\mu_{2n_0+2}, \mu_{2n_0+1}\right) > 0$ ve $T^i \mu_{2n_0+1} \neq S^j \mu_{2n_0}$ olsun. Önerme (3.2.2) gereği $\alpha_i^j\left(\mu_{2n_0}, \mu_{2n_0+1}\right) = \alpha_i^j\left(\mu_{2n_0+1}, \mu_{2n_0}\right) \geq s^f$ sağlanır. (3.2) daralma şartından

$$\begin{aligned} E_{S,T}\left(\mu_{2n_0+1}, \mu_{2n_0}\right) &= p_b\left(\mu_{2n_0+1}, \mu_{2n_0}\right) + \left| p_b\left(\mu_{2n_0+1}, T^i \mu_{2n_0+1}\right) - p_b\left(\mu_{2n_0}, S^j \mu_{2n_0}\right) \right| \\ &= p_b\left(\mu_{2n_0+1}, \mu_{2n_0+1}\right) + \left| p_b\left(\mu_{2n_0+1}, \mu_{2n_0+2}\right) - p_b\left(\mu_{2n_0+1}, \mu_{2n_0+1}\right) \right| \\ &= p_b\left(\mu_{2n_0+1}, \mu_{2n_0+1}\right) + p_b\left(\mu_{2n_0+1}, \mu_{2n_0+2}\right) - p_b\left(\mu_{2n_0+1}, \mu_{2n_0+1}\right) \\ &= p_b\left(\mu_{2n_0+1}, \mu_{2n_0+2}\right) \end{aligned}$$

iken

$$\begin{aligned} D\left(p_b\left(T^i \mu_{2n_0+1}, S^j \mu_{2n_0}\right)\right) &\leq D\left(\alpha_i^j\left(\mu_{2n_0+1}, \mu_{2n_0}\right) p_b\left(T^i \mu_{2n_0+1}, S^j \mu_{2n_0}\right)\right) \\ &\leq \varphi\left(D\left(\beta\left(E_{S,T}\left(\mu_{2n_0+1}, \mu_{2n_0}\right)\right) E_{S,T}\left(\mu_{2n_0+1}, \mu_{2n_0}\right)\right)\right) \\ &< \varphi\left(D\left(\frac{1}{s} E_{S,T}\left(\mu_{2n_0+1}, \mu_{2n_0}\right)\right)\right) \end{aligned}$$

sağlanır. Buradan

$$D\left(p_b\left(\mu_{2n_0+2}, \mu_{2n_0+1}\right)\right) = D\left(p_b\left(T^i \mu_{2n_0+1}, S^j \mu_{2n_0}\right)\right) < \varphi\left(D\left(\frac{1}{s} p_b\left(\mu_{2n_0+1}, \mu_{2n_0+2}\right)\right)\right)$$

elde edilir ki bu çelişkidir, dolayısıyla $p_b\left(\mu_{2n_0+2}, \mu_{2n_0+1}\right) = 0$ elde edilir. $\left(p_b 2\right)$ özelliğinden $p_b\left(\mu_{2n_0+2}, \mu_{2n_0+2}\right) = p_b\left(\mu_{2n_0+1}, \mu_{2n_0+1}\right) = 0$ bulunur.

$$p_b\left(\mu_{2n_0+2}, \mu_{2n_0+2}\right) = p_b\left(\mu_{2n_0+1}, \mu_{2n_0+1}\right) = p_b\left(\mu_{2n_0+2}, \mu_{2n_0+1}\right)$$

olur. Buradan ise $\left(p_b 1\right)$ özelliği ile $\mu_{2n_0+2} = \mu_{2n_0+1}$ olur. Yani, $T^i \mu_{2n_0+1} = \mu_{2n_0+1}$'dır. Bu nedenle, μ_{2n_0+1} noktası T^i dönüşümünün sabit noktasıdır. Bu durumda, $\mu_{2n_0} = \mu_{2n_0+1}$, T^i ve S^j dönüşümlerinin ortak sabit noktasıdır. Bazı n_0 pozitif tam sayıları için $\mu_{2n_0} = \mu_{2n_0-1}$ alt dizisi için de benzer sonuç bulunur.

$\forall n \in \mathbb{N}$ için $\mu_n = \mu_{n+1}$ olsun. Aşağıdaki durumlar sağlanır.

1.Durum:

$\forall n \in \mathbb{N}$ için $\mu_{2n} \neq \mu_{2n-1}$ olsun. Bu durumda $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$p_b\left(T^i\mu_{2n-1}, S^j\mu_{2n}\right) > 0$ ve $\alpha_i^j\left(\mu_{2n-1}, \mu_{2n}\right) \geq s^f$ olup (3.2) daralma şartından

$$\begin{aligned} E_{S,T}\left(\mu_{2n-1}, \mu_{2n}\right) &= p_b\left(\mu_{2n-1}, \mu_{2n}\right) + \left| p_b\left(\mu_{2n-1}, T^i\mu_{2n-1}\right) - p_b\left(\mu_{2n}, S^j\mu_{2n}\right) \right| \\ &= p_b\left(\mu_{2n-1}, \mu_{2n}\right) + \left| p_b\left(\mu_{2n-1}, \mu_{2n}\right) - p_b\left(\mu_{2n}, \mu_{2n+1}\right) \right| \end{aligned}$$

iken

$$\begin{aligned} D\Big(p_b\left(\mu_{2n}, \mu_{2n+1}\right)\Big) &= D\Big(p_b\left(T^i\mu_{2n-1}, S^j\mu_{2n}\right)\Big) \\ &\leq D\Big(\alpha_i^j\left(\mu_{2n-1}, \mu_{2n}\right) p_b\left(T^i\mu_{2n-1}, S^j\mu_{2n}\right)\Big) \\ &\leq \varphi\Big(D\Big(\beta\left(E_{S,T}\left(\mu_{2n-1}, \mu_{2n}\right)\right) E_{S,T}\left(\mu_{2n-1}, \mu_{2n}\right)\Big)\Big) \\ &< \varphi\left(D\left(\frac{1}{s} E_{S,T}\left(\mu_{2n-1}, \mu_{2n}\right)\right)\right) \end{aligned} \tag{3.3}$$

bulunur.

$p_b\left(\mu_{2n}, \mu_{2n+1}\right) \geq p_b\left(\mu_{2n-1}, \mu_{2n}\right)$ olsun. Böylece,

$$E_{S,T}\left(\mu_{2n-1}, \mu_{2n}\right) = p_b\left(\mu_{2n-1}, \mu_{2n}\right) - p_b\left(\mu_{2n-1}, \mu_{2n}\right) + p_b\left(\mu_{2n}, \mu_{2n+1}\right)$$

olup,

$$\begin{aligned} D\Big(p_b\left(\mu_{2n}, \mu_{2n+1}\right)\Big) &< \varphi\left(D\left(\frac{1}{s} p_b\left(\mu_{2n}, \mu_{2n+1}\right)\right)\right) \\ &< D\left(\frac{1}{s} p_b\left(\mu_{2n}, \mu_{2n+1}\right)\right) \end{aligned}$$

elde edilir ki bu bir çelişkidir. Dolayısıyla, $p_b\left(\mu_{2n}, \mu_{2n+1}\right) < p_b\left(\mu_{2n-1}, \mu_{2n}\right)$ sağlanır.

2.Durum:

$\forall n \in \mathbb{N}$ için $\mu_{2n} \neq \mu_{2n+1}$ olsun. Bu durumda $\forall n \in \mathbb{N}$ için, $p_b\left(T^i\mu_{2n}, S^j\mu_{2n-1}\right) > 0$ ve $\alpha_i^j\left(\mu_{2n}, \mu_{2n+1}\right) \geq s^f$ olduğundan (3.2) daralma şartından

$$\begin{aligned} E_{S,T}\left(\mu_{2n}, \mu_{2n+1}\right) &= p_b\left(\mu_{2n}, \mu_{2n+1}\right) + \left| p_b\left(\mu_{2n}, T^i\mu_{2n}\right) - p_b\left(\mu_{2n+1}, S^j\mu_{2n+1}\right) \right| \\ &= p_b\left(\mu_{2n}, \mu_{2n}\right) + \left| p_b\left(\mu_{2n}, \mu_{2n+1}\right) - p_b\left(\mu_{2n+1}, \mu_{2n+2}\right) \right| \end{aligned}$$

iken

$$
\begin{aligned}
D\left(p_b\left(\mu_{2n+1},\mu_{2n+2}\right)\right) &= D\left(p_b\left(T^i\mu_{2n},S^j\mu_{2n+1}\right)\right)\\
&\le D\left(\alpha_i^j\left(\mu_{2n},\mu_{2n+1}\right)p_b\left(T^i\mu_{2n},S^j\mu_{2n+1}\right)\right)\\
&\le \varphi\left(D\left(\beta\left(E_{S,T}\left(\mu_{2n},\mu_{2n+1}\right)\right)E_{S,T}\left(\mu_{2n},\mu_{2n+1}\right)\right)\right)\\
&< \varphi\left(D\left(\frac{1}{s}E_{S,T}\left(\mu_{2n},\mu_{2n+1}\right)\right)\right)
\end{aligned}
$$

bulunur.

Eğer $p_b\left(\mu_{2n+1},\mu_{2n+2}\right)\ge p_b\left(\mu_{2n},\mu_{2n+1}\right)$ ise

$$
E_{S,T}\left(\mu_{2n},\mu_{2n+1}\right)=p_b\left(\mu_{2n},\mu_{2n+1}\right)-p_b\left(\mu_{2n},\mu_{2n+1}\right)+p_b\left(\mu_{2n+1},\mu_{2n+2}\right)
$$

olmak üzere

$$
\begin{aligned}
D\left(p_b\left(\mu_{2n+1},\mu_{2n+2}\right)\right) &< \varphi\left(D\left(\frac{1}{s}p_b\left(\mu_{2n+1},\mu_{2n+2}\right)\right)\right)\\
&< D\left(\frac{1}{s}p_b\left(\mu_{2n+1},\mu_{2n+2}\right)\right)
\end{aligned}
$$

bulunur. Fakat bu bir çelişkidir. Bu yüzden $p_b\left(\mu_{2n+1},\mu_{2n+2}\right)< p_b\left(\mu_{2n},\mu_{2n+1}\right)$ olmalıdır.

Her iki durumdan da anlaşılacağı üzere $\left\{p_b\left(\mu_n,\mu_{n+1}\right)\right\}$ negatif olmayan reel sayıların artmayan bir dizisidir. Bu durumda, $\lim\limits_{n\to\infty}p_b\left(\mu_n,\mu_{n+1}\right)=L$ olan $L\ge 0$ sayısı vardır. $L>0$ olsun. (3.3) ile verilen eşitsizliğin her iki tarafında $n\to\infty$ için limit alınsın. D ve φ fonksiyonları sürekli olduğundan

$$
\begin{aligned}
E_{S,T}\left(\mu_{2n-1},\mu_{2n}\right) &= p_b\left(\mu_{2n-1},\mu_{2n}\right)+\left|p_b\left(\mu_{2n-1},T^i\mu_{2n-1}\right)-p_b\left(\mu_{2n},S^j\mu_{2n}\right)\right|\\
&= p_b\left(\mu_{2n-1},\mu_{2n}\right)+\left|p_b\left(\mu_{2n-1},\mu_{2n}\right)-p_b\left(\mu_{2n},\mu_{2n+1}\right)\right|\\
&= 2p_b\left(\mu_{2n-1},\mu_{2n}\right)-p_b\left(\mu_{2n},\mu_{2n+1}\right)
\end{aligned}
$$

iken

$$
D\left(\lim_{n\to\infty}p_b\left(\mu_{2n},\mu_{2n+1}\right)\right)<\varphi\left(D\left(\frac{1}{s}\lim_{n\to\infty}E_{S,T}\left(\mu_{2n-1},\mu_{2n}\right)\right)\right),
$$

sağlanır.

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty} E_{S,T}\left(\mu_{2n-1},\mu_{2n}\right) &= \liminf_{n\to\infty}\left[2p_b\left(\mu_{2n-1},\mu_{2n}\right)-p_b\left(\mu_{2n},\mu_{2n+1}\right)\right]\\ &\leq \limsup_{n\to\infty}\left[2p_b\left(\mu_{2n-1},\mu_{2n}\right)-p_b\left(\mu_{2n},\mu_{2n+1}\right)\right]\\ &= L\end{aligned}$$

Yani,

$$D\left(\lim_{n\to\infty} p_b\left(\mu_{2n},\mu_{2n+1}\right)\right) < \varphi\left(D\left(\frac{1}{s}\limsup_{n\to\infty} E_{S,T}\left(\mu_{2n-1},\mu_{2n}\right)\right)\right)$$

$$D(L) < \varphi\left(D\left(\frac{1}{s}L\right)\right) < D\left(\frac{L}{s}\right)$$

elde edilir ki bu çelişkidir. Aynı durum $p_b\left(\mu_{2n},\mu_{2n-1}\right)$ için de geçerlidir. Bu nedenle,

$$\lim_{n\to\infty} p_b\left(\mu_n,\mu_{n+1}\right)=0 \tag{3.4}$$

bulunur. $\left(p_b 2\right)$ özelliğinden $p_b\left(\mu_n,\mu_n\right)\leq p_b\left(\mu_n,\mu_{n+1}\right)$ ve $p_b\left(\mu_{n+1},\mu_{n+1}\right)\leq p_b\left(\mu_n,\mu_{n+1}\right)$ olduğundan $\lim\limits_{n\to\infty} p_b\left(\mu_n,\mu_n\right)=\lim\limits_{n\to\infty} p_b\left(\mu_{n+1},\mu_{n+1}\right)=0$ olur. $n\to\infty$ için

$$d_{p_b}\left(\mu_n,\mu_{n+1}\right)=2.p_b\left(\mu_n,\mu_{n+1}\right)-p_b\left(\mu_n,\mu_n\right)-p_b\left(\mu_{n+1},\mu_{n+1}\right)$$

ifadesinde limit alınırsa

$$\begin{aligned}0\leq \lim_{n\to\infty} d_{p_b}\left(\mu_n,\mu_{n+1}\right) &= \lim_{n\to\infty}\left[2p_b\left(\mu_n,\mu_{n+1}\right)-p_b\left(\mu_n,\mu_n\right)-p_b\left(\mu_{n+1},\mu_{n+1}\right)\right]\\ &\leq \limsup_{n\to\infty}\left[2p_b\left(\mu_n,\mu_{n+1}\right)-p_b\left(\mu_n,\mu_n\right)-p_b\left(\mu_{n+1},\mu_{n+1}\right)\right]\\ &=0\end{aligned}$$

elde edilir. $\forall n\in\mathbb{N}$ için $\lim\limits_{n\to\infty} d_{p_b}\left(\mu_n,\mu_{n+1}\right)=0$ bulunur. Bu durumda $\forall n\in\mathbb{N}$ için $\lim\limits_{n\to\infty} d_{p_b}\left(\mu_{2n},\mu_{2n+1}\right)=0$ olur. (3.4) ile verilen eşitlik göz önüne alınırsa $\forall n,m\geq 1$ için

$$\lim_{n,m\to\infty} d_{p_b}\left(\mu_{2m},\mu_{2n}\right)=2\lim_{n,m\to\infty}\sup p_b\left(\mu_{2m},\mu_{2n}\right)$$

sağlanır. Şimdi $\left\{\mu_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin $\left(W,p_b\right)$ uzayında Cauchy dizisi olduğu gösterilsin. Bunun yerine $\left\{\mu_{2n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin Cauchy dizisi olduğunu göstermek yeterlidir. Önerme (3.1.24) gereği $\left\{\mu_{2n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin $\left(W,d_{p_b}\right)$ uzayında Cauchy dizisi olduğu gösterilsin.

Tersine, $\{\mu_{2n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi Cauchy dizisi olmasın. Bu durumda, $n(k)>m(k)>k$ olacak şekilde pozitif sayıların $\{\mu_{2m_k}\}$, $\{\mu_{2n_k}\}$ alt dizileri ve $\varepsilon>0$ sayısı vardır öyle ki

$$d_{p_b}\left(\mu_{2m_k},\mu_{2n_k}\right)\geq\varepsilon \tag{3.5}$$

sağlanır. Yani, $\forall k\in\mathbb{N}$ için

$$d_{p_b}\left(\mu_{2m_k},\mu_{2n_k-2}\right)<\varepsilon \tag{3.6}$$

dır. Burada $b-$metriğin üçgen eşitsizliği uygulanırsa;

$$\varepsilon\leq d_{p_b}\left(\mu_{2m_k},\mu_{2n_k}\right)\leq sd_{p_b}\left(\mu_{2m_k},\mu_{2m_k+1}\right)+sd_{p_b}\left(\mu_{2m_k+1},\mu_{2n_k}\right) \tag{3.7}$$

elde edilir. Eğer (3.7) ile verilen eşitsizlikte $k\to\infty$ için limit alınırsa,

$$\frac{\varepsilon}{s}\leq\liminf_{k\to\infty} d_{p_b}\left(\mu_{2m_k+1},\mu_{2n_k}\right)\leq\limsup_{k\to\infty} d_{p_b}\left(\mu_{2m_k+1},\mu_{2n_k}\right) \tag{3.8}$$

bulunur. Ayrıca $b-$metriğin üçgen eşitsizliği tekrar uygulanırsa

$$d_{p_b}\left(\mu_{2m_k},\mu_{2n_k-1}\right)\leq sd_{p_b}\left(\mu_{2m_k},\mu_{2n_k-2}\right)+sd_{p_b}\left(\mu_{2n_k-2},\mu_{2n_k-1}\right) \tag{3.9}$$

elde edilir. Buradan (3.9)'daki eşitsizlikte $k\to\infty$ için limit alınırsa

$$\limsup_{k\to\infty} d_{p_b}\left(\mu_{2m_k},\mu_{2n_k-1}\right)\leq s\varepsilon \tag{3.10}$$

olur. Dahası

$$\begin{aligned}d_{p_b}\left(\mu_{2m_k},\mu_{2n_k}\right)&\leq sd_{p_b}\left(\mu_{2m_k},\mu_{2n_k-2}\right)+sd_{p_b}\left(\mu_{2n_k-2},\mu_{2n_k}\right)\\&\leq sd_{p_b}\left(\mu_{2m_k},\mu_{2n_k-2}\right)+s^2d_{p_b}\left(\mu_{2n_k-2},\mu_{2n_k-1}\right)+s^2d_{p_b}\left(\mu_{2n_k-1},\mu_{2n_k}\right)\end{aligned} \tag{3.11}$$

sağlanır. Benzer şekilde (3.11) ile verilen eşitsizlikte $k\to\infty$ için limit alınırsa,

$$\limsup_{k\to\infty} d_{p_b}\left(\mu_{2m_k},\mu_{2n_k}\right)\leq s\cdot\varepsilon \tag{3.12}$$

elde edilir. $b-$metriğin üçgen eşitsizliğinden

$$d_{p_b}\left(\mu_{2m_k+1},\mu_{2n_k-1}\right)\leq sd_{p_b}\left(\mu_{2m_k+1},\mu_{2m_k}\right)+sd_{p_b}\left(\mu_{2m_k},\mu_{2n_k-1}\right) \tag{3.13}$$

yazılır ve (3.13) eşitsizliğinde $k\to\infty$ için limit alınırsa;

$$\limsup_{k\to\infty} d_{p_b}\left(\mu_{2m_k+1},\mu_{2n_k-1}\right)\leq s^2\varepsilon \tag{3.14}$$

elde edilir. (3.8), (3.10), (3.12) ve (3.14) eşitsizliklerinden

$$\frac{\varepsilon}{2s}\leq \liminf_{k\to\infty} p_b\left(\mu_{2m_k+1},\mu_{2n_k}\right)\leq \limsup_{k\to\infty} p_b\left(\mu_{2m_k+1},\mu_{2n_k}\right) \tag{3.15}$$

$$\limsup_{k\to\infty} p_b\left(\mu_{2m_k},\mu_{2n_k-1}\right)\leq \frac{s\varepsilon}{2} \tag{3.16}$$

$$\limsup_{k\to\infty} p_b\left(\mu_{2m_k},\mu_{2n_k}\right)\leq \frac{s\varepsilon}{2} \tag{3.17}$$

$$\limsup_{k\to\infty} p_b\left(\mu_{2m_k+1},\mu_{2n_k-1}\right)\leq \frac{s^2\varepsilon}{2} \tag{3.18}$$

elde edilmiş olur. Önerme (3.2.3) gereği $\alpha_i^j\left(\mu_{2m_k},\mu_{2n_k-1}\right)\geq s^f$ olup, (3.2) daralma şartı uygulanırsa,

$$\begin{aligned}E_{S,T}\left(\mu_{2m_k},\mu_{2n_k-1}\right)&=p_b\left(\mu_{2m_k},\mu_{2n_k-1}\right)+\left|p_b\left(\mu_{2m_k},T^i\mu_{2m_k}\right)-p_b\left(\mu_{2n_k-1},S^j\mu_{2n_k-1}\right)\right|\\&=p_b\left(\mu_{2m_k},\mu_{2n_k-1}\right)+\left|p_b\left(\mu_{2m_k},\mu_{2m_k+1}\right)-p_b\left(\mu_{2n_k-1},\mu_{2n_k}\right)\right|\end{aligned}$$

iken

$$\begin{aligned}D\Big(p_b\left(\mu_{2m_k+1},\mu_{2n_k}\right)\Big)&\leq D\Big(\alpha_i^j\left(\mu_{2m_k},\mu_{2n_k-1}\right)p_b\left(T^i\mu_{2m_k},S^j\mu_{2n_k-1}\right)\Big)\\&\leq\varphi\Big(D\Big(\beta\Big(E_{S,T}\left(\mu_{2m_k},\mu_{2n_k-1}\right)\Big)E_{S,T}\left(\mu_{2m_k},\mu_{2n_k-1}\right)\Big)\Big)\end{aligned}$$

olur. Burada $k\to\infty$ için limit alınırsa,

$$\begin{aligned}\liminf_{k\to\infty} E_{S,T}\left(\mu_{2m_k},\mu_{2n_k-1}\right) &= \liminf_{k\to\infty} p_b\left(\mu_{2m_k},\mu_{2n_k-1}\right)\\ &\leq \limsup_{k\to\infty} p_b\left(\mu_{2m_k},\mu_{2n_k-1}\right)\\ &= \limsup_{k\to\infty} E_{S,T}\left(\mu_{2m_k},\mu_{2n_k-1}\right)\\ &\leq \frac{s\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}D\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) &= D\left(s\frac{\varepsilon}{2s}\right)\\ &\leq D\left(s\liminf_{k\to\infty} p_b\left(\mu_{2m_k+1},\mu_{2n_k}\right)\right)\\ &\leq D\left(s^p\liminf_{k\to\infty} p_b\left(\mu_{2m_k+1},\mu_{2n_k}\right)\right)\\ &\leq D\left(\liminf_{k\to\infty} \alpha_i^j\left(\mu_{2m_k},\mu_{2n_k-1}\right)p_b\left(T^i\mu_{2m_k},S^j\mu_{2n_k-1}\right)\right)\\ &\leq \varphi\left(D\left(\liminf_{k\to\infty} \beta\left(E_{S,T}\left(\mu_{2m_k},\mu_{2n_k-1}\right)\right)E_{S,T}\left(\mu_{2m_k},\mu_{2n_k-1}\right)\right)\right)\\ &\leq D\left(\liminf_{k\to\infty} \frac{1}{s}\frac{s\varepsilon}{2}\right)\\ &= D\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\end{aligned} \tag{3.19}$$

elde edilir. Bununla birlikte

$$\begin{aligned}D\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) &\leq D\left(\alpha_i^j\left(\mu_{2m_k},\mu_{2n_k-1}\right)\limsup_{k\to\infty} p_b\left(T^i\mu_{2m_k},S^j\mu_{2n_k-1}\right)\right)\\ &\leq \limsup_{k\to\infty} D\left(\alpha_i^j\left(\mu_{2m_k},\mu_{2n_k-1}\right)p_b\left(T^i\mu_{2m_k},S^j\mu_{2n_k-1}\right)\right)\\ &\leq \limsup_{k\to\infty} \varphi\left(D\left(\beta\left(E_{S,T}\left(\mu_{2m_k},\mu_{2n_k-1}\right)\right)E_{S,T}\left(\mu_{2m_k},\mu_{2n_k-1}\right)\right)\right)\\ &= \varphi\left(D\left(\limsup_{k\to\infty} \beta\left(E_{S,T}\left(\mu_{2m_k},\mu_{2n_k-1}\right)\right)E_{S,T}\left(\mu_{2m_k},\mu_{2n_k-1}\right)\right)\right)\\ &< D\left(\limsup_{k\to\infty} \frac{1}{s}\frac{s\varepsilon}{2}\right)\\ &= D\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\end{aligned} \tag{3.20}$$

bulunur. Dolayısıyla, (3.19) ve (3.20) eşitsizliklerinden

$$\lim_{k\to\infty}\beta\left(E_{S,T}\left(\mu_{2m_k},\mu_{2n_k-1}\right)\right)E_{S,T}\left(\mu_{2m_k},\mu_{2n_k-1}\right)=\frac{\varepsilon}{2} \tag{3.21}$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}
D\left(\frac{s\varepsilon}{2}\right)&=D\left(s^2\frac{\varepsilon}{2s}\right)\\
&\le D\left(s^2\liminf_{k\to\infty} p_b\left(\mu_{2m_k+1},\mu_{2n_k}\right)\right)\\
&\le D\left(s^p\liminf_{k\to\infty} p_b\left(\mu_{2m_k+1},\mu_{2n_k}\right)\right)\\
&\le D\left(\liminf_{k\to\infty}\alpha_i^j\left(\mu_{2m_k},\mu_{2n_k-1}\right)p_b\left(T^i\mu_{2m_k},S^j\mu_{2n_k-1}\right)\right)\\
&\le \varphi\left(D\left(\liminf_{k\to\infty}\beta\left(E_{S,T}\left(\mu_{2m_k},\mu_{2n_k-1}\right)\right)E_{S,T}\left(\mu_{2m_k},\mu_{2n_k-1}\right)\right)\right)\\
&< D\left(\liminf_{k\to\infty}E_{S,T}\left(\mu_{2m_k},\mu_{2n_k-1}\right)\right)\\
&\le D\left(\frac{s\varepsilon}{2}\right)
\end{aligned} \tag{3.22}$$

ve

$$\begin{aligned}
D\left(\frac{s\varepsilon}{2}\right)&\le D\left(\alpha_{i,j}\left(\mu_{2m_k},\mu_{2n_k-1}\right)\limsup_{k\to\infty} p_b\left(T^i\mu_{2m_k},S^j\mu_{2n_k-1}\right)\right)\\
&\le \limsup_{k\to\infty}D\left(\alpha_i^j\left(\mu_{2m_k},\mu_{2n_k-1}\right)p_b\left(T^i\mu_{2m_k},S^j\mu_{2n_k-1}\right)\right)\\
&\le \limsup_{k\to\infty}\varphi\left(D\left(\beta\left(E_{S,T}\left(\mu_{2m_k},\mu_{2n_k-1}\right)\right)E_{S,T}\left(\mu_{2m_k},\mu_{2n_k-1}\right)\right)\right)\\
&= \varphi\left(D\left(\limsup_{k\to\infty}\beta\left(E_{S,T}\left(\mu_{2m_k},\mu_{2n_k-1}\right)\right)E_{S,T}\left(\mu_{2m_k},\mu_{2n_k-1}\right)\right)\right)\\
&< D\left(\limsup_{k\to\infty}E_{S,T}\left(\mu_{2m_k},\mu_{2n_k-1}\right)\right)\\
&\le D\left(\frac{s\varepsilon}{2}\right)
\end{aligned} \tag{3.23}$$

sağlanır. (3.22) ve (3.23) eşitsizliklerinden

$$\lim_{k\to\infty}E_{S,T}\left(\mu_{2m_k},\mu_{2n_k-1}\right)=\frac{s\varepsilon}{2} \tag{3.24}$$

eşitliği elde edilir. (3.21) ve (3.24) ifadelerinden de

$$\lim_{k\to\infty}\beta\Big(E_{S,T}\left(\mu_{2m_k},\mu_{2n_k-1}\right)\Big)=\frac{1}{s} \tag{3.25}$$

sonucuna ulaşılır ki, β fonksiyonunun özelliğinden,

$$\lim_{k\to\infty}E_{S,T}\left(\mu_{2m_k},\mu_{2n_k-1}\right)=0$$

sağlanır. Bu ise $\varepsilon>0$ kabulüyle çelişir. Dolayısıyla $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $\left(W,d_{p_b}\right)$ uzayında Cauchy dizisidir. $\left(W,d_{p_b}\right)$ tam $b-$metrik uzay olduğundan bu uzaydaki her Cauchy dizisi $\sigma\in W$ noktasına yakınsaktır. Buradan

$$\lim_{n\to\infty}d_{p_b}\left(\mu_n,\sigma\right)=0$$

yazılır. Önerme (3.1.24) gereği

$$p_b\left(\sigma,\sigma\right)=\lim_{n\to\infty}p_b\left(\mu_n,\sigma\right)=\lim_{n,m\to\infty}p_b\left(\mu_n,\mu_m\right)$$

olduğu biliniyor. Bu durumda, $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin $\sigma\in\left(W,p_b\right)$ noktasına yakınsak olduğu görülür. Ayrıca $b-$metriğin üçgen eşitsizliğinden aşağıdaki ifade bulunur:

$$d_{p_b}\left(\mu_n,\mu_m\right)\le s\cdot\left[d_{p_b}\left(\mu_n,\sigma\right)+d_{p_b}\left(\sigma,\mu_m\right)\right].$$

Bu eşitsizlikte $n,m\to\infty$ için limit alınırsa

$$0\le\lim_{n,m\to\infty}\sup d_{p_b}\left(\mu_n,\mu_m\right)\le\lim_{n,m\to\infty}\sup s\cdot\left[d_{p_b}\left(\mu_n,\sigma\right)+d_{p_b}\left(\sigma,\mu_m\right)\right],$$

$$\lim_{n,m\to\infty}d_{p_b}\left(\mu_n,\mu_m\right)=0$$

eşitliği elde edilir. $\lim_{n\to\infty}p_b\left(\mu_n,\mu_n\right)=0$ olduğu hatırlanır ve (3.1) ile verilen eşitlikte $n,m\to\infty$ için limit alınırsa

$$\lim_{n,m\to\infty}p_b\left(\mu_n,\mu_m\right)=0$$

elde edilir. Bu durumda,

$$p_b\left(\sigma,\sigma\right)=\lim_{n\to\infty}p_b\left(\mu_n,\sigma\right)=\lim_{n,m\to\infty}p_b\left(\mu_n,\mu_m\right)=0 \tag{3.26}$$

sağlanır. Teoremin 4.hipotezi gereği $\alpha_i^j\left(\mu_{2n_k},\sigma\right)\geq s^f$ olup, (3.2) daralma şartı uygulanırsa

$$\begin{aligned} E_{S,T}\left(\mu_{2n_k},\sigma\right) &= p_b\left(\mu_{2n_k},\sigma\right)+\left|p_b\left(\mu_{2n_k},T^i\mu_{2n_k}\right)-p_b\left(\sigma,S^j\sigma\right)\right| \\ &= p_b\left(\mu_{2n_k},\sigma\right)+\left|p_b\left(\mu_{2n_k},\mu_{2n_k+1}\right)-p_b\left(\sigma,S^j\sigma\right)\right| \end{aligned}$$

iken

$$\begin{aligned} D\left(p_b\left(\mu_{2n_k},S^j\sigma\right)\right) &\leq D\left(\alpha_i^j\left(\mu_{2n_k},\sigma\right)p_b\left(T^i\mu_{2n_k},S^j\sigma\right)\right) \\ &\leq \varphi\left(D\left(\beta\left(E_{S,T}\left(\mu_{2n_k},\sigma\right)\right)E_{S,T}\left(\mu_{2n_k},\sigma\right)\right)\right) \\ &< D\left(\beta\left(E_{S,T}\left(\mu_{2n_k},\sigma\right)\right)E_{S,T}\left(\mu_{2n_k},\sigma\right)\right) \\ &< D\left(\frac{1}{s}E_{S,T}\left(\mu_{2n_k},\sigma\right)\right) \end{aligned}$$

olur. Burada $k\to\infty$ için limit alınırsa

$$\limsup_{k\to\infty} E_{S,T}\left(\mu_{2n_k},\sigma\right)=p_b\left(\sigma,S^j\sigma\right) \tag{3.27}$$

bulunur ve dolayısıyla

$$D\left(\limsup_{k\to\infty} p_b\left(\mu_{2n_k+1},S^j\sigma\right)\right)<D\left(\frac{1}{s}p_b\left(\sigma,S^j\sigma\right)\right) \tag{3.28}$$

ifadesi elde edilir. Ayrıca,

$$\frac{1}{s}p_b\left(\sigma,S^j\sigma\right)\leq \limsup_{k\to\infty} p_b\left(\mu_{2n_k+1},S^j\sigma\right)$$

eşitsizliğinden ve D fonksiyonunun sürekliliğinden

$$D\left(\frac{1}{s}p_b\left(\sigma,S^j\sigma\right)\right)\leq D\left(\limsup_{k\to\infty} p_b\left(\mu_{2n_k+1},S^j\sigma\right)\right) \tag{3.29}$$

elde edilir. (3.28) ve (3.29) ifadelerinden

$$D\left(\frac{1}{s}p_b\left(\sigma,S^j\sigma\right)\right)\leq D\left(\limsup_{k\to\infty}p_b\left(\mu_{2n_k+1},S^j\sigma\right)\right)$$
$$\leq D\left(\lim_{k\to\infty}\beta\left(E_{S,T}\left(\mu_{2n_k},\sigma\right)\right)E_{S,T}\left(\mu_{2n_k},\sigma\right)\right)$$
$$\leq D\left(\frac{1}{s}p_b\left(\sigma,S^j\sigma\right)\right)$$

eşitsizliği bulunur. Buradan da

$$\lim_{k\to\infty}\beta\left(E_{S,T}\left(\mu_{2n_k},\sigma\right)\right)E_{S,T}\left(\mu_{2n_k},\sigma\right)=\frac{1}{s}p_b\left(\sigma,S^j\sigma\right) \tag{3.30}$$

olduğu görülür. (3.27) ve (3.30) ifadelerinden,

$$\lim_{k\to\infty}\beta\left(E_{S,T}\left(\mu_{2n_k},\sigma\right)\right)=\frac{1}{s} \tag{3.31}$$

bulunur. (3.31) ifadesi ve β fonksiyonunun özelliği düşünülürse,

$$\lim_{k\to\infty}E_{S,T}\left(\mu_{2n_k},\sigma\right)=0$$

olduğu görülür. Yani,

$$p_b\left(\sigma,S^j\sigma\right)=0$$

olduğu anlaşılır. $\left(p_b2\right)$ özelliğinden

$p_b\left(\sigma,\sigma\right)\leq p_b\left(\sigma,S^j\sigma\right)$ ve $p_b\left(S^j\sigma,S^j\sigma\right)\leq p_b\left(\sigma,S^j\sigma\right)$ olduğu bilindiğinden

$$p_b\left(\sigma,\sigma\right)=p_b\left(\sigma,S^j\sigma\right)=0$$

sonucuna varılır. Bu nedenle,

$$p_b\left(\sigma,\sigma\right)=p_b\left(\sigma,S^j\sigma\right)=p_b\left(S^j\sigma,S^j\sigma\right)$$

sağlanır. Kısmi $b-$metriğin $\left(p_b1\right)$ aksiyomundan $\sigma=S^j\sigma$ olduğu açıktır. Bu ise, σ noktasının S^j dönüşümünün de bir sabit noktası olduğunu gösterir. Aynı yöntemle $p_b\left(\sigma,T^i\sigma\right)=0$ olduğu da kolayca görülür. Bu durumda, σ noktası, T^i dönüşümünün de sabit noktasıdır. Bu nedenle, σ noktası S^j ve T^i dönüşümlerinin ortak sabit noktasıdır.

Şimdi, sabit noktanın tekliği gösterilsin. S^j dönüşümünün $S^j w = w \neq \sigma$ olacak şekilde başka bir $w \in W$ sabit noktası olsun. Teoremin 5. hipotezinden $\alpha_i^j(\sigma, w) \geq s^f$ olduğu biliniyor. (3.2) daralma şartından

$$\begin{aligned} E_{S,T}(\sigma, w) &= p_b(\sigma, w) + \left| p_b(\sigma, T^i\sigma) - p_b(w, S^j w) \right| \\ &= p_b(\sigma, w) + \left| p_b(\sigma, \sigma) - p_b(w, w) \right| \\ &= p_b(\sigma, w) \end{aligned}$$

iken

$$\begin{aligned} D\left(p_b(\sigma, w)\right) &\leq D\left(\alpha_i^j(\sigma, w)\, p_b(\sigma, w)\right) \\ &= D\left(\alpha_i^j(\sigma, w)\, p_b(T^i\sigma, S^j w)\right) \\ &\leq \varphi\left(D\left(\beta\left(E_{S,T}(\sigma, w)\right) E_{S,T}(\sigma, w)\right)\right), \\ &\leq \varphi\left(D\left(\frac{1}{s} E_{S,T}(\sigma, w)\right)\right) \\ &< D\left(\frac{1}{s} E_{S,T}(\sigma, w)\right) \end{aligned}$$

olup buradan

$$D\left(p_b(\sigma, w)\right) < D\left(\frac{1}{s} p_b(\sigma, w)\right)$$

elde edilir ancak bu bir çelişkidir. Bu nedenle, S^j dönüşümünün σ noktasından farklı bir sabit noktasının varlığının kabulü yanlıştır. Yani, σ noktası S^j dönüşümünün tek sabit noktasıdır. Benzer yöntemle, σ noktasının T^i dönüşümünün de tek sabit noktası olduğu görülür. Bu nedenle σ noktası S^j ve T^i dönüşümlerinin ortak sabit noktasıdır. Dolayısıyla σ noktası S ve T dönüşümlerinin ortak sabit noktasıdır. Bu ise istenen sonuçtur.

Örnek 3.2.6. $W = [0,1]$ kümesi ve

$$p_b(\mu, \eta) = (\mu - \eta)^2$$

olarak tanımlanan $p_b : W \times W \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu verilsin. Bu durumda (W, p_b) ikilisi $s = 2$ katsayısıyla tam kısmi $b-$metrik uzaydır. $\alpha_i^j : W^2 \to [0, \infty)$ fonksiyonu $f \geq 2$ ile

$$\alpha_i^j(\mu,\eta)=\begin{cases} s^f, & \mu,\eta\in[0,1] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlar}\end{cases}$$

olarak tanımlansın. $T,S:W\to W$ dönüşümleri $\mu\in W$ için

$$T\mu=\frac{\mu}{2},\ S\mu=\frac{\mu}{4}$$

olarak tanımlansın.

$\beta\in\Phi_s$ fonksiyonu $t>0$ için $\beta(t)=\frac{1}{32}$ olarak verilsin. (T,S) fonksiyon çifti üçgensel α_i^j-yörüngesel geçişli dönüşümdür.

$$\theta>0 \text{ iken } D(\theta)=\theta e^{\theta}$$

olarak tanımlanan $D:(0,\infty)\to(0,\infty)$ fonksiyonu için $D\in\Delta$ sağlanır. $\varphi:(0,\infty)\to(0,\infty)$ fonksiyonu her

$$r\in(0,\infty) \text{ için } \varphi(r)=\frac{r}{2}$$

olarak tanımlanmış olsun. φ sürekli kıyaslama fonksiyonudur. T ve S dönüşümlerinin $\alpha_i^j-\left(D_\varphi(\beta_E)\right)$ daralma dönüşümü olduğu gösterilsin. $f=2, i=4, j=2$ seçilirse, $\alpha_i^j(\mu,\eta)=4$ olup (3.2) daralma şartı uygulanırsa,

$$p_b\left(T^i\mu,S^j\eta\right)=p_b\left(\frac{\mu}{16},\frac{\eta}{16}\right)=\frac{1}{16^2}(\mu-\eta)^2$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} E_{S,T}(\mu,\eta)&=p_b(\mu,\eta)+\left|p_b\left(\mu,T^i\mu\right)-p_b\left(\eta,S^j\eta\right)\right| \\ &=(\mu-\eta)^2+\left|\left(\frac{15\mu}{16}\right)^2-\left(\frac{15\eta}{16}\right)^2\right| \end{aligned}$$

iken

$$D\left(\alpha_i^j(\mu,\eta)\,p_b\left(T^i\mu,S^j\eta\right)\right)=D\left(4\frac{1}{16^2}(\mu-\eta)^2\right)$$
$$=D\left(\frac{1}{64}(\mu-\eta)^2\right)$$
$$=\frac{1}{64}(\mu-\eta)^2\,e^{\frac{1}{64}(\mu-\eta)^2}$$

ve

$$\varphi\left(D\left(\beta\left(E_{S,T}(\mu,\eta)\right)E_{S,T}(\mu,\eta)\right)\right)=\varphi\left(D\left(\frac{1}{32}\left[(\mu-\eta)^2+\left|\left(\frac{15\mu}{16}\right)^2-\left(\frac{15\eta}{16}\right)^2\right|\right]\right)\right)$$
$$=\frac{1}{2}\frac{1}{32}\left[(\mu-\eta)^2+\left|\left(\frac{15\mu}{16}\right)^2-\left(\frac{15\eta}{16}\right)^2\right|\right]e^{\frac{1}{32}\left[(\mu-\eta)^2+\left|\left(\frac{15\mu}{16}\right)^2-\left(\frac{15\eta}{16}\right)^2\right|\right]}$$

olur. Bu nedenle, (3.2) sağlanır. Bu durumda, T ve S fonksiyonları (W,p_b) uzayında tek ortak sabit noktaya sahiptir. $F(T\cap S)=\{0\}$ dır.

Örnek 3.2.7. $W=[0,1]$ kümesi ve

$$p_b(\mu,\eta)=\left(\max\{\mu,\eta\}\right)^2$$

olarak tanımlanan $p_b:W\times W\to\mathbb{R}^+$ fonksiyonu verilsin. O zaman, $s=2$ katsayısı ile (W,p_b) tam kısmi $b-$metrik uzaydır. $\alpha_i^j:W^2\to[0,\infty)$ fonksiyonu $f\geq 2$ ile

$$\alpha_i^j(\mu,\eta)=\begin{cases} s^f, & \mu,\eta\in[0,1] \\ 0, & \text{diğer}\end{cases}$$

olarak verilsin. $T,S:W\to W$ dönüşümleri her $\mu\in W$ için

$$T\mu=\frac{\mu}{16},\ S\mu=\frac{\mu}{4}$$

olsun.

$\beta\in\Phi_s$ fonksiyonu $t>0$ için $\beta(t)=\frac{1}{256}$ olarak tanımlansın. (T,S) çifti üçgensel α_i^j-yörüngesel geçişli dönüşümdür. $\vartheta>0$ için

$$D(\vartheta)=\vartheta$$

olarak tanımlanan $D:(0,\infty)\to(0,\infty)$ fonksiyonu $D\in\Delta$'dır. $\varphi:(0,\infty)\to(0,\infty)$ fonksiyonu her $\sigma\in(0,\infty)$ için

$$\varphi(\sigma)=\frac{\sigma}{16}$$

olarak tanımlanmış olsun. O zaman φ sürekli kıyaslama fonksiyonudur. T, S dönüşümlerinin $\alpha_i^j-\left(D_\varphi\left(\beta_E\right)\right)$ daralma dönüşümü olduğu gösterilsin. Eğer $f=4, i=2, j=4$ olarak seçilirse $\alpha_i^j(\mu,\eta)=16$ olup, (3.2) daralma şartı uygulanırsa:

$$p_b\left(T^i\mu,S^j\eta\right)=p_b\left(\frac{\mu}{16^2},\frac{\eta}{16^2}\right)=\frac{1}{16^4}\left(\max\{\mu,\eta\}\right)^2$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}E_{S,T}(\mu,\eta)&=p_b(\mu,\eta)+\left|p_b\left(\mu,T^i\mu\right)-p_b\left(\eta,S^j\eta\right)\right|\\&=\left(\max\{\mu,\eta\}\right)^2+|\mu-\eta|\end{aligned}$$

iken

$$\begin{aligned}D\left(\alpha_i^j(\mu,\eta)\,p_b\left(T^i\mu,S^j\eta\right)\right)&=D\left(16\frac{1}{16^4}\left(\max\{\mu,\eta\}\right)^2\right)\\&=D\left(\frac{1}{16^3}\left(\max\{\mu,\eta\}\right)^2\right)\\&=\frac{1}{16^3}\left(\max\{\mu,\eta\}\right)^2\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\varphi\left(D\left(\beta\left(E_{S,T}(\mu,\eta)\right)E_{S,T}(\mu,\eta)\right)\right)&=\varphi\left(D\left(\frac{1}{256}\left[\left(\max\{\mu,\eta\}\right)^2+|\mu-\eta|\right]\right)\right)\\&=\frac{1}{16}\frac{1}{256}\left[\left(\max\{\mu,\eta\}\right)^2+|\mu-\eta|\right]\end{aligned}$$

sağlanır. Bu nedenle, (3.2) daralma şartı sağlanır. Bu durumda T, S dönüşümleri (W,p_b) uzayında tek ortak sabit noktaya sahiptir. $F(T\cap S)=\{0\}$ dır.

Aşağıdaki sonuç B. Alqahtani ve ark. [66] çalışmasındaki Teorem 5'in bir genellemesidir.

Sonuç 3.2.8. (W,p_b) tam kısmi $b-$metrik uzay ve T ve S kendi üzerine tanımlı dönüşümleri verilsin. $\varphi:(0,\infty)\to(0,\infty)$, φ sürekli kıyaslama fonksiyonu, $D:(0,\infty)\to(0,\infty), D\in\Delta$ ve $\beta:[0,\infty)\to\left[0,\frac{1}{s}\right)$, $\beta\in\Phi_s$ olsun. (T,S) çifti $\forall\mu,\eta\in W$ için

$$p_b(T\mu,S\eta)>0 \text{ iken } D\big(p_b(T\mu,S\eta)\big)\le\varphi\Big(D\Big(\beta\big(E_{S,T}(\mu,\eta)\big)E_{S,T}(\mu,\eta)\Big)\Big)$$

ifadesini sağlarsa T ve S dönüşümleri (W,p_b) uzayında tek sabit noktaya sahiptir.

İspat: Teorem (3.2.5)'de $\alpha_i^j=s^f=1$ ve $i=j=1$ alınırsa istenen elde edilir.

Ayrıca Sonuç (3.2.8)'de $T=S$ için aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.2.9. (W,p_b) tam kısmi $b-$metrik uzay ve T kendi üzerine tanımlı dönüşümü verilsin. $\varphi:(0,\infty)\to(0,\infty)$, φ sürekli kıyaslama fonksiyonu, $D:(0,\infty)\to(0,\infty)$, $D\in\Delta$ ve $\beta:[0,\infty)\to\left[0,\frac{1}{s}\right)$, $\beta\in\Phi_s$ olsun. Her $\mu,\eta\in W$ için

$$p_b(T\mu,T\eta)>0 \text{ iken } D\big(p_b(T\mu,T\eta)\big)\le\varphi\Big(D\Big(\beta\big(E(\mu,\eta)\big)E(\mu,\eta)\Big)\Big)$$

ifadesi sağlanıyorsa T dönüşümü (W,p_b) uzayında tek sabit noktaya sahiptir.

Sıradaki sonuç H. Aydi ve ark. [67] tarafından ispatlanan Teorem 2.1.'in bir analizidir.

Sonuç 3.2.10. (W,p_b), $s\ge1$ katsayısı ile tam kısmi $b-$metrik uzay, $T:W\to W$ bir dönüşüm ve $\alpha:W\times W\to[0,\infty)$ fonksiyonu verilsin. $\varphi:(0,\infty)\to(0,\infty)$, φ sürekli kıyaslama fonksiyonu, $D:(0,\infty)\to(0,\infty)$, $D\in\Delta$ ve $\beta:[0,\infty)\to\left[0,\frac{1}{s}\right)$, $\beta\in\Phi_s$ olsun. T dönüşümü $p_b(T\mu,T\eta)>0$ için aşağıdaki sağlasın:

i) $\forall\mu,\eta\in W$ için
$\alpha(\mu,\eta)\ge1\Rightarrow D\big(p_b(T\mu,T\eta)\big)\le\varphi\Big(D\Big(\beta\big(E(\mu,\eta)\big)E(\mu,\eta)\Big)\Big)$'dır.

ii) T üçgensel $\alpha-$döngüsel geçişli dönüşümdür.

iii) $\alpha(\mu_0,T\mu_0)\ge1$ olacak şekilde $\mu_0\in W$ vardır.

iv) T süreklidir veya her $n \in \mathbb{N}$ için $\mu_n \to \mu\left(n \to \infty\right)$ olan ve $\alpha\left(\mu_n, \mu_{n+1}\right) \geq 1$ eşitsizliğini sağlayan $\left\{\mu_n\right\}_{n \in \mathbb{N}} \subset W$ dizisi varsa her $k \in \mathbb{N}$ için $\alpha\left(\mu_{n_k}, \mu\right) \geq 1$ olacak şekilde $\left\{\mu_n\right\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin $\left\{\mu_{n_k}\right\}$ alt dizisi vardır.

Bu durumda T dönüşümü $\left(W, p_b\right)$ uzayında bir sabit noktaya sahiptir.

İspat : Teorem (3.2.5)'de $i = j = 1$ ile $\alpha_i^j \geq s^f \geq 1$ ve $T = S$ alınırsa ispat tamamlanır.

Bir sonraki sonuç ise $E-$daralma dönüşümünü içeren Banach sabit nokta teoremi [13] için bir genişlemedir.

Sonuç 3.2.11. $\left(W, p_b\right)$ bir kısmi $b-$metrik uzay ve T kendi üzerine tanımlı bir dönüşüm olsun. Her $\mu, \eta \in W$ ve $h \in [0,1)$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlansın:

$$p_b\left(T\mu, T\eta\right) \leq h\left(E_T\left(\mu, \eta\right)\right).$$

Bu durumda T dönüşümü tek sabit noktaya sahiptir.

İspat: Sonuç (3.2.10)'da $\varphi(t) = ht$, $D \in \Delta$ fonksiyonu $D(t) = t$ ve $\alpha\left(\mu, \eta\right) = 1$ olarak tanımlanırsa ispat elde edilir.

Tanım 3.2.12. $\left(W, p_b\right)$ bir kısmi $b-$metrik uzay ve T kendi üzerine tanımlı bir dönüşüm olsun. Her $\mu, \eta \in W$ için

$$p_b\left(T\mu, T\eta\right) \neq 0 \Rightarrow \omega\left(p_b\left(T\mu, T\eta\right)\right) \leq \left[\omega\left(\beta\left(E_T\left(\mu, \eta\right)\right) E_T\left(\mu, \eta\right)\right)\right]^k$$

olacak şekilde $k \in (0,1)$, $\beta \in \Phi_s$ ve $\omega \in \tilde{\Theta}$ var olsun. Bu durumda $T : W \to W$ dönüşümüne bir ω_E-Geraghty dönüşümü adı verilir.

Teorem 3.2.13. $\left(W, p_b\right)$ tam kısmi $b-$metrik uzay ve $T : W \to W$ ω_E-Geraghty dönüşümü olsun. Bu durumda T tek bir sabit noktaya sahiptir.

İspat: Sonuç (3.2.9) da $D : (0, \infty) \to (0, \infty)$, $D(t) = \ell n(\omega)$ ve $\varphi(t) = (\ell nk)t$ alınırsa ispat elde edilir.

Ayrıca A. Fulga ve A. M. Proca [65] tarafından 2017 yılında yapılan çalışmaya katkı olarak yeni bir kavram aşağıdaki gibi verilmiştir.

Tanım 3.2.14. (W,p_b) bir kısmi $b-$metrik uzay olsun. Her $\mu,\eta\in W$ için

$$\kappa+F\left(p_b\left(T\mu,T\eta\right)\right)\leq F\left(\beta\left(E_T\left(\mu,\eta\right)\right)E_T\left(\mu,\eta\right)\right)$$

olacak şekilde $\kappa>0$, $\beta\in\Phi_s$ ve $F\in\aleph$ var olsun. Bu durumda $T:W\to W$ dönüşümüne bir F_E-Geraghty dönüşümü adı verilir.

Teorem 3.2.15. (W,p_b) tam kısmi $b-$metrik uzay ve $T:W\to W$ dönüşümü F_E- Geraghty dönüşümü olsun. Bu durumda T tek bir sabit noktaya sahiptir.

İspat: Sonuç (3.2.9)'da, $D(t)=e^F$ ve $\varphi(t)=e^{-\kappa}t$ almak yeterlidir.

Aşağıda ise kısmi $b-$metrik uzayda homotopi teorisi üzerine Sonuç 3.2.9'un bir uygulaması verilmiştir.

Teorem 3.2.16. (W,p_b) $s\geq 1$ sabitiyle tam kısmi $b-$metrik uzay, U ve C sırasıyla W uzayının açık ve kapalı alt kümeleri olsun. $H:C\times[0,1]\to W$ operatörü aşağıdaki şartları sağlasın.

i) Her $\mu\in C-U$ ve $k\in[0,1)$ için $\mu\neq H(\mu,k)$'dır.

ii) Her $\mu,\eta\in C$ ve $k,h\in[0,1)$ için

$$E_H\left(\mu,\eta\right)=p_b\left(\mu,\eta\right)+\left|p_b\left(\mu,H\left(\mu,k\right)\right)-p_b\left(\eta,H\left(\eta,k\right)\right)\right|$$

iken

$$D\left(p_b\left(H\left(\mu,k\right),H\left(n,k\right)\right)\right)\leq\varphi\left(D\left(\beta\left(E_H\left(\mu,\eta\right)\right)E_H\left(\mu,\eta\right)\right)\right)$$

sağlanır.

iii) Her $\mu\in C$ ve $k,k^*\in[0,1)$ için

$$sp_b\left(H\left(\mu,k\right),H\left(\mu,k^*\right)\right)\leq\left|\psi\left(k\right)-\psi\left(k^*\right)\right|$$

eşitsizliğini sağlayan $\psi:[0,1]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu vardır.

Bu durumda $H(\cdot,0)$ operatörünün bir sabit noktaya sahip olması için gerek ve yeter şart $H(\cdot,1)$ operatörünün bir sabit noktaya sahip olmasıdır.

İspat: λ kümesi,

$$\lambda = \{k \in [0,1] : \mu = H(\mu,k), \text{bazı } \mu \in U \text{ için}\}$$

olarak tanımlansın.

$H(\cdot,0)$ bir sabit noktaya sahip olsun. $0 \in \lambda$ olduğundan λ kümesi boş küme değildir. Ayrıca λ kümesinin $[0,1]$ üzerinde hem açık hem kapalı olduğu gösterilsin. $[0,1]$ kümesi bağlantılı olduğundan $\lambda = [0,1]$ elde edilir ki istenilen sonuca ulaşılmış olur.

Birinci durum olarak, λ kümesinin $[0,1]$ üzerinde kapalı olduğu gösterilsin. Bunun için $n \to \infty$ iken $k_n \to k \in [0,1]$ olacak şekilde $\{k_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \lambda$ dizisi tanımlansın. $k \in \lambda$ olduğu gösterilecektir. Her $n = 1,2,3,\ldots$ için $k_n \in \lambda$ olduğundan $\mu_n = H(\mu_n,k_n)$ olan $\mu_n \in U$ noktası vardır. Ayrıca $n,m = 1,2,3,\ldots$ için

$$\begin{aligned} p_b(\mu_n,\mu_m) &= p_b(H(\mu_n,k_n),H(\mu_m,k_m)) \\ &\le sp_b(H(\mu_n,k_n),H(\mu_n,k_m)) + sp_b(H(\mu_n,k_m),H(\mu_m,k_m)) \end{aligned} \tag{3.32}$$

bulunur. Ayrıca (ii)'den $h \in (0,1)$ ile φ fonksiyonun özelliğinden

$$\begin{aligned} D\big(p_b(H(\mu_n,k_m),H(\mu_m,k_m))\big) &\le \varphi\Big(D\big(\beta(E_H(\mu_n,\mu_m))E_H(\mu_n,\mu_m)\big)\Big) \\ &= hD\big(\beta(E_H(\mu_n,\mu_m))E_H(\mu_n,\mu_m)\big) \\ &\le hD\left(\frac{1}{s}\left[\begin{matrix} p_b(\mu_n,\mu_m) + \\ |p_b(\mu_n,H(\mu_n,k_m)) - p_b(\mu_m,H(\mu_m,k_m))| \end{matrix}\right]\right) \\ &= hD\left(\frac{1}{s}\left[p_b(\mu_n,\mu_m) + p_b(H(\mu_n,k_n),H(\mu_n,k_m))\right]\right) \end{aligned}$$

sağlanır. $(D1)$ özelliğinden

$$sp_b(H(\mu_m,k_m),H(\mu_m,k_m)) < h\left[p_b(\mu_n,\mu_m) + p_b(H(\mu_n,k_n),H(\mu_n,k_m))\right]$$

elde edilir. Bu nedenle üçgen eşitsizliği ve (iii), (3.32) ile birlikte düşünülürse

$$p_b(\mu_n,\mu_m) \le |\psi(k_n) - \psi(k_m)| + h\left[p_b(\mu_n,\mu_m) + \frac{1}{s}|\psi(k_n) - \psi(k_m)|\right]$$

$$p_b(\mu_n,\mu_m) \le \left(\frac{1+s}{s(1-h)}\right)\left|\psi(k_n)-\psi(k_m)\right|$$

olur. $n,m \to \infty$ için $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizinin yakınsaklığı gözönüne alınırsa,

$$\lim_{n,m\to\infty} p_b(\mu_n,\mu_m) = 0$$

elde edilir. Bu da, $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin W uzayında Cauchy dizisi olduğunu gösterir. (W,p_b) tam kısmi $b-$metrik uzay olduğundan

$$p_b(\mu^*,\mu^*) = \lim_{n\to\infty} p_b(\mu^*,\mu_n) = \lim_{n,m\to\infty} p_b(\mu_n,\mu_m) = 0$$

olacak şekilde $\mu^* \in C$ vardır. Üstelik

$$\begin{aligned} p_b\left(\mu_n,H\left(\mu^*,k\right)\right) &= p_b\left(H(\mu_n,k_n),H\left(\mu^*,k\right)\right) \\ &\le sp_b\left(H(\mu_n,k_n),H(\mu_n,k)\right)+sp_b\left(H(\mu_n,k),H\left(\mu^*,k\right)\right) \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} D\left(p_b\left(H(\mu_n,k),H\left(\mu^*,k\right)\right)\right) &\le \varphi\left(D\left(\beta\left(E_H\left(\mu_n,\mu^*\right)\right)E_H\left(\mu_n,\mu^*\right)\right)\right) \\ &\le hD\left(\frac{1}{s}E_H\left(\mu_n,\mu^*\right)\right) \\ &= hD\left(\frac{1}{s}\left[\begin{array}{l} p_b\left(\mu_n,\mu^*\right)+ \\ \left|p_b\left(\mu_n,H(\mu_n,k)\right)-p_b\left(\mu^*,H\left(\mu^*,k\right)\right)\right| \end{array}\right]\right) \end{aligned}$$

elde edilir. D fonksiyonunun özelliğinden

$$sp_b\left(H(\mu_n,k),H\left(\mu^*,k\right)\right) < h\left[p_b\left(\mu_n,\mu^*\right)+\left|p_b\left(\mu_n,H(\mu_n,k)\right)-p_b\left(\mu^*,H\left(\mu^*,k\right)\right)\right|\right]$$

sonucuna ulaşılır. (3.32) ifadesinden

$$p_b\left(\mu_n,H\left(\mu^*,k\right)\right) \le \left|\psi(k_n)-\psi(k)\right| + hp_b\left(\mu_n,\mu^*\right)$$

olur. Yukarıdaki eşitsizlikte $n\to\infty$ için limit alınırsa

$$\lim_{n\to\infty} p_b\left(\mu_n,H\left(\mu^*,k\right)\right) = 0$$

bulunur. Dolayısıyla,

$$p_b\left(\mu^*,H\left(\mu^*,k\right)\right)=\lim_{n\to\infty} p_b\left(\mu_n,H\left(\mu_n,k\right)\right)=0$$

sağlanır. Bunun anlamı ise, $\mu^*=H\left(\mu^*,k\right)$ olmasıdır. (i) sağlandığından $\mu^*\in U$ olur. Buradan $k\in\lambdabar$ 'dır ve sonuç olarak $\lambdabar$ kümesi $[0,1]$ üzerinde kapalıdır.

İkinci durum olarak, $\lambdabar$ kümesinin $[0,1]$ üzerinde açık olduğu gösterilsin. $k_0\in\lambdabar$ olsun. Bu durumda $\mu_0=H\left(\mu_0,k_0\right)$ olacak şekilde $\mu_0\in U$ vardır. U açık olduğundan W uzayında $B_{p_b}\left(\mu_0,\delta\right)\subseteq U$ olan $\delta>0$ vardır. $h\in[0,1)$ ve $s\geq 1$ olmak üzere $\varepsilon=\dfrac{s(1-h)}{s+h}>0$ olsun. ψ, k_0 noktasında sürekli olduğundan, $k\in\left(k_0-\vartheta(\varepsilon),k_0+\vartheta(\varepsilon)\right)$ için, $\left|\psi(k)-\psi(k_0)\right|<\varepsilon$ olan $\vartheta(\varepsilon)>0$ vardır. $k\in\left(k_0-\vartheta(\varepsilon),k_0+\vartheta(\varepsilon)\right)$ olmak üzere,

$$p\in\overline{B_{p_b}\left(k_0,\delta\right)}=\left\{k\in W: p_b\left(k,k_0\right)\leq p_b\left(k_0,k_0\right)+\delta\right\}$$

için

$$\begin{aligned}p_b\left(H\left(\mu,k\right),k_0\right)&=p_b\left(H\left(\mu,k\right),H\left(\mu_0,k_0\right)\right)\\&\leq sp_b\left(H\left(\mu,k\right),H\left(\mu,k_0\right)\right)+sp_b\left(H\left(\mu,k_0\right),H\left(\mu_0,k_0\right)\right)\end{aligned}$$

sağlanır ve bundan dolayı

$$\begin{aligned}D\left(p_b\left(H\left(\mu,k_0\right),H\left(\mu_0,k_0\right)\right)\right)&\leq\varphi\left(D\left(\beta\left(E_H\left(\mu,\mu_0\right)\right)E_H\left(\mu,\mu_0\right)\right)\right)\\&\leq hD\left(\frac{1}{s}E_H\left(\mu,\mu_0\right)\right)\\&=hD\left(\frac{1}{s}\left[\begin{array}{l}p_b\left(\mu,\mu_0\right)+\\\left|p_b\left(\mu,H\left(\mu,k_0\right)\right)-p_b\left(\mu_0,H\left(\mu_0,k_0\right)\right)\right|\end{array}\right]\right)\end{aligned}$$

elde edilir ki bu ise

$$sp_b\left(H\left(\mu,k_0\right),H\left(\mu_0,k_0\right)\right)<h\left[p_b\left(\mu,\mu_0\right)+p_b\left(H\left(\mu,k\right),H\left(\mu,k_0\right)\right)\right]$$

olmasıdır. Sonuç olarak, yukarıdaki eşitsizlik dikkate alınırsa,

$$
\begin{aligned}
p_b\left(H(\mu,k),\mu_0\right) &\le \left|\psi(k)-\psi(k_0)\right| + h\left[p_b(\mu,\mu_0)+\frac{1}{s}\left|\psi(k)-\psi(k_0)\right|\right] \\
&\le \left(1+\frac{h}{s}\right)\left|\psi(k)-\psi(k_0)\right| + h\left(p_b(\mu_0,\mu_0)+\delta\right) \\
&\le \left(1+\frac{h}{s}\right)\varepsilon + h\left(p_b(\mu_0,\mu_0)+\delta\right) \\
&\le p_b(\mu_0,\mu_0)+\delta
\end{aligned}
$$

elde edilir ve $H(\mu,k)\in\overline{B_{p_b}(\mu_0,\delta)}$ olur. Böylece, her sabit $k\in\left(k_0-\vartheta(\varepsilon),k_0+\vartheta(\varepsilon)\right)$ için $H(\cdot,k):\overline{B_{p_b}(\mu_0,\delta)}\to\overline{B_{p_b}(\mu_0,\delta)}$ sağlanır. Sonuç (3.2.9)'un hipotezi sağlandığından $H(\cdot,k)$ operatörü C kümesinde bir sabit noktaya sahiptir. Fakat (i) şartından dolayı sabit nokta U kümesinde olmalıdır. Bu yüzden $\left(k_0-\vartheta(\varepsilon),k_0+\vartheta(\varepsilon)\right)\subseteq\lambda$'dır. Sonuç olarak λ kümesi $[0,1]$ üzerinde açıktır.

4. ASİMETRİK KISMİ $b-$METRİK UZAYLAR VE SABİT NOKTA TEORİSİ

Bu bölümün birinci kısmında asimetrik kısmi $b-$uzay yapısı tanıtıldı. İkinci bölümünde ise $(\alpha,\beta)-D_{\varphi}$ daralma şartı tanımlanarak, bu daralma şartını sağlayan sabit nokta teoremi ispatlanmıştır. Bunlara bağlı olarak bazı sonuçlar sunulmuştur.

4.1. Asimetrik Kısmi $b-$Metrik Uzaylar ve Bazı Topolojik Özellikleri

A. Gupta ve ark. [128], E. Karapınar [129] tarafından tanımlanan asimetrik kısmi metrik uzay ile $b-$metrik uzay özelliklerini birlikte düşünüp asimetrik kısmi $b-$metrik kavramını tanımlayıp, asimetrik kısmi $b-$metrik uzayın topolojik yapısını oluşturmuşlardır. Bu uzay üzerinde sabit nokta teoremleri elde etmişlerdir. Daha sonra birçok araştırmacı bu uzayda çeşitli çalışmalar ortaya koymuşlardır [130-138].

Tanım 4.1.1. [128] $W\neq\varnothing$ bir küme olsun. $\forall\mu,\eta,\sigma\in W$ ve bazı $s\geq 1$ reel sayıları için

$(q_{p_b}1)$ $0\leq q_{p_b}(\mu,\mu)=q_{p_b}(\mu.\eta)=q_{p_b}(\eta,\eta)\Rightarrow\mu=\eta$,

$(q_{p_b}2)$ $q_{p_b}(\mu,\mu)\leq q_{p_b}(\mu,\eta)$,

$(q_{p_b}3)$ $q_{p_b}(\mu,\mu)\leq q_{p_b}(\eta,\mu)$,

$(q_{p_b}4)$ $q_{p_b}(\mu,\eta)\leq s\left[q_{p_b}(\mu,\sigma)+q_{p_b}(\sigma,\eta)\right]-q_{p_b}(\sigma,\sigma)$

şartlarını sağlarsa, $q_{p_b}:W\times W\to\mathbb{R}^{+}$ fonksiyonuna W üzerinde asimetrik kısmi $b-$metrik, (W,q_{p_b}) ikilisine de asimetrik kısmi $b-$metrik uzay denir.

Uyarı 4.1.2. [128] (W,q_{p_b}) asimetrik kısmi $b-$metrik uzay olmak üzere

$$d_{q_{p_b}}(\mu,\eta)=q_{p_b}(\mu,\eta)+q_{p_b}(\eta,\mu)-q_{p_b}(\mu,\mu)-q_{p_b}(\eta,\eta) \tag{4.1}$$

olarak tanımlanan $d_{q_{p_b}}:W\times W\to\mathbb{R}^+$ fonksiyonu W uzayında bir $b-$metriktir.

$(b1)\Rightarrow)$ $d_{q_{p_b}}(\mu,\eta)=0$ olsun. $(q_{p_b}2)$ ve $(q_{p_b}3)$ özelliklerinden dolayı, $q_{p_b}(\mu,\eta)-q_{p_b}(\mu,\mu)\geq 0$ ve $q_{p_b}(\eta,\mu)-q_{p_b}(\eta,\eta)\geq 0$ sağlanır. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}0=d_{q_{p_b}}(\mu,\eta)&=q_{p_b}(\mu,\eta)+q_{p_b}(\eta,\mu)-q_{p_b}(\mu,\mu)-q_{p_b}(\eta,\eta)\\&=q_{p_b}(\mu,\eta)-q_{p_b}(\mu,\mu)+q_{p_b}(\eta,\mu)-q_{p_b}(\eta,\eta)\end{aligned}$$

elde edilir. q_{p_b}, asimetrik kısmi $b-$metrik olduğundan ve pozitif tanımlı iki sayının toplamının sıfır olması ancak her birinin sıfır olmasına bağlı olduğundan $q_{p_b}(\mu,\eta)-q_{p_b}(\mu,\mu)=0$ ve $q_{p_b}(\eta,\mu)-q_{p_b}(\eta,\eta)=0$ olmalıdır. Yani, $q_{p_b}(\mu,\eta)=q_{p_b}(\mu,\mu)$ ve $q_{p_b}(\eta,\mu)=q_{p_b}(\eta,\eta)$'dır. Ayrıca, $q_{p_b}(\eta,\eta)\leq q_{p_b}(\mu,\eta)$ ve $q_{p_b}(\mu,\mu)\leq q_{p_b}(\eta,\mu)$ olduğundan $q_{p_b}(\eta,\eta)\leq q_{p_b}(\mu,\mu)$ ve $q_{p_b}(\mu,\mu)\leq q_{p_b}(\eta,\eta)$ olup $q_{p_b}(\mu,\eta)=q_{p_b}(\eta,\eta)$ elde edilir. Dolayısıyla, $q_{p_b}(\mu,\mu)=q_{p_b}(\mu,\eta)=q_{p_b}(\eta,\eta)$ olur ki, q_{p_b} asimetrik kısmi $b-$metrik olduğundan, $\mu=\eta$ sağlanır.

$\Leftarrow)$ $\mu=\eta$ olsun.

$$\begin{aligned}d_{q_{p_b}}(\mu,\eta)&=q_{p_b}(\mu,\eta)+q_{p_b}(\eta,\mu)-q_{p_b}(\mu,\mu)-q_{p_b}(\eta,\eta)\\&=q_{p_b}(\mu,\mu)+q_{p_b}(\mu,\mu)-q_{p_b}(\mu,\mu)-q_{p_b}(\mu,\mu)\\&=0\end{aligned}$$

sağlanır.

$(b2)$

$$\begin{aligned}d_{q_{p_b}}(\mu,\eta)&=q_{p_b}(\mu,\eta)+q_{p_b}(\eta,\mu)-q_{p_b}(\mu,\mu)-q_{p_b}(\eta,\eta)\\&=q_{p_b}(\eta,\mu)+q_{p_b}(\mu,\eta)-q_{p_b}(\eta,\eta)-q_{p_b}(\mu,\mu)\\&=d_{q_{p_b}}(\eta,\mu)\end{aligned}$$

sağlanır.

$(b3)$ q_{p_b} asimetrik kısmi $b-$metrik olduğundan üçgen eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}
d_{q_{p_b}}(\mu,\eta) &= q_{p_b}(\mu,\eta)+q_{p_b}(\eta,\mu)-q_{p_b}(\mu,\mu)-q_{p_b}(\eta,\eta) \\
&\leq q_p(\mu,\sigma)+q_{p_b}(\sigma,\eta)-q_{p_b}(\sigma,\sigma)+q_{p_b}(\eta,\sigma)+q_{p_b}(\sigma,\mu) \\
&\quad -q_{p_b}(\sigma,\sigma)-q_{p_b}(\mu,\mu)-q_{p_b}(\eta,\eta) \\
&= q_{p_b}(\mu,\sigma)+q_{p_b}(\sigma,\mu)-q_{p_b}(\mu,\mu)-q_{p_b}(\sigma,\sigma)+q_{p_b}(\sigma,\eta) \\
&\quad +q_{p_b}(\eta,\sigma)-q_{p_b}(\sigma,\sigma)-q_{p_b}(\eta,\eta) \\
&\leq s\left[q_{p_b}(\mu,\sigma)+q_{p_b}(\sigma,\mu)-q_{p_b}(\mu,\mu)-q_{p_b}(\sigma,\sigma)\right] \\
&\quad +s\left[q_{p_b}(\sigma,\eta)+q_{p_b}(\eta,\sigma)-q_{p_b}(\sigma,\sigma)-q_{p_b}(\eta,\eta)\right] \\
&= s\left[d_{q_{p_b}}(\mu,\sigma)+d_{q_{p_b}}(\sigma,\eta)\right]
\end{aligned}$$

olur. $b-$metriğin şartları sağlandığından $d_{q_{p_b}}$ fonksiyonu W uzayında $b-$metriktir.

Uyarı 4.1.3. [128] Her asimetrik kısmi metrik uzay, bir asimetrik kısmi $b-$metrik uzaydır. Fakat tersi genelde doğru değildir. $s=1$ için asimetrik kısmi $b-$metrik, asimetrik kısmi metriktir. Ancak $s>1$ için bu doğru değildir.

Örnek 4.1.4. [128] $W=[0,1]$ olsun.

$$q_{p_b}(\mu,\eta)=|\mu-\eta|+\mu$$

olarak tanımlanan $q_{p_b}:W\times W\to\mathbb{R}^+$ dönüşümü W uzayında asimetrik kısmi $b-$metriktir. (W,q_{p_b}) asimetrik kısmi $b-$metrik uzaydır.

$(q_{p_b}1)$ $q_{p_b}(\mu,\mu)=q_{p_b}(\mu,\eta)=q_{p_b}(\eta,\eta)$ olsun. Yani,

$$\mu=|\mu-\eta|+\mu=\eta\Rightarrow\mu=\eta$$

sağlanır.

$(q_{p_b}2)$

$$q_{p_b}(\mu,\mu)=\mu\leq|\mu-\eta|+\mu=q_{p_b}(\mu,\eta)$$

sağlanır.

$\left(q_{p_b}3\right)$

$$q_{p_b}(\mu,\mu)=\mu=\mu-\eta+\eta\le|\mu-\eta|+\eta=|\eta-\mu|+\eta=q_{p_b}(\eta,\mu)$$

sağlanır.

$\left(q_{p_b}4\right)$

$$\begin{aligned}q_{p_b}(\mu,\eta)&=|\mu-\eta|+\mu\\&=|\mu-\eta|+\mu+\sigma-\sigma\\&=|\mu-\sigma+\sigma-\eta|+\mu+\sigma-\sigma\\&\le|\mu-\sigma|+|\sigma-\eta|+\mu+\sigma-\sigma\\&=s\left[|\mu-\sigma|+\mu+|\sigma-\eta|+\sigma\right]-\sigma\\&=s\left[q_{p_b}(\mu,\sigma)+q_{p_b}(\sigma,\eta)\right]-q_{p_b}(\sigma,\sigma)\end{aligned}$$

sağlanır. Bu nedenle, $s\ge 1$ için $\left(W,q_{p_b}\right)$ ikilisi asimetrik kısmi $b-$metrik uzaydır.

Örnek 4.1.5. [128] $W=[1,\infty)$ olsun.

$$q_{p_b}(\mu,\eta)=\ell n(\mu\eta)$$

olarak tanımlanan $q_{p_b}:W\times W\to\mathbb{R}^+$ dönüşümü $s\ge 1$ için asimetrik kısmi $b-$metrik, $\left(W,q_{p_b}\right)$ ise asimetrik kısmi $b-$metrik uzaydır.

$\left(q_{p_b}1\right)$ $q_{p_b}(\mu,\mu)=q_{p_b}(\mu,\eta)=q_{p_b}(\eta,\eta)$ olsun. Yani,

$$\ell n\left(\mu^2\right)=\ell n(\mu\eta)=\ell n\left(\eta^2\right)\Rightarrow\mu^2=\eta^2\Rightarrow\mu=\eta$$

sağlanır.

$\left(q_{p_b}2\right)$ Genelliği bozmadan $\mu\le\eta$ olarak alınırsa

$$\mu\le\eta\Rightarrow\ell n\mu\le\ell n\eta\Rightarrow\ell n\mu+\ell n\mu\le\ell n\eta+\ell n\mu\Rightarrow 2\ell n\mu\le\ell n(\mu\eta)\Rightarrow\ell n\mu^2\le\ell n(\mu\eta)$$

sağlanır. Böylece,

$$q_{p_b}(\mu,\mu)\le q_{p_b}(\mu,\eta)$$

elde edilir.

$\left(q_{p_b}3\right)$ Genelliği bozmadan $\mu \leq \eta$ olarak alınırsa

$$\mu \leq \eta \Rightarrow \ell n\mu \leq \ell n\eta \Rightarrow \ell n\mu + \ell n\mu \leq \ell n\eta + \ell n\mu \Rightarrow \ 2In\mu \leq In(\mu\eta) \Rightarrow In\mu^2 \leq In(\eta\mu)$$

bulunur. Böylece,

$$q_{p_b}(\mu,\mu) \leq q_{p_b}(\eta,\mu)$$

elde edilir.

$\left(q_{p_b}4\right)$

$$\begin{aligned}
q_{p_b}(\mu,\eta) &= \ell n(\mu.\eta) \\
&= \ell n(\mu) + \ell n(\eta) \\
&\leq s\ell n(\mu) + s\ell n(\eta) \\
&\leq s\ell n(\mu) + s\ell n(\eta) + 2(s-1)\ell n(\sigma) \\
&= s\ell n(\mu) + s\ell n(\eta) + (s-1)\left[\ell n(\sigma) + \ell n(\sigma)\right] \\
&= s\ell n(\mu) + s\ell n(\eta) + s\left[\ell n(\sigma) + \ell n(\sigma)\right] - \left[\ell n(\sigma) + \ell n(\sigma)\right] \\
&= s\left[\ell n(\mu) + \ell n(\sigma) + \ell n(\sigma) + \ell n(\eta)\right] - \left[\ell n(\sigma) + \ell n(\sigma)\right] \\
&= s\left[\ell n(\mu\sigma) + \ell n(\sigma\eta)\right] - \left[\ell n(\sigma^2)\right] \\
&= s\left[q_{p_b}(\mu,\sigma) + q_{p_b}(\sigma,\eta)\right] - q_{p_b}(\sigma,\sigma)
\end{aligned}$$

elde edilir. Dört şart da sağlandığından $\left(W,q_{p_b}\right)$ ikilisi asimetrik kısmi $b-$metrik uzaydır.

Örnek 4.1.6. [128] $W = \left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ olsun.

$$q_{p_b}(\mu,\eta) = \sin\mu + \sin\eta$$

olarak tanımlanan $q_{p_b}: W \times W \to \mathbb{R}^+$ dönüşümü $s \geq 1$ ile asimetrik kısmi $b-$metrik, $\left(W,q_{p_b}\right)$ ikilisi ise asimetrik kısmi $b-$metrik uzaydır.

$\left(q_{p_b}1\right)$ $q_{p_b}(\mu,\mu) = q_{p_b}(\mu,\eta) = q_{p_b}(\eta,\eta)$ olsun. Yani,

$$2\sin\mu = \sin\mu + \sin\eta = 2\sin\eta \Rightarrow \sin\mu = \sin\eta \Rightarrow \mu = \eta$$

bulunur.

$\left(q_{p_b}2\right)$ Genelliği bozmadan $\mu \le \eta$ olarak alınırsa, $\mu,\eta \in \left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ olduğundan, $\mu \le \eta \Rightarrow \sin\mu \le \sin\eta$ sağlanır. Buradan

$$\sin\mu + \sin\mu \le \sin\eta + \sin\mu \Rightarrow q_{p_b}(\mu,\mu) \le q_{p_b}(\mu,\eta)$$

olur.

$\left(q_{p_b}3\right)$ Genelliği bozmadan $\mu \le \eta$ olarak alırsak, $\mu,\eta \in \left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ olduğundan, $\mu \le \eta \Rightarrow \sin\mu \le \sin\eta$ sağlanır. Buradan

$$\sin\mu + \sin\mu \le \sin\eta + \sin\mu \Rightarrow q_{p_b}(\mu,\mu) \le q_{p_b}(\eta,\mu)$$

elde edilir.

$\left(q_{p_b}4\right)$

$$\begin{aligned} q_{p_b}(\mu,\eta) &= \sin\mu + \sin\eta \\ &\le s\sin\mu + s\sin\eta \\ &\le s\sin\mu + s\sin\eta + 2(s-1)\sin\sigma \\ &= s\sin\mu + s\sin\eta + 2s\sin\sigma - 2\sin\sigma \\ &= s\sin\mu + s\sin\eta + s\sin\sigma + s\sin\sigma - [\sin\sigma + \sin\sigma] \\ &= s[\sin\mu + \sin\sigma + \sin\sigma + \sin\eta] - [\sin\sigma + \sin\sigma] \\ &= s\left[q_{p_b}(\mu,\sigma) + q_{p_b}(\sigma,\eta)\right] - q_{p_b}(\sigma,\sigma) \end{aligned}$$

olur. Dört şart da sağlandığından $\left(W,q_{p_b}\right)$ ikilisi asimetrik kısmi $b-$metrik uzaydır.

Örnek 4.1.7. [130] $k \in \mathbb{N}^+$ olmak üzere $W = \left[0,\dfrac{\pi}{4k}\right]$ olsun. $q_{p_b} : W \times W \to \mathbb{R}^+$ dönüşümü,

$$q_{p_b}(\mu,\eta) = \sin k|\mu-\eta| + \mu$$

olarak tanımlansın. $s \ge k$ sabitiyle $\left(W,q_{p_b}\right)$ asimetrik kısmi $b-$metrik uzaydır.

$\left(q_{p_b}1\right)$ $q_{p_b}(\mu,\mu) = q_{p_b}(\mu,\eta) = q_{p_b}(\eta,\eta)$ olsun. Yani,

$$\mu = \sin k|\mu-\eta| + \mu = \eta \Rightarrow |\mu-\eta| = 0 \Rightarrow \mu = \eta$$

sağlanır.

$\left(q_{p_b}2\right)$

$$q_{p_b}(\mu,\mu)=\mu\le\sin k|\mu-\eta|+\mu=q_{p_b}(\mu,\eta)$$

sağlanır.

$\left(q_{p_b}3\right)$

$$q_{p_b}(\mu,\mu)=\mu=\mu-\eta+\eta\le|\mu-\eta|+|\eta|=|\eta-\mu|+|\eta|\le\sin k|\eta-\mu|+\eta=q_{p_b}(\eta,\mu)$$

sağlanır.

$\left(q_{p_b}4\right)$

$$\begin{aligned}q_{p_b}(\mu,\eta)&=\sin k|\mu-\eta|+\mu\\&=\sin k|\mu-\sigma+\sigma-\eta|+\mu+\sigma-\sigma\\&\le\sin k\left(|\mu-\sigma|+|\sigma-\eta|\right)+\mu+\sigma-\sigma\\&\le\sin k\left(|\mu-\sigma|+|\sigma-\eta|\right)+k\mu+k\sigma-\sigma\\&\le k\left(\sin k|\mu-\sigma|\right)+k\left(\sin k|\sigma-\eta|\right)+k\mu+k\sigma-\sigma\\&=k\left[\sin k|\mu-\sigma|+\mu+\sin k|\sigma-\eta|+\sigma\right]-\sigma\\&=k\left[q_{p_b}(\mu,\sigma)+q_{p_b}(\sigma,\eta)\right]-q_{p_b}(\sigma,\sigma)\end{aligned}$$

olur. Dört şart da sağlandığından $\left(W,q_{p_b}\right)$ ikilisi asimetrik kısmi $b-$metrik uzaydır.

Örnek 4.1.8. [131] $W=\mathbb{R}^+$ olsun.

$$q_{p_b}(\mu,\eta)=|\mu-\eta|+|\mu|+|\mu-\eta|^2$$

olarak tanımlanan $q_{p_b}:W\times W\to\mathbb{R}^+$ dönüşümü W üzerinde $s\ge 2$ katsayısı ile asimetrik kısmi $b-$metriktir. $\left(W,q_{p_b}\right)$ asimetrik kısmi $b-$metrik uzaydır.

$\left(q_{p_b}1\right)$ $q_{p_b}(\mu,\mu)=q_{p_b}(\mu,\eta)=q_{p_b}(\eta,\eta)$ olsun.

$$|\mu|=|\mu-\eta|+|\mu|+|\mu-\eta|^{\,2}=|\eta|\Rightarrow|\mu-\eta|=0\Rightarrow\mu=\eta$$

sağlanır.

$\left(q_{p_b}2\right)$

$$q_{p_b}(\mu,\mu)=|\mu|\le|\mu-\eta|+|\mu|+|\mu-\eta|^2=q_{p_b}(\mu,\eta)$$

sağlanır.

$\left(q_{p_b}3\right)$

$$|\mu|-|\eta|\le\left||\mu|-|\eta|\right|\le|\mu-\eta|\le|\mu-\eta|+|\mu-\eta|^2$$
$$|\mu|\le|\mu-\eta|+|\mu-\eta|^2+|\eta|$$

olduğundan

$$q_{p_b}(\mu,\mu)=|\mu|\le|\eta-\mu|+|\eta|+|\eta-\mu|^2=q_{p_b}(\eta,\mu)$$

elde edilir.

$\left(q_{p_b}4\right)$

$$\begin{aligned}
q_{p_b}(\mu,\eta)&=|\mu-\eta|+|\mu|+|\mu-\eta|^2\\
&=|\mu-\sigma+\sigma-\eta|+|\mu|+|\mu-\sigma+\sigma-\eta|^2\\
&\le|\mu-\sigma|+|\sigma-\eta|+|\mu|+2\left(|\mu-\sigma|^2+|\sigma-\eta|^2\right)\\
&\le 2|\mu-\sigma|+2|\sigma-\eta|+2|\mu|+2|\sigma|+2|\mu-\sigma|^2+2|\sigma-\eta|^2-|\sigma|\\
&=2\left(|\mu-\sigma|+|\mu|+|\mu-\sigma|^2\right)+2\left(|\sigma-\eta|+|\sigma|+|\sigma-\eta|^2\right)-|\sigma|\\
&=2\left[q_{p_b}(\mu,\sigma)+q_{p_b}(\sigma,\eta)\right]-q_{p_b}(\sigma,\sigma)
\end{aligned}$$

sağlanır. Dört şart da sağlandığından $s\ge 2$ için, $\left(W,q_{p_b}\right)$ ikilisi asimetrik kısmi $b-$ metrik uzaydır.

Örnek 4.1.9. $W=\{1,2,3,4\}$ olsun. $q_{p_b}:W\times W\to\mathbb{R}^+$ dönüşümü

$$q_{p_b}(\mu,\eta)=\begin{cases}|\mu-\eta|^2+\mu, & \mu\ne\eta \quad \text{ise}\\ \mu, & \mu=\eta \quad \text{ise}\end{cases}$$

olarak tanımlansın. $\left(W,q_{p_b}\right)$ ikilisi $s\ge 2$ için asimetrik kısmi $b-$metrik uzaydır.

$\left(q_{p_b}1\right)$ $q_{p_b}(\mu,\mu)=q_{p_b}(\mu,\eta)=q_{p_b}(\eta,\eta)$ olsun. Yani,

$$\mu = |\mu - \eta|^2 + \mu = \eta \Rightarrow \mu = \eta$$

dır.

$\left(q_{p_b} 2\right)$

$$q_{p_b}(\mu,\mu) = \mu \le |\mu-\eta|^2 + \mu = q_{p_b}(\mu,\eta)$$

sağlanır.

$\left(q_{p_b} 3\right)$

$$q_{p_b}(\mu,\mu) = \mu = \mu - \eta + \eta \le |\mu-\eta| + \eta \le |\mu-\eta|^2 + \eta = |\eta-\mu|^2 + \eta = q_{p_b}(\eta,\mu)$$

elde edilir.

$\left(q_{p_b} 4\right)$

i) $\mu \ne \eta \ne \sigma$ için

$$\begin{aligned} q_{p_b}(\mu,\eta) &= |\mu-\eta|^2 + \mu \\ &= |\mu-\sigma+\sigma-\eta|^2 + \mu + \sigma - \sigma \\ &\le 2\left(|\mu-\sigma|^2 + |\sigma-\eta|^2\right) + \mu + \sigma - \sigma \\ &\le 2\left(|\mu-\sigma|^2 + |\sigma-\eta|^2\right) + 2\mu + 2\sigma - \sigma \\ &= 2\left(|\mu-\sigma|^2 + \mu + |\sigma-\eta|^2 + \sigma\right) - \sigma \\ &= 2\left(|\mu-\sigma|^2 + \mu + |\sigma-\eta|^2 + \sigma\right) - \left(|\sigma-\sigma|^2 + \sigma\right) \\ &= 2\left[q_{p_b}(\mu,\sigma) + q_{p_b}(\sigma,\eta)\right] - q_{p_b}(\sigma,\sigma) \end{aligned}$$

olup $s = 2$ için $\left(W, q_{p_b}\right)$ asimetrik kısmi $b-$metrik uzaydır.

ii) $\mu \ne \eta = \sigma$ için

$$\begin{aligned} q_{p_b}(\mu,\eta) &= |\mu-\eta|^2 + \mu \\ &= |\mu-\sigma|^2 + \mu + \sigma - \sigma \\ &= q_{p_b}(\mu,\sigma) + q_{p_b}(\sigma,\eta) - q_{p_b}(\sigma,\sigma) \end{aligned}$$

sağlanır.

iii) $\mu = \sigma \neq \eta$ için

$$\begin{aligned} q_{p_b}(\mu,\eta) &= |\mu-\eta|^2 + \mu \\ &= |\sigma-\eta|^2 + \sigma \\ &= |\sigma-\eta|^2 + \sigma + \mu - \sigma \\ &= \mu + |\sigma-\eta|^2 + \sigma - \sigma \\ &= q_{p_b}(\mu,\sigma) + q_{p_b}(\sigma,\eta) - q_{p_b}(\sigma,\sigma) \end{aligned}$$

olur.

iv) $\mu = \sigma = \eta$ için

$$q_{p_b}(\mu,\eta) = \mu = \mu + \mu - \mu = q_{p_b}(\mu,\sigma) + q_{p_b}(\sigma,\eta) - q_{p_b}(\sigma,\sigma)$$

sağlanır. Her durumda üçgen eşitsizliğinin sağlanması için $s = 2$ alınmalıdır.

$q_{p_b}(1,1) = 1 \neq 0$ olduğundan bu fonksiyon asimetrik metrik değildir.

$q_{p_b}(2,3) = 3 \neq 4 = q_{p_b}(3,2)$ simetri özelliği sağlanmadığından kısmi metrik değildir. $\forall \mu,\eta,\sigma \in W$ için $s = 1$ olduğunda üçgen eşitsizliği sağlanmadığından asimetrik kısmi metrik değildir. Çünkü,

$$q_{p_b}(4,1) = 13 > q_{p_b}(4,2) + q_{p_b}(2,1) - q_{p_b}(2,2) = 8 + 3 - 2 = 9$$

dır.

Örnek 4.1.10. $W = [0,1]$ kümesi üzerinde, $q_{p_b} : W \times W \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu

$$q_{p_b}(\mu,\eta) = \begin{cases} \dfrac{\mu-\eta}{2} + 1, & \mu > \eta \in (0,1] \text{ ise} \\ 1, & \mu = \eta \in [0,1] \text{ ise} \\ \dfrac{\eta^2-\mu^2}{2} + 1, & \mu < \eta \in (0,1] \text{ ise} \end{cases},$$

$$q_{p_b}(\eta,0) = q_{p_b}(0,\eta) = \eta + 1 \ , \ \eta \in (0,1)$$

olarak tanımlansın. q_{p_b}, $s \geq 4$ için W üzerinde asimetrik kısmi $b-$metriktir. (W, q_{p_b}) asimetrik kısmi $b-$metrik uzaydır.

$\left(q_{p_b}1\right)$ $q_{p_b}\left(\mu,\mu\right)=q_{p_b}\left(\mu,\eta\right)=q_{p_b}\left(\eta,\eta\right)$ olsun.

i) $\mu>\eta$ için

$$1=\frac{\mu-\eta}{2}+1=1\Rightarrow\frac{\mu-\eta}{2}=0\Rightarrow\mu=\eta$$

sağlanır.

ii) $\mu<\eta$ için

$$1=\frac{\eta^2-\mu^2}{2}+1=1\Rightarrow\frac{\eta^2-\mu^2}{2}=0\Rightarrow\mu=\eta$$

sağlanır.

$\left(q_{p_b}2\right)$

i) $\mu>\eta$ için

$$q_{p_b}\left(\mu,\mu\right)=1\leq\frac{\mu-\eta}{2}+1=q_{p_b}\left(\mu,\eta\right)$$

dır.

ii) $\mu<\eta$ için

$$q_{p_b}\left(\mu,\mu\right)=1\leq\frac{\eta^2-\mu^2}{2}+1=q_{p_b}\left(\mu,\eta\right)$$

dır.

iii) $\mu=0,\eta\in\left(0,1\right)$ için

$$q_{p_b}\left(\mu,\mu\right)=1\leq\eta+1=q_{p_b}\left(0,\eta\right)$$

$\left(q_{p_b}3\right)$

i) $\eta>\mu$ için

$$q_{p_b}\left(\mu,\mu\right)=1\leq\frac{\eta^2-\mu^2}{2}+1=q_{p_b}\left(\eta,\mu\right)$$

dır.

ii) $\eta < \mu$ için

$$q_{p_b}(\mu,\mu) = 1 \leq \frac{\mu-\eta}{2} + 1 = q_{p_b}(\eta,\mu)$$

dır.

iii) $\mu = 0, \eta \in (0,1)$ için

$$q_{p_b}(\mu,\mu) = 1 \leq \eta + 1 = q_{p_b}(\eta,0)$$

dır.

$(q_{p_b}4)$

i) $\mu > \eta > \sigma$ için

$$\begin{aligned} q_{p_b}(\mu,\eta) &= \frac{\mu-\eta}{2} + 1 \\ &\leq \frac{\mu-\sigma}{2} + 1 \\ &\leq \frac{\mu-\sigma}{2} + 1 + \frac{\eta^2-\sigma^2}{2} + 1 - 1 \\ &= q_{p_b}(\mu,\sigma) + q_{p_b}(\sigma,\eta) - q_{p_b}(\sigma,\sigma) \\ &\leq s\left[q_{p_b}(\mu,\sigma) + q_{p_b}(\sigma,\eta)\right] - q_{p_b}(\sigma,\sigma) \end{aligned}$$

sağlanır.

ii) $\mu > \sigma > \eta$ için

$$\begin{aligned} q_{p_b}(\mu,\eta) &= \frac{\mu-\eta}{2} + 1 \\ &= \frac{\mu-\sigma+\sigma-\eta}{2} + 1 + 1 - 1 \\ &= \frac{\mu-\sigma}{2} + 1 + \frac{\sigma-\eta}{2} + 1 - 1 \\ &= q_{p_b}(\mu,\sigma) + q_{p_b}(\sigma,\eta) - q_{p_b}(\sigma,\sigma) \\ &\leq s\left[q_{p_b}(\mu,\sigma) + q_{p_b}(\sigma,\eta)\right] - q_{p_b}(\sigma,\sigma) \end{aligned}$$

iii) $\sigma > \mu > \eta$ için

$$
\begin{aligned}
q_{p_b}(\mu,\eta) &= \frac{\mu-\eta}{2}+1 \le \frac{\sigma-\eta}{2}+1 \\
&\le \frac{\sigma^2-\mu^2}{2}+1+\frac{\sigma-\eta}{2}+1-1 \\
&= q_{p_b}(\mu,\sigma)+q_{p_b}(\sigma,\eta)-q_{p_b}(\sigma,\sigma) \\
&\le s\left[q_{p_b}(\mu,\sigma)+q_{p_b}(\sigma,\eta)\right]-q_{p_b}(\sigma,\sigma)
\end{aligned}
$$

sağlanır.

iv) $\mu < \eta < \sigma$ için

$$
\begin{aligned}
q_{p_b}(\mu,\eta) &= \frac{\eta^2-\mu^2}{2}+1 \\
&\le \frac{\sigma^2-\mu^2}{2}+1 \\
&\le \frac{\sigma^2-\mu^2}{2}+1+\frac{\sigma-\eta}{2}+1-1 \\
&= q_{p_b}(\mu,\sigma)+q_{p_b}(\sigma,\eta)-q_{p_b}(\sigma,\sigma) \\
&\le s\left[q_{p_b}(\mu,\sigma)+q_{p_b}(\sigma,\eta)\right]-q_{p_b}(\sigma,\sigma)
\end{aligned}
$$

sağlanır.

v) $\mu < \sigma < \eta$ için

$$
\begin{aligned}
q_{p_b}(\mu,\eta) &= \frac{\eta^2-\mu^2}{2}+1 \\
&= \frac{\eta^2-\sigma^2+\sigma^2-\mu^2}{2}+1+1-1 \\
&\le \frac{\sigma^2-\mu^2}{2}+1+\frac{\eta^2-\sigma^2}{2}+1-1 \\
&= q_{p_b}(\mu,\sigma)+q_{p_b}(\sigma,\eta)-q_{p_b}(\sigma,\sigma) \\
&\le s\left[q_{p_b}(\mu,\sigma)+q_{p_b}(\sigma,\eta)\right]-q_{p_b}(\sigma,\sigma)
\end{aligned}
$$

sağlanır.

vi) $\sigma<\mu<\eta$ için

$$\begin{aligned}
q_{p_b}(\mu,\eta)&=\frac{\eta^2-\mu^2}{2}+1\\
&\le\frac{\eta^2-\sigma^2}{2}+1\\
&\le\frac{\eta^2-\sigma^2}{2}+1+\frac{\mu-\sigma}{2}+1-1\\
&=\frac{\mu-\sigma}{2}+1+\frac{\eta^2-\sigma^2}{2}+1-1\\
&=q_{p_b}(\mu,\sigma)+q_{p_b}(\sigma,\eta)-q_{p_b}(\sigma,\sigma)\\
&\le s\left[q_{p_b}(\mu,\sigma)+q_{p_b}(\sigma,\eta)\right]-q_{p_b}(\sigma,\sigma)
\end{aligned}$$

sağlanır.

vii) $\mu=0\ \ \sigma,\eta\in(0,1)$ ve $\eta<\sigma$ için

$$\begin{aligned}
q_{p_b}(\mu,\eta)&=q_{p_b}(0,\eta)\\
&=\eta+1\\
&<\sigma+1\\
&\le\sigma+1+\frac{\sigma-\eta}{2}+1-1\\
&=q_{p_b}(0,\sigma)+q_{p_b}(\sigma,\eta)-q_{p_b}(\sigma,\sigma)\\
&\le s\left[q_{p_b}(0,\sigma)+q_{p_b}(\sigma,\eta)\right]-q_{p_b}(\sigma,\sigma)
\end{aligned}$$

sağlanır.

viii) $\mu=0\ \ \sigma,\eta\in(0,1)$ ve $\sigma<\eta$ için

$$\begin{aligned}
q_{p_b}(\mu,\eta)&=q_{p_b}(0,\eta)\\
&=\eta+1\\
&\le4\left(\frac{\eta^2-\sigma^2}{2}+1\right)+\sigma\\
&\le4\left(\frac{\eta^2-\sigma^2}{2}+1\right)+4(\sigma+1)-1\\
&=4\left(\sigma+1+\frac{\eta^2-\sigma^2}{2}+1\right)-1\\
&=4\left[q_{p_b}(\mu,\sigma)+q_{p_b}(\sigma,\eta)\right]-q_{p_b}(\sigma,\sigma)
\end{aligned}$$

sağlanır.

ix) $\eta = 0 \ \sigma, \mu \in (0,1)$ ve $\mu < \sigma$ için

$$\begin{aligned} q_{p_b}(\mu,\eta) &= q_{p_b}(\mu,0) \\ &= \mu + 1 \\ &\le \sigma + 1 \\ &\le \frac{\sigma^2 - \mu^2}{2} + 1 + \sigma + 1 - 1 \\ &\le s\left(\frac{\sigma^2 - \mu^2}{2} + 1\right) + s(\sigma + 1) - 1 \\ &= s\left(\frac{\sigma^2 - \mu^2}{2} + 1 + \sigma + 1\right) - 1 \\ &= s\left[q_{p_b}(\mu,\sigma) + q_{p_b}(\sigma,\eta)\right] - q_{p_b}(\sigma,\sigma) \end{aligned}$$

sağlanır.

x) $\eta = 0 \ \sigma, \mu \in (0,1)$ ve $\sigma < \mu$ için

$$\begin{aligned} q_{p_b}(\mu,\eta) &= q_{p_b}(\mu,0) \\ &= \mu + 1 \\ &\le 4\left(\frac{\mu^2 - \sigma^2}{2} + 1\right) + \sigma \\ &\le 4\left(\frac{\mu^2 - \sigma^2}{2} + 1\right) + 4(\sigma + 1) - 1 \\ &= 4\left(\frac{\mu^2 - \sigma^2}{2} + 1 + \sigma + 1\right) - 1 \\ &= 4\left[q_{p_b}(\mu,\sigma) + q_{p_b}(\sigma,\eta)\right] - q_{p_b}(\sigma,\sigma) \end{aligned}$$

sağlanır.

xi) $\sigma = 0 \ \eta, \mu \in (0,1)$ ve $\mu < \eta$ için

$$\begin{aligned} q_{p_b}(\mu,\eta) &= \frac{\eta^2 - \mu^2}{2} + 1 \\ &\le \mu + 1 + \eta + 1 - 1 \\ &\le s(\mu + 1 + \eta + 1) - 1 \\ &= s\left[q_{p_b}(\mu,\sigma) + q_{p_b}(\sigma,\eta)\right] - q_{p_b}(\sigma,\sigma) \end{aligned}$$

sağlanır.

xii) $\sigma = 0$ olmak üzere $\eta, \mu \in (0,1)$ ve $\eta < \mu$ için

$$
\begin{aligned}
q_{p_b}(\mu,\eta) &= \frac{\mu-\eta}{2}+1 \\
&\le \mu+\eta+1+1-1 \\
&\le s(\mu+1+\eta+1)-1 \\
&= s\left[q_{p_b}(\mu,\sigma)+q_{p_b}(\sigma,\eta)\right]-q_{p_b}(\sigma,\sigma)
\end{aligned}
$$

sağlanır. Dolayısıyla, (W, q_{p_b}) ikilisi asimetrik kısmi $b-$metrik uzaydır.

Örnek 4.1.11. $W = \mathbb{N}^+ = \{1,2,3,...\}$ olsun. $1 < \varepsilon < 2$ olmak üzere $m,n \ge 2$ için

$$
\begin{aligned}
&q_{p_b}(1,m) = 1+(m-1)\varepsilon \\
&q_{p_b}(m,1) = m \\
&q_{p_b}(m,n) = 1+|m-n|\varepsilon, (m \ne n) \\
&q_{p_b}(1,1) = q_{p_b}(m,m) = 1
\end{aligned}
$$

olarak tanımlanan $q_{p_b} : W \times W \to \mathbb{R}^+$ dönüşümü W üzerinde $s \ge 2$ katsayısı ile asimetrik kısmi $b-$metriktir.

$(q_{p_b}1)$ $q_{p_b}(m,m) = q_{p_b}(m,n) = q_{p_b}(n,n)$ olsun.

i) $m < n$ için

$$1 = 1+(n-m)\varepsilon = 1 \Rightarrow (n-m)\varepsilon = 0 \Rightarrow m = n$$

dır.

ii) $m > n$ için

$$1 = 1+(m-n)\varepsilon = 1 \Rightarrow (m-n)\varepsilon = 0 \Rightarrow m = n$$

dır.

iii) $q_{p_b}(1,m)$ durumu için

$$1 = 1+(m-1)\varepsilon = 1 \Rightarrow (m-1)\varepsilon = 0 \Rightarrow m = n = 1$$

dır.

iv) $q_{p_b}(m,1)$ durumu için

$$1=m=1 \Rightarrow m=n=1$$

dır.

$(q_{p_b}2)$

i) $m<n$ için

$$q_{p_b}(m,m)=q_{p_b}(1,1)=1\leq 1+(n-m)\varepsilon=q_{p_b}(m,n)$$

dır.

ii) $m>n$ için

$$q_{p_b}(m,m)=q_{p_b}(1,1)=1\leq 1+(m-n)\varepsilon=q_{p_b}(m,n)$$

dır.

iii)

$$q_{p_b}(m,m)=q_{p_b}(1,1)=1\leq m=q_{p_b}(m,1)$$

sağlanır.

iv)

$$q_{p_b}(m,m)=q_{p_b}(1,1)=1\leq 1+(m-1)\varepsilon=q_{p_b}(1,m)$$

sağlanır.

$(q_{p_b}3)$

i) $m<n$ için

$$q_{p_b}(m,m)=q_{p_b}(1,1)=1\leq 1+(m-n)\varepsilon=q_{p_b}(n,m)$$

dır.

ii) $m>n$ için

$$q_{p_b}(m,m)=q_{p_b}(1,1)=1\leq 1+(n-m)\varepsilon=q_{p_b}(n,m)$$

dır.

iii)

$$q_{p_b}(m,m)=q_{p_b}(1,1)=1\leq n=q_{p_b}(n,1)$$

sağlanır.

iv)

$$q_{p_b}(m,m)=q_{p_b}(1,1)=1\leq 1+(n-1)\varepsilon=q_{p_b}(1,n)$$

sağlanır.

$(q_{p_b}4)$ $m,n,k\geq 2$ olsun.

i) $m<k<n$ için

$$\begin{aligned}
q_{p_b}(m,n)&=1+(n-m)\varepsilon\\
&=1+(n-m)\varepsilon+k\varepsilon-k\varepsilon+1-1\\
&=1+k\varepsilon-m\varepsilon+n\varepsilon-k\varepsilon+1-1\\
&=1+(k-m)\varepsilon+1+(n-k)\varepsilon-1\\
&\leq s\left[1+(k-m)\varepsilon+1+(n-k)\varepsilon\right]-1\\
&=s\left[q_{p_b}(m,k)+q_{p_b}(k,n)\right]-q_{p_b}(k,k)
\end{aligned}$$

sağlanır.

ii) $m<n<k$ için

$$\begin{aligned}
q_{p_b}(m,n)&=1+(n-m)\varepsilon\\
&\leq 1+(k-m)\varepsilon\\
&\leq 1+(k-m)\varepsilon\\
&\leq 1+(k-m)\varepsilon+1+(k-n)\varepsilon+1-1\\
&\leq s\left[1+(k-m)\varepsilon+1+(k-n)\varepsilon\right]-1\\
&=s\left[q_{p_b}(m,k)+q_{p_b}(k,n)\right]-q_{p_b}(k,k)
\end{aligned}$$

sağlanır.

iii) $k<m<n$ için

$$\begin{aligned} q_{p_b}(m,n) &= 1+(n-m)\varepsilon \\ &\le 1+(n-k)\varepsilon \\ &\le 1+(n-k)\varepsilon+1+(m-k)\varepsilon+1-1 \\ &\le s\left[1+(m-k)\varepsilon+1+(n-k)\varepsilon\right]-1 \\ &= s\left[q_{p_b}(m,k)+q_{p_b}(k,n)\right]-q_{p_b}(k,k) \end{aligned}$$

sağlanır.

iv) $1<m<n$ için

$$\begin{aligned} q_{p_b}(m,n) &= 1+(n-m)\varepsilon \\ &= 1+n\varepsilon-m\varepsilon \\ &\le 1+n\varepsilon-\varepsilon \\ &\le 1+n\varepsilon-\varepsilon+m-1 \\ &\le s\left[m+1+(n-1)\varepsilon\right]-1 \\ &= s\left[q_{p_b}(m,1)+q_{p_b}(1,n)\right]-q_{p_b}(1,1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_{p_b}(1,m) &= 1+(m-1)\varepsilon \\ &\le 1+(n-1)\varepsilon \\ &\le 1+(n-1)\varepsilon+(n-m)\varepsilon+1-1 \\ &\le s\left[1+(n-1)\varepsilon+1+(n-m)\varepsilon\right]-1 \\ &= s\left[q_{p_b}(1,n)+q_{p_b}(n,m)\right]-q_{p_b}(n,n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_{p_b}(1,n) &= 1+(n-1)\varepsilon \\ &= 1+n\varepsilon-\varepsilon \\ &= 1+n\varepsilon-\varepsilon+m\varepsilon-m\varepsilon+1-1 \\ &= 1+m\varepsilon-\varepsilon+1+n\varepsilon-m\varepsilon-1 \\ &\le s\left[1+(m-1)\varepsilon+1+(n-m)\varepsilon\right]-1 \\ &= s\left[q_{p_b}(1,m)+q_{p_b}(m,n)\right]-q_{p_b}(m,m) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_{p_b}(m,1) &= m \le n+(n-m)\varepsilon+1-1 \\ &= 1+(n-m)\varepsilon+n-1 \\ &\le s\left[1+(n-m)\varepsilon+n\right]-1 \\ &= s\left[q_{p_b}(m,n)+q_{p_b}(n,1)\right]-q_{p_b}(n,n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_{p_b}(n,1) &= n \\
&\le n\varepsilon \\
&\le n\varepsilon - m\varepsilon + m\varepsilon \\
&< n\varepsilon - m\varepsilon + 2m \\
&\le (n-m)\varepsilon + 2m + 2 - 1 \\
&\le 2(n-m)\varepsilon + 2m + 2 - 1 \\
&\le 2\left[1 + (n-m)\varepsilon + m\right] - 1 \\
&= 2\left[q_{p_b}(n,m) + q_{p_b}(m,1)\right] - q_{p_b}(m,m)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_{p_b}(m,m) = 1 &\le m + 1 + (m-1)\varepsilon - 1 \\
&\le s\left[m + 1 + (m-1)\varepsilon\right] - 1 \\
&= s\left[q_{p_b}(m,1) + q_{p_b}(1,m)\right] - q_{p_b}(1,1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_{p_b}(m,m) = 1 &\le 1 + (n-m)\varepsilon - (n-m)\varepsilon + 1 - 1 \\
&\le s\left[1 + |m-n|\varepsilon + 1 + |n-m|\varepsilon\right] - 1 \\
&= s\left[q_{p_b}(m,n) + q_{p_b}(n,m)\right] - q_{p_b}(n,n)
\end{aligned}$$

sağlanır.

v) $m > k > n$ için

$$\begin{aligned}
q_{p_b}(m,n) &= 1 + (m-n)\varepsilon \\
&= 1 + (m-n)\varepsilon + k\varepsilon - k\varepsilon + 1 - 1 \\
&= 1 + (m-k)\varepsilon + 1 + (k-n)\varepsilon - 1 \\
&\le s\left[1 + (m-k)\varepsilon + 1 + (k-n)\varepsilon\right] - 1 \\
&= s\left[q_{p_b}(m,k) + q_{p_b}(k,n)\right] - q_{p_b}(k,k)
\end{aligned}$$

dır.

vi) $m > n > k$ için

$$\begin{aligned}
q_{p_b}(m,n) &= 1 + (m-n)\varepsilon \\
&\le 1 + (m-k)\varepsilon \le 1 + (m-k)\varepsilon + (n-k)\varepsilon + 1 - 1 \\
&= 1 + (m-k)\varepsilon + 1 + (n-k)\varepsilon - 1 \\
&\le s\left[1 + (m-k)\varepsilon + 1 + (n-k)\varepsilon\right] - 1 \\
&= s\left[q_{p_b}(m,k) + q_{p_b}(k,n)\right] - q_{p_b}(k,k)
\end{aligned}$$

sağlanır.

vii) $k>m>n$ için

$$\begin{aligned}
q_{p_b}(m,n) &= 1+(m-n)\varepsilon \\
&\leq 1+(k-n)\varepsilon \\
&\leq 1+(k-n)\varepsilon+(k-m)\varepsilon+1-1 \\
&= 1+(k-n)\varepsilon+1+(k-m)\varepsilon-1 \\
&\leq s\left[1+(k-m)\varepsilon+1+(k-n)\varepsilon\right]-1 \\
&= s\left[q_{p_b}(m,k)+q_{p_b}(k,n)\right]-q_{p_b}(k,k)
\end{aligned}$$

dır.

viii) $m>n>1$ için

$$\begin{aligned}
q_{p_b}(m,n) &= 1+(m-n)\varepsilon \\
&\leq 1+m\varepsilon-1 \\
&\leq 1+m\varepsilon-1+(n-1)\varepsilon \\
&\leq 2m+2+2(n-1)\varepsilon-1 \\
&= 2\left[m+1+(n-1)\varepsilon\right]-1 \\
&= 2\left[q_{p_b}(m,1)+q_{p_b}(1,n)\right]-q_{p_b}(1,1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_{p_b}(1,m) &= 1+(m-1)\varepsilon \\
&= 1+m\varepsilon-\varepsilon+n\varepsilon-n\varepsilon+1-1 \\
&= 1+m\varepsilon-n\varepsilon+1+n\varepsilon-\varepsilon-1 \\
&= 1+(m-n)\varepsilon+1+(n-1)\varepsilon-1 \\
&\leq s\left[1+(n-1)\varepsilon+1+(m-n)\varepsilon\right]-1 \\
&= s\left[q_{p_b}(1,n)+q_{p_b}(n,m)\right]-q_{p_b}(n,n)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_{p_b}(m,1) &= m \\
&\leq m\varepsilon+n\varepsilon-n\varepsilon \\
&\leq m\varepsilon-n\varepsilon+2n \\
&\leq (m-n)\varepsilon+2n+2-1 \\
&\leq 2(m-n)\varepsilon+2n+2-1 \\
&\leq 2\left[1+(m-n)\varepsilon+n\right]-1 \\
&= 2\left[q_{p_b}(m,n)+q_{p_b}(n,1)\right]-q_{p_b}(n,n)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
q_{p_b}(1,n) &= 1+(n-1)\varepsilon \\
&\le 1+(m-1)\varepsilon \\
&\le 1+(m-1)\varepsilon+(m-n)\varepsilon+1-1 \\
&= 1+(m-1)\varepsilon+1+(m-n)\varepsilon-1 \\
&\le s\left[1+(m-1)\varepsilon+1+(m-n)\varepsilon\right]-1 \\
&= s\left[q_{p_b}(1,m)+q_{p_b}(m,n)\right]-q_{p_b}(m,m)
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
q_{p_b}(n,1) &= n \\
&\le m+(m-n)\varepsilon+1-1 \\
&\le s\left[1+(m-n)\varepsilon+m\right]-1 \\
&= s\left[q_{p_b}(n,m)+q_{p_b}(m,1)\right]-q_{p_b}(m,m)
\end{aligned}
$$

sağlanır. Dolayısıyla $s \ge 2$ için, (W,q_{p_b}) ikilisi asimetrik kısmi $b-$metrik uzaydır.

Tanım 4.1.12. [132] (W,q_{p_b}) herhangi asimetrik kısmi $b-$metrik uzay olmak üzere

$$B_{q_{p_b}}(\mu,\varepsilon)=\{\eta\in W : q_{p_b}(\mu,\eta)<q_{p_b}(\mu,\mu)+\varepsilon\}$$

ile tanımlanan kümeye μ merkezli, $\varepsilon>0$ yarıçaplı açık yuvar denir.

Benzer şekilde,

$$B_{q_{p_b}}[\mu,\varepsilon]=\{\eta\in W : q_{p_b}(\mu,\eta)\le q_{p_b}(\mu,\mu)+\varepsilon\}$$

$\mu\in W$ merkezli, $\varepsilon>0$ yarıçaplı kapalı yuvar denir.

(W,q_{p_b}) asimetrik kısmi $b-$metrik uzayında $\{B_{q_{p_b}}(\mu,\varepsilon) : \mu\in W, \varepsilon>0\}$ bazı ile W üzerinde üretilen topoloji $\tau_{q_{p_b}}$ 'dır.

Örnek 4.1.13. $W=\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ olmak üzere, $q_{p_b}(\mu,\eta)=\sin\mu+\sin\eta$ olarak tanımlanan $q_{p_b} : W\times W\to\mathbb{R}^+$ fonksiyonu $s\ge 1$ iken W üzerinde asimetrik kısmi $b-$metriktir. (W,q_{p_b}) asimetrik kısmi $b-$metrik uzayında

$B_{q_{p_b}}(\mu,\varepsilon)=\{\eta\in W : q_{p_b}(\mu,\eta)<q_{p_b}(\mu,\mu)+\varepsilon\}$ olduğundan

$$\begin{aligned} \sin\mu+\sin\eta &< \sin\mu+\sin\mu+\varepsilon \\ \sin\eta &< \sin\mu+\varepsilon \\ \eta &< arc(\sin\mu+\varepsilon) \end{aligned}$$

olup

$$B_{q_{p_b}}(\mu,\varepsilon)=\left[0,arc(\sin\mu+\varepsilon)\right)$$

elde edilir.

Örnek 4.1.14. $W=[1,\infty)$ olmak üzere, $q_{p_b}(\mu,\eta)=\ell n(\mu\eta)$ olarak tanımlanan $q_{p_b}:W\times W\to\mathbb{R}^+$ fonksiyonu $s\geq 1$ iken W üzerinde asimetrik kısmi $b-$metriktir. $\left(W,q_{p_b}\right)$ asimetrik kısmi $b-$metrik uzayında

$B_{q_{p_b}}(\mu,\varepsilon)=\left\{\eta\in W:q_{p_b}(\mu,\eta)<q_{p_b}(\mu,\mu)+\varepsilon\right\}$ olduğundan,

$$\begin{aligned} \ell n\mu+\ell n\eta &< \ell n\mu+\ell n\mu+\varepsilon \\ \ell n\eta &< \ell n\mu+\varepsilon \\ \eta &< e^{\ell n\mu+\varepsilon}=e^{\ell n\mu}e^{\varepsilon}=\mu e^{\varepsilon} \end{aligned}$$

olup

$$B_{q_{p_b}}(\mu,\varepsilon)=\left[1,\mu e^{\varepsilon}\right)$$

bulunur.

Örnek 4.1.15. $W=\mathbb{R}^+$ ve $q_p:W\times W\to\mathbb{R}^+$ olsun. $\forall\mu,\eta,\sigma\in W$ için

$$q_p(\mu,\eta)=\begin{cases}\max\left\{\eta^2-\mu^2,0\right\}+\mu^2, & \mu<\eta \quad \text{ise} \\ \mu^2, & \mu=\eta \quad \text{ise} \\ 2\mu^2-\eta^2, & \mu>\eta \quad \text{ise}\end{cases}$$

fonksiyonu verilsin. $\left(W,q_p\right)$ ikilisi asimetrik kısmi metrik uzaydır. Her asimetrik kısmi metrik uzay, asimetrik kısmi $b-$metrik uzay olduğundan, $\left(W,q_p\right)$ asimetrik kısmi $b-$metriktir. Buradan

$$B_{q_{p_b}}(\mu,\varepsilon)=\begin{cases}\left(-\sqrt{\mu^2+\varepsilon},\sqrt{\mu^2+\varepsilon}\right), & \mu<\eta \quad \text{ise} \\ \mathbb{R}^+, & \mu=\eta \quad \text{ise} \\ \left(\sqrt{\mu^2+\varepsilon},\infty\right), & \mu>\eta \quad \text{ise}\end{cases}$$

bulunur.

Uyarı 4.1.16. $b-$metrik uzayda her açık yuvar açık küme olmak zorunda olmadığından asimetrik kısmi $b-$metrik uzayda da her açık yuvar açık küme olmaz. Örneğin,

$W=\mathbb{N}^{+}=\{1,2,3,...\}$ olsun. $1<\varepsilon<2$ olmak üzere $m,n\geq 2$ için

$$
\begin{aligned}
&q_{p_b}(1,m)=1+(m-1).\varepsilon\\
&q_{p_b}(m,1)=m\\
&q_{p_b}(m,n)=1+|m-n|.\varepsilon,(m\neq n)\\
&q_{p_b}(1,1)=q_{p_b}(m,m)=1
\end{aligned}
$$

olarak tanımlanan $q_{p_b}:W\times W\to\mathbb{R}^{+}$ fonksiyonu W üzerinde $s\geq 2$ katsayısı ile asimetrik kısmi $b-$metrik uzay olduğundan

$$B_{q_{p_b}}\left(2,1-\frac{\varepsilon}{2}\right)=\left\{\eta\in W: q_{p_b}(2,\eta)<q_{p_b}(2,2)+1-\frac{\varepsilon}{2},1<\varepsilon<2\right\}$$

dır. Buradan

$$B_{q_{p_b}}\left(2,1-\frac{\varepsilon}{2}\right)=\{2\}$$

elde edilir.

$$B_{q_{p_b}}(2,r)=\left\{\eta\in W: q_{p_b}(2,\eta)<q_{p_b}(2,2)+r,r>0\right\}=\{1,2,3,4,\ldots\}$$

olarak bulunur. $B_{q_{p_b}}\left(2,1-\frac{\varepsilon}{2}\right)$ açık yuvarı için 2 merkezli bu yuvarın kapsayacağı herhangi bir açık yuvar bulunmadığından açık küme değildir. 2 noktasını içeren en küçük açık yuvar $1<r<\varepsilon$ için $B_{q_{p_b}}(2,r)=\{1,2\}$ kümesidir. Fakat $B_{q_{p_b}}(2,r)\not\subset B_{q_{p_b}}\left(2,1-\frac{\varepsilon}{2}\right)$’dır.

Teorem 4.1.17. Herhangi bir asimetrik kısmi $b-$metriğin topolojisi T_0- topolojisidir.

İspat: $(q_{p_b}1)$ ve $(q_{p_b}2)$ özelliklerinden $\mu\neq\eta$ noktaları için

$$q_{p_b}(\mu,\mu)<q_{p_b}(\mu,\eta)$$

dır. $\mu \in B_{q_{p_b}}(\mu,\varepsilon)$ ve $\eta \notin B_{q_{p_b}}(\mu,\varepsilon)$ elemanları için $\varepsilon = \dfrac{q_{p_b}(\mu,\eta) - q_{p_b}(\mu,\mu)}{2}$ pozitif sayısı vardır ve asimetrik kısmi $b-$metriğin topolojisi T_0 'dır.

$\eta \in B_{q_{p_b}}(\mu,\varepsilon)$ olsun. Bu durumda,

$$q_{p_b}(\mu,\eta) < q_{p_b}(\mu,\mu) + \varepsilon$$
$$q_{p_b}(\mu,\eta) < q_{p_b}(\mu,\mu) + \frac{q_{p_b}(\mu,\eta) - q_{p_b}(\mu,\mu)}{2}$$
$$q_{p_b}(\mu,\eta) < q_{p_b}(\mu,\mu)$$

olur. Bu ise $q_{p_b}(\mu,\mu) < q_{p_b}(\mu,\eta)$ olmasıyla çelişir. Yani, $\eta \in B_{q_{p_b}}(\mu,\varepsilon)$ kabulü yanlıştır. Böylece asimetrik kısmi $b-$metrik uzayın topolojisi T_0 olarak bulunur.

Uyarı 4.1.18 Herhangi bir asimetrik kısmi $b-$metrik uzayın topolojisi T_1 değildir.

$W = \mathbb{R}^+$ ve $q_{p_b} : W \times W \to \mathbb{R}^+$ olsun. $\forall \mu,\eta,\sigma \in W$ için

$$q_p(\mu,\eta) = \begin{cases} \max\{\eta^2 - \mu^2, 0\} + \mu^2, & \mu < \eta \quad \text{ise} \\ \mu^2, & \mu = \eta \quad \text{ise} \\ 2\mu^2 - \eta^2, & \mu > \eta \quad \text{ise} \end{cases}$$

fonksiyonu verilsin. (W, q_{p_b}) ikilisinin asimetrik kısmi $b-$metrik uzay olduğu ve açık yuvarının

$$B_{q_{p_b}}(\mu,\varepsilon) = \begin{cases} \left(-\sqrt{\mu^2+\varepsilon}, \sqrt{\mu^2+\varepsilon}\right), & \mu < \eta \quad \text{ise} \\ \mathbb{R}^+, & \mu = \eta \quad \text{ise} \\ \left(\sqrt{\mu^2+\varepsilon}, \infty\right), & \mu > \eta \quad \text{ise} \end{cases}$$

olduğu biliniyor. Burada $\mu < \eta$ değerleri için, açık yuvar $\left(-\sqrt{\mu^2+\varepsilon}, \sqrt{\mu^2+\varepsilon}\right)$ olduğundan bu yuvardan seçilen herhangi iki nokta için, birbirini içermeyen komşuluğu bulunmadığından T_1-topolojisi değildir.

Uyarı 4.1.19. Herhangi bir asimetrik kısmi $b-$metrik uzayın topolojisi, T_1- olmadığından T_2-de değildir.

Önerme 4.1.20. [128] $\left(W,q_{p_b}\right)$ asimetrik kısmi $b-$metrik uzay olsun. Aşağıdakiler sağlanır.

1) Eğer $q_{p_b}\left(\mu,\eta\right)=0$ ise $\mu=\eta$,

2) Eğer $\mu\neq\eta$ ise $q_{p_b}\left(\mu,\eta\right)>0$ ve $q_{p_b}\left(\eta,\mu\right)>0$.

İspat :

1) $q_{p_b}\left(\mu,\eta\right)=0$ olsun.

$$0\leq q_{p_b}\left(\mu,\mu\right)\leq q_{p_b}\left(\mu,\eta\right)\Rightarrow q_{p_b}\left(\mu,\mu\right)=0$$

ve

$$0\leq q_{p_b}\left(\eta,\eta\right)\leq q_{p_b}\left(\mu,\eta\right)\Rightarrow q_{p_b}\left(\eta,\eta\right)=0$$

olup buradan $q_{p_b}\left(\mu,\eta\right)=q_{p_b}\left(\mu,\mu\right)=q_{p_b}\left(\eta,\eta\right)$ olduğundan $\mu=\eta$ bulunur.

2) $\mu\neq\eta$ ise, $0<q_{p_b}\left(\mu,\mu\right)<q_{p_b}\left(\mu,\eta\right)$ ve $0<q_{p_b}\left(\mu,\mu\right)<q_{p_b}\left(\eta,\mu\right)$ olduğundan $q_{p_b}\left(\mu,\eta\right)>0$ ve $q_{p_b}\left(\eta,\mu\right)>0$ sağlanır.

Tanım 4.1.21. [128] $\left(W,q_{p_b}\right)$ asimetrik kısmi $b-$metrik uzay olsun. Bu durumda

i) Bir $\left\{\mu_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}\subset W$ dizisi $\mu\in W$ noktasına yakınsaktır $\Leftrightarrow q_{p_b}\left(\mu,\mu\right)=\lim\limits_{n\to\infty}q_{p_b}\left(\mu_n,\mu\right)=\lim\limits_{n\to\infty}q_{p_b}\left(\mu,\mu_n\right)$

sağlanır.

ii) Bir $\left\{\mu_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}\subset W$ dizisi, Cauchy dizisidir $\Leftrightarrow\lim\limits_{n,m\to\infty}q_{p_b}\left(\mu_m,\mu_n\right)$ ve $\lim\limits_{n,m\to\infty}q_{p_b}\left(\mu_n,\mu_m\right)$ limitleri mevcut ve sonludur.

iii) Eğer W uzayında her $\left\{\mu_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}\subset W$ Cauchy dizisi $\tau_{q_{p_b}}$ topolojisine göre $\mu\in W$ noktasına yakınsak ise, yani

$$q_{p_b}\left(\mu,\mu\right)=\lim_{n,m\to\infty}q_{p_b}\left(\mu_n,\mu_m\right)=\lim_{n,m\to\infty}q_{p_b}\left(\mu_m,\mu_n\right)$$

ise, $\left(W,q_{p_b}\right)$ asimetrik kısmi $b-$metrik uzayına tam uzay denir.

iv) Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$T\left(B_{q_{p_b}}(\mu_0,\delta)\right) \subset B_{q_{p_b}}\left(T(\mu_0),\varepsilon\right)$$

olacak şekilde $\delta > 0$ bulunuyorsa, $T: W \to W$ fonksiyonuna $\mu_0 \in W$ noktasında süreklidir denir.

Asimetrik metrikteki yakınsaklık, Cauchy dizisi ve tamlık tanımları asimetrik kısmi $b-$metrik uzayda aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

Tanım 4.1.22. $W \neq \varnothing$ bir küme ve $q_{p_b}: W \times W \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu asimetrik kısmi $b-$metrik, $\left(W, q_{p_b}\right)$ asimetrik kısmi $b-$metrik uzay olsun. $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset W$ dizisi ile $\mu \in W$ noktası verilsin.

$\forall \mu,\eta \in W$ için, $q^s_{p_b}(\mu,\eta) = \max\left\{q_{p_b}(\mu,\eta), q_{p_b}(\eta,\mu)\right\}$ olarak tanımlansın.

i) $q_{p_b}(\mu,\mu) = \lim\limits_{n\to\infty} q_{p_b}(\mu,\mu_n)$ oluyorsa $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi μ noktasına sol $q_{p_b}-$ yakınsaktır denir.

ii) $q_{p_b}(\mu,\mu) = \lim\limits_{n\to\infty} q_{p_b}(\mu_n,\mu)$ oluyorsa $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi μ noktasına sağ $q_{p_b}-$ yakınsaktır denir.

iii) $q_{p_b}(\mu,\mu) = \lim\limits_{n\to\infty} q_{p_b}(\mu,\mu_n) = \lim\limits_{n\to\infty} q_{p_b}(\mu_n,\mu)$ oluyorsa $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi μ noktasına yakınsar denir.

iv) $q_{p_b}(\mu,\mu) = \lim\limits_{n\to\infty} q_{p_b}(\mu,\mu_n)$ oluyorsa $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisine sol $q_{p_b}-$Cauchy dizisi denir.

v) $q_{p_b}(\mu,\mu) = \lim\limits_{n\to\infty} q_{p_b}(\mu_n,\mu)$ oluyorsa $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisine sağ $q_{p_b}-$Cauchy dizisi denir.

vi) $m \geq n$ olmak üzere,

$q_{p_b}(\mu,\mu) = \lim\limits_{n\to\infty} q_{p_b}(\mu_m,\mu_n)$ oluyorsa $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisine sağ $K_{q_{p_b}}-$Cauchy dizisi denir.

vii) $m \geq n$ olmak üzere,

$q_{p_b}(\mu,\mu) = \lim\limits_{n\to\infty} q_{p_b}(\mu_n,\mu_m)$ oluyorsa $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisine sol $K_{q_{p_b}}-$Cauchy dizisi denir.

viii) $\lim\limits_{n,m\to\infty} q_{p_b}\left(\mu_n,\mu_m\right)$ ve $\lim\limits_{n,m\to\infty} q_{p_b}\left(\mu_m,\mu_n\right)$ mevcut ve sonlu ise $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisine Cauchy dizisi denir.

ix) Eğer bu uzaydaki her sol $q_{p_b}-$Cauchy dizisi sol $q_{p_b}-$yakınsak ise W uzayına sol $q_{p_b}-$dizisel tam uzay denir.

x) Eğer bu uzaydaki her sağ $q_{p_b}-$Cauchy dizisi sağ $q_{p_b}-$yakınsak ise W uzayına sağ $q_{p_b}-$dizisel tam uzay denir.

xi) Eğer bu uzaydaki her sol $K_{q_{p_b}}-$Cauchy dizisi sol $q_{p_b}-$yakınsak ise W uzayına sol $K_{q_{p_b}}-$dizisel tam uzay denir.

xii) Eğer bu uzaydaki her sağ $K_{q_{p_b}}-$Cauchy dizisi sağ q_{p_b}-yakınsak ise W uzayına sağ $K_{q_{p_b}}$ dizisel tam uzay denir.

xiii) Eğer bu uzaydaki her $q_{p_b}^s-$Cauchy dizisi sol $q_{p_b}-$yakınsak ise W uzayına $q_{p_b}^s$ dizisel tam uzay denir.

xiv) Eğer bu uzaydaki her sağ $K_{q_{p_b}}-$Cauchy dizisi $q_{p_b}^s-$yakınsak ise W uzayına sağ Symth q_{p_b} dizisel tam uzay denir.

xv) Eğer bu uzaydaki her sol $K_{q_{p_b}}-$Cauchy dizisi, $q_{p_b}^s-$yakınsak ise W uzayına e sol Symth q_{p_b} dizisel tam uzay denir.

xvi) Eğer bu uzaydaki her $q_{p_b}^s-$Cauchy dizisi, $q_{p_b}^s-$yakınsak ise W uzayına q_{p_b} bi tam uzay denir.

Uyarı 4.1.23. Herhangi bir asimetrik kısmi $b-$metrik uzayda limit tek olmak zorunda değildir. Örneğin,

$q_{p_b}:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ dönüşümü $q_{p_b}\left(\mu,\eta\right)=\max\{\eta-\mu,0\}+\mu$ olarak tanımlanmış olup, $\left(W,q_{p_b}\right)$ asimetrik kısmi $b-$metrik uzaydır. Bu uzayda $\left\{\frac{1}{n+1}\right\}$ dizisi verilsin.

$q_{p_b}(0,0)=\lim\limits_{n\to\infty} q_{p_b}\left(\frac{1}{n+1},0\right)=\lim\limits_{n\to\infty} q_{p_b}\left(0,\frac{1}{n+1}\right)$ olup bu durumda, $n\to\infty$ için $\frac{1}{n+1}\to 0$ sağlanır.

$q_{p_b}(1,1)=\lim\limits_{n\to\infty} q_{p_b}\left(\frac{1}{n+1},1\right)=\lim\limits_{n\to\infty} q_{p_b}\left(1,\frac{1}{n+1}\right)$ olup bu durumda, $n\to\infty$ için $\frac{1}{n+1}\to 1$ sağlanır.

Dolayısıyla, asimetrik kısmi $b-$metrik uzayda $\left\{\frac{1}{n+1}\right\}$ dizisinin birden fazla limiti olduğundan limitin tekliğinden söz edilemez.

Uyarı 4.1.24. $b-$metrik fonksiyonu genelde sürekli olmadığından asimetrik kısmi $b-$metrik fonksiyonu da genelde sürekli değildir. Örneğin,

$W=[0,1]$ olsun.

$$q_{p_b}(\mu,\eta)=\begin{cases} \frac{\mu-\eta}{2}+1, & \mu>\eta\in(0,1] \text{ ise} \\ 1, & \mu=\eta\in[0,1] \text{ ise} \\ \frac{\eta^2-\mu^2}{2}+1, & \mu<\eta\in(0,1] \text{ ise} \end{cases}$$

ve

$$q_{p_b}(\eta,0)=q_{p_b}(0,\eta)=\eta+1,\ \eta\in(0,1)$$

olarak tanımlanan $q_{p_b}:W\times W\to\mathbb{R}^+$ dönüşümü, $s\geq 4$ için W üzerinde asimetrik kısmi $b-$metriktir.

$$\lim_{n\to\infty} q_{p_b}(\mu_n,1)=\lim_{n\to\infty} q_{p_b}\left(\frac{1}{n+2},1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{1}{n+2}\right)^2}{2}+1=\frac{3}{2}$$

ve

$$q_{p_b}(0,1)=1+1=2$$

bulunur. $\lim\limits_{n\to\infty} q_{p_b}(\mu_n,1)=q_{p_b}(0,1)$ olmalıydı. Ancak $\lim\limits_{n\to\infty} q_{p_b}(\mu_n,1)=\frac{3}{2}\neq 2=q_{p_b}(0,1)$ sağlandığından asimetrik kısmi $b-$metrik fonksiyonu da her zaman sürekli değildir.

Önerme 4.1.25. [132] $\left(W, q_{p_b}\right)$ herhangi bir asimetrik kısmi $b-$metrik uzay ve $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$, W üzerinde bir dizi olsun.

$\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n=\mu$, $\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n=\eta$ ve $q_{p_b}(\mu,\mu)=q_{p_b}(\eta,\eta)=0$ ise bu durumda $\mu=\eta$ sağlanıır.

İspat : Asimetrik kısmi $b-$metrik uzayın üçgen eşitsizliğinden

$$q_{p_b}(\mu,\eta)\le s\left[q_{p_b}(\mu,\mu_n)+q_{p_b}(\mu_n,\eta)\right]-q_{p_b}(\mu_n,\mu_n)$$
$$q_{p_b}(\mu,\eta)\le sq_{p_b}(\mu,\mu_n)+sq_{p_b}(\mu_n,\eta)$$

sağlanır. Burada $n\to\infty$ için limit alınırsa

$$0\le\lim_{n\to\infty}q_{p_b}(\mu,\eta)\le s\lim_{n\to\infty}q_{p_b}(\mu,\mu_n)+s\lim_{n\to\infty}q_{p_b}(\mu_n,\eta)$$

$$0\le q_{p_b}(\mu,\eta)\le sq_{p_b}(\mu,\mu)+sq_{p_b}(\eta,\eta)=0$$

$$q_{p_b}(\mu,\eta)=q_{p_b}(\mu,\mu)=q_{p_b}(\eta,\eta)=0\Rightarrow\mu=\eta$$

elde edilir.

Önerme 4.1.26. [128] $\left(W, q_{p_b}\right)$ herhangi bir asimetrik kısmi $b-$metrik uzay ve $\left(W, d_{q_{p_b}}\right)$ $b-$metrik uzay olsun. Eğer $\left(W, q_{p_b}\right)$ tam ise $\left(W, d_{q_{p_b}}\right)$ tamdır. Ayrıca,

$$\lim_{n,m\to\infty}d_{q_{p_b}}(\mu_n,\mu_m)=0\Leftrightarrow q_{p_b}(\mu,\mu)=\lim_{n\to\infty}q_{p_b}(\mu,\mu_n)=\lim_{n,m\to\infty}q_{p_b}(\mu_m,\mu_n)$$

ve

$$q_{p_b}(\mu,\mu)=\lim_{n\to\infty}q_{p_b}(\mu_n,\mu)=\lim_{n,m\to\infty}q_{p_b}(\mu_n,\mu_m)$$

sağlanır.

İspat : $\left(W, q_{p_b}\right)$ tam olduğundan, $\tau_{q_{p_b}}$ topolojisine göre her $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}\in W$ Cauchy dizisi $\mu\in W$ noktasına yakınsaktır ve

$$q_{p_b}(\mu,\mu)=\lim_{n,m\to\infty}q_{p_b}(\mu_n,\mu_m)=\lim_{n,m\to\infty}q_{p_b}(\mu_m,\mu_n)$$

sağlanır. $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\left(W, d_{q_{p_b}}\right)$ uzayında bir Cauchy dizisi olsun. $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin $\left(W, q_{p_b}\right)$ uzayında Cauchy dizisi olduğu gösterilecektir. $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\left(W, d_{q_{p_b}}\right)$ uzayında Cauchy dizisi olduğundan $\lim\limits_{n,m\to\infty} d_{q_{p_b}}(\mu_n, \mu_m)$ var ve sonludur.

$$d_{q_{p_b}}(\mu_n, \mu_m) = q_{p_b}(\mu_n, \mu_m) + q_{p_b}(\mu_m, \mu_n) - q_{p_b}(\mu_n, \mu_n) - q_{p_b}(\mu_m, \mu_m)$$

sağlanır. $\lim\limits_{n,m\to\infty} q_{p_b}(\mu_n, \mu_m)$ ve $\lim\limits_{n,m\to\infty} q_{p_b}(\mu_m, \mu_n)$ mevcut ve sonludur. Bu nedenle, $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ $\left(W, q_{p_b}\right)$ uzayında bir Cauchy dizisidir. $\left(W, q_{p_b}\right)$ tam olduğundan, $\tau_{q_{p_b}}$ topolojisine göre $\mu \in W$ noktasına yakınsar ve tanım sağlanır. $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin $\left(W, d_{q_{p_b}}\right)$ uzayında yakınsak olması için $d_{q_{p_b}}(\mu, \mu) = \lim\limits_{n\to\infty} d_{q_{p_b}}(\mu, \mu_n)$ olduğu gösterilmelidir. $d_{q_{p_b}}$ fonksiyonunun tanımından $d_{q_{p_b}}(\mu, \mu) = 0$ 'dır.

$$\lim_{n\to\infty} d_{q_{p_b}}(\mu, \mu_n) = \lim_{n\to\infty} q_{p_b}(\mu, \mu_n) + \lim_{n\to\infty} q_{p_b}(\mu_n, \mu) - \lim_{n\to\infty} q_{p_b}(\mu_n, \mu_n) - \lim_{n\to\infty} q_{p_b}(\mu, \mu) = 0$$

sağlanır. Bu durumda, $d_{q_{p_b}}(\mu, \mu) = \lim\limits_{n\to\infty} d_{q_{p_b}}(\mu, \mu_n)$ olur. $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy dizisi uzayda bir noktaya yakınsadığından $\left(W, d_{q_{p_b}}\right)$ uzayı tamdır.

$\Rightarrow$) $\lim\limits_{n,m\to\infty} d_{q_{p_b}}(\mu_n, \mu_m) = 0$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} 0 = \lim_{n,m\to\infty} d_{q_{p_b}}(\mu_n, \mu_m) &= \lim_{n,m\to\infty} q_{p_b}(\mu_n, \mu_m) + \lim_{n,m\to\infty} q_{p_b}(\mu_m, \mu_n) \\ &\quad - \lim_{n,m\to\infty} q_{p_b}(\mu_n, \mu_n) - \lim_{n,m\to\infty} q_{p_b}(\mu_m, \mu_m) \end{aligned}$$

olduğundan

$$\lim_{n,m\to\infty} q_{p_b}(\mu_n, \mu_m) = \lim_{n\to\infty} q_{p_b}(\mu_n, \mu) = \lim_{n\to\infty} q_{p_b}(\mu, \mu)$$

ve

$$\lim_{n,m\to\infty} q_{p_b}(\mu_m, \mu_n) = \lim_{n\to\infty} q_{p_b}(\mu, \mu_n) = \lim_{n\to\infty} q_{p_b}(\mu, \mu)$$

bulunur.

$\Leftarrow$)

$$\lim_{n,m\to\infty} q_{p_b}\left(\mu_n,\mu_m\right)=\lim_{n\to\infty} q_{p_b}\left(\mu_n,\mu\right)=\lim_{n\to\infty} q_{p_b}\left(\mu,\mu\right)$$

ve

$$\lim_{n,m\to\infty} q_{p_b}\left(\mu_m,\mu_n\right)=\lim_{n\to\infty} q_{p_b}\left(\mu,\mu_n\right)=\lim_{n\to\infty} q_{p_b}\left(\mu,\mu\right)$$

olsun.

$$d_{q_{p_b}}\left(\mu_n,\mu_m\right)=q_{p_b}\left(\mu_n,\mu_m\right)+q_{p_b}\left(\mu_m,\mu_n\right)-q_{p_b}\left(\mu_n,\mu_n\right)-q_{p_b}\left(\mu_m,\mu_m\right)$$

olduğundan eşitliğin her iki tarafında limit alınırsa

$$\lim_{n,m\to\infty} d_{q_{p_b}}\left(\mu_n,\mu_m\right)=0$$

elde edilir.

4.2. Asimetrik Kısmi $b-$Metrik Uzayda Sabit Nokta Teorisi

Bu bölümde $\left(\alpha,\beta\right)-D_{\varphi}$ daralma şartı tanımlanarak, bu daralma şartını sağlayan sabit nokta teoremi ispatlanmıştır. Bunlara bağlı olarak bazı sonuçlar elde edilmiş ve yeni bazı daralma şartları verilmiştir.

Tanım 4.2.1. $s\geq 1$ katsayısı ile $\left(W,q_{p_b}\right)$ asimetrik kısmi $b-$metrik uzay ve $\alpha,\beta:W\to[0,\infty)$ iki fonksiyon olsun. Her $\mu,\eta\in W$ ve $q_{p_b}\left(T\mu,T\eta\right)>0$ için

$$P\left(\mu,\eta\right)=\max\Big\{q_{p_b}\left(\mu,\eta\right),q_{p_b}\left(T\mu,\mu\right),q_{p_b}\left(T\eta,\eta\right),\\ \frac{q_{p_b}\left(T\mu,\mu\right)q_{p_b}\left(T\eta,\eta\right)}{1+q_{p_b}\left(T\mu,T\eta\right)},\frac{q_{p_b}\left(T\mu,\mu\right)q_{p_b}\left(T\eta,\eta\right)}{1+q_{p_b}\left(\mu,\eta\right)}\Big\}$$

olmak üzere

$$\alpha\left(\mu\right)\beta\left(\eta\right)\geq 1\Rightarrow D\left(s^2q_{p_b}\left(T\mu,T\eta\right)\right)\leq\varphi\left(D\left(P\left(\mu,\eta\right)\right)\right) \qquad (4.2)$$

ifadesini sağlayan $D\in\Delta$ ve φ sürekli kıyaslama fonksiyonları var olsun. Bu durumda $T:W\to W$ dönüşümüne $\left(\alpha,\beta\right)-D_{\varphi}$ daralma dönüşümü denir.

Teorem 4.2.2. (W,q_{p_b}) bir sağ Symth tam asimetrik kısmi $b-$metrik uzay ve $\alpha,\beta:W\to[0,\infty)$ iki fonksiyon olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan $T:W\to W$ dönüşümü verilsin.

1) T, $(\alpha,\beta)-D_\varphi$ daralma dönüşümüdür;
2) T dönüşümü döngüsel $(\alpha,\beta)-$geçişli dönüşümdür;
3) $\alpha(\mu_0)\geq 1$ ve $\beta(\mu_0)\geq 1$ olan $\mu_0\in W$ vardır;
4) Her $n\in\mathbb{N}$ için $\alpha(\mu_n)\geq 1$ ve $\mu_n\to\sigma\,(n\to\infty)$ olacak şekilde $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset W$ dizisi varsa $\alpha(\mu)\geq 1$ bulunur.
5)
   i. T süreklidir veya
   ii. her $n\in\mathbb{N}$ için $\mu_n\to\sigma\,(n\to\infty)$ ve $\alpha(\mu_n)\geq 1$ olan $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset W$ dizisinin her $k\in\mathbb{N}$ için $\alpha(\mu_{n_k})\geq 1$ olacak şekilde $\{\mu_{n_k}\}$ alt dizisi vardır.
6) $F(T)$, T dönüşümünün sabit noktalarının kümesi olmak üzere, her $\mu,\eta\in F(T)$ için $\alpha(\mu)\geq 1$ ve $\beta(\eta)\geq 1$'dır.

Bu durumda T dönüşümü tek sabit noktaya sahiptir.

İspat : Her $n\geq 0\in\mathbb{N}$ için $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset W$ iterasyon dizisi

$$\mu_1=T\mu_0,\ \mu_2=T\mu_1,\cdots,\mu_n=T\mu_{n-1}=T^n\mu_0$$

olarak tanımlansın. Teoremin 3. hipotezinden $\alpha(\mu_0)\geq 1$ olan $\mu_0\in W$ vardır. T döngüsel $(\alpha,\beta)-$geçişli dönüşüm ve $\alpha(\mu_0)\geq 1$ olduğundan $\beta(\mu_1)=\beta(T\mu_0)\geq 1$ ve bundan dolayı $\alpha(\mu_2)=\alpha(T\mu_1)\geq 1$ sağlanır. Her $n\in\mathbb{N}$ için devam edilirse, $\alpha(\mu_n)\geq 1$ ve $\beta(\mu_{n-1})\geq 1$ elde edilir. T döngüsel $(\alpha,\beta)-$geçişli dönüşüm ve $\beta(\mu_0)\geq 1$ olduğundan benzer yöntemle her $n\in\mathbb{N}$ için $\beta(\mu_n)\geq 1$ ve $\alpha(\mu_{n-1})\geq 1$ bulunur. Dolayısıyla her $n\in\mathbb{N}$ için $\alpha(\mu_n)\geq 1$ ve $\beta(\mu_n)\geq 1$ bulunur. Ayrıca, her $n\in\mathbb{N}$ için $\alpha(\mu_n)\beta(\mu_{n-1})\geq 1$ sağlanır. $q_{p_b}(\mu_{n_0+1},\mu_{n_0})=0$ olan $n_0\in\mathbb{N}$ var olsun. $(q_{p_b}2)$ ve $(q_{p_b}3)$ özelliklerinden

$$0 \leq q_{p_b}\left(\mu_{n_0}, \mu_{n_0}\right) \leq q_{p_b}\left(\mu_{n_0+1}, \mu_{n_0}\right) \Rightarrow q_{p_b}\left(\mu_{n_0}, \mu_{n_0}\right) = 0$$

ve

$$0 \leq q_{p_b}\left(\mu_{n_0+1}, \mu_{n_0+1}\right) \leq q_{p_b}\left(\mu_{n_0+1}, \mu_{n_0}\right) \Rightarrow q_{p_b}\left(\mu_{n_0+1}, \mu_{n_0+1}\right) = 0$$

olur. Bu nedenle

$$q_{p_b}\left(\mu_{n_0+1}, \mu_{n_0+1}\right) = q_{p_b}\left(\mu_{n_0+1}, \mu_{n_0}\right) = q_{p_b}\left(\mu_{n_0}, \mu_{n_0}\right)$$

elde edilir. Asimetrik kısmi $b-$metriğin birinci aksiyomundan $\mu_{n_0} = \mu_{n_0+1}$ olur. Yani, $\mu_{n_0} = \mu_{n_0+1} = T\mu_{n_0}$ olduğundan μ_{n_0}, T dönüşümünün sabit noktasıdır.

Şimdi her $n \in \mathbb{N}$ için $\mu_n \neq \mu_{n+1}$ olsun. Bu nedenle $q_{p_b}\left(T\mu_n, T\mu_{n-1}\right) > 0$'dır. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha\left(\mu_n\right)\beta\left(\mu_{n-1}\right) \geq 1$ olduğundan (4.2) daralma şartından

$$\begin{aligned}
P\left(\mu_n, \mu_{n-1}\right) = \max\Big\{& q_{p_b}\left(\mu_n, \mu_{n-1}\right), q_{p_b}\left(T\mu_n, \mu_n\right), q_{p_b}\left(T\mu_{n-1}, \mu_{n-1}\right), \\
& \frac{q_{p_b}\left(T\mu_n, \mu_n\right) q_{p_b}\left(T\mu_{n-1}, \mu_{n-1}\right)}{1 + q_{p_b}\left(T\mu_n, T\mu_{n-1}\right)}, \frac{q_{p_b}\left(T\mu_n, \mu_n\right) q_{p_b}\left(T\mu_{n-1}, \mu_{n-1}\right)}{1 + q_{p_b}\left(\mu_n, \mu_{n-1}\right)}\Big\} \\
= \max\Big\{& q_{p_b}\left(\mu_n, \mu_{n-1}\right), q_{p_b}\left(\mu_{n+1}, \mu_n\right), q_{p_b}\left(\mu_n, \mu_{n-1}\right), \\
& \frac{q_{p_b}\left(\mu_{n+1}, \mu_n\right) q_{p_b}\left(\mu_n, \mu_{n-1}\right)}{1 + q_{p_b}\left(\mu_{n+1}, \mu_n\right)}, \frac{q_{p_b}\left(\mu_{n+1}, \mu_n\right) q_{p_b}\left(\mu_n, \mu_{n-1}\right)}{1 + q_{p_b}\left(\mu_n, \mu_{n-1}\right)}\Big\} \\
= \max\Big\{& q_{p_b}\left(\mu_n, \mu_{n-1}\right), q_{p_b}\left(\mu_{n+1}, \mu_n\right)\Big\}
\end{aligned}$$

iken

$$\begin{aligned}
D\left(s^2 q_{p_b}\left(\mu_{n+1}, \mu_n\right)\right) &= D\left(s^2 q_{p_b}\left(T\mu_n, T\mu_{n-1}\right)\right) \\
&\leq \varphi\left(D\left(P\left(\mu_n, \mu_{n-1}\right)\right)\right) \\
&< D\left(P\left(\mu_n, \mu_{n-1}\right)\right)
\end{aligned} \tag{4.3}$$

olur.

$\max\left\{q_{p_b}\left(\mu_n, \mu_{n-1}\right), q_{p_b}\left(\mu_{n+1}, \mu_n\right)\right\} = q_{p_b}\left(\mu_{n+1}, \mu_n\right)$ olsun. Bu durumda

$$D\left(s^2 q_{p_b}\left(\mu_{n+1}, \mu_n\right)\right) < D\left(q_{p_b}\left(\mu_{n+1}, \mu_n\right)\right)$$

olur bu D fonksiyonunun özelliğiyle çelişir. Dolayısıyla,

$$\max\left\{q_{p_b}\left(\mu_n,\mu_{n-1}\right),q_{p_b}\left(\mu_{n+1},\mu_n\right)\right\}=q_{p_b}\left(\mu_n,\mu_{n-1}\right)$$

olmalıdır. Bu durumda

$$D\left(s^2 q_{p_b}\left(\mu_{n+1},\mu_n\right)\right)<D\left(q_{p_b}\left(\mu_n,\mu_{n-1}\right)\right)$$

sağlanır. D fonksiyonu azalmayan ve sürekli bir fonksiyon olduğundan, aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$s^2 q_{p_b}\left(\mu_{n+1},\mu_n\right)<q_{p_b}\left(\mu_n,\mu_{n-1}\right)$$

Bu yüzden,

$$q_{p_b}\left(\mu_{n+1},\mu_n\right)<s^2 q_{p_b}\left(\mu_{n+1},\mu_n\right)<q_{p_b}\left(\mu_n,\mu_{n-1}\right)$$

bulunur. Her $n\in\mathbb{N}$ için $\left\{q_{p_b}\left(\mu_{n+1},\mu_n\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi negatif olmayan reel sayıların azalan bir dizisidir. Böylece

$$\lim_{n\to\infty} q_{p_b}\left(\mu_{n+1},\mu_n\right)=\lim_{n\to\infty} q_{p_b}\left(\mu_n,\mu_{n-1}\right)=L$$

olacak şekilde $L\geq 0$ sayısı mevcuttur. $L>0$ olsun. (4.3) ifadesinde her iki tarafın $n\to\infty$ için limiti alınırsa, D ve φ fonksiyonları sürekli olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} D\left(s^2 q_{p_b}\left(\mu_{n+1},\mu_n\right)\right)\leq \lim_{n\to\infty}\varphi\left(D\left(P\left(\mu_n,\mu_{n-1}\right)\right)\right)<\lim_{n\to\infty} D\left(P\left(\mu_n,\mu_{n-1}\right)\right)$$

$$D\left(s^2 \lim_{n\to\infty} q_{p_b}\left(\mu_{n+1},\mu_n\right)\right)\leq \varphi\left(D\left(\lim_{n\to\infty} P\left(\mu_n,\mu_{n-1}\right)\right)\right)<D\left(\lim_{n\to\infty} P\left(\mu_n,\mu_{n-1}\right)\right)$$

$$D\left(s^2 L\right)\leq\varphi\left(D\left(L\right)\right)<D\left(L\right)$$

elde edilir ki bu çelişkidir. Bu durumda $L=0$ olmalıdır. Yani,

$$\lim_{n\to\infty} q_{p_b}\left(\mu_{n+1},\mu_n\right)=\lim_{n\to\infty} q_{p_b}\left(\mu_n,\mu_{n-1}\right)=0 \tag{4.4}$$

bulunur. Diğer taraftan, her $n\in\mathbb{N}$ için $\alpha\left(\mu_{n-1}\right)\beta\left(\mu_n\right)\geq 1$ olduğundan (4.2) daralma şartından

$$\begin{aligned}P\left(\mu_{n-1},\mu_n\right)=\max\Bigg\{&q_{p_b}\left(\mu_{n-1},\mu_n\right),q_{p_b}\left(T\mu_{n-1},\mu_{n-1}\right),q_{p_b}\left(T\mu_n,\mu_n\right),\\&\frac{q_{p_b}\left(T\mu_{n-1},\mu_{n-1}\right)q_{p_b}\left(T\mu_n,\mu_n\right)}{1+q_{p_b}\left(T\mu_{n-1},T\mu_n\right)},\frac{q_{p_b}\left(T\mu_{n-1},\mu_{n-1}\right)q_{p_b}\left(T\mu_n,\mu_n\right)}{1+q_{p_b}\left(\mu_{n-1},\mu_n\right)}\Bigg\}\end{aligned}$$

iken

$$D\left(s^2 q_{p_b}\left(\mu_n,\mu_{n+1}\right)\right)=D\left(s^2 q_{p_b}\left(T\mu_{n-1},T\mu_n\right)\right)\le \varphi\left(D\left(P\left(\mu_{n-1},\mu_n\right)\right)\right)<D\left(P\left(\mu_{n-1},\mu_n\right)\right)$$

sağlanır.

$\left\{q_{p_b}\left(\mu_{n+1},\mu_n\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ azalmayan dizisi ve aşağıdaki verilen iki eşitsizlik göz önüne alınırsa:

$$\begin{aligned} q_{p_b}\left(\mu_n,\mu_{n+1}\right) &\le s\left[q_{p_b}\left(\mu_n,\mu_{n-1}\right)+q_{p_b}\left(\mu_{n-1},\mu_{n+1}\right)\right]-q_{p_b}\left(\mu_{n-1},\mu_{n-1}\right) \\ &< sq_{p_b}\left(\mu_n,\mu_{n-1}\right)+sq_{p_b}\left(\mu_{n-1},\mu_{n+1}\right) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} q_{p_b}\left(\mu_{n-1},\mu_n\right) &\le s\left[q_{p_b}\left(\mu_{n-1},\mu_{n+1}\right)+q_{p_b}\left(\mu_{n+1},\mu_n\right)\right]-q_{p_b}\left(\mu_{n+1},\mu_{n+1}\right) \\ &< sq_{p_b}\left(\mu_{n-1},\mu_{n+1}\right)+sq_{p_b}\left(\mu_{n+1},\mu_n\right) \end{aligned}$$

olur. Bu durumda

$$P\left(\mu_{n-1},\mu_n\right)=\max\left\{q_{p_b}\left(\mu_{n-1},\mu_n\right),q_{p_b}\left(\mu_n,\mu_{n-1}\right)\right\}$$

olacağı görülür. Buradan aşağıdaki durumlar elde edilir.

1.Durum: $1\le i\le k$ olacak şekilde yalnız sonlu sayıda i sayısı için $q_{p_b}\left(\mu_{n_i-1},\mu_{n_i}\right)>q_{p_b}\left(\mu_{n_i},\mu_{n_i-1}\right)$ oluyorsa $n>n_k$ için $q_{p_b}\left(\mu_{n-1},\mu_n\right)\le q_{p_b}\left(\mu_n,\mu_{n-1}\right)$ sağlanır ve (4.4) eşitsizliğinden

$$\lim_{n\to\infty} q_{p_b}\left(\mu_{n-1},\mu_n\right)=0$$

bulunur.

2.Durum: Sonsuz tane n_i için $q_{p_b}\left(\mu_{n_i-1},\mu_{n_i}\right)>q_{p_b}\left(\mu_{n_i},\mu_{n_i-1}\right)$ oluyorsa her n_i için $P\left(\mu_{n_i-1},\mu_{n_i}\right)=q_{p_b}\left(\mu_{n_i-1},\mu_{n_i}\right)$ sağlanır. Bu durumda (4.2) daralma şartından

$$D\left(s^2 q_{p_b}\left(\mu_{n_i},\mu_{n_i+1}\right)\right)<D\left(P\left(\mu_{n_i-1},\mu_{n_i}\right)\right)=D\left(q_{p_b}\left(\mu_{n_i-1},\mu_{n_i}\right)\right) \tag{4.5}$$

olur. D azalmayan ve sürekli fonksiyon olduğundan

$$s^2 q_{p_b}\left(\mu_{n_i},\mu_{n_i+1}\right)<q_{p_b}\left(\mu_{n_i-1},\mu_{n_i}\right)$$

elde edilir. Yani;

$$q_{p_b}\left(\mu_{n_i},\mu_{n_i+1}\right)<s^2q_{p_b}\left(\mu_{n_i},\mu_{n_i+1}\right)<q_{p_b}\left(\mu_{n_i-1},\mu_{n_i}\right)$$

olur. Bu durumda her $n\in\mathbb{N}$ için $\left\{q_{p_b}\left(\mu_{n_i-1},\mu_{n_i}\right)\right\}$ dizisi azalan olup,

$$\lim_{i\to\infty}q_{p_b}\left(\mu_{n_i-1},\mu_{n_i}\right)=r$$

olacak şekilde $r\geq 0$ sayısı vardır. $r>0$ olsun. (4.5) ifadesinde $i\to\infty$ için limit alınırsa

$$D\left(s^2r\right)\leq\varphi\left(D\left(r\right)\right)<D\left(r\right)$$

elde edilir ki D ve φ fonksiyonlarının sürekli olmasından bu bir çelişkidir. $r=0$ olmalıdır. Bu yüzden

$$\lim_{i\to\infty}q_{p_b}\left(\mu_{n_i-1},\mu_{n_i}\right)=0 \tag{4.6}$$

sağlanır. $\left\{\mu_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin $\left\{\mu_{n_i}\right\}$ alt dizisinde olmayan elemanlar $1\leq i\in\mathbb{N}$ için $\left\{\mu_{m_i}\right\}$ olarak tanımlanırsa bu m_i değerleri için

$$q_{p_b}\left(\mu_{m_i-1},\mu_{m_i}\right)\leq q_{p_b}\left(\mu_{m_i},\mu_{m_i-1}\right) \tag{4.7}$$

olduğu görülür. Eğer μ_{m_i} değerleri sonlu sayıdaysa (4.6) ifadesindeki limit $\left\{\mu_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ için de sıfıra eşittir. Sonsuz sayıda ise (4.7) eşitsizliğinde $i\to\infty$ için limit alınırsa

$$\lim_{i\to\infty}q_{p_b}\left(\mu_{m_i-1},\mu_{m_i}\right)\leq\lim_{i\to\infty}q_{p_b}\left(\mu_{m_i},\mu_{m_i-1}\right)$$

olacağından her $\left\{\mu_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ için $\lim_{n\to\infty}q_{p_b}\left(\mu_n,\mu_{n-1}\right)=0$ olduğundan μ_{m_i} için de geçerli olup,

$$\lim_{i\to\infty}q_{p_b}\left(\mu_{m_i-1},\mu_{m_i}\right)=0 \tag{4.8}$$

elde edilir. $\left\{\mu_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $\left\{\mu_{n_i}\right\}$ ve $\left\{\mu_{m_i}\right\}$ dizilerinin birleşiminden oluşmaktadır. (4.6) ve (4.8) ifadeleri birlikte değerlendirildiğinde

$$\lim_{n\to\infty} q_{p_b}\left(\mu_{n-1},\mu_n\right)=0$$

bulunur.

Şimdi, $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin $\left(W,q_{p_b}\right)$ uzayında sağ $K_{q_{p_b}}-$Cauchy dizisi olduğu gösterilsin. Bunun yerine Önerme (4.1.26) gereği $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin $\left(W,d_{q_{p_b}}\right)$ uzayında sağ $K-$Cauchy dizisi olduğunu göstermek yeterlidir. (4.1) ifadesinden

$$\begin{aligned} d_{q_{p_b}}\left(\mu_n,\mu_{n-1}\right) &= q_{p_b}\left(\mu_n,\mu_{n-1}\right)+q_{p_b}\left(\mu_{n-1},\mu_n\right) \\ &\quad -q_{p_b}\left(\mu_n,\mu_n\right)-q_{p_b}\left(\mu_{n-1},\mu_{n-1}\right) \end{aligned} \tag{4.9}$$

olduğu görülür. Bu eşitlikte $n\to\infty$ için limit alınırsa

$$\lim_{n\to\infty} d_{q_{p_b}}\left(\mu_n,\mu_{n-1}\right)=0 \tag{4.10}$$

bulunur. $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin sağ $K-$Cauchy dizisi olmadığı kabul edilsin. Bu durumda, $\varepsilon>0$ sayısı vardır öyle ki $k>0$ için n_k en küçük indis iken $n(k)>m(k)>k$ olacak şekilde $\{\mu_{m_k}\}$ ve $\{\mu_{n_k}\}$, $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin alt dizileri olmak üzere

$$d_{q_{p_b}}\left(\mu_{n_k},\mu_{m_k}\right)\geq\varepsilon \tag{4.11}$$

sağlanır. Bunun anlamı $\forall k\in\mathbb{N}$ için

$$d_{qp_b}\left(\mu_{n_k-1},\mu_{m_k}\right)<\varepsilon \tag{4.12}$$

olur. Eğer üçgen eşitsizliği uygulanırsa

$$\varepsilon\leq d_{q_{p_b}}\left(\mu_{n_k},\mu_{m_k}\right)\leq sd_{q_{p_b}}\left(\mu_{n_k},\mu_{n_k-1}\right)+sd_{q_{p_b}}\left(\mu_{n_k-1},\mu_{m_k}\right) \tag{4.13}$$

bulunur. $k\to\infty$ için (4.13) ifadesinde limit alınırsa

$$\varepsilon\leq\liminf_{k\to\infty} d_{q_{p_b}}\left(\mu_{n_k},\mu_{m_k}\right)\leq\limsup_{k\to\infty} d_{q_{p_b}}\left(\mu_{n_k},\mu_{m_k}\right)\leq s\varepsilon \tag{4.14}$$

elde edilir. Benzer şekilde $k\to\infty$ için (4.12)’de limit alınırsa

$$\frac{\varepsilon}{s} \le \liminf_{k\to\infty} d_{q_{p_b}}\left(\mu_{n_k-1}, \mu_{m_k}\right) \le \limsup_{k\to\infty} d_{q_{p_b}}\left(\mu_{n_k-1}, \mu_{m_k}\right) \le \varepsilon \tag{4.15}$$

elde edilir. Üçgen eşitsizliği uygulanırsa

$$d_{q_{p_b}}\left(\mu_{n_k-1}, \mu_{m_k-1}\right) \le s\left[d_{q_{p_b}}\left(\mu_{n_k-1}, \mu_{m_k}\right) + d_{q_{p_b}}\left(\mu_{m_k}, \mu_{m_k-1}\right)\right] \tag{4.16}$$

bulunur. (4.16)'da $k \to \infty$ için limit alınırsa

$$\limsup_{k\to\infty} d_{q_{p_b}}\left(\mu_{n_k-1}, \mu_{m_k-1}\right) \le s\varepsilon \tag{4.17}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Teoremin 5. hipotezinin ii) şartından

$$\alpha\left(\mu_{n_k-1}\right)\beta\left(\mu_{m_k-1}\right) \ge 1 \text{ ve } d_{q_{p_b}}\left(T\mu_{n_k-1}, T\mu_{m_k-1}\right) > 0$$

olduğundan (4.1) daralma şartı uygulanırsa

$$\begin{aligned} P\left(\mu_{n_k-1}, \mu_{m_k-1}\right) = \max\Bigg\{ & d_{q_{p_b}}\left(\mu_{n_k-1}, \mu_{m_k-1}\right), d_{q_{p_b}}\left(T\mu_{n_k-1}, \mu_{n_k-1}\right), d_{q_{p_b}}\left(T\mu_{m_k-1}, \mu_{m_k-1}\right), \\ & \frac{d_{q_{p_b}}\left(T\mu_{n_k-1}, \mu_{n_k-1}\right) d_{q_{p_b}}\left(T\mu_{m_k-1}, \mu_{m_k-1}\right)}{1 + d_{q_{p_b}}\left(T\mu_{n_k-1}, T\mu_{m_k-1}\right)}, \frac{d_{q_{p_b}}\left(T\mu_{n_k-1}, \mu_{n_k-1}\right) d_{q_{p_b}}\left(T\mu_{m_k-1}, \mu_{m_k-1}\right)}{1 + d_{q_{p_b}}\left(\mu_{n_k-1}, \mu_{m_k-1}\right)} \Bigg\} \\ = \max\Bigg\{ & d_{q_{p_b}}\left(\mu_{n_k-1}, \mu_{m_k-1}\right), d_{q_{p_b}}\left(\mu_{n_k}, \mu_{n_k-1}\right), d_{q_{p_b}}\left(\mu_{m_k}, \mu_{m_k-1}\right), \\ & \frac{d_{q_{p_b}}\left(\mu_{n_k}, \mu_{n_k-1}\right) d_{q_{p_b}}\left(\mu_{m_k}, \mu_{m_k-1}\right)}{1 + d_{q_{p_b}}\left(\mu_{n_k}, \mu_{m_k}\right)}, \frac{d_{q_{p_b}}\left(\mu_{n_k}, \mu_{n_k-1}\right) d_{q_{p_b}}\left(\mu_{m_k}, \mu_{m_k-1}\right)}{1 + d_{q_{p_b}}\left(\mu_{n_k-1}, \mu_{m_k-1}\right)} \Bigg\} \end{aligned}$$

iken

$$\begin{aligned} D\left(s^2 d_{q_{p_b}}\left(\mu_{n_k}, \mu_{m_k}\right)\right) &= D\left(s^2 d_{q_{p_b}}\left(T\mu_{n_k-1}, T\mu_{m_k-1}\right)\right) \\ &\le \varphi\left(D\left(P\left(\mu_{n_k-1}, \mu_{m_k-1}\right)\right)\right) \\ &< D\left(P\left(\mu_{n_k-1}, \mu_{m_k-1}\right)\right) \end{aligned} \tag{4.18}$$

bulunur.

$P\left(\mu_{n_k-1}, \mu_{m_k-1}\right)$ ifadesinde $k \to \infty$ için limit alınırsa

$$\limsup_{k\to\infty} P\left(\mu_{n_k-1}, \mu_{m_k-1}\right) \le s\varepsilon \tag{4.19}$$

bulunur. (4.19) eşitsizliği kullanılarak (4.18) ile verilen ifadede $k \to \infty$ için limit alınırsa D fonksiyonu sürekli olduğundan

$$\liminf_{k\to\infty} D\left(s^2 d_{q_{Pb}}\left(\mu_{n_k}, \mu_{m_k}\right)\right) \le \limsup_{k\to\infty} D\left(s^2 d_{q_{Pb}}\left(\mu_{n_k}, \mu_{m_k}\right)\right) < \limsup_{k\to\infty} D\left(P\left(\mu_{n_k-1}, \mu_{m_k-1}\right)\right)$$

$$D\left(s^2 \liminf_{k\to\infty} d_{q_{Pb}}\left(\mu_{n_k}, \mu_{m_k}\right)\right) < D\left(\limsup_{k\to\infty} P\left(\mu_{n_k-1}, \mu_{m_k-1}\right)\right)$$

$$D\left(s^2\varepsilon\right) < D\left(s\varepsilon\right)$$

bulunur bu ise çelişkidir. Bu Cauchy dizisi olmasın kabulüyle çelişir. Bu nedenle, $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $\left(W, q_{p_b}\right)$ uzayında sağ $K_{q_{Pb}}$ $-$Cauchy dizisidir. $\left(W, q_{p_b}\right)$ uzayı sağ Symth tam asimetrik kısmi $b-$metrik uzay olduğundan,

$$\lim_{n\to\infty} q_{p_b}\left(\mu_n, \mu\right) = 0 \text{ ve } \lim_{n\to\infty} q_{p_b}\left(\mu, \mu_n\right) = 0$$

olacak şekilde $\mu \in W$ noktası vardır. Şimdi μ noktasının T dönüşümünün sabit noktası olduğu gösterilsin. Tersine $\mu \ne T\mu$ olsun. Bu durumda, $q_{p_b}\left(T\mu, \mu\right) > 0$ olur. Ayrıca, teoremin 4.şartından dolayı $\alpha(\mu)\beta(\mu_n) \ge 1$ olduğundan, (4.2) daralma şartından

$$\begin{aligned}
P\left(\mu, \mu_n\right) = \max\Big\{ & q_{p_b}\left(\mu, \mu_n\right), q_{p_b}\left(T\mu, \mu\right), q_{p_b}\left(T\mu_n, \mu_n\right), \\
& \frac{q_{p_b}\left(T\mu, \mu\right) q_{p_b}\left(T\mu_n, \mu_n\right)}{1 + q_{p_b}\left(T\mu, T\mu_n\right)}, \frac{q_{p_b}\left(T\mu, \mu\right) q_{p_b}\left(T\mu_n, \mu_n\right)}{1 + q_{p_b}\left(\mu, \mu_n\right)} \Big\} \\
= \max\Big\{ & q_{p_b}\left(\mu, \mu_n\right), q_{p_b}\left(T\mu, \mu\right), q_{p_b}\left(\mu_{n+1}, \mu_n\right), \\
& \frac{q_{p_b}\left(T\mu, \mu\right) q_{p_b}\left(\mu_{n+1}, \mu_n\right)}{1 + q_{p_b}\left(T\mu, \mu_{n+1}\right)}, \frac{q_{p_b}\left(T\mu, \mu\right) q_{p_b}\left(\mu_{n+1}, \mu_n\right)}{1 + q_{p_b}\left(\mu, \mu_n\right)} \Big\}
\end{aligned}$$

iken

$$\begin{aligned}
D\left(s^2 q_{p_b}\left(T\mu, \mu_{n+1}\right)\right) &= D\left(s^2 q_{p_b}\left(T\mu, T\mu_n\right)\right) \\
&\le \varphi\left(D\left(P\left(\mu, \mu_n\right)\right)\right) \\
&< D\left(P\left(\mu, \mu_n\right)\right)
\end{aligned} \tag{4.20}$$

bulunur. $P\left(\mu,\mu_n\right)$ ifadesinde $n\to\infty$ için limit alınırsa,

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\mu,\mu_n\right)=q_{p_b}\left(T\mu,\mu\right)$$

eşitliği elde edilir. 4.20 ifadesinde $n\to\infty$ için limit alınırsa D sürekli olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} D\left(s^2.q_{p_b}\left(T\mu,\mu_{n+1}\right)\right)<\lim_{n\to\infty} D\left(P\left(\mu,\mu_n\right)\right)$$

ve

$$D\left(s^2\lim_{n\to\infty} q_{p_b}\left(T\mu,\mu_{n+1}\right)\right)<D\left(\lim_{n\to\infty} P\left(\mu,\mu_n\right)\right)=D\left(q_{p_b}\left(T\mu,\mu\right)\right)$$

olup D fonksiyonu azalmayan ve sürekli olduğundan

$$s^2\lim_{n\to\infty} q_{p_b}\left(T\mu,\mu_{n+1}\right)<q_{p_b}\left(T\mu,\mu\right) \tag{4.21}$$

bulunur. $\left(q_{p_b}4\right)$ üçgen eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} q_{p_b}\left(T\mu,\mu\right) &\le s\left[q_{p_b}\left(T\mu,\mu_{n+1}\right)+q_{p_b}\left(\mu_{n+1},\mu\right)\right]-q_{p_b}\left(\mu_{n+1},\mu_{n+1}\right) \\ &< sq_{p_b}\left(T\mu,\mu_{n+1}\right)+sq_{p_b}\left(\mu_{n+1},\mu\right) \end{aligned}$$

bulunup burada $n\to\infty$ için limit alınırsa,

$$q_{p_b}\left(T\mu,\mu\right)<s\lim_{n\to\infty} q_{p_b}\left(T\mu,\mu_{n+1}\right) \tag{4.22}$$

elde edilip, (4.21) ve (4.22) eşitsizlikleri birlikte düşünülürse, çelişki elde edildiğinden $q_{p_b}\left(T\mu,\mu\right)>0$ kabulü yanlıştır. Bu nedenle, $q_{p_b}\left(T\mu,\mu\right)=0$ olmalıdır. Asimetrik kısmi $b-$metrik uzayın $\left(q_{p_b}2\right)$ ve $\left(q_{p_b}3\right)$ özelliklerinden $q_{p_b}\left(\mu,\mu\right)\le q_{p_b}\left(T\mu,\mu\right)$ ve $q_{p_b}\left(T\mu,T\mu\right)\le q_{p_b}\left(T\mu,\mu\right)$ olduğu biliniyor. Dolayısıyla, $q_{p_b}\left(\mu,\mu\right)=q_{p_b}\left(T\mu,T\mu\right)=0$ olduğu görülür. Bu nedenle, $q_{p_b}\left(\mu,\mu\right)=q_{p_b}\left(T\mu,\mu\right)=q_{p_b}\left(T\mu,T\mu\right)$ eşitliğine ulaşılıp, asimetrik kısmi $b-$metrik uzayın $\left(q_{p_b}1\right)$ özelliğinden $\mu=T\mu$ olduğu anlaşılır. Böylece, μ noktası T dönüşümünün sabit noktasıdır.

Şimdi, T dönüşümünün sabit noktasının tekliğini göstermek için, $T\eta=\eta\neq\mu$ olacak şekilde $\eta\in W$ başka bir sabit nokta olsun. Teoremin 6.şartından $\alpha(\mu)\beta(\eta)\geq 1$ olup (4.2) daralma şartı uygulanırsa:

$$\begin{aligned}P(\mu,\eta)&=\max\Big\{q_{p_b}(\mu,\eta),q_{p_b}(T\mu,\mu),q_{p_b}(T\eta,\eta),\\&\qquad\frac{q_{p_b}(T\mu,\mu)q_{p_b}(T\eta,\eta)}{1+q_{p_b}(T\mu,T\eta)},\frac{q_{p_b}(T\mu,\mu)q_{p_b}(T\eta,\eta)}{1+q_{p_b}(\mu,\eta)}\Big\}\\&=\max\Big\{q_{p_b}(\mu,\eta),q_{p_b}(\mu,\mu),q_{p_b}(\eta,\eta),\\&\qquad\frac{q_{p_b}(\mu,\mu)q_{p_b}(\eta,\eta)}{1+q_{p_b}(\mu,\eta)},\frac{q_{p_b}(\mu,\mu)q_{p_b}(\eta,\eta)}{1+q_{p_b}(\mu,\eta)}\Big\}\\&=q_{p_b}(\mu,\eta)\end{aligned}$$

iken

$$D\left(s^2q_{p_b}(\mu,\eta)\right)=D\left(s^2q_{p_b}(T\mu,T\eta)\right)\leq\varphi\Big(D\big(P(\mu,\eta)\big)\Big)<D\big(P(\mu,\eta)\big)$$

olur. Buradan

$$D\left(s^2q_{p_b}(\mu,\eta)\right)<D\left(q_{p_b}(\mu,\eta)\right)$$

bulunur. Fakat bu bir çelişkidir. Dolayısıyla, $q_{p_b}(T\mu,T\eta)=0$ sağlanır. Asimetrik kısmi $b-$metriğin $(q_{p_b}2)$ ve $(q_{p_b}3)$ özelliklerinden $q_{p_b}(\mu,\mu)\leq q_{p_b}(\mu,\eta)$ ve $q_{p_b}(\eta,\eta)\leq q_{p_b}(\mu,\eta)$ olup $q_{p_b}(\mu,\mu)=q_{p_b}(\eta,\eta)=0$ bulunur. Bu nedenle, $q_{p_b}(\mu,\mu)=q_{p_b}(\mu,\eta)=q_{p_b}(\eta,\eta)$ sağlanır. Asimetrik kısmi $b-$metriğin $(q_{p_b}1)$ özelliğinden $\mu=\eta$ elde edilir. Yani, T dönüşümünün μ noktasından farklı bir sabit noktasının varlığı kabulü yanlıştır. Dolayısıyla, μ noktası T dönüşümünün tek sabit noktasıdır.

Örnek 4.2.3. $W=[0,1]$ kümesi ve $q_{p_b}(\mu,\eta)=|\mu-\eta|+\mu$ olarak tanımlanan $q_{p_b}:W\times W\to\mathbb{R}^+$ fonksiyonu verilsin. $s\geq 1$ katsayısı ile (W,q_{p_b}) sağ Symth tam asimetrik kısmi $b-$metrik uzaydır. $\alpha,\beta:W\to[0,\infty)$ fonksiyonu

$$\alpha(\mu)=\beta(\mu)=\begin{cases}1, & \mu\in[0,1]\ \text{ ise}\\0, & \mu\notin[0,1]\ \text{ ise}\end{cases}$$

olarak tanımlansın. $\vartheta > 0$ için $D(\vartheta) = \vartheta$ olarak tanımlanan $D:(0,\infty) \to (0,\infty)$ fonksiyonu için $D \in \Delta$ sağlanır.

$$r \in (0,\infty) \text{ için } \varphi(r) = \frac{r}{2}$$

olarak tanımlanan $\varphi:(0,\infty) \to (0,\infty)$ fonksiyonu sürekli kıyaslama fonksiyondur. $T:W \to W$ fonksiyonu

$$T(\mu) = \frac{\mu}{4s^2},\ s \ge 1$$

olarak tanımlanmış olsun. $\mu \in W$ için $\alpha(\mu) \ge 1$ olur. $\mu \in [0,1]$ olduğundan $T\mu \in [0,1]$ sağlanır. Buradan $\beta(T\mu) \ge 1$'dır. Benzer şekilde $\beta(\mu) \ge 1$ olup, $\alpha(T\mu) \ge 1$ olduğu görülür. Buradan, T döngüsel $(\alpha,\beta)-$geçişli dönüşümdür. Eğer $\mu \ne \eta$ ve $\mu,\eta \in [0,1]$ ise $\alpha(\mu)\beta(\eta) \ge 1$ olduğu açıktır. Şimdi, T dönüşümünün (4.2)'deki eşitsizliği sağladığı gösterilsin:

$$P(\mu,\eta) = \max\left\{ q_{p_b}(\mu,\eta), q_{p_b}(T\mu,\mu), q_{p_b}(T\eta,\eta), \frac{q_{p_b}(T\mu,\mu)q_{p_b}(T\eta,\eta)}{1+q_{p_b}(T\mu,T\eta)}, \frac{q_{p_b}(T\mu,\mu)q_{p_b}(T\eta,\eta)}{1+q_{p_b}(\mu,\eta)} \right\}$$

$$\begin{aligned}
P(\mu,\eta) &= \max\left\{ |\mu-\eta|+\mu, \left|\frac{\mu}{4s^2}-\mu\right|+\frac{\mu}{4s^2}, \left|\frac{\eta}{4s^2}-\eta\right|+\frac{\eta}{4s^2}, \right. \\
&\quad \left. \frac{\left(\left|\frac{\mu}{4s^2}-\mu\right|+\frac{\mu}{4s^2}\right)\left(\left|\frac{\eta}{4s^2}-\eta\right|+\frac{\eta}{4s^2}\right)}{1+\left(\left|\frac{\mu}{4s^2}-\frac{\eta}{4s^2}\right|+\frac{\mu}{4s^2}\right)}, \frac{\left(\left|\frac{\mu}{4s^2}-\mu\right|+\frac{\mu}{4s^2}\right)\left(\left|\frac{\eta}{4s^2}-\eta\right|+\frac{\eta}{4s^2}\right)}{1+|\mu-\eta|+\mu} \right\} \\
&= \max\left\{ |\mu-\eta|+\mu, \mu, \eta, \frac{\mu\eta}{1+\frac{1}{4s^2}\left(|\mu-\eta|+\mu\right)}, \frac{\mu\eta}{1+|\mu-\eta|+\mu} \right\} \\
&= |\mu-\eta|+\mu
\end{aligned}$$

iken

$$
\begin{aligned}
D\left(s^2 q_{p_b}\left(T\mu, T\eta\right)\right) &= D\left(s^2 q_{p_b}\left(\frac{\mu}{4s^2}, \frac{\eta}{4s^2}\right)\right) \\
&= D\left(s^2\left(\left|\frac{\mu}{4s^2} - \frac{\eta}{4s^2}\right| + \frac{\mu}{4s^2}\right)\right) \\
&= D\left(s^2 \frac{1}{4s^2}\left(|\mu-\eta| + \mu\right)\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(|\mu-\eta| + \mu\right)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$
\varphi\left(D\left(P\left(\mu,\eta\right)\right)\right) = \varphi\left(D\left(|\mu-\eta| + \mu\right)\right) = \varphi\left(|\mu-\eta| + \mu\right) = \frac{|\mu-\eta| + \mu}{2}
$$

bulunur. Bu durumda,

$$
D\left(s^2 q_{p_b}\left(T\mu, T\eta\right)\right) = \frac{|\mu-\eta| + \mu}{4} \leq \frac{|\mu-\eta| + \mu}{2} = \varphi\left(D\left(P\left(\mu,\eta\right)\right)\right)
$$

olduğundan teoremin şartları sağlanır ve $T\mu = \frac{\mu}{4s^2} = \mu$ olup $\mu = 0$, T dönüşümünün sabit noktasıdır.

Sonuç 4.2.4. $\left(W, q_{p_b}\right)$ sağ Symth tam asimetrik kısmi $b-$metrik uzay ve $\alpha, \beta : W \to [0,\infty)$ iki fonksiyon olsun. $T : W \to W$ dönüşümü aşağıdaki şartları sağlasın:

1) T, döngüsel $(\alpha,\beta)-$ geçişli dönüşümdür;

2) $\alpha(\mu_0) \geq 1$ ve $\beta(\mu_0) \geq 1$ olan $\mu_0 \in W$ vardır;

3) Her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha(\mu_n) \geq 1$ ve $\mu_n \to \sigma\,(n \to \infty)$ olacak şekilde W uzayında bir $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi varsa $\alpha(\mu) \geq 1$'dır.

4)

   i) T süreklidir veya

   ii) her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha(\mu_n) \geq 1$ ve $\mu_n \to \sigma\,(n \to \infty)$ olacak şekilde W uzayında bir $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ varsa, her $k \in \mathbb{N}$ için $\alpha\left(\mu_{n_k}\right) \geq 1$ olacak şekilde $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin $\left\{\mu_{n_k}\right\}$ alt dizisi vardır.

c_1) $D(t)=t$, $t>0$ olacak şekilde $D\in\Delta$ fonksiyonu ve φ sürekli kıyaslama fonksiyonu bulunsun. $q_{p_b}(T\mu,T\eta)>0$ olmak üzere,

$$\alpha(\mu)\beta(\eta)\geq 1\Rightarrow s^2 q_{p_b}(T\mu,T\eta)\leq\varphi\left(P(\mu,\eta)\right)$$

sağlanır.

c_2**)** $D\in\Delta$ fonksiyonu ve φ is sürekli kıyaslama fonksiyonu verilsin. $q_{p_b}(T\mu,T\eta)>0$ olmak üzere

$$\alpha(\mu)\beta(\eta)\geq 1\Rightarrow D\left(s^2 q_{p_b}(T\mu,T\eta)\right)\leq\varphi\left(D\left(q_{p_b}(\mu,\eta)\right)\right)$$

sağlanır.

c_3**)** $\theta\in\Theta$ fonksiyonu ve $\tau\in(0,1)$ sayısı için

$$\theta\left(s^2 q_{p_b}(T\mu,T\eta)\right)\leq\left[\theta\left(q_{p_b}(\mu,\eta)\right)\right]^{\tau}$$

sağlanır.

c_4**)** $\theta\in\Theta$ fonksiyonu ve $\tau\in(0,1)$ için

$$P(\mu,\eta)=\max\left\{q_{p_b}(\mu,\eta),q_{p_b}(T\mu,\mu),q_{p_b}(T\eta,\eta),\frac{q_{p_b}(T\mu,\mu)q_{p_b}(T\eta,\eta)}{1+q_{p_b}(T\mu,T\eta)},\frac{q_{p_b}(T\mu,\mu)q_{p_b}(T\eta,\eta)}{1+q_{p_b}(\mu,\eta)}\right\}$$

iken

$$\theta\left(s^2 q_{p_b}(T\mu,T\eta)\right)\leq\left[\theta\left(P(\mu,\eta)\right)\right]^{\tau}$$

sağlanır.

5. ASİMETRİK KISMİ GENİSLETİLMİŞ $b-$METRİK UZAYLAR VE SABİT NOKTA TEORİSİ

Bu bölümün birinci kısmında asimetrik kısmi genişletilmiş $b-$metrik uzay yapısı tanıtıldı. İkinci bölümde ise $(\alpha,\beta)-\varphi_e$ daralma şartı tanımlanarak, bu daralma şartını sağlayan sabit nokta teoremi ispatlanmıştır. Bunlara bağlı olarak bazı sonuçlar elde edilmiştir.

5.1. Asimetrik Kısmi Genisletilmiş $b-$Metrik Uzaylar ve Bazı Topolojik Özellikleri

Tanım 5.1.1. $W \neq \varnothing$ bir küme ve $\theta: W\times W \to [1,\infty)$ olsun. $q_{p_e}: W\times W \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu $\forall \mu,\eta,\sigma \in W$ için

$(q_{p_e}1)$ $q_{p_e}(\mu,\mu)=q_{p_e}(\mu,\eta)=q_{p_e}(\eta,\eta) \Rightarrow \mu=\eta$,

$(q_{p_e}2)$ $q_{p_e}(\mu,\mu)\leq q_{p_e}(\mu,\eta)$,

$(q_{p_e}3)$ $q_{p_e}(\mu,\mu)\leq q_{p_e}(\eta,\mu)$,

$(q_{p_e}4)$ $q_{p_e}(\mu,\eta)\leq \theta(\mu,\eta)\left[q_{p_e}(\mu,\sigma)+q_{p_e}(\sigma,\eta)\right]-q_{p_e}(\sigma,\sigma)$

şartlarını sağlıyorsa q_{p_e} fonksiyonuna asimetrik kısmi genişletilmiş $b-$metrik, (W,q_{p_e}) ikilisine de asimetrik kısmi genişletilmiş $b-$metrik uzay denir.

Uyarı 5.1.2. Her asimetrik kısmi $b-$metrik uzay, asimetrik kısmi genişletilmiş $b-$metrik uzaydır. Fakat tersi her zaman doğru değildir.

$\Rightarrow$Asimetrik metrik$\Rightarrow$asimetrik kısmi metrik$\Rightarrow$asimetrik kısmi $b-$metrik

$\Rightarrow$asimetrik kısmi genişletilmiş $b-$metrik'tir.

Yani, $q \Rightarrow q_p \Rightarrow q_{p_b} \Rightarrow q_{p_e}$'dır.

$\Rightarrow$kısmi metrik$\Rightarrow$ asimetrik kısmi metrik$\Rightarrow$ asimetrik kısmi $b-$metrik

$\Rightarrow$asimetrik kısmi genişletilmiş $b-$metrik'tir.

Yani, $p \Rightarrow q_p \Rightarrow q_{p_b} \Rightarrow q_{p_e}$ 'dır.

Uyarı 5.1.3. $\left(W, q_{p_e}\right)$ asimetrik kısmi genişletilmiş $b-$metrik uzay olmak üzere,

$$d_{q_{p_e}}(\mu,\eta) = q_{p_e}(\mu,\eta) + q_{p_e}(\eta,\mu) - q_{p_e}(\mu,\mu) - q_{p_e}(\eta,\eta) \tag{5.1}$$

olarak tanımlanan $d_{q_{p_e}} : W \times W \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu W uzayında bir genişletilmiş $b-$metriktir.

$(e1)$

$\Rightarrow$) $d_{q_{p_e}}(\mu,\eta) = 0$ olsun.

$$\begin{aligned} 0 = d_{q_{p_e}}(\mu,\eta) &= q_{p_e}(\mu,\eta) + q_{p_e}(\eta,\mu) - q_{p_e}(\mu,\mu) - q_{p_e}(\eta,\eta) \\ &= q_{p_e}(\mu,\eta) - q_{p_e}(\mu,\mu) + q_{p_e}(\eta,\mu) - q_{p_e}(\eta,\eta) \end{aligned}$$

olup, q_{p_e} asimetrik kısmi genişletilmiş $b-$metrik olduğundan, $q_{p_e}(\mu,\mu) \leq q_{p_e}(\mu,\eta)$ ve $q_{p_e}(\eta,\eta) \leq q_{p_e}(\eta,\mu)$'dır. Dolayısıyla $q_{p_e}(\mu,\eta) - q_{p_e}(\mu,\mu) \geq 0$ ve $q_{p_e}(\eta,\mu) - q_{p_e}(\eta,\eta) \geq 0$ sağlanır. Pozitif tanımlı iki sayının toplamının sıfır olması ancak her birinin sıfır olmasına bağlıdır. Buradan,

$$q_{p_e}(\mu,\eta) - q_{p_e}(\mu,\mu) = 0 \Rightarrow q_{p_e}(\mu,\eta) = q_{p_e}(\mu,\mu)$$

ve

$$q_{p_e}(\eta,\mu) - q_{p_e}(\eta,\eta) = 0 \Rightarrow q_{p_e}(\eta,\mu) = q_{p_e}(\eta,\eta)$$

bulunur. q_{p_e} asimetrik kısmi genişletilmiş $b-$metrik olduğundan $q_{p_e}(\mu,\mu) \leq q_{p_e}(\eta,\mu) = q_{p_e}(\eta,\eta)$ ve $q_{p_e}(\eta,\eta) \leq q_{p_e}(\mu,\eta) = q_{p_e}(\mu,\mu)$'dır. Bu iki eşitsizlikten, $q_{p_e}(\mu,\mu) \leq q_{p_e}(\eta,\eta) \leq q_{p_e}(\mu,\mu)$ elde edilir ki, buradan $q_{p_e}(\mu,\mu) = q_{p_e}(\eta,\eta)$ olduğu açıktır. Yani, $q_{p_e}(\mu,\mu) = q_{p_e}(\mu,\eta) = q_{p_e}(\eta,\eta)$ olur q_{p_e} asimetrik kısmi genişletilmiş $b-$metrik olduğundan, $\mu = \eta$ sağlanır.

$\Leftarrow)$ $\mu=\eta$ olsun.

$$\begin{aligned}d_{q_{p_e}}(\mu,\eta)&=q_{p_e}(\mu,\eta)+q_{p_e}(\eta,\mu)-q_{p_e}(\mu,\mu)-q_{p_e}(\eta,\eta)\\&=q_{p_e}(\mu,\mu)+q_{p_e}(\mu,\mu)-q_{p_e}(\mu,\mu)-q_{p_e}(\mu,\mu)\\&=0\end{aligned}$$

sağlanır.

$(e2)$

$$\begin{aligned}d_{q_{p_e}}(\mu,\eta)&=q_{p_e}(\mu,\eta)+q_{p_e}(\eta,\mu)-q_{p_e}(\mu,\mu)-q_{p_e}(\eta,\eta)\\&=q_{p_e}(\eta,\mu)+q_{p_e}(\mu,\eta)-q_{p_e}(\eta,\eta)-q_{p_e}(\mu,\mu)\\&=d_{q_{p_e}}(\eta,\mu)\end{aligned}$$

sağlanr.

$(e3)$ q_{p_e} asimetrik kısmi genişletilmiş $b-$metrik olduğundan üçgen eşitsizliği uygulanırsa,

$$\begin{aligned}d_{q_{p_e}}(\mu,\eta)&=q_{p_e}(\mu,\eta)+q_{p_e}(\eta,\mu)-q_{p_e}(\mu,\mu)-q_{p_e}(\eta,\eta)\\&\leq q_{p_e}(\mu,\sigma)+q_{p_e}(\sigma,\eta)-q_{p_e}(\sigma,\sigma)+\\&\quad q_{p_e}(\eta,\mu)+q_{p_e}(\sigma,\mu)-q_{p_e}(\sigma,\sigma)\\&\qquad -q_{p_e}(\mu,\mu)-q_{p_e}(\eta,\eta)\\&=q_{p_e}(\mu,\sigma)+q_{p_e}(\sigma,\mu)-q_{p_e}(\sigma,\sigma)-q_{p_e}(\mu,\mu)\\&\quad+q_{p_e}(\sigma,\eta)+q_{p_e}(\eta,\sigma)-q_{p_e}(\sigma,\sigma)-q_{p_e}(\eta,\eta)\\&=d_{q_{p_e}}(\mu,\sigma)+d_{q_{p_e}}(\sigma,\eta)\\&\leq\theta(\mu,\eta)\left[d_{q_{p_e}}(\mu,\sigma)+d_{q_{p_e}}(\sigma,\eta)\right]\end{aligned}$$

bulunur. Buradan, $d_{q_{p_e}}$ dönüşümü W uzayında bir genişletilmiş $b-$metriktir.

Örnek 5.1.4. $S=(0,1]$ olsun. $\theta:S\times S\to[1,\infty)$, $\theta(\mu,\eta)=1+\mu+\eta$ ve $q_{p_e}:S\times S\to\mathbb{R}^{+}$ fonksiyonu

$$q_{p_e}(\mu,\eta)=\begin{cases}|\mu-\eta|+\mu, & \mu\neq\eta \text{ ise}\\ \mu, & \mu=\eta \text{ ise}\end{cases}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda, $\left(S,q_{p_e}\right)$ asimetrik kısmi genişletilmiş $b-$metrik uzaydır.

$\forall\mu,\eta,\sigma\in S$ için

$\left(q_{p_e}1\right)$ $q_{p_e}(\mu,\mu)=q_{p_e}(\mu,\eta)=q_{p_e}(\eta,\eta)$ olsun. Buradan

$$\mu=|\mu-\eta|+\mu=\eta\Rightarrow\mu=\eta$$

elde edilir.

$\left(q_{p_e}2\right)$

$$q_{p_e}(\mu,\mu)=\mu\leq|\mu-\eta|+\mu=q_{p_e}(\mu,\eta)$$

sağlanır.

$\left(q_{p_e}3\right)$

$$q_{p_e}(\mu,\mu)=\mu=\mu+\eta-\eta\leq|\mu-\eta|+\eta=q_{p_e}(\eta,\mu)$$

sağlanır.

$\left(q_{p_e}4\right)$

$$\begin{aligned}q_{p_e}(\mu,\eta)&=|\mu-\eta|+\mu\\&=|\mu-\sigma+\sigma-\eta|+\mu\\&\leq|\mu-\sigma|+|\sigma-\eta|+\mu\\&=|\mu-\sigma|+|\sigma-\eta|+\mu+\sigma-\sigma\\&=|\mu-\sigma|+\mu+|\sigma-\eta|+\sigma-\sigma\\&\leq(1+\mu+\eta)\left[|\mu-\sigma|+\mu+|\sigma-\eta|+\sigma\right]-\sigma\\&=\theta(\mu,\eta)\left[q_{p_e}(\mu,\sigma)+q_{p_e}(\sigma,\eta)\right]-q_{p_e}(\sigma,\sigma)\end{aligned}$$

sağlanır. $\left(S,q_{p_e}\right)$ asimetrik kısmi genişletilmiş $b-$metrik uzaydır.

Örnek 5.1.5. $W=[1,\infty)$ olsun. $\theta:W\times W\to[1,\infty)$, $\theta(\mu,\eta)=1+e^{|\mu-\eta|}$ ve $q_{p_e}:W\times W\to\mathbb{R}^{+}$ fonksiyonu

$$q_{p_e}(\mu,\eta)=\ell n(\mu\eta)+e^{\mu}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda $\left(W,q_{p_e}\right)$ asimetrik kısmi genişletilmiş $b-$metrik uzaydır.

$\forall \mu,\eta,\sigma \in W$ için

$\left(q_{p_e}1\right)$ $q_{p_e}(\mu,\mu)=q_{p_e}(\mu,\eta)=q_{p_e}(\eta,\eta)$ olsun. Buradan,

$$\begin{aligned}
&\ell n\left(\mu^2\right)+e^{\mu}=\ell n(\mu\eta)+e^{\mu}=\ell n\left(\eta^2\right)+e^{\eta}\\
&\Rightarrow \ell n\left(\mu^2\right)+e^{\mu}=\ell n(\mu\eta)+e^{\mu}\\
&\Rightarrow 2\ell n(\mu)=\ell n(\mu)+\ell n(\eta)\\
&\Rightarrow \ell n(\mu)=\ell n(\eta)\\
&\Rightarrow \mu=\eta
\end{aligned}$$

elde edilir.

$\left(q_{p_e}2\right)$Genelliği bozmadan, $\mu\leq\eta$ alınırsa

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \mu\leq\eta\\
&\Rightarrow \ell n\mu\leq\ell n\eta\\
&\Rightarrow \ell n\mu+\ell n\mu\leq\ell n\mu+\ell n\eta\\
&\Rightarrow 2\ell n\mu\leq\ell n(\mu\eta)\\
&\Rightarrow \ell n\mu^2\leq\ell n(\mu\eta)\\
&\Rightarrow \ell n\mu^2+e^{\mu}\leq\ell n(\mu\eta)+e^{\mu}\\
&\Rightarrow q_{p_e}(\mu,\mu)\leq q_{p_e}(\mu,\eta)
\end{aligned}$$

bulunur.

$\left(q_{p_e}3\right)$ Genelliği bozmadan, $\mu\leq\eta$ alınırsa

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \mu\leq\eta\\
&\Rightarrow \ell n\mu\leq\ell n\eta\\
&\Rightarrow \ell n\mu+\ell n\mu\leq\ell n\mu+\ell n\eta\\
&\Rightarrow 2\ell n\mu\leq\ell n(\mu\eta)\\
&\Rightarrow \ell n\mu^2\leq\ell n(\eta\mu)\\
&\Rightarrow \ell n\mu^2+e^{\mu}\leq\ell n(\eta\mu)+e^{\eta}\\
&\Rightarrow q_{p_e}(\mu,\mu)\leq q_{p_e}(\eta,\mu)
\end{aligned}$$

olur.

$\left(q_{p_e}4\right)$

$$
\begin{aligned}
q_{p_e}(\mu,\eta) &= \ell n(\mu\eta)+e^{\mu} \\
&= \ell n(\mu\eta)+e^{\mu} \\
&\leq \ell n(\mu)+\ell n(\eta)+e^{\mu} \\
&= \ell n(\mu)+\ell n(\eta)+e^{\mu}+2\ell n(\sigma)-2\ell n(\sigma)+e^{\sigma}-e^{\sigma} \\
&= \ell n(\mu)+\ell n(\eta)+e^{\mu}+\ell n(\sigma)+\ell n(\sigma)-\ell n\sigma^{2}+e^{\sigma}-e^{\sigma} \\
&= \ell n(\mu)+\ell n(\sigma)+e^{\mu}+\ell n(\sigma)+\ell n(\eta)+e^{\sigma}-\left(\ell n\sigma^{2}-e^{\sigma}\right) \\
&\leq \left(1+e^{|\mu-\eta|}\right)\left[\ell n(\mu)+\ell n(\sigma)+e^{\mu}+\ell n(\sigma)+\ell n(\eta)+e^{\sigma}\right]-\left(\ell n\sigma^{2}-e^{\sigma}\right) \\
&= \theta(\mu,\eta)\left[q_{p_e}(\mu,\sigma)+q_{p_e}(\sigma,\eta)\right]-q_{p_e}(\sigma,\sigma)
\end{aligned}
$$

olur. Dört şart da sağlandığından $\left(W,q_{p_e}\right)$ asimetrik kısmi genişletilmiş $b-$metrik uzaydır.

Örnek 5.1.6. $W=\{1,2,3,...\}$ olsun. $\theta:W\times W\to[1,\infty)$ ve $q_{p_e}:W\times W\to\mathbb{R}^{+}$ fonksiyonları

$$
\theta(\mu,\eta)=\begin{cases}|\mu-\eta|^{3}, & \mu\neq\eta \quad \text{ise}\\ 1, & \mu=\eta \quad \text{ise}\end{cases}
$$

ve

$$
q_{p_e}(\mu,\eta)=\begin{cases}(\mu-\eta)^{4}+\mu, & \mu\neq\eta \quad \text{ise}\\ \mu, & \mu=\eta \quad \text{ise}\end{cases}
$$

olarak tanımlansın. Bu durumda, $\left(W,q_{p_e}\right)$ asimetrik kısmi genişletilmiş $b-$metrik uzaydır.

$\forall\mu,\eta,\sigma\in W$ için

$\left(q_{p_e}1\right)$ $q_{p_e}(\mu,\mu)=q_{p_e}(\mu,\eta)=q_{p_e}(\eta,\eta)$ olsun. Buradan,

$$
\mu=(\mu-\eta)^{4}+\mu=\eta\Rightarrow\mu=\eta
$$

sağlanır.

$\left(q_{p_e}2\right)$

$$q_{p_e}(\mu,\mu)=\mu\le(\mu-\eta)^4+\mu=q_{p_e}(\mu,\eta)$$

sağlanır.

$\left(q_{p_e}3\right)$

$$q_{p_e}(\mu,\mu)=\mu=\mu-\eta+\eta\le(\mu-\eta)^4+\eta=(\eta-\mu)^4+\eta=q_{p_e}(\eta,\mu)$$

sağlanır.

$\left(q_{p_e}4\right)$

i) $\mu\ne\eta\ne\sigma$ için

$$\begin{aligned}
q_{p_e}(\mu,\eta)&=(\mu-\eta)^4+\mu\\
&=(\mu-\sigma+\sigma-\eta)^4+\mu\\
&=\frac{(\mu-\sigma+\sigma-\eta)^4}{(\mu-\sigma)^4+(\sigma-\eta)^4}\left[(\mu-\sigma)^4+(\sigma-\eta)^4\right]+\mu\\
&\le\frac{(\mu-\sigma+\sigma-\eta)^4}{|\mu-\sigma+\sigma-\eta|}\left[(\mu-\sigma)^4+(\sigma-\eta)^4\right]+\mu\\
&=|\mu-\sigma+\sigma-\eta|^3\left[(\mu-\sigma)^4+(\sigma-\eta)^4\right]+\mu+\sigma-\sigma\\
&=|\mu-\eta|^3\left[(\mu-\sigma)^4+(\sigma-\eta)^4\right]+\mu+\sigma-\sigma\\
&\le|\mu-\eta|^3\left[(\mu-\sigma)^4+\mu+(\sigma-\eta)^4+\sigma\right]-\sigma\\
&=\theta(\mu,\eta)\left[q_{p_e}(\mu,\sigma)+q_{p_e}(\sigma,\eta)\right]-q_{p_e}(\sigma,\sigma)
\end{aligned}$$

sağlanır.

ii) $\mu=\eta=\sigma$ için

$$\begin{aligned}
q_{p_e}(\mu,\eta)&=\mu\\
&=\mu+\mu-\mu\\
&=1[\mu+\mu]-\mu\\
&=\theta(\mu,\eta)\left[q_{p_e}(\mu,\sigma)+q_{p_e}(\sigma,\eta)\right]-q_{p_e}(\sigma,\sigma)
\end{aligned}$$

sağlanır.

iii) $\mu = \eta \neq \sigma$ için

$$\begin{aligned} q_{p_e}(\mu,\eta) = \mu &\leq (\mu-\sigma)^4 + \mu + (\sigma-\eta)^4 + \sigma - \sigma \\ &= 1\left[(\mu-\sigma)^4 + \mu + (\sigma-\eta)^4 + \sigma\right] - \sigma \\ &= \theta(\mu,\eta)\left[q_{p_e}(\mu,\sigma) + q_{p_e}(\sigma,\eta)\right] - q_{p_e}(\sigma,\sigma) \end{aligned}$$

sağlanır.

iv) $\mu \neq \eta = \sigma$ için

$$\begin{aligned} q_{p_e}(\mu,\eta) &= (\mu-\eta)^4 + \mu \\ &= (\mu-\sigma)^4 + \mu \\ &= (\mu-\sigma)^4 + \mu + \sigma - \sigma \\ &\leq |\mu-\eta|^3\left[(\mu-\sigma)^4 + \mu + \sigma\right] - \sigma \\ &= \theta(\mu,\eta)\left[q_{p_e}(\mu,\sigma) + q_{p_e}(\sigma,\eta)\right] - q_{p_e}(\sigma,\sigma) \end{aligned}$$

sağlanır.

v) $\mu = \sigma \neq \eta$ için

$$\begin{aligned} q_{p_e}(\mu,\eta) &= (\mu-\eta)^4 + \mu \\ &= (\sigma-\eta)^4 + \mu \\ &= (\sigma-\mu)^4 + \mu + \sigma - \sigma \\ &\leq |\mu-\eta|^3\left[\mu + (\sigma-\eta)^4 + \sigma\right] - \sigma \\ &= \theta(\mu,\eta)\left[q_{p_e}(\mu,\sigma) + q_{p_e}(\sigma,\eta)\right] - q_{p_e}(\sigma,\sigma) \end{aligned}$$

sağlanır. Her durumda dört şart sağlandığından (W, q_{p_e}) asimetrik kısmi genişletilmiş $b-$metrik uzaydır. Ancak, $1 \leq s \leq 6$ katsayısı için asimetrik kısmi $b-$metrik değildir. $\mu = 9, \eta = 2, \sigma = 6$ için

$$q_{p_b}(\mu,\eta) \leq s\left[q_{p_b}(\mu,\sigma) + q_{p_b}(\sigma,\eta)\right] - q_{p_b}(\sigma,\sigma)$$

$$7^4 + 9 \leq s\left[3^4 + 9 + 4^4 + 6\right] - 6 \Rightarrow s \geq 6,86...$$

olmalı ki asimetrik kısmi $b-$metrik olsun.

Örnek 5.1.7. $W=(0,\infty)$ olmak üzere, $q_{p_e}:W\times W\to\mathbb{R}^+$

$q_{p_e}(\mu,\eta)=\{\eta^2-\mu^2,0\}+\mu^2$ ve $\theta:W\times W\to[1,\infty)$, $\theta(\mu,\eta)=1+|\mu-\eta|$ olarak tanımlanan q_{p_e} dönüşümü asimetrik kısmi genişletilmiş $b-$metriktir. $\forall\mu,\eta,\sigma\in W$ için

$(q_{p_e}1)$ $q_{p_e}(\mu,\mu)=q_{p_e}(\mu,\eta)=q_{p_e}(\eta,\eta)$ olsun.

$$\mu^2=\max\{\eta^2-\mu^2,0\}+\mu^2=\eta^2\Rightarrow\mu=\eta$$

dır.

$(q_{p_e}2)$

$$q_{p_e}(\mu,\mu)=\mu^2\le\max\{\eta^2-\mu^2,0\}+\mu^2=q_{p_e}(\mu,\eta)$$

sağlanır.

$(q_{p_e}3)$

$$q_{p_e}(\mu,\mu)=\mu^2=\mu^2-\eta^2+\eta^2\le\max\{\mu^2-\eta^2,0\}+\eta^2=q_{p_e}(\eta,\mu)$$

sağlanır.

$(q_{p_e}4)$

$$\begin{aligned}q_{p_e}(\mu,\eta)&=\max\{\eta^2-\mu^2,0\}+\mu^2\\&=\max\{\eta^2-\sigma^2+\sigma^2-\mu^2,0+0\}+\mu^2+\sigma^2-\sigma^2\\&\le\max\{\sigma^2-\mu^2,0\}+\mu^2+\max\{\eta^2-\sigma^2,0\}+\sigma^2-\sigma^2\\&\le(1+|\mu-\eta|)\left[\max\{\sigma^2-\mu^2,0\}+\mu^2+\max\{\eta^2-\sigma^2,0\}+\sigma^2\right]-\sigma^2\\&=\theta(\mu,\eta)\left[q_{p_e}(\mu,\sigma)+q_{p_e}(\sigma,\eta)\right]-q_{p_e}(\sigma,\sigma)\end{aligned}$$

sağlanır. (W,q_{p_e}) asimetrik kısmi genişletilmiş $b-$metrik uzaydır.

Örnek 5.1.8. $W=\mathbb{N}^{+}=\{1,2,3,...\}$ olsun. $1<\varepsilon<2$ olmak üzere $m,n\geq 2$ için

$$\begin{aligned}
&q_{p_e}(1,m)=1+(m-1)\varepsilon\\
&q_{p_e}(m,1)=m\\
&q_{p_e}(m,n)=1+|m-n|\varepsilon,\ (m\neq n)\\
&q_{p_e}(1,1)=q_{p_e}(m,m)=1
\end{aligned}$$

ve $\theta: W\times W\to[1,\infty)$, $\theta(m,n)=1+|m-n|$ olarak tanımlanan $q_{p_e}: W\times W\to\mathbb{R}^{+}$, W üzerinde asimetrik kısmi genişletilmiş $b-$metrik uzaydır.

$(q_{p_e}1)$ $q_{p_e}(m,m)=q_{p_e}(m,n)=q_{p_e}(n,n)$ olsun.

i) $m<n$ için

$$1=1+(n-m)\varepsilon=1\Rightarrow(n-m)\varepsilon=0\Rightarrow m=n$$

sağlanır.

ii) $m>n$ için

$$1=1+(m-n)\varepsilon=1\Rightarrow(m-n)\varepsilon=0\Rightarrow m=n$$

sağlanır.

iii) $q_{p_e}(1,m)$ durumu için

$$1=1+(m-1)\varepsilon=1\Rightarrow(m-1)\varepsilon=0\Rightarrow m=n=1$$

sağlanır.

iv) $q_{p_e}(m,1)$ durumu için

$$1=m=1\Rightarrow m=n=1$$

sağlanır.

$(q_{p_e}2)$

i) $m<n$ için

$$q_{p_e}(m,m)=q_{p_e}(1,1)=1\leq 1+(n-m)\varepsilon=q_{p_e}(m,n)$$

sağlanır.

ii) $m > n$ için

$$q_{p_e}(m,m) = q_{p_e}(1,1) = 1 \le 1 + (m-n)\varepsilon = q_{p_e}(m,n)$$

sağlanır.

iii)

$$q_{p_e}(m,m) = q_{p_e}(1,1) = 1 \le m = q_{p_e}(m,1)$$

sağlanır.

iv)

$$q_{p_e}(m,m) = q_{p_e}(1,1) = 1 \le 1 + (m-1)\varepsilon = q_{p_e}(1,m)$$

sağlanır.

$(q_{p_e}3)$

i) $m < n$ için

$$q_{p_e}(m,m) = q_{p_e}(1,1) = 1 \le 1 + (m-n)\varepsilon = q_{p_e}(n,m)$$

dır.

ii) $m > n$ için

$$q_{p_e}(m,m) = q_{p_e}(1,1) = 1 \le 1 + (n-m)\varepsilon = q_{p_e}(n,m)$$

dır.

iii)

$$q_{p_e}(m,m) = q_{p_e}(1,1) = 1 \le n = q_{p_e}(n,1)$$

sağlanır.

iv)

$$q_{p_e}(m,m) = q_{p_e}(1,1) = 1 \le 1 + (n-1)\varepsilon = q_{p_e}(1,n)$$

sağlanır.

$\left(q_{p_e}4\right)$ $m,n,k \geq 2$ olsun.

i) $m<k<n$ için

$$\begin{aligned} q_{p_e}(m,n) &= 1+(n-m)\varepsilon \\ &= 1+(n-m)\varepsilon + k\varepsilon - k\varepsilon + 1 - 1 \\ &= 1+(k-m)\varepsilon + 1 + (n-k)\varepsilon - 1 \\ &\leq \left(1+|m-n|\right)\left[1+(k-m)\varepsilon+1+(n-k)\varepsilon\right]-1 \\ &= \theta(m,n)\left[q_{p_e}(m,k)+q_{p_e}(k,n)\right]-q_{p_e}(k,k) \end{aligned}$$

sağlanır.

ii) $m<n<k$ için

$$\begin{aligned} q_{p_e}(m,n) &= 1+(n-m)\varepsilon \\ &\leq 1+(k-m)\varepsilon \\ &\leq 1+(k-m)\varepsilon + 1 + (k-n)\varepsilon + 1 - 1 \\ &\leq \left(1+|m-n|\right)\left[1+(k-m)\varepsilon+1+(k-n)\varepsilon\right]-1 \\ &= \theta(m,n)\left[q_{p_e}(m,k)+q_{p_e}(k,n)\right]-q_{p_e}(k,k) \end{aligned}$$

sağlanır.

iii) $k<m<n$ için

$$\begin{aligned} q_{p_e}(m,n) &= 1+(n-m)\varepsilon \\ &\leq 1+(n-k)\varepsilon \\ &\leq 1+(n-k)\varepsilon + 1 + (m-k)\varepsilon + 1 - 1 \\ &\leq \left(1+|m-n|\right)\left[1+(m-k)\varepsilon+1+(n-k)\varepsilon\right]-1 \\ &= \theta(m,n)\left[q_{p_e}(m,k)+q_{p_e}(k,n)\right]-q_{p_e}(k,k) \end{aligned}$$

sağlanır.

iv) $1 < m < n$ için

$$\begin{aligned}
q_{p_e}(m,n) &= 1+(n-m)\varepsilon \\
&= 1+n\varepsilon-m\varepsilon \\
&\le 1+n\varepsilon-\varepsilon \\
&\le 1+n\varepsilon-\varepsilon+m-1 \\
&\le (1+|m-n|)\left[m+1+(n-1)\varepsilon\right]-1 \\
&= \theta(m,n)\left[q_{p_e}(m,1)+q_{p_e}(1,n)\right]-q_{p_e}(1,1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_{p_e}(1,m) &= 1+(m-1)\varepsilon \\
&\le 1+(n-1)\varepsilon \\
&\le 1+(n-1)\varepsilon+(n-m)\varepsilon+1-1 \\
&\le (1+|1-m|)\left[1+(n-1)\varepsilon+1+(n-m)\varepsilon\right]-1 \\
&= \theta(1.m)\left[q_{p_e}(1,n)+q_{p_e}(n,m)\right]-q_{p_e}(n,n)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_{p_e}(1,n) &= 1+(n-1)\varepsilon \\
&= 1+n\varepsilon-\varepsilon \\
&= 1+n\varepsilon-\varepsilon+m\varepsilon-m\varepsilon+1-1 \\
&= 1+m\varepsilon-\varepsilon+1+n\varepsilon-m\varepsilon-1 \\
&\le (1+|1-n|)\left[1+(m-1)\varepsilon+1+(n-m)\varepsilon\right]-1 \\
&= \theta(1,n)\left[q_{p_e}(1,m)+q_{p_e}(m,n)\right]-q_{p_e}(m,m)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_{p_e}(m,1) &= m \\
&\le n+(n-m)\varepsilon+1-1 \\
&\le (1+|m-1|)\left[1+(n-m)\varepsilon+n\right]-1 \\
&= \theta(m,1)\left[q_{p_e}(m,n)+q_{p_e}(n,1)\right]-q_{p_e}(n,n)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_{p_e}(n,1) &= n \\
&\le n\varepsilon \\
&\le n\varepsilon-m\varepsilon+m\varepsilon \\
&< n\varepsilon-m\varepsilon+2m \\
&\le (n-m)\varepsilon+2m+2-1 \\
&\le 2(n-m)\varepsilon+2m+2-1 \\
&\le 2\left[1+(n-m)\varepsilon+m\right]-1 \\
&\le (1+|n-1|)\left[1+(n-m)\varepsilon+m\right]-1 \\
&= \theta(n,1)\left[q_{p_e}(n,m)+q_{p_e}(m,1)\right]-q_{p_e}(m,m)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
q_{p_e}(m,m) &= 1 \\
&\le m+1+(m-1)\varepsilon-1 \\
&\le (1+|m-m|)\left[m+1+(m-1)\varepsilon\right]-1 \\
&= \theta(m,m)\left[q_{p_e}(m,1)+q_{p_e}(1,m)\right]-q_{p_e}(1,1)
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
q_{p_e}(m,m) &= 1 \\
&\le 1+(n-m)\varepsilon-(n-m)\varepsilon+1-1 \\
&\le (1+|m-m|)\left[1+|m-n|\varepsilon+1+|n-m|\varepsilon\right]-1 \\
&= \theta(m,m)\left[q_{p_e}(m,n)+q_{p_e}(n,m)\right]-q_{p_e}(n,n)
\end{aligned}
$$

ifadeleri sağlanır.

v) $m>k>n$ için

$$
\begin{aligned}
q_{p_e}(m,n) &= 1+(m-n)\varepsilon \\
&= 1+(m-n)\varepsilon+k\varepsilon-k\varepsilon+1-1 \\
&= 1+(m-k)\varepsilon+1+(k-n)\varepsilon-1 \\
&\le (1+|m-n|)\left[1+(m-k)\varepsilon+1+(k-n)\varepsilon\right]-1 \\
&= \theta(m,n)\left[q_{p_e}(m,k)+q_{p_e}(k,n)\right]-q_{p_e}(k,k)
\end{aligned}
$$

sağlanır.

vi) $m>n>k$ için

$$
\begin{aligned}
q_{p_e}(m,n) &= 1+(m-n)\varepsilon \\
&\le 1+(m-k)\varepsilon \\
&\le 1+(m-k)\varepsilon+(n-k)\varepsilon+1-1 \\
&= 1+(m-k)\varepsilon+1+(n-k)\varepsilon-1 \\
&\le (1+|m-n|)\left[1+(m-k)\varepsilon+1+(n-k)\varepsilon\right]-1 \\
&= \theta(m,n)\left[q_{p_e}(m,k)+q_{p_e}(k,n)\right]-q_{p_e}(k,k)
\end{aligned}
$$

sağlanır.

vii) $k > m > n$ için

$$\begin{aligned}
q_{p_e}(m,n) &= 1+(m-n)\varepsilon \\
&\le 1+(k-n)\varepsilon \\
&\le 1+(k-n)\varepsilon+(k-m)\varepsilon+1-1 \\
&= 1+(k-n)\varepsilon+1+(k-m)\varepsilon-1 \\
&\le (1+|m-n|)\left[1+(k-m)\varepsilon+1+(k-n)\varepsilon\right]-1 \\
&= \theta(m,n)\left[q_{p_e}(m,k)+q_{p_e}(k,n)\right]-q_{p_e}(k,k)
\end{aligned}$$

sağlanır.

viii) $m > n > 1$ için

$$\begin{aligned}
q_{p_e}(m,n) &= 1+(m-n)\varepsilon \\
&\le 1+m\varepsilon-1 \\
&\le 1+m\varepsilon-1+(n-1)\varepsilon \\
&\le 2m+2+2(n-1)\varepsilon-1 \\
&= 2\left[m+1+(n-1)\varepsilon\right]-1 \\
&\le (1+|m-n|)\left[q_{p_e}(m,1)+q_{p_e}(1,n)\right]-q_{p_e}(1,1) \\
&= \theta(m,n)\left[q_{p_e}(m,1)+q_{p_e}(1,n)\right]-q_{p_e}(1,1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_{p_e}(1,m) &= 1+(m-1)\varepsilon \\
&= 1+m\varepsilon-\varepsilon+n\varepsilon-n\varepsilon+1-1 \\
&= 1+m\varepsilon-n\varepsilon+1+n\varepsilon-\varepsilon-1 \\
&= 1+(m-n)\varepsilon+1+(n-1)\varepsilon-1 \\
&\le (1+|1-m|)\left[1+(n-1)\varepsilon+1+(m-n)\varepsilon\right]-1 \\
&= \theta(1,m)\left[q_{p_e}(1,n)+q_{p_e}(n,m)\right]-q_{p_e}(n,n)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_{p_e}(m,1) &= m \\
&\le m\varepsilon+n\varepsilon-n\varepsilon \\
&\le m\varepsilon-n\varepsilon+2n \\
&\le (m-n)\varepsilon+2n+2-1 \\
&\le 2(m-n)\varepsilon+2n+2-1 \\
&\le 2\left[1+(m-n)\varepsilon+n\right]-1 \\
&\le (1+|m-1|)\left[q_{p_e}(m,n)+q_{p_e}(n,1)\right]-q_{p_e}(n,n) \\
&\le \theta(m,1)\left[q_{p_e}(m,n)+q_{p_e}(n,1)\right]-q_{p_e}(n,n)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
q_{p_e}(1,n) &= 1+(n-1)\varepsilon \\
&\le 1+(m-1)\varepsilon \\
&\le 1+(m-1)\varepsilon+(m-n)\varepsilon+1-1 \\
&= 1+(m-1)\varepsilon+1+(m-n)\varepsilon-1 \\
&\le (1+|1-n|)\left[1+(m-1)\varepsilon+1+(m-n)\varepsilon\right]-1 \\
&= \theta(1,n)\left[q_{p_e}(1,m)+q_{p_e}(m,n)\right]-q_{p_e}(m,m)
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
q_{p_e}(n,1) &= n \\
&\le m+(m-n)\varepsilon+1-1 \\
&\le (1+|n-1|)\left[1+(m-n)\varepsilon+m\right]-1 \\
&= \theta(n,1)\left[q_{p_e}(n,m)+q_{p_e}(m,1)\right]-q_{p_e}(m,m)
\end{aligned}
$$

ifadeleri sağlanır. Dört şart da sağlandığından, (W,q_{p_e}) asimetrik kısmi genişletilmiş $b-$metrik uzaydır.

Teorem 5.1.9. (W,q_{p_e}) asimetrik kısmi genişletilmiş $b-$metrik uzay olsun.

1) Eğer $q_{p_e}(\mu,\eta)=0$ ise $\mu=\eta$ dır.
2) Eğer $\mu\neq\eta$ ise $q_{p_e}(\mu,\eta)>0$ ve $q_{p_e}(\eta,\mu)>0$ dır.

İspat :

1) Eğer $q_{p_e}(\mu,\eta)=0$ ise

$$0\le q_{p_e}(\mu,\mu)\le q_{p_e}(\mu,\eta)=0 \Rightarrow q_{p_e}(\mu,\mu)=0$$

dır.

$$0\le q_{p_e}(\eta,\eta)\le q_{p_e}(\mu,\eta)=0 \Rightarrow q_{p_e}(\eta,\eta)=0$$

dır.

Buradan, $q_{p_e}(\mu,\mu)=q_{p_e}(\mu,\eta)=q_{p_e}(\eta,\eta)$ olduğundan $\mu=\eta$ sağlanır.

2) $\mu\neq\eta$ ise

$$\left.\begin{array}{l} 0 \le q_{p_e}(\mu,\mu) < q_{p_e}(\mu,\eta) \\ 0 \le q_{p_e}(\eta,\eta) < q_{p_e}(\mu,\eta) \end{array}\right\} \Rightarrow q_{p_e}(\mu,\eta) > 0$$

ve

$$\left.\begin{array}{l} 0 \le q_{p_e}(\mu,\mu) < q_{p_e}(\eta,\mu) \\ 0 \le q_{p_e}(\eta,\eta) < q_{p_e}(\eta,\mu) \end{array}\right\} \Rightarrow q_{p_e}(\eta,\mu) > 0$$

elde edilir.

Tanım 5.1.10. (W, q_{p_e}) asimetrik kısmi genişletilmiş $b-$metrik uzay olmak üzere,

$$B_{q_{p_e}}(\mu,\varepsilon) = \{\eta \in W : q_{p_e}(\mu,\eta) < q_{p_e}(\mu,\mu) + \varepsilon, \varepsilon > 0\}$$

ile tanımlanan kümeye μ merkezli $\varepsilon > 0$ yarıçaplı açık yuvar denir.

$$B_{q_{p_e}}[\mu,\varepsilon] = \{\eta \in W : q_{p_e}(\mu,\eta) \le q_{p_e}(\mu,\mu) + \varepsilon, \varepsilon > 0\}$$

ile tanımlanan kümeye μ merkezli $\varepsilon > 0$ yarıçaplı kapalı yuvar denir.

(W, q_{p_e}) asimetrik kısmi genişletilmiş $b-$metrik uzayında $\{B_{q_{p_e}}(\mu,\varepsilon) : \mu \in W, \varepsilon > 0\}$ bazı ile W üzerinde üretilen topoloji $\tau_{q_{p_e}}$ ile gösterilir.

Örnek 5.1.11. $W = \{1,2,3,...\}$ olmak üzere, $\theta : W \times W \to [1,\infty)$ ve $q_{p_e} : W \times W \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonları

$$\theta(\mu,\eta) = \begin{cases} |\mu-\eta|^3, & \mu \ne \eta \text{ ise} \\ 1, & \mu = \eta \text{ ise} \end{cases}$$

ve

$$q_{p_e}(\mu,\eta) = \begin{cases} (\mu-\eta)^4 + \mu, & \mu \ne \eta \text{ ise} \\ \mu, & \mu = \eta \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda, (W, q_{p_e}) asimetrik kısmi genişletilmiş $b-$metrik uzaydır. μ merkezli, $\varepsilon > 0$ yarıçaplı yuvarı ise

$$
\begin{aligned}
B_{q_{p_e}}(\mu,\varepsilon) &= \left\{\eta \in W : q_{p_e}(\mu,\eta) < q_{p_e}(\mu,\mu)+\varepsilon, \varepsilon > 0\right\} \\
&= \left\{\eta \in W : (\mu-\eta)^4 + \mu < \mu+\varepsilon, \varepsilon > 0\right\} \\
&= \left\{\eta \in W : (\mu-\eta)^4 < \varepsilon, \varepsilon > 0\right\} \\
&= \left\{\eta \in W : |\mu-\eta| < \sqrt[4]{\varepsilon}, \varepsilon > 0\right\} \\
&= \left\{\eta \in W : -\sqrt[4]{\varepsilon} < \mu-\eta < \sqrt[4]{\varepsilon}, \varepsilon > 0\right\} \\
&= \left\{\eta \in W : \mu-\sqrt[4]{\varepsilon} < \eta < \mu+\sqrt[4]{\varepsilon}, \varepsilon > 0\right\} \\
&= \left(\mu-\sqrt[4]{\varepsilon}, \mu+\sqrt[4]{\varepsilon}\right)
\end{aligned}
$$

kümesidir.

Örnek 5.1.12. $W=[1,\infty)$ olmak üzere, $\theta : W\times W \to [1,\infty)$, $\theta(\mu,\eta)=1+e^{|\mu-\eta|}$ ve $q_{p_e} : W\times W \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu $q_{p_e}(\mu,\eta)=\ell n(\mu\eta)+e^{\mu}$ olarak tanımlansın. Bu durumda, (W,q_{p_e}) asimetrik kısmi genişletilmiş $b-$metrik uzaydır. μ merkezli, $\varepsilon>0$ yarıçaplı yuvarı ise

$$
\begin{aligned}
B_{q_{p_e}}(\mu,\varepsilon) &= \left\{\eta \in W : q_{p_e}(\mu,\eta) < q_{p_e}(\mu,\mu)+\varepsilon, \varepsilon > 0\right\} \\
&= \left\{\eta \in W : \ell n(\mu\eta)+e^{\mu} < \ell n(\mu^2)+e^{\mu}+\varepsilon, \varepsilon > 0\right\} \\
&= \left\{\eta \in W : \ell n(\mu\eta)+e^{\mu} < \ell n(\mu^2)+e^{\mu}+\varepsilon, \varepsilon > 0\right\} \\
&= \left\{\eta \in W : \ell n(\mu)+\ell n(\eta) < 2\ell n(\mu)+\varepsilon, \varepsilon > 0\right\} \\
&= \left\{\eta \in W : \ell n(\eta) < \ell n(\mu)+\varepsilon, \varepsilon > 0\right\} \\
&= \left\{\eta \in W : \eta < e^{\ell n(\mu)+\varepsilon}, \varepsilon > 0\right\} \\
&= \left\{\eta \in W : \eta < \mu e^{\varepsilon}, \varepsilon > 0\right\} \\
&= \left[1, \mu e^{\varepsilon}\right)
\end{aligned}
$$

kümesidir.

Uyarı 5.1.13. Asimetrik kısmi genişletilmiş $b-$metrik uzayda her açık yuvar, açık küme olmak zorunda değildir. Örneğin,

$W=\mathbb{N}^+=\{1,2,3,...\}$ olmak üzere $1<\varepsilon<2$ iken $m,n\geq 2$ için

$$q_{p_e}(1,m)=1+(m-1)\varepsilon$$
$$q_{p_e}(m,1)=m$$
$$q_{p_e}(m,n)=1+|m-n|\varepsilon,\ (m\neq n)$$
$$q_{p_e}(1,1)=q_{p_e}(m,m)=1$$

ve

$$\theta : W\times W\to[1,\infty),\ \theta(m,n)=1+|m-n|$$

olarak tanımlanan $q_{p_e}: W\times W\to\mathbb{R}^+$ fonksiyonu W üzerinde asimetrik kısmi genişletilmiş $b-$metrik uzaydır. Burada 2 merkezli herhangi bir açık yuvar incelenirse:

$$B\left(2,1-\frac{\varepsilon}{2}\right)=\left\{\eta\in W : q_{p_e}(2,\eta)<q_{p_e}(2,2)+1-\frac{\varepsilon}{2},1<\varepsilon<2\right\}=\{2\}$$

ve

$$B(2,r)=\left\{\eta\in W : q_{p_e}(2,\eta)<q_{p_e}(2,2)+r,\ r>0\right\}=\{1,2,3,4,\ldots\}$$

dır. $B\left(2,1-\frac{\varepsilon}{2}\right)$ açık yuvarı için 2 merkezli, bu yuvarın kapsayacağı herhangi bir açık yuvar bulunmadığından, açık küme değildir. 2 noktasını içeren en küçük açık yuvar, $1<r<\varepsilon$ için $B(2,r)=\{1,2\}$ kümesidir. $B(2,r)\not\subset B\left(2,1-\frac{\varepsilon}{2}\right)$ olduğundan, $B\left(2,1-\frac{\varepsilon}{2}\right)$ açık yuvarının açık küme olmadığı görülür.

Teorem 5.1.14. Herhangi bir asimetrik kısmi genişletilmiş $b-$metriğin topolojisi T_0- topolojisdir.

İspat : $(q_{p_e}1)$ ve $(q_{p_e}2)$ özelliklerinden $\mu\neq\eta$ noktaları için $q_{p_e}(\mu,\mu)<q_{p_e}(\mu,\eta)$ sağlanır.

$\mu\in B_{q_{p_e}}(\mu,\varepsilon)$ ve $\eta\notin B_{q_{p_e}}(\mu,\varepsilon)$ için $\varepsilon=\dfrac{q_{p_e}(\mu,\eta)-q_{p_e}(\mu,\mu)}{2}$ pozitif sayısı vardır ve asimetrik kısmi genişletilmiş $b-$metriğin topolojisi T_0-topolojisidir.

$\eta\in B_{q_{p_e}}(\mu,\varepsilon)$ olsun. Bu durumda,

$$q_{p_e}(\mu,\eta) < q_{p_e}(\mu,\mu) + \varepsilon$$

$$q_{p_e}(\mu,\eta) < q_{p_e}(\mu,\mu) + \frac{q_{p_e}(\mu,\eta) - q_{p_e}(\mu,\mu)}{2}$$

$$q_{p_e}(\mu,\eta) < q_{p_e}(\mu,\mu)$$

bulunur ki bu $q_{p_e}(\mu,\mu) < q_{p_e}(\mu,\eta)$ olmasıyla çelişir. Yani, $\eta \in B_{q_{p_e}}(\mu,\varepsilon)$ kabulü yanlıştır. Böylece asimetrik kısmi genişletilmiş $b-$metrik uzayın topolojisi T_0- topolojisidir.

Uyarı 5.1.15. Herhangi bir asimetrik kısmi genişletilmiş $b-$metrik uzayın topolojisi her zaman T_1 değildir. Örneğin,

$W = \mathbb{R}^+$ ve $q_p : W \times W \to \mathbb{R}^+$ olsun. $\forall \mu,\eta \in W$ için

$$q_p(\mu,\eta) = \begin{cases} \max\{\eta^2 - \mu^2, 0\} + \mu^2, & \mu < \eta \text{ ise} \\ \mu^2, & \mu = \eta \text{ ise} \\ 2\mu^2 - \eta^2, & \mu > \eta \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonu asimetrik kısmi metriktir. Her asimetrik kısmi metrik asimetrik kısmi $b-$ metrik ve dolayısıyla asimetrik kısmi genişletilmiş $b-$metriktir. Açık yuvarı ise

$$B_{q_{p_e}}(\mu,\varepsilon) = \begin{cases} \left(-\sqrt{\mu^2+\varepsilon}, \sqrt{\mu^2+\varepsilon}\right), & \mu < \eta \text{ ise} \\ \mathbb{R}^+ \quad , & \mu = \eta \text{ ise} \\ \left(\sqrt{\mu^2+\varepsilon}, \infty\right) \quad , & \mu > \eta \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlıdır. $\mu < \eta$ değerleri için yuvar $\left(-\sqrt{\mu^2+\varepsilon}, \sqrt{\mu^2+\varepsilon}\right)$ olduğundan buradan seçilen herhangi iki nokta için birbirini içermeyen komşuluğu bulunmadığından, T_1-uzayı değildir.

Uyarı 5.1.16. Asimetrik kısmi genişletilmiş $b-$metrik uzayın topolojisi T_1-uzayı olmadığından T_2-uzayı da değildir.

Aşağıda asimetrik kısmi genişletilmiş $b-$metrik uzayda, önce temel yakınsaklık, Cauchy dizisi ve tamlık tanımları verilip daha sonra ise asimetrik metrikteki yakınsaklık, Cauchy dizisi ve tamlık tanımları kullanılarak yeni tanımlar oluşturulmuştur.

Tanım 5.1.17. $\left(W, q_{p_e}\right)$ asimetrik kısmi genişletilmiş $b-$metrik uzay olsun.

i) Bir $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset W$ dizisi, $\mu \in W$ noktasına yakınsaktır ancak ve ancak $q_{p_e}(\mu,\mu) = \lim_{n\to\infty} q_{p_e}(\mu_n,\mu) = \lim_{n\to\infty} q_{p_e}(\mu,\mu_n)$ sağlanır.

ii) $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset W$ dizisi Cauchy dizisidir ancak ve ancak $\lim_{n,m\to\infty} q_{p_e}(\mu_n,\mu_m)$ ve $\lim_{n,m\to\infty} q_{p_e}(\mu_m,\mu_n)$ var ve sonludur.

iii) Eğer W uzayında her $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset W$ Cauchy dizisi, $\tau_{q_{p_e}}$ topolojisine göre $\mu \in W$ noktasına yakınsar ise yani;

$$q_{p_e}(\mu,\mu) = \lim_{n,m\to\infty} q_{p_e}(\mu_n,\mu_m) = \lim_{n,m\to\infty} q_{p_e}(\mu_m,\mu_n)$$

ise $\left(W, q_{p_e}\right)$ asimetrik kısmi genişlemiş $b-$metrik uzayına tamdır denir.

iv) Eğer her $\forall \varepsilon > 0$ için

$$T\left(B_{q_{p_e}}(\mu_0,\delta)\right) \subset B_{q_{p_e}}\left(T(\mu_0),\varepsilon\right)$$

olacak şekilde $\delta > 0$ bulunuyorsa, $T : W \to W$ fonksiyonuna $\mu_0 \in W$ noktasında süreklidir denir.

Asimetrik metrikteki yakınsaklık, Cauchy dizisi ve tamlık tanımları asimetrik kısmi genişletilmiş $b-$metrik uzayda aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

Tanım 5.1.18. $W \neq \varnothing$ bir küme ve $q_{p_e} : W \times W \to \mathbb{R}^+$ bir fonksiyonu asimetrik kısmi genişletilmiş $b-$metrik, $\left(W, q_{p_e}\right)$ asimetrik kısmi genişletilmiş $b-$metrik uzay olsun. $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset W$ dizisi ve $\mu \in W$ noktası verilsin.

$\forall \mu,\eta \in W$ için $q^s_{p_e}(\mu,\eta) = \max\left\{q_{p_e}(\mu,\eta), q_{p_e}(\eta,\mu)\right\}$ olarak tanımlansın.

i) $q_{p_e}(\mu,\mu) = \lim_{n\to\infty} q_{p_e}(\mu,\mu_n)$ oluyorsa $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi μ noktasına sol $q_{p_e}-$ yakınsaktır denir.

ii) $q_{p_e}(\mu,\mu) = \lim_{n\to\infty} q_{p_e}(\mu_n,\mu)$ oluyorsa $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi μ noktasına sağ $q_{p_e}-$ yakınsaktır denir.

iii) $q_{p_e}(\mu,\mu)=\lim_{n\to\infty} q_{p_e}(\mu,\mu_n)=\lim_{n\to\infty} q_{p_e}(\mu_n,\mu)$ oluyorsa $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi μ noktasına yakınsar denir.

iv) $q_{p_e}(\mu,\mu)=\lim_{n\to\infty} q_{p_e}(\mu,\mu_n)$ oluyorsa, $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisine sol q_{p_e} – Cauchy dizisi denir.

v) $q_{p_e}(\mu,\mu)=\lim_{n\to\infty} q_{p_e}(\mu_n,\mu)$ oluyorsa $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisine sağ q_{p_e} – Cauchy dizisi denir.

vi) $m\geq n$ olmak üzere,

$q_{p_e}(\mu,\mu)=\lim_{n\to\infty} q_{p_e}(\mu_m,\mu_n)$ oluyorsa $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisine sağ $K_{q_{p_e}}$ – Cauchy dizisi denir.

vii) $m\geq n$ olmak üzere,

$q_{p_e}(\mu,\mu)=\lim_{n\to\infty} q_{p_e}(\mu_n,\mu_m)$ oluyorsa $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisine sol $K_{q_{p_e}}$ – Cauchy dizisi denir.

viii) $\lim_{n,m\to\infty} q_{p_e}(\mu_n,\mu_m)$ ve $\lim_{n,m\to\infty} q_{p_e}(\mu_m,\mu_n)$ mevcut ve sonlu ise $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisine Cauchy dizisi denir.

ix) Eğer bu uzaydaki her sol q_{p_e} – Cauchy dizisi sol q_{p_e}-yakınsak ise W uzayına sol q_{p_e} – dizisel tam uzay denir.

x) Eğer bu uzaydaki her sağ q_{p_e} – Cauchy dizisi sağ q_{p_e} – yakınsak ise W uzayına sağ q_{p_e} – dizisel tam uzay denir.

xi) Eğer bu uzaydaki her sol $K_{q_{p_e}}$ – Cauchy dizisi, sol q_{p_e} – yakınsak ise W uzayına sol $K_{q_{p_e}}$ dizisel tam uzay denir.

xii) Eğer bu uzaydaki her sağ $K_{q_{p_e}}$ – Cauchy dizisi, sağ q_{p_e} – yakınsak ise W uzayına sağ $K_{q_{p_e}}$ dizisel tam uzay denir.

xiii) Eğer bu uzaydaki her $q^s_{p_e}$ – Cauchy dizisi, sol q_{p_e} – yakınsak ise W uzayına $q^s_{p_e}$ dizisel tam uzay denir.

xiv) Eğer bu uzaydaki her sağ K_{q_e} – Cauchy dizisi, $q^s_{p_e}$ – yakınsak ise W uzayına sağ Symth q_{p_e} dizisel tam uzay denir.

xv) Eğer bu uzaydaki her sol $K_{q_{p_e}}$ $-$Cauchy dizisi, $q_{p_e}^{s}$ $-$yakınsak ise W uzayına sol Symth q_{p_e} dizisel tam uzay denir.

xvi) Eğer bu uzaydaki her $q_{p_e}^{s}$ $-$Cauchy dizisi, $q_{p_e}^{s}$ $-$yakınsak ise W uzayına q_{p_e} bi tam uzay denir.

Uyarı 5.1.19. Herhangi bir asimetrik kısmi genişletilmiş $b-$metrik uzayda limit tek olmak zorunda değildir. Örneğin,

$W=(0,\infty)$ olmak üzere, $q_{p_e}:W\times W\to\mathbb{R}^{+}$, $q_{p_e}(\mu,\eta)=\{\eta^2-\mu^2,0\}+\mu^2$ ve $\theta:W\times W\to[1,\infty)$, $\theta(\mu,\eta)=1+|\mu-\eta|$ olarak tanımlanan q_{p_e} asimetrik kısmi genişletilmiş $b-$metrik fonksiyonu verilsin. Bu uzayda $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi ele alınırsa asimetrik kısmi genişletilmiş $b-$metrik uzayda limit tanımından,

$q_{p_e}(1,1)=\lim\limits_{n\to\infty}q_{p_e}\left(1,\dfrac{n}{n+1}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}q_{p_e}\left(\dfrac{n}{n+1},1\right)=1$ 'dır. Yani $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}=1\in W$ bulunur. Ayrıca,

$q_{p_e}(2,2)=\lim\limits_{n\to\infty}q_{p_e}\left(2,\dfrac{n}{n+1}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}q_{p_e}\left(\dfrac{n}{n+1},2\right)=4$ 'dır. Yani $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}=2\in W$ sağlanır. Dolayısıyla $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi hem 1 noktasına hem de 2 noktasına yakınsamaktadır. Yani, asimetrik kısmi genişletilmiş $b-$metrik uzayda limit tek değildir.

Uyarı 5.1.20. Herhangi bir asimetrik kısmi genişletilmiş $b-$metrik fonksiyonu genelde sürekli değildir. Örneğin,

$W=[1,\infty)$ olmak üzere $\varphi:W\times W\to[1,\infty)$, $\theta(\mu,\eta)=1+e^{|\mu-\eta|}$ ve $q_{p_e}(\mu,\eta)=\ell n(\mu\eta)+e^{\mu}$ olarak tanımlanan $q_{p_e}:W\times W\to\mathbb{R}^{+}$ fonksiyonu asimetrik kısmi genişletilmiş $b-$metrik fonksiyonudur. $(\mu_n)=e^{\frac{1}{n}}$ dizisi alınırsa bu dizi 1 noktasına yakınsar.

$q_{p_e}(1,1)=\lim\limits_{n\to\infty}q_{p_e}\left(1,e^{\frac{1}{n}}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}q_{p_e}\left(e^{\frac{1}{n}},1\right)=e$ olduğundan $\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n=1\in[1,\infty)$ 'dır.

$\lim_{n\to\infty}\mu_n = \mu$ olmak üzere, $\lim_{n\to\infty} q_{p_e}(\mu_n, 2) = q_{p_e}(\mu, 2)$ ise, q_{p_e} fonksiyonu süreklidir denir.

$$\lim_{n\to\infty} q_{p_e}(\mu_n, 2) = \lim_{n\to\infty}\left[\ell n\left(e^{\frac{1}{n}}2\right) + e^{\frac{1}{n}}\right] = \ell n2 + 1$$

ve

$$q_{p_e}(1,2) = \ell n(2) + e^1 = \ell n2 + e$$

’dır.

Dolayısıyla, $\lim_{n\to\infty} q_{p_e}(\mu_n, 2) = \ell n2 + 1 \neq \ell n2 + e = q_{p_e}(1,2)$ elde edilir ki bu da asimetrik kısmi genişletilmiş $b-$metrikte sürekliliğin sağlanmadığını gösterir.

Teorem 5.1.21. (W, q_{p_e}) asimetrik kısmi genişletilmiş $b-$metrik uzay ve $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$ W uzayında bir dizi olsun. Eğer $\lim_{n\to\infty}\mu_n = \mu$, $\lim_{n\to\infty}\mu_n = \eta$ ve $q_{p_e}(\mu,\mu) = q_{p_e}(\eta,\eta) = 0$ ise bu durumda $\mu = \eta$ sağlanır.

İspat :

$\lim_{n\to\infty}\mu_n = \mu$ ise $\lim_{n\to\infty} q_{p_e}(\mu, \mu_n) = \lim_{n\to\infty} q_{p_e}(\mu_n, \mu) = q_{p_e}(\mu, \mu)$’dır.

$\lim_{n\to\infty}\mu_n = \eta$ ise $\lim_{n\to\infty} q_{p_e}(\eta, \mu_n) = \lim_{n\to\infty} q_{p_e}(\mu_n, \eta) = q_{p_e}(\eta, \eta)$’dır.

Asimetrik kısmi genişletilmiş $b-$metrik uzayda üçgen eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} q_{p_e}(\mu,\eta) &\le \theta(\mu,\eta)\left[q_{p_e}(\mu,\mu_n) + q_{p_e}(\mu_n,\eta)\right] - q_{p_e}(\mu_n,\mu_n) \\ &\le \theta(\mu,\eta) q_{p_e}(\mu,\mu_n) + \theta(\mu,\eta) q_{p_e}(\mu_n,\eta) \end{aligned}$$

olur. $n\to\infty$ için limit alınırsa

$$\begin{aligned} 0 \le q_{p_e}(\mu,\eta) &\le \theta(\mu,\eta)\lim_{n\to\infty} q_{p_e}(\mu,\mu_n) + \theta(\mu,\eta)\lim_{n\to\infty} q_{p_e}(\mu_n,\eta) \\ &= \theta(\mu,\eta) q_{p_e}(\mu,\mu) + \theta(\mu,\eta) q_{p_e}(\eta,\eta) \\ &= \theta(\mu,\eta)0 + \varphi(\mu,\eta)0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Yani,

$$0 \le q_{p_e}(\mu,\eta) \le 0 \Rightarrow q_{p_e}(\mu,\eta) = 0$$

elde edilir. Buradan,

$$q_{p_e}(\mu,\mu)=q_{p_e}(\mu,\eta)=q_{p_e}(\eta,\eta)\Rightarrow\mu=\eta$$

sağlanır.

Teorem 5.1.22. (W,q_{p_e}) asimetrik kısmi genişletilmiş $b-$metrik uzay ve $(W,d_{q_{p_e}})$ genişletilmiş $b-$metrik uzaydır. (W,q_{p_e}) tam ise $(W,d_{q_{p_e}})$ tamdır.

$$\lim_{n,m\to\infty} d_{q_{p_e}}(\mu_n,\mu_m)=0\Leftrightarrow q_{p_e}(\mu,\mu)=\lim_{n\to\infty} q_{p_e}(\mu,\mu_n)=\lim_{n,m\to\infty} q_{p_e}(\mu_m,\mu_n)$$
$$q_{p_e}(\mu,\mu)=\lim_{n\to\infty} q_{p_e}(\mu_n,\mu)=\lim_{n,m\to\infty} q_{p_e}(\mu_n,\mu_m)$$

sağlanır.

İspat : (W,q_{p_e}) tam olduğundan, $\tau_{q_{p_e}}$ topolojisine göre her $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}\in W$ Cauchy dizisi $\mu\in W$ noktasına yakınsaktır ve

$$q_{p_e}(\mu,\mu)=\lim_{n,m\to\infty} q_{p_e}(\mu_n,\mu_m)=\lim_{n,m\to\infty} q_{p_e}(\mu_m,\mu_n)$$

sağlanır. $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $(W,d_{q_{p_e}})$ uzayında bir Cauchy dizisi olsun. $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi (W,q_{p_e}) uzayında Cauchy dizisi olduğu gösterilmelidir. $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $(W,d_{q_{p_e}})$ uzayında Cauchy dizisi olduğundan, $\lim_{n,m\to\infty} d_{q_{p_e}}(\mu_n,\mu_m)$ var ve sonludur.

$$d_{q_{p_e}}(\mu_n,\mu_m)=q_{p_e}(\mu_n,\mu_m)+q_{p_e}(\mu_m,\mu_n)-q_{p_e}(\mu_n,\mu_n)-q_{p_e}(\mu_m,\mu_m)$$

sağlanır. $\lim_{n,m\to\infty} q_{p_e}(\mu_n,\mu_m)$ ve $\lim_{n,m\to\infty} q_{p_e}(\mu_m,\mu_n)$ limitleri var ve sonludur. Bu nedenle, $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi (W,q_{p_e}) uzayında bir Cauchy dizisidir. (W,q_{p_e}) tam olduğundan, $\tau_{q_{p_e}}$ topolojisine göre $\mu\in W$ noktasına yakınsar ve tanım sağlanır. $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin $(W,d_{q_{p_e}})$ uzayında yakınsak olması için, $d_{q_{p_e}}(\mu,\mu)=\lim_{n\to\infty} d_{q_{p_e}}(\mu,\mu_n)$ eşitliğini sağladığı gösterilmelidir. $d_{q_{p_e}}$ fonksiyonunun tanımından $d_{q_{p_e}}(\mu,\mu)=0$ sağlanır.

$$\lim_{n\to\infty} d_{q_{p_e}}(\mu,\mu_n)=\lim_{n\to\infty} q_{p_e}(\mu,\mu_n)+\lim_{n\to\infty} q_{p_e}(\mu_n,\mu)-\lim_{n\to\infty} q_{p_e}(\mu_n,\mu_n)-\lim_{n\to\infty} q_{p_e}(\mu,\mu)=0$$

olur. Bu durumda, $d_{q_{p_e}}(\mu,\mu)=\lim_{n\to\infty} d_{q_{p_e}}(\mu,\mu_n)$'dır. $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy dizisi uzayda bir noktaya yakınsadığından $\left(W,d_{q_{p_e}}\right)$ tamdır.

$\Rightarrow$) $\lim_{n,m\to\infty} d_{q_{p_e}}(\mu_n,\mu_m)=0$ olsun. Bu durumda,

$$
\begin{aligned}
0=\lim_{n,m\to\infty} d_{q_{p_e}}(\mu_n,\mu_m) &= \lim_{n,m\to\infty} q_{p_e}(\mu_n,\mu_m)+\lim_{n,m\to\infty} q_{p_e}(\mu_m,\mu_n) \\
&\quad -\lim_{n,m\to\infty} q_{p_e}(\mu_n,\mu_n)-\lim_{n,m\to\infty} q_{p_e}(\mu_m,\mu_m)
\end{aligned}
$$

olduğundan

$$\lim_{n,m\to\infty} q_{p_e}(\mu_n,\mu_m)=\lim_{n\to\infty} q_{p_e}(\mu_n,\mu)=\lim_{n\to\infty} q_{p_e}(\mu,\mu)$$

ve

$$\lim_{n,m\to\infty} q_{p_e}(\mu_m,\mu_n)=\lim_{n\to\infty} q_{p_e}(\mu,\mu_n)=\lim_{n\to\infty} q_{p_e}(\mu,\mu)$$

bulunur.

$\Leftarrow$)

$$\lim_{n,m\to\infty} q_{p_e}(\mu_n,\mu_m)=\lim_{n\to\infty} q_{p_e}(\mu_n,\mu)=\lim_{n\to\infty} q_{p_e}(\mu,\mu)$$

ve

$$\lim_{n,m\to\infty} q_{p_e}(\mu_m,\mu_n)=\lim_{n\to\infty} q_{p_e}(\mu,\mu_n)=\lim_{n\to\infty} q_{p_e}(\mu,\mu)$$

olsun.

$$d_{q_{p_e}}(\mu_n,\mu_m)=q_{p_e}(\mu_n,\mu_m)+q_{p_e}(\mu_m,\mu_n)-q_{p_e}(\mu_n,\mu_n)-q_{p_e}(\mu_m,\mu_m)$$

olduğundan eşitliğin her iki tarafından limit alınırsa,

$$\lim_{n,m\to\infty} d_{q_{p_e}}(\mu_n,\mu_m)=0$$

elde edilir.

5.2. Asimetrik Kısmi Genişletilmiş $b-$Metrik Uzayda Sabit Nokta Teorisi

Bu bölümde $(\alpha,\beta)-\varphi_e$ daralma şartı tanımlanarak bu daralma şartını sağlayan sabit nokta teoremi ispatlanmıştır.

Tanım 5.2.1. $\theta : W^2 \to [0,\infty)$ fonksiyonu ile $\left(W, q_{p_e}\right)$ asimetrik kısmi genişletilmiş $b-$metrik uzay, $\alpha,\beta : W \to [0,\infty)$ iki fonksiyon ve $T : W \to W$ dönüşümü verilsin. $\mu,\eta \in W$ ve $q_{p_e}(T\mu, T\eta) > 0$ için

$$\alpha(\mu)\beta(\eta) \geq 1 \Rightarrow q_{p_e}(T\mu, T\eta) \leq \varphi_e\left(q_{p_e}(\mu,\eta)\right) \tag{5.2}$$

eşitsizliğini sağlayan φ_e sürekli genişletilmiş kıyaslama fonksiyon varsa T dönüşümüne $(\alpha,\beta)-\varphi_e$ daralma dönüşümü adı verilir.

Teorem 5.2.2. $\theta : W^2 \to [0,\infty)$ fonksiyonu ile $\left(W, q_{p_e}\right)$ asimetrik kısmi genişletilmiş $b-$metrik uzayı sağ Symth dizisel tam uzay ve $\alpha,\beta : W \to [0,\infty)$ iki fonksiyon olsun. $T : W \to W$ dönüşümü aşağıdaki şartları sağlasın:

1) T , $(\alpha,\beta)-\varphi_e$ daralma dönüşümüdür.
2) T dönüşümü döngüsel $(\alpha,\beta)-$geçişli dönüşümdür.
3) $\alpha(\mu_0) \geq 1$ ve $\beta(\mu_0) \geq 1$ olan $\mu_0 \in W$ vardır.
4) Her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha(\mu_n) \geq 1$ ve $\mu_n \to \sigma\,(n \to \infty)$ olacak şekilde $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset W$ dizisi varsa $\alpha(\mu) \geq 1$ bulunur.
5) $F(T)$, T dönüşümünün sabit noktalarının kümesi olmak üzere, $\mu,\eta \in F(T)$ için $\alpha(\mu) \geq 1$ ve $\beta(\eta) \geq 1$'dır.

O halde T dönüşümünün tek sabit noktası vardır.

İspat : Her $n \geq 0 \in \mathbb{N}$ için $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset W$ iterasyon dizisi

$$\mu_1 = T\mu_0,\ \mu_2 = T\mu_1, \cdots, \mu_n = T\mu_{n-1} = T^n\mu_0,$$

olarak tanımlansın. Teoremin 3. hipotezinden $\alpha(\mu_0)\geq 1$ olan $\mu_0\in W$ vardır. T döngüsel $(\alpha,\beta)-$geçişli dönüşüm ve $\alpha(\mu_0)\geq 1$ olduğundan $\beta(\mu_1)=\beta(T\mu_0)\geq 1$ ve bundan dolayı $\alpha(\mu_2)=\alpha(T\mu_1)\geq 1$'dır. Her $n\in\mathbb{N}$ için devam edilirse $\alpha(\mu_n)\geq 1$ ve $\beta(\mu_{n-1})\geq 1$ elde edilir. T döngüsel $(\alpha,\beta)-$geçişli dönüşüm ve $\beta(\mu_0)\geq 1$ olduğundan, benzer yöntemle her $n\in\mathbb{N}$ için $\beta(\mu_n)\geq 1$ ve $\alpha(\mu_{n-1})\geq 1$ bulunur. Dolayısıyla, her $n\in\mathbb{N}$ için $\alpha(\mu_n)\geq 1$ ve $\beta(\mu_n)\geq 1$'dır. Ayrıca her $n\in\mathbb{N}$ için, $\alpha(\mu_n)\beta(\mu_{n-1})\geq 1$ sağlanır. $q_{p_e}\left(\mu_{n_0+1},\mu_{n_0}\right)=0$ olan $n_0\in\mathbb{N}$ bulunsun. $\left(q_{p_e}2\right)$ ve $\left(q_{p_e}3\right)$ özelliklerinden

$$0\leq q_{p_e}\left(\mu_{n_0},\mu_{n_0}\right)\leq q_{p_e}\left(\mu_{n_0+1},\mu_{n_0}\right)\Rightarrow q_{p_e}\left(\mu_{n_0},\mu_{n_0}\right)=0$$

ve

$$0\leq q_{p_e}\left(\mu_{n_0+1},\mu_{n_0+1}\right)\leq q_{p_e}\left(\mu_{n_0+1},\mu_{n_0}\right)\Rightarrow q_{p_e}\left(\mu_{n_0+1},\mu_{n_0+1}\right)=0$$

olur. Bu nedenle,

$$q_{p_e}\left(\mu_{n_0+1},\mu_{n_0+1}\right)=q_{p_e}\left(\mu_{n_0+1},\mu_{n_0}\right)=q_{p_e}\left(\mu_{n_0},\mu_{n_0}\right)$$

sağlanır. Asimetrik kısmi genişletilmiş $b-$metriğin birinci aksiyomundan $\mu_{n_0}=\mu_{n_0+1}$ sağlanır. Yani $\mu_{n_0}=\mu_{n_0+1}=T\mu_{n_0}$ olduğundan μ_{n_0} noktası T dönüşümünün sabit noktasıdır. Şimdi her $n\in\mathbb{N}$ için $\mu_n\neq\mu_{n+1}$ olsun. Buradan $q_{p_e}\left(T\mu_n,T\mu_{n-1}\right)>0$ 'dır. Her için $\alpha(\mu_n)\beta(\mu_{n-1})\geq 1$ olduğundan (5.2) daralma şartı uygulanırsa

$$\begin{aligned}
q_{p_e}\left(\mu_{n+1},\mu_n\right)&=q_{p_e}\left(T\mu_n,T\mu_{n-1}\right)\\
&\leq\varphi_e\left(q_{p_e}\left(\mu_n,\mu_{n-1}\right)\right)\\
&<q_{p_e}\left(\mu_n,\mu_{n-1}\right)\\
&=q_{p_e}\left(T\mu_{n-1},T\mu_{n-2}\right)\\
&\leq\varphi_e\left(q_{p_e}\left(\mu_{n-1},\mu_{n-2}\right)\right)\\
&\vdots\\
&\leq\varphi_e^{\,n}\left(q_{p_e}\left(\mu_1,\mu_0\right)\right)
\end{aligned}$$

elde edilir; yani,

$$q_{p_e}\left(\mu_{n+1},\mu_n\right)\leq \varphi_e{}^n\left(q_{p_e}\left(\mu_1,\mu_0\right)\right) \tag{5.3}$$

$$\begin{aligned}
q_{p_e}\left(\mu_n,\mu_m\right) &\leq \theta\left(\mu_n,\mu_m\right)\left[q_{p_e}\left(\mu_n,\mu_{m+1}\right)+q_{p_e}\left(\mu_{m+1},\mu_m\right)\right]-q_{p_e}\left(\mu_{m+1},\mu_{m+1}\right)\\
&< \theta\left(\mu_n,\mu_m\right)q_{p_e}\left(\mu_n,\mu_{m+1}\right)+\theta\left(\mu_n,\mu_m\right)q_{p_e}\left(\mu_{m+1},\mu_m\right)\\
&\leq \theta\left(\mu_n,\mu_m\right)\theta\left(\mu_n,\mu_{m+1}\right)\left[q_{p_e}\left(\mu_n,\mu_{m+2}\right)+q_{p_e}\left(\mu_{m+2},\mu_{m+1}\right)\right]\\
&\quad -q_{p_e}\left(\mu_{m+2},\mu_{m+2}\right)+\theta\left(\mu_n,\mu_m\right)q_{p_e}\left(\mu_{m+1},\mu_m\right)\\
&< \theta\left(\mu_n,\mu_m\right)\theta\left(\mu_n,\mu_{m+1}\right)\left[q_{p_e}\left(\mu_n,\mu_{m+2}\right)+q_{p_e}\left(\mu_{m+2},\mu_{m+1}\right)\right]\\
&\quad +\theta\left(\mu_n,\mu_m\right)q_{p_e}\left(\mu_{m+1},\mu_m\right)\\
&\leq\\
&\vdots\\
&< \theta\left(\mu_n,\mu_m\right)\theta\left(\mu_n,\mu_{m+1}\right)\ldots\theta\left(\mu_n,\mu_{n-1}\right)q_{p_e}\left(\mu_n,\mu_{n-1}\right)\\
&\quad +\\
&\quad \vdots\\
&\quad +\theta\left(\mu_n,\mu_m\right)\theta\left(\mu_n,\mu_{m+1}\right)q_{p_e}\left(\mu_{m+2},\mu_{m+1}\right)\\
&\quad +\theta\left(\mu_n,\mu_m\right)q_{p_e}\left(\mu_{m+1},\mu_m\right)\\
&\quad \leq \theta\left(\mu_n,\mu_m\right)\theta\left(\mu_n,\mu_{m+1}\right)\ldots\theta\left(\mu_n,\mu_{n-1}\right)\varphi_e^{n-1}\left(q_{p_e}\left(\mu_1,\mu_0\right)\right)\\
&\qquad +\\
&\qquad \vdots\\
&\qquad +\theta\left(\mu_n,\mu_m\right)\theta\left(\mu_n,\mu_{m+1}\right)\varphi_e^{m+1}\left(q_{p_e}\left(\mu_1,\mu_0\right)\right)\\
&\qquad +\theta\left(\mu_n,\mu_m\right)\varphi_e^{m}\left(q_{p_e}\left(\mu_1,\mu_0\right)\right)\\
&\quad =\sum_{j=m}^{n-1}\varphi_e^j\left(q_{p_e}\left(\mu_1,\mu_0\right)\right)\prod_{i=m}^{j}\theta\left(\mu_n,\mu_i\right)\\
&\quad =\sum_{j=1}^{n-1}\varphi_e^j\left(q_{p_e}\left(\mu_1,\mu_0\right)\right)\prod_{i=m}^{j}\theta\left(\mu_n,\mu_i\right)\\
&\qquad -\\
&\qquad \sum_{j=1}^{m-1}\varphi_e^j\left(q_{p_e}\left(\mu_1,\mu_0\right)\right)\prod_{i=m}^{j}\theta\left(\mu_n,\mu_i\right)\\
&= S_{n-1}-S_{m-1}
\end{aligned}$$

sağlanır. Şimdi $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin W uzayında bir Cauchy dizisi olduğu gösterilsin. $\forall n>m$ için $\left(q_{p_e}4\right)$ özelliği ve (5.3) eşitsizliğinden

$$S_{n-1}=\sum_{j=1}^{n-1}\varphi_e^j\left(q_{p_e}\left(\mu_1,\mu_0\right)\right)\prod_{i=m}^{j}\theta\left(\mu_n,\mu_i\right)$$

bulunur. $\varphi_e \in \psi$ olduğundan,

$$\lim_{n,m\to\infty}\left[S_{n-1}-S_{m-1}\right]=0$$

olur ki bu da $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin W uzayında sağ $K_{q_{p_e}}-$Cauchy dizisi olduğunu gösterir. $\left(W,q_{p_e}\right)$ sağ Symth dizisel tam olduğundan, bu uzayda

$$\lim_{n\to\infty} q_{p_e}\left(\mu_n,\mu\right)=0 \quad \text{ve} \quad \lim_{n\to\infty} q_{p_e}\left(\mu,\mu_n\right)=0$$

olan $\mu \in W$ vardır. Şimdi μ noktasının T dönüşümünün sabit noktası olduğu gösterilsin. $T\mu \neq \mu$ olsun. Dolayısıyla, $q_{p_e}\left(T\mu,\mu\right)>0$'dır. Ayrıca teoremin 4.hipotezinden $\alpha(\mu)\beta(\mu_n)\geq 1$'dır. (5.2) daralma şartı uygulanırsa;

$$q_{p_e}\left(T\mu,\mu_{n+1}\right)=q_{p_e}\left(T\mu,T\mu_n\right)\leq \varphi_e\left(q_{p_e}\left(\mu,\mu_n\right)\right) \tag{5.4}$$

olur. φ fonksiyonu sürekli olduğundan (5.4) eşitsizliğinde $n\to\infty$ için limit alınırsa

$$0\leq \lim_{n\to\infty} q_{p_e}\left(T\mu,\mu_{n+1}\right)\leq \lim_{n\to\infty}\varphi_e\left(q_{p_e}\left(\mu,\mu_n\right)\right)=\varphi_e\left(\lim_{n\to\infty} q_{p_e}\left(\mu,\mu_n\right)\right)=\varphi_e(0)=0$$

elde edilir ki buradan

$$\lim_{n\to\infty} q_{p_e}\left(T\mu,\mu_{n+1}\right)=0 \tag{5.5}$$

olduğu anlaşılır. Ayrıca $\left(q_{p_e}4\right)$ üçgen eşitsizliği uygulanıp

$$\begin{aligned} q_{p_e}\left(T\mu,\mu\right) &\leq \theta(T\mu,\mu)\left[q_{p_e}\left(T\mu,\mu_{n+1}\right)+q_{p_e}\left(\mu_{n+1},\mu\right)\right]-q_{p_e}\left(\mu_{n+1},\mu_{n+1}\right) \\ &< \theta(T\mu,\mu)q_{p_e}\left(T\mu,\mu_{n+1}\right)+\theta(T\mu,\mu)q_{p_e}\left(\mu_{n+1},\mu\right) \end{aligned}$$

burada da $n\to\infty$ için limit alınırsa ve (5.5) ile verilen eşitlik kullanılırsa

$$0<q_{p_e}\left(T\mu,\mu\right)<\lim_{n\to\infty}\theta(T\mu,\mu)q_{p_e}\left(T\mu,\mu_{n+1}\right)+\lim_{n\to\infty}\theta(T\mu,\mu)q_{p_e}\left(\mu_{n+1},\mu\right)=0$$

elde edilir ki bu $q_{p_e}\left(T\mu,\mu\right)>0$ kabulüyle çelişir. Dolayısıyla $q_{p_e}\left(T\mu,\mu\right)=0$'dır. Asimetrik kısmi genişletilmiş $b-$metrik uzayın $\left(q_{p_e}2\right)$ ve $\left(q_{p_e}3\right)$ özelliklerinden

$q_{p_e}(\mu,\mu) \le q_{p_e}(T\mu,\mu)$ ve $q_{p_e}(T\mu,T\mu) \le q_{p_e}(T\mu,\mu)$ olduğu kullanılırsa, $q_{p_e}(\mu,\mu) = q_{p_e}(T\mu,T\mu) = 0$ elde edilir. Dolayısıyla,

$$q_{p_e}(\mu,\mu) = q_{p_e}(T\mu,\mu) = q_{p_e}(T\mu,T\mu)$$

elde edilmiş olur ki $(q_{p_e}1)$ özelliğinden $T\mu = \mu$ olduğu görülür. Yani, μ noktası T 'nin sabit noktasıdır. Şimdi sabit noktanın tek olduğu gösterilsin. T dönüşümünün $T\eta = \eta \ne \mu$ olacak şekilde μ noktasından farklı bir $\eta \in W$ sabit noktası olsun. O halde $q_{p_e}(T\mu,T\eta) > 0$ 'dır. Teoremin 5.hipotezinden $\alpha(\mu)\beta(\eta) \ge 1$ olup (5.2) daralma şartı uygulanırsa

$$q_{p_e}(\mu,n) = q_{p_e}(T\mu,Tn) \le \varphi_e\left(q_{p_e}(\mu,\eta)\right) < q_{p_e}(\mu,\eta)$$

bulunur ki bu çelişki olduğundan farklı iki sabit noktanın varlığı kabulü yanlıştır. Yani, T dönüşümünün tek sabit noktası vardır.

Örnek 5.2.3. $W = [0,1]$ olsun. $q_{p_e} : W \times W \to \mathbb{R}^+$, $q_{p_e}(\mu,\eta) = (\mu-\eta)^2$ ve $\theta : W \times W \to [1,\infty)$, $\theta(\mu,\eta) = 2\mu + 3\eta + 5$ olarak tanımlanan (W, q_{p_e}) sağ Symth dizisel tam asimetrik kısmi genişletilmiş $b-$metrik uzaydır. $\alpha,\beta : W \to [0,\infty)$ fonksiyonu

$$\alpha(\mu) = \beta(\mu) = \begin{cases} 1, & \mu \in [0,1] \text{ ise} \\ 0, & \mu \notin [0,1] \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlansın. $r \in (0,\infty)$ için $\varphi_e(r) = \dfrac{r}{2}$ olarak tanımlanan $\varphi_e : (0,\infty) \to (0,\infty)$ fonksiyonu sürekli genişletilmiş kıyaslama fonksiyondur. $T : W \to W$ dönüşümü $T\mu = \dfrac{\mu}{4}$ olarak tanımlanmış olsun. $\mu \in W$ için $\alpha(\mu) \ge 1$ olur. $\mu \in [0,1]$ olduğundan $T\mu \in [0,1]$ bulunur. Buradan $\beta(T\mu) \ge 1$ 'dır. Benzer şekilde $\beta(\mu) \ge 1$ olup, $\alpha(T\mu) \ge 1$ olduğu görülür. Buradan T, döngüsel $(\alpha,\beta)-$geçişli dönüşümdür. Eğer $\mu \ne \eta$ ve $\mu,\eta \in [0,1]$ ise $\alpha(\mu)\beta(\eta) \ge 1$ olduğu açıktır. Şimdi T dönüşümünün (5.2) daralma şartını sağladığı gösterilirse;

$$q_{p_b}(T\mu, T\eta) = q_{p_b}\left(\frac{\mu}{4}, \frac{\eta}{4}\right) = \left(\frac{\mu}{4} - \frac{\eta}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}(\mu - \eta)^2$$

ve

$$\varphi_e\left(q_{p_e}(\mu, \eta)\right) = \varphi_e\left((\mu - \eta)^2\right) = \frac{(\mu - \eta)^2}{2}$$

elde edilir. Bu durumda,

$$q_{p_e}(T\mu, T\eta) = \frac{(\mu - \eta)^2}{16} \leq \frac{(\mu - \eta)^2}{2} = \varphi_e\left(q_{p_e}(\mu, \eta)\right)$$

(5.2)'deki daralma şartından T dönüşümü tek sabit noktaya sahiptir.

$T\mu = \frac{\mu}{4} = \mu$ olup $\mu = 0$, T dönüşümünün sabit noktasıdır.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde kısmi metrik ve $b-$metrik fonksiyonlarının genellemeleri olan kısmi $b-$metrik, asimetrik kısmi $b-$metrik, asimetrik kısmi genişletilmiş $b-$metrik uzay olmak üzere üç farklı uzay üzerinde çalışılmıştır.

Kısmi $b-$metrik uzayda $\alpha_i^j-\left(D_\varphi\left(\beta_E\right)\right)$ daralma dönüşümü tanımlanmıştır. Farklı daralma dönüşümlerinin genellemesiyle oluşturulmuş bu daralma dönüşümünde ortak sabit nokta teoremi ispatlanmıştır. Bu teoremin farklı sonuçları verilmiştir.

Asimetrik kısmi $b-$metrik uzaylarda $(\alpha,\beta)-D_\varphi$ daralma dönüşümü tanımlanmıştır. Rasyonel ifadeler içeren dönüşümlerin sabit noktasının varlığı ve tekliği gösterilmiştir. Buradan bazı sonuçlar elde edilmiştir.

Asimetrik kısmi genişletilmiş $b-$metrik uzay ve topolojik yapısı inşaa edilmiştir. Yeni tanımlanan bu uzayda $(\alpha,\beta)-\varphi_e$ daralma dönüşümü tanımlanıp, sabit nokta teoremi ispatlanmıştır.

Bu çalışmada tanımlanan dönüşümlerin ve inşa edilen uzayın sabit nokta teorisinde çalışmalar yapan araştırmacılar için yeni bir bakış açısı kazandırılması hedeflenerek araştırmacıların önerilerine sunulmuştur.

KAYNAKLAR

[1] Amini-Harandi, A., Emami, H. (2010). A fixed point theorem for contraction type maps in partially ordered metric spaces and application to ordinary differential equations. *Nonlinear analysis: theory, methods and applications*, 72(5), 2238-2242.

[2] Harjani, J., Sadarangani, K., (2010). Generalized contractions in partially ordered metric spaces and applications to ordinary differential equations, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications,* 72 (3), 1188-1197.

[3] Wieczorek, A. (1988). Applications of fixed-point theorems in game theory and mathematical economics. *Wiadom. Mat*, 28, 25-34.

[4] Ceng, L. C., Ansari, Q. H., Yao, J. C. (2011). Some iterative methods for finding fixed points and for solving constrained convex minimization problems. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 74*(*16), 5286-5302.

[5] Borwein, J. M., Sims, B. (2011). The Douglas-Rachford algorithm in the absence of convexity. Tiré de: Fixed-point algorithms for inverse problems in science and engineering.

[6] Border, K. C. (1985). *Fixed point theorems with applications to economics and game theory*. Cambridge university press.

[7] Ok, E. A. (2007). *Real analysis with economic applications* (Vol. 10). Princeton University Press.

[8] Chen, M., Lu, W., Chen, Q., Ruchala, K. J., and Olivera, G. H. (2008). A simple fixed-point approach to invert a deformation field a. *Medical physics*, 35-81,

[9] Radde, N. (2010). Fixed point characterization of biological networks with complex graph topology. *Bioinformatics*, 26(22), 2874-2880.

[10] Wang, G. Q., Cheng, S. S. (2009). Fixed point theorems arising from seeking steady states of neural networks. *Applied Mathematical Modelling*, 33(1), 499-506.

[11] Brouwer, L. E. J. (1910). Über ein eindeutige, stetige Transformationen von Flächen in sich. *Math Ann.*, 69, 176-180.

[12] Schauder, J. (1930). Der fixpunktsatz in funktionalraümen. *Studia Mathematica*, 2(1), 171-180.

[13] Banach, S. (1922). Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales. *Fundamenta mathematicae*, 3(1), 133-181.

[14] Aksoy, U., Karapinar, E., Erhan, I. M. (2016). Fixed points of generalized alpha-admissible contractions on b-metric spaces with an application to boundary value problems. *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*, 17(6), 1095-1108.

[15] Kumar Mohanta, S. (2016). Coincidence points and common fixed points for expansive type mappings in b -Metric Spaces. 113-101, (1) 11. Kannan, R., Some reults on fixed points, Bull. Calcutta Math. Soc., 60, 71-76, 1968.

[16] Kannan, R. (1968). Some results on fixed points. *Bull. Cal. Math. Soc.*, *60*, 71-76.

[17] Chatterjea, S. K. (1972). Fixed point theorems for a sequence of mappings with contractive iterates. *Publications de l'Institut Mathématique*, 14(34), 15-18.

[18] Hardy, G. E., and Rogers, T. D. (1973). A generalization of a fixed point theorem of Reich. *Canadian Mathematical Bulletin*, 16(2), 201-206.

[19] Ćirić, L. B. (1974). A generalization of Banach's contraction principle. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 45(2), 267-273.

[20] Boyd, D. W., Wong, J. S. (1969). On nonlinear contractions. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 20(2), 458-464.

[21] Keeler, E. M. M. E. T. T., Meir, A. (1969). A theorem on contraction mappings. *J. Math. Anal. Appl*, 28, 326-329.

[22] Berinde, V., (2003). On the approximation of fixed points of weak contractive mappings, *Carpathian J. Math.*, 19(1) ,722-732.

[23] Rhoades, B. E. (1977). A comparison of various definitions of contractive mappings. *Transactions of the American Mathematical Society*, 226, 257-290.

[24] Samet, B., Vetro, C., Vetro, P. (2012). Fixed point theorems for α–ψ-contractive type mappings. *Nonlinear analysis: Theory, Methods and Applications*, 75(4), 2154-2165.

[25] Nadler Jr, S. B. (1969). Multi-valued contraction mappings. *Pacific Journal Of Mathematics*, 30(2), 475-488.

[26] Tarski, A., (1955) A lattice-theoretical fixpoint theorem and its applications, *Pac. J. Math*., 5(2), 285–309.

[27] Jachymski, J. (2008). The contraction principle for mappings on a metric space with a graph. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 136(4), 1359-1373.

[28] Gupta, A. (2013). Cyclic contraction on S-metric space. *International journal of Analysis and Applications*, 3(2), 119-130.

[29] Özgür, N. Y., Taş, N. (2017). Some new contractive mappings on S-metric spaces and their relationships with the mapping (S25). *Mathematical Sciences*, 11, 7-16.

[30] Jleli, M., Samet, B. (2012). Remarks on G-metric spaces and fixed point theorems. *Fixed Point Theory and Applications*, 1-7.

[31] Öztürk, M., Abbas, M., Girgin, E. (2014). Fixed points of mappings satisfying contractive condition of integral type in modular spaces endowed with a graph. *Fixed Point Theory and Applications*, 1-17.

[32] Öztürk, M., Abbas, M., Girgin, E. (2016). Common fixed point results of a pair of generalized (ψ, φ) contraction mappings in modular spaces. *Fixed Point Theory and Applications*, 1-19.

[33] Jleli, M., Samet, B. (2014). A new generalization of the Banach contraction principle. *Journal of Inequalities and Applications*, 1-8.

[34] Khojasteh, F., Shukla, S., Radenović, S. (2015). A new approach to the study of fixed point theory for simulation functions. *Filomat*, 29(6), 1189-1194.

[35] Chistyakov, V. (2015). *Metric Modular Spaces: Theory and Applications* (p. 73). Cham: Springer.

[36] Kreyszig, E. (1991). *Introductory functional analysis with applications* (Vol. 17). John Wiley and Sons.

[37] M. Frechet, (1906) Sur quelques points du calcul fonctionnel, ′ *Rend. Circ. Mat. Palermo* 22(1), 1–72.

[38] Hausdorff, F. (1914). *Grundzüge der mengenlehre* (Vol. 7). von Veit.

[39] Maddox, I. J. (1988). *Elements of functional analysis*. CUP Archive.

[40] Yüksel, Ş. (2014). *Genel topoloji* (No. 109). Eğitim Yayınevi.

[41] Berinde, V., Takens, F. (2007). *Iterative approximation of fixed points* . Berlin: Springer, 1, 222.

[42] Granas, A., Dugundji, J. (2003). *Fixed point theory* . New York: Springer, 14(1), 15-16.

[43] Berinde, V., Takens, F. (2007). *Iterative approximation of fixed points* . Berlin: Springer, 1, 322.

[44] Jain, P. K.(2009). *Metric Spaces*. Narosa Publishing House.

[45] Kannan, R. (1968). Some results on fixed points. *Bull. Cal. Math. Soc.*, 60, 71-76.

[46] Berinde, V. (2004). Approximating fixed points of weak contractions using the Picard iteration. In *Nonlinear Analysis Forum* 9, 43-54.

[47] Babu, G.V.R., Sandhya, M.L., Kameswari, M.V.R., (2008) A note on a fixed point theorem of Berinde weak contractions, *Carpathian J. Math*., 24(1), 8-12.

[48] Berinde, V. (2009). Some remarks on a fixed point theorem for Ciric-type almost contractions. *Carpath. J. Math*. 25(2), 157-162.

[49] Chatterjea, S.K. (1972). Fixed point theorems, *Compts. Rend. Acad. Bulgare Sc*., 25, 727-730.

[50] Hardy, G. E., Rogers, T. D. (1973). A generalization of a fixed point theorem of Reich. *Canadian Mathematical Bulletin*, 16(2), 201-206.

[51] Jungck, G., Rhoades, B. E. (1998). Fixed points for set valued functions without continuity. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 29, 227-238.

[52] Ćirić, L., Abbas, M., Saadati, R., Hussain, N. (2011). Common fixed points of almost generalized contractive mappings in ordered metric spaces. *Applied Mathematics and Computation*, 217(12), 5784-5789.

[53] Alizadeh, S. A., Moradlou, F., Salimi, P. (2014). Some fixed point results for (α, β)-(ψ, φ)-contractive mappings. *Filomat*, 28(3), 635-647.

[54] Karapınar, E., Kumam, P., Salimi, P. (2013). On α-ψ-Meir-Keeler contractive mappings. *Fixed Point Theory and Applications*, 1-12.

[55] Aydi, H. (2016). α-implicit contractive pair of mappings on quasi b-metric spaces and an application to integral equations. *J. Nonlinear Convex Anal.*, 17(12), 2417-2433.

[56] Phiangsungnoen, S., Sintunavarat, W., Kumam, P. (2014). Fixed point results, generalized Ulam-Hyers stability and well-posedness via α-admissible mappings in b-metric spaces. *Fixed Point Theory and Applications*, 1-17.

[57] Kutbi, M. A., Sintunavarat, W. (2014, January). Ulam-Hyers stability and well-posedness of fixed point problems for α-λ-contraction mapping in metric spaces. *Abstract and Applied Analysis*, 2014, 7 pages.

[58] Sintunavarat, W. (2014). Generalized Ulam-Hyers stability, well-posedness, and limit shadowing of fixed point problems for α-β-contraction mapping in metric spaces. *The Scientific World Journal*, 2014, 6 pages.

[59] Cho, S. H., Bae, J. S. (2014). Fixed points of weak α-contraction type maps. *Fixed Point Theory and Applications*, 2014(175), 1-12.

[60] Latif, A., Isik, H., Ansari, A. (2016). Fixed points and functional equation problems via cyclic admissible generalized contractive type mappings. *Journal of Nonlinear Sciences And Applications*, 9(3), 1129-1142.

[61] Berinde, V., Takens, F. (2007). *Iterative approximation of fixed points*. Berlin: Springer, 222-322.

[62] Shatanawi, W., Abodayeh, K., Mukheimer, A. (2018). Some fixed point theorems in extended b-metric spaces. *UPB Scientific Bulletin, Series A: Applied Mathematics and Physics*, 80(4), 71-78.

[63] Liu, X. D., Chang, S. S., Xiao, Y., Zhao, L. C. (2016). Some fixed point theorems concerning (ψ, φ)-type contraction in complete metric spaces. *J. Nonlinear Sci. Appl.*, 9(6), 4127-4136.

[64] Geraghty, M. A. (1973). On contractive mappings. *Proceedings of the American Mathematical Society*, *40*(2), 604-608.

[65] Fulga, A., Proca, A. M. (2017). Fixed points for φ E-Geraghty contractions. *Journal of Nonlinear Sciences & Applications (JNSA)*, *10*(9), 5125-5131.

[66] Alqahtani, B., Fulga, A., Karapınar, E. (2018). A short note on the common fixed points of the Geraghty contraction of type $E_{S,T}$. *Demonstratio Mathematica*, *51*(1), 233-240.

[67] Aydi, H., Felhi, A., Karapınar, E., Alrubaish, H., Alshammari, M. (2019). Fixed points for α-βE-Geraghty contractions on b-metric spaces and applications to matrix equations. *Filomat*, 33(12), 3737-3750.

[68] Wardowski, D. (2012). Fixed points of a new type of contractive mappings in complete metric spaces. *Fixed Point Theory and Applications*, 2012(94), 1-6.

[69] Piri, H., Kumam, P. (2014). Some fixed point theorems concerning F-contraction in complete metric spaces. *Fixed Point Theory and Applications*, 2014(210) 1-11.

[70] Vetro, C., Vetro F., (2015) A Homotopy fixed point theorems for partial metric spaces. *Filomat*, 29(9) 2037-2048.

[71] Agarwal, P., Meehan, M., O'Regan, D., (2004) Fixed point theory and applications, Cambridge University Press, United Kingdom.

[72] Matthews, S. G. (1992). Partial metric topology. Research Report 212. University of Warwick, Department of Computer Science.

[73] Matthews, S. G. (1994). Partial metric topology. *Annals of the New York Academy of Sciences*, 728(1), 183-197.

[74] Michael Bukatin, Ralph Kopperman, Steve Matthews, Homeria Pajoohesh. (1906). By the French Mathematician Maurice René Fréchet.

[75] Oltra, S., Valero, O. (2004). Banach's fixed point theorem for partial metric spaces.*Rend. Istit. Mat. Trieste*. 36, 17-26.

[76] Heckmann, R. (1999). Approximation of metric spaces by partial metric spaces. *Applied Categorical Structures*, 7, 71-83.

[77] Kopperman, R., Matthews, S., Pajoohesh, H. (2005). What do partial metrics represent?. In *Dagstuhl Seminar Proceedings*. Schloss Dagstuhl-Leibniz-Zentrum für Informatik.

[78] Romaguera, S., Valero, O. (2009). A quantitative computational model for complete partial metric spaces via formal balls. *Mathematical Structures in Computer Science*, 19(3), 541-563.

[79] Schellekens, M. P. (2003). A characterization of partial metrizability: domains are quantifiable. *Theoretical Computer Science*, 305(1-3), 409-432.

[80] Valero, O. (2005). On Banach fixed point theorems for partial metric spaces. *Applied General Topology*, 6(2), 229-240.

[81] Chi, K. P., Karapınar, E., Thanh, T. D. (2012). A generalized contraction principle in partial metric spaces. *Mathematical and Computer Modelling*, 55(5-6), 1673-1681.

[82] Shatanawi, W., Nashine, H. K. (2012). A generalization of Banach's contraction principle for nonlinear contraction in a partial metric space. *J. Nonlinear Sci. Appl.*, 5(1), 37-43.

[83] Karapınar, E., Yüksel, U. (2011). Some common fixed point theorems in partial metric spaces. *Journal of Applied Mathematics*, 2011, 16.

[84] Karapınar, E., Romaguera, S. (2013). Nonunique fixed point theorems in partial metric spaces. *Filomat*, 27(7), 1305-1314.

[85] Altun, I., Acar, Ö. (2012). Fixed point theorems for weak contractions in the sense of Berinde on partial metric spaces. *Topology and its Applications*, 159(10-11), 2642-2648.

[86] Karapınar, E., Yuce, I. S. (2012). Fixed Point Theory for Cyclic Generalized Weak φ-Contraction on Partial Metric Spaces. In *Abstract and Applied Analysis*, 2012, 1-12.

[87] Ćirić, L., Samet, B., Aydi, H., Vetro, C. (2011). Common fixed points of generalized contractions on partial metric spaces and an application. *Applied Mathematics and Computation*, 218(6), 2398-2406.

[88] Bakhtin, I. A. (1989). The contraction principle in quasi metric spaces, *Funct. Anal. Unianowsk Gos. Ped. Inst.*, 30, 26-37.

[89] Czerwik, S. (1993). Contraction mappings in b -metric spaces. *Acta Mathematica et Informatica Universitatis Ostraviensis*, 1(1), 5-11.

[90] Afshari, H., Aydi, H., Karapinar, E. (2016). Existence of fixed points of set-valued mappings in b-metric spaces. *East Asian Math. J.*, 32(3), 319-332.

[91] Rezaei Roshan, J., Parvaneh, V., Sedghi, S., Shobkolaei, N., Shatanawi, W. (2013). Common fixed points of almost generalized (ψ, φ) s-contractive mappings in ordered b-metric spaces. *Fixed Point Theory and Applications*, 1-23.

[92] Bota, M. F., Chifu, C., Karapinar, E. (2016). Fixed point theorems for generalized (α− ψ)-Ciric-type contractive multivalued operators in b-metric spaces. *J. Nonlinear Sci. Appl.*, 9(3), 1165-1177.

[93] Hussain, N., Parvaneh, V., Roshan, J. R., Kadelburg, Z. (2013). Fixed points of cyclic weakly (ψ, φ, L, A, B)-contractive mappings in ordered b-metric spaces with applications. *Fixed Point Theory and Applications*, 1-18.

[94] Berinde, V. (1993). Generalized contractions in quasi metric spaces. In *Seminar on Fixed Point Theory* 3(9), 3-9.

[95] Wu, X., Zhao, L. (2018). Fixed point theorems for generalized α-ψ type contractive mappings in b-metric spaces and applications. *J. Math. Computer Sci.*, 18, 49-62.

[96] Cobzaş, S. (2018). B-metric spaces, fixed points and Lipschitz functions. *arXiv preprint arXiv*:1802.02722.

[97] Babu, G. V. R., Dula, T. M. (2018). Fixed points of almost generalized (α,β)- (ψ, φ) contractive mappings in b -metric spaces. *Facta Universitatis, Series: Mathematics and Informatics*, 33(2), 177-196.

[98] Lang, C., Guan, H. (2022). Common fixed point and coincidence point results for generalized α-ϕ E-Geraghty contraction mappings in b-metric spaces. *Aims Mathematics*, 7(8), 14513–14531.

[99] Afshari, H., Aydi, H., Karapınar, E. (2020). On generalized α-ψ-Geraghty contractions on b-metric spaces. *Georgian Mathematical Journal*, 27(1), 9-21.

[100] Kamran, T., Samreen, M., UL Ain, Q. (2017). A generalization of b-metric space and some fixed point theorems. *Mathematics*, 5(2), 19.

[101] Samreen, M., Kamran, T., Postolache, M. (2018). Extended b-metric space, extended b-comparison function and nonlinear contractions. *Politeh. Buch. Ser. A.*, 80(4), 21-28.

[102] Abdeljawad, T., Agarwal, R. P., Karapınar, E., Kumari, P. S. (2019). Solutions of the nonlinear integral equation and fractional differential equation using the technique of a fixed point with a numerical experiment in extended b-metric space. *Symmetry*, 11(5), 686.

[103] Subashi, L. (2017). Some topological properties of extended b-metric space. In *Proceedings of the 5th International Virtual Conference on Advanced Scientific Results* 5, 164-167.

[104] Alqahtani, B., Fulga, A., Karapınar, E., Rakočević, V. (2019). Contractions with rational inequalities in the extended b-metric space. *Journal of Inequalities and Applications*, 1-11.

[105] Huang, H., Singh, Y. M., Khan, M. S., Radenović, S. (2021). Rational type contractions in extended b-metric spaces. *Symmetry*, 13(4), 614.

[106] Alqahtani, B., Fulga, A., Karapınar, E. (2018). Common fixed point results on an extended b-metric space. *Journal of Inequalities and Applications*, 1-15.

[107] Wilson, W. A. (1931). On quasi-metric spaces. *American Journal of Mathematics*, 53(3), 675-684.

[108] Cobzas, S. (2012). *Functional analysis in asymmetric normed spaces*. Springer Science & Business Media.

[109] Collins, J., Zimmer, J. (2007). An asymmetric Arzelà–Ascoli theorem. *Topology and its Applications*, 154(11), 2312-2322.

[110] Yalcin, M., Simsek, H., Altun, I. (2020). Fixed Point Theorems on Complete Quasi Metric Spaces Via C-class and A-Class Functions. *Sahand Communications in Mathematical Analysis*, 17(2), 23-36.

[111] Künzi, H. P. A. (2001). Nonsymmetric distances and their associated topologies: about the origins of basic ideas in the area of asymmetric topology. *Handbook of the History of General Topology*, 853-968.

[112] Reilly, I. L., Subrahmanyam, P. V., Vamanamurthy, M. K. (1982). Cauchy sequences in quasi-pseudo-metric spaces. *Monatshefte für Mathematik*, 93, 127-140.

[113] Gaba, Y. U. (2014). Startpoints and-contractions in quasi-pseudometric spaces. *Journal of Mathematics*, 2014, 8.

[114] Altun, I., Minak, G., Olgun, M. (2017). Classification of completeness of quasi metric space and some fixed point results, 22(2).

[115] Piri, H., Rahrovi, S., Marasi, H., Kumam, P. (2017). F-contraction on asymmetric metric spaces. *J. Math. Comput. Sci*, 17, 32-40.

[116] Karapınar, E., Fulga, A., Yeşilkaya, S. S. (2022). Fixed Points of Proinov Type Multivalued Mappings on Quasimetric Spaces. *Journal of Function Spaces*.

[117] Shukla, S. (2014). Partial b-metric spaces and fixed point theorems. *Mediterranean Journal of Mathematics*, 11, 703-711.

[118] Mustafa, Z., Roshan, J. R., Parvaneh, V., Kadelburg, Z. (2013). Some common fixed point results in ordered partial b-metric spaces. *Journal of Inequalities and Applications*, 2013, 1-26.

[119] Zhu, C., Xu, W., Chen, C., Zhang, X. (2014). Common fixed-point theorems for generalized expansive mappings in partial b-metric spaces and an application. *Journal of Inequalities and Applications,* 1-19.

[120] Van Dung, N., Le Hang, V. T. (2017). Remarks on partial b-metric spaces and fixed point theorems. *Matematicki Vesnik*, 69(4), 231-240.

[121] Mukheimer, A. (2014). α-ψ-ϕ-contractive mappings in ordered partial b-metric spaces. *J. Nonlinear Sci. Appl.*, 7, 168-179.

[122] Ge, X., Lin, S. (2016). A note on partial b-metric spaces. *Mediterranean Journal of Mathematics*, 13(3), 1273-1276.

[123] Dolićanin–Đekić, D. (2017). On some Ćirić type results in partial b-metric spaces. *Filomat*, 31(11), 3473-3481.

[124] Geraghty, M. A. (1973). On contractive mappings. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 40(2), 604-608.

[125] Latif, A., Roshan, J. R., Parvaneh, V., Hussain, N. (2014). Fixed point results via α-admissible mappings and cyclic contractive mappings in partial b-metric spaces. *Journal of Inequalities and Applications*, 1-26.

[126] Ameer, E., Aydi, H., Arshad, M., Alsamir, H., Noorani, M. S. (2019). Hybrid multivalued type contraction mappings in αK-complete partial b-metric spaces and applications. *Symmetry*, 11(1), 86.

[127] Nazam, M., Hamid, Z., Al Sulami, H., Hussain, A. (2021). Common fixed-point theorems in the partial b-metric spaces and an application to the system of boundary value problems. *Journal of Function Spaces*. 1-11.

[128] Gupta, A., Gautam, P. (2015). Quasi-partial b-metric spaces and some related fixed point theorems. *Fixed point theory and Applications*, 1-12.

[129] Karapınar, E., Erhan, İ. M., Öztürk, A. (2013). Fixed point theorems on quasi-partial metric spaces. *Mathematical and Computer Modelling*, 57(9-10), 2442-2448.

[130] Mishra, V. N., Sánchez Ruiz, L. M., Gautam, P., Verma, S. (2020). Interpolative Reich–Rus–Ćirić, Hardy–Rogers contraction on quasi-partial b-metric space and related fixed point results. *Mathematics*, 8(9), 1598.

[131] Gautam, P., Sánchez Ruiz, L. M., Verma, S. (2020). Fixed point of interpolative Rus–Reich–Ćirić contraction mapping on rectangular quasi-partial b-metric space. *Symmetry*, 13(1), 32.

[132] Fan, X. (2016). Fixed point theorems for cyclic mappings in quasi-partial b-metric spaces. *J. Nonlinear Sci. Appl, 9,* 2175-2189.

[133] Gupta, A., Gautam, P. (2016). Topological structure of quasi-partial b-metric spaces. *Int. J. Pure Math. Sci*, 17, 8-18.

[134] Gautam, P., Kumar, S., Verma, S., Gupta, G. (2021). Nonunique fixed point results via Kannan F-contraction on quasi-oartial b-Metric Space. *Journal of Function Spaces*, 1-10.

[135] Gautam, P., Mishra, V. N., Ali, R., and Verma, S. (2021). Interpolative Chatterjea and cyclic Chatterjea contraction on quasi-partial b-metric space. *AIMS Mathematics*, 6(*2*), 1727-1742.

[136] Gautam, P., Singh, S. R., Kumar, S., Verma, S. (2022). On nonunique fixed point theorems via interpolative Chatterjea type Suzuki contraction in quasi-partial b-metric space. *Journal of Mathematics*.

[137] Gautam, P., Verma, S., De La Sen, M., Marwaha, P. R. (2021). On ω-Interpolative Berinde Weak Contraction in Quasi-Partial b-Metric Space. *International Journal of Analysis and Applications*, 19(4), 619-632.

[138] Aydi, H., Felhi, A., Sahmim, S. (2021). On Fixed Points in Quasi Partial b-Metric Spaces and an Application to Dynamic Programming. *Thai Journal of Mathematics*, 19(2), 407-41.

ÖZGEÇMİŞ

Ad-Soyad : Leyla DÖNMEZ

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans :** 2012, Sakarya Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü
- **Yüksek lisans :** 2020, Sakarya Üniversitesi, Matematik Topoloji Anabilim Dalı

MESLEKİ DENEYİM :

- 2012-2014 yılları arasında özel bir kurumda Matematik öğretmeni olarak görev yapmıştır.
- 2014-2016 yılları arasında Sancaktepe Belediyesi'de Matematik öğretmeni olarak çalıştı.
- 2016-halen Milli Eğitim Bakanlığı bünyesinde Matematik öğretmenliği yapmaktadır.