T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HİPERBOLİK METRİK UZAYLARDA KF −İTERASYON YÖNTEMİ İÇİN BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Emre ÖZTÜRK

Matematik Anabilim Dalı

Fonksiyonlar Teorisi ve Fonksiyonel Analiz Bilim Dalı

KASIM 2023

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HİPERBOLİK METRİK UZAYLARDA KF −İTERASYON YÖNTEMİ İÇİN BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Emre ÖZTÜRK

Matematik Anabilim Dalı

Fonksiyonlar Teorisi ve Fonksiyonel Analiz Bilim Dalı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Aynur ŞAHİN

KASIM 2023

Emre ÖZTÜRK tarafından hazırlanan "Hiperbolik metrik uzaylarda KF −iterasyon yöntemi için bazı sabit nokta teoremleri" adlı tez çalışması 17.11.2023 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Fonksiyonlar Teorisi ve Fonksiyonel Analiz Bilim Dalı'nda Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi

Jüri Başkanı : **Doç. Dr. Mahpeyker ÖZTÜRK**
Sakarya Üniversitesi

Jüri Üyesi : **Doç. Dr. Aynur ŞAHİN** (Danışman)
Sakarya Üniversitesi

Jüri Üyesi : **Dr. Öğr. Üyesi Ekber GİRGİN**
Sakarya Uygulamalı Bilimler Üniversitesi

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Eğitim-Öğretim Yönetmeliğine ve Yükseköğretim Kurumları Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Yönergesine uygun olarak hazırlamış olduğum “HİPERBOLİK METRİK UZAYLARDA $KF-$İTERASYON YÖNTEMİ İÇİN BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİ” başlıklı tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın tüm aşamalarında yukarıda belirtilen yönetmelik ve yönergeye uygun davrandığımı, tezin içerdiği yenilik ve sonuçları başka bir yerden almadığımı, tezde kullandığım eserleri usulüne göre kaynak olarak gösterdiğimi, bu tezi başka bir bilim kuruluna akademik amaç ve unvan almak amacıyla vermediğimi ve 20.04.2016 tarihli Resmi Gazete’de yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince Sakarya Üniversitesi’nin abonesi olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Enstitü tarafından belirlenmiş ölçütlere uygun rapor alındığını, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun ortaya çıkması halinde doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi beyan ederim.

(17/11/2023)

Emre ÖZTÜRK

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın her aşamasında değerli bilgi ve deneyimlerinden yararlandığım, görüş ve önerileriyle bana yol gösteren çok değerli hocam Sayın Doç. Dr. Aynur ŞAHİN'e en içten dileklerimle teşekkür eder saygılarımı sunarım.

Ayrıca, hayatımın her aşamasında bana duydukları güven ve desteklerinden dolayı aileme teşekkürü bir borç bilirim.

Emre ÖZTÜRK

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER

$\emptyset$	:Boş küme
$\mathbb{N}$	:Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	:Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	:Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{F}$	:Cisim ($\mathbb{F} = \mathbb{R}$ veya $\mathbb{F} = \mathbb{C}$)
(X, d)	:Metrik uzay
$F(T)$	:T dönüşümünün tüm sabit noktalarının kümesi
$r(C, \{x_n\})$	:$\{x_n\}$ dizisinin C kümesine göre asimptotik yarıçapı
$r(\{x_n\})$	:$\{x_n\}$ dizisinin X uzayına göre asimptotik yarıçapı
$A(C, \{x_n\})$	:$\{x_n\}$ dizisinin C kümesine göre tüm asimptotik merkezlerinin kümesi
$A(\{x_n\})$	:$\{x_n\}$ dizisinin X uzayına göre tüm asimptotik merkezlerinin kümesi
$x_n \to x$	:$\{x_n\}$ dizisinin kuvvetli limiti
$\Delta - \lim_{n\to\infty} x_n$	:$\{x_n\}$ dizisinin Δ −limiti
(X, d, W)	:Hiperbolik metrik uzay
η	:X uzayının düzgün konvekslik modülü
$\tilde{T}$	:T dönüşümünün yaklaşım operatörü

TABLO LİSTESİ

Sayfa

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

HİPERBOLİK METRİK UZAYLARDA KF −İTERASYON YÖNTEMİ İÇİN BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİ

ÖZET

Bu tezin amacı, 2005 yılında Kohlenbach tarafından verilen hiperbolik metrik uzaylarda KF −iterasyon yöntemini kullanarak daralma dönüşümleri için zayıf w^2 −kararlılık ve veri bağımlılığı teoremleri ile 1. tip genelleştirilmiş (α, β) −genişlemeyen dönüşümler için bazı Δ −yakınsaklık ve kuvvetli yakınsaklık teoremlerini ispatlayıp literatürde var olan bazı sonuçları genelleştirmektir. Kohlenbach tarafından tanımlanan hiperbolik metrik uzaylar, 1983 yılında Goebel ve Kirk tarafından tanımlanan hiperbolik tip uzay tanımına göre daha kısıtlayıcı, fakat 1990 yılında Reich ve Shafrir tarafından tanımlanan hiperbolik uzay tanımından ise daha geneldir. Banach uzayı, CAT(0) uzayı ve Hilbert yuvarı hiperbolik metrik uzayın özel durumlarıdır.

Tezde ayrıca, hiperbolik metrik uzaylarda 1. tip genelleştirilmiş (α, β) −genişlemeyen dönüşümler için aşikar olmayan bir nümerik örnek vererek KF −iterasyon yöntemiyle diğer farklı iterasyon yöntemlerini karşılaştırarak KF −iterasyon yönteminin dönüşümün sabit noktasına diğer iterasyon yöntemlerinden daha hızlı yakınsadığını göstermek amaçlandı.

Bu doğrultuda ilk olarak, 2022 yılında Ullah, Ahmad ve Khan tarafından ve Temir ve Korkut tarafından yapılan çalışmalarda tanımlanan sabit noktaya literatürdeki birçok iterasyon yönteminden daha hızlı bir şekilde yakınsayan ve Ullah, Ahmad ve Khan tarafından KF −iterasyon yöntemi olarak adlandırılan iterasyon yöntemi hiperbolik metrik uzayın yapısına uygun bir biçimde yeniden ifade edildi. Daha sonra 1922 yılında Banach tarafından çalışılan daralma dönüşümleri ile 2021 yılında Akutsah ve Narain tarafından tanıtılan ve genelleştirilmiş α −genişlemeyen, ortalama genişlemeyen ve (C_λ) şartını sağlayan dönüşüm sınıfı gibi birçok dönüşüm sınıfını içeren genişlemeyen dönüşümlerin daha genel bir sınıfı olan “1. tip genelleştirilmiş (α, β) −genişlemeyen dönüşümler’’ kullanılarak bazı teorik sonuçlar ispatlandı. Son olarak ise bir 1. tip genelleştirilmiş (α, β) −genişlemeyen dönüşüm örneği verilerek MATLAB programı aracılığıyla elde edilen tablo ve grafik yardımıyla KF −iterasyon yöntemi ile literatürde var olan diğer iterasyon yöntemlerinin sabit noktaya yakınsama hızları karşılaştırılarak araştırmacılar tarafından ileride yapılabilecek çalışmalar hakkında bilgi verildi.

Bu tezden üretilen ve SCI-Expanded kapsamındaki dergide yayımlanan makale ile bu tezde ele alınan konular hiperbolik metrik uzaylarda sabit nokta teorisinin gelişimi için ileride yapılacak çalışmalara kaynak teşkil edecek niteliktedir.

SOME FIXED POINT THEOREMS FOR THE $KF-$ITERATION METHOD IN HYPERBOLIC METRIC SPACES

SUMMARY

The aim of this thesis is to prove the weak w^2-stability and data dependence theorems for contraction mappings and some $\Delta-$convergence and strong convergence theorems for generalized $(\alpha,\beta)-$nonexpansive type 1 mappings using the $KF-$iteration method in hyperbolic metric spaces given by Kohlenbach and to generalize some results that exist in the literature. In addition, it was aimed to show that the $KF-$iteration method converges to the fixed point of the mapping faster than other iteration methods by comparing some iteration methods in the literature with the $KF-$iteration method by giving a numerical example for generalized $(\alpha,\beta)-$nonexpansive type 1 mappings in hyperbolic metric spaces.

1. To achieve this goal, firstly, by examining the following studies, the $KF-$iteration was restated in a suitable form for the structure of the hyperbolic metric space given by Kohlenbach.

a. In 2022, in the paper written by Ullah, Ahmad and Khan, and in the paper written by Temir and Korkut, the iteration method, which converges to the fixed point faster than some iteration methods in the literature and was called the $KF-$iteration method by Ullah, Ahmad and Khan, was defined as follows:

$$\begin{cases} x_1 \in C, \\ z_n = T\big((1-\beta_n)x_n + \beta_n T x_n\big), \\ y_n = T z_n, \\ x_{n+1} = T\big((1-\alpha_n)T x_n + \alpha_n T y_n\big), \qquad \forall n \geq 1, \end{cases}$$

where C is a nonempty convex subset of a Banach space X, T is a self-mapping on C, and $\{\alpha_n\},\{\beta_n\}$ are two real sequences in $[0,1]$.

b. Let (X,d) be a metric space and $W: X \times X \times [0,1] \to X$ be a mapping. The mapping W is said to be a convex structure on X if for all $x,y,z \in X$ and $\alpha \in [0,1]$,

$$d\big(z, W(x,y,\alpha)\big) \leq (1-\alpha)d(z,x) + \alpha d(z,y)$$

and a metric space (X,d) together with the convex structure W is called a convex metric space which is denoted by (X,d,W). In 2005, Kohlenbach defined the concept of hyperbolic metric space by adding the following three conditions to Takahashi's definition of convex metric space.

Let (X,d) be a metric space and $W: X \times X \times [0,1] \to X$ be a mapping. Then (X,d,W) will be the hyperbolic metric space if the following conditions are satisfied:

(i) $d(z, W(x, y, \alpha)) \leq (1-\alpha)d(z, x) + \alpha d(z, y)$,

(ii) $d(W(x, y, \alpha), W(x, y, \beta)) = |\alpha - \beta| d(x, y)$,

(iii) $W(x, y, \alpha) = W(y, x, 1-\alpha)$,

(iv) $d(W(x, z, \alpha), W(y, w, \alpha)) \leq (1-\alpha)d(x, y) + \alpha d(z, w)$

for all $x, y, z, w \in X$ and $\alpha, \beta \in [0,1]$.

The KF −iteration was modified according to hyperbolic metric space in the following way:

Let X be a hyperbolic metric space, C be a nonempty convex subset of a hyperbolic metric space X and $T: C \to C$ be a mapping. The KF −iteration is defined by

$$\begin{cases} x_1 \in C, \\ z_n = T(W(x_n, Tx_n, \beta_n)), \\ y_n = Tz_n, \\ x_{n+1} = T(W(Tx_n, Ty_n, \alpha_n)), \qquad \forall n \geq 1, \end{cases}$$

where $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\} \in [0,1]$.

2. Then, by examining the definitions given below, the weak w^2 −stability and data dependency theorems for contraction mappings were proved.

a. Let (X, d) be a metric space. A mapping $T: X \to X$ is said to be a contraction if there exists a constant $k \in [0,1)$ such that for all $x, y \in X$

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y).$$

b. Let (X, d) be a metric space, $T: X \to X$ be a mapping and $\{x_n\} \subset X$ be an iterative sequence defined by

$$\begin{cases} x_1 \in X \\ x_{n+1} = f(T, x_n), \qquad \forall n \geq 1, \end{cases}$$

where f is a function. Suppose that $\{x_n\}$ converges strongly to $p \in F(T)$. If, for any equivalent sequence $\{y_n\} \subset X$ of $\{x_n\}$,

$$\lim_{n\to\infty} d(y_{n+1}, f(T, y_n)) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} y_n = p$$

then, the iterative sequence $\{x_n\}$ is said to be weak w^2 −stable with respect to T.

c. Let (X, d) be a metric space and $T, \tilde{T}: X \to X$ be two operators. $\tilde{T}$ is called an approximate operator of T if $d(Tx, \tilde{T}x) \leq \varepsilon$ for all $x \in X$ and for a fixed $\varepsilon > 0$.

After it is shown that the sequence obtained from an iteration method is convergent to the fixed point of the mapping used, it can be shown that the new sequence obtained using the approximation operator for this iteration method is also convergent to the fixed point of the approximation operator. In such a case, the questions of how close the fixed points of both mappings are to each other and how to calculate this distance bring up the concept of data dependency.

3. At the same time, the $\Delta-$convergence and strong convergence theorems for generalized $(\alpha,\beta)-$nonexpansive type 1 mappings were proved in line with the following information.

a. In 2021, two more general classes of nonexpansive mappings "generalized $(\alpha,\beta)-$nonexpansive type 1 and type 2 mappings'' were introduced by Akutsah and Narain. From these classes of mappings, the class of generalized $(\alpha,\beta)-$nonexpansive type 1 mappings include many mapping classes such as the generalized $\alpha-$nonexpansive, mean nonexpansive and mappings satisfying the (C_λ) condition.

(i) Let C be a nonempty subset of a metric space (X,d). A mapping $T: C \to C$ is said to be generalized $(\alpha,\beta)-$nonexpansive type 1 if there exist $\alpha,\beta,\lambda \in [0,1)$ with $\alpha \le \beta$ and $\alpha+\beta<1$ such that for all $x,y \in C$,

$$\lambda d(x,Tx) \le d(x,y) \Rightarrow$$

$$d(Tx,Ty) \le \alpha d(Tx,y) + \beta d(Ty,x) + \big(1-(\alpha+\beta)\big)d(x,y)$$

(ii) Let C be a nonempty subset of a metric space (X,d). A mapping $T: C \to C$ is said to be generalized $(\alpha,\beta)-$nonexpansive type 2 if there exist $\alpha,\beta,\lambda \in [0,1)$ with $\alpha+\beta<1$ such that for all $x,y \in C$,

$$\lambda d(x,Tx) \le d(x,y) \Rightarrow d(Tx,Ty) \le max\{P(x,y), Q(x,y)\},$$

where

$$P(x,y) = \alpha d(Tx,y) + \beta d(Ty,x) + \big(1-(\alpha+\beta)\big)d(x,y)$$

and

$$Q(x,y) = \alpha d(Tx,x) + \beta d(Ty,y) + \big(1-(\alpha+\beta)\big)d(x,y).$$

b. Let (X,d) be a metric space, $x \in X$ and $\{x_n\}$ be a sequence in X.

(i) A sequence $\{x_n\}$ is called a convergent sequence (to x) if, for every $\varepsilon > 0$, there exists $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ such that $d(x_n, x) < \varepsilon$, for all $n \ge n_0$. We write $x_n \to x$ $(n \to \infty)$ or $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

(ii) A sequence $\{x_n\}$ in X is said to $\Delta-$converge to a point $x \in X$ if x is the unique asymptotic center of every subsequence $\{u_n\}$ of $\{x_n\}$. In this case, we write $\Delta-lim_{n\to\infty} x_n = x$ and call as $\Delta-$limit of $\{x_n\}$.

4. Finally, an example of generalized $(\alpha,\beta)-$nonexpansive type 1 mappings was given as follows:

Let $X = \mathbb{R}$ with the usual metric and $C = [0,\infty)$. Define a mapping $T: C \to C$ by

$$Tx = \begin{cases} 0\ if & x \in \left[0, \dfrac{6}{5}\right), \\ \dfrac{5x}{12}\ if & x \in \left[\dfrac{6}{5}, \infty\right). \end{cases}$$

It was shown that the mapping T is a generalized $\left(\frac{5}{12}, \frac{6}{12}\right) -$nonexpansive type 1 mapping with $\lambda = \frac{1}{3}$ in addition, the convergence speeds of other iteration methods in the literature to the fixed point were compared with the $KF -$iteration method using the MATLAB program.

By the researchers, the generalized $(\alpha, \beta) -$nonexpansive type 2 mappings in hyperbolic metric spaces can be studied using similar approaches in this thesis and some numerical examples for this class of mappings in hyperbolic metric spaces can also be investigated.

1. GİRİŞ

Sabit nokta teorisi matematiğin en temel konularından biri olup; mühendislik, fizik, tıp, ekonomi vb. gibi birçok bilim dalında uygulama alanına sahip olmasının yanı sıra günlük hayat problemlerinin sabit nokta problemine modellenmesinde kullanılan etkin matematiksel bir araçtır.

Herhangi bir T dönüşümün sabit noktası $Tx = x$ denkleminin çözümü ile bulunur. Araştırmacılar, $Tx = x$ denkleminin çözümünü bulmak için analitik bir yöntem önermeye çok dikkat ettiler ancak bu neredeyse imkansızdı. Bunun yerine, sabit nokta teorisinde ele alınan bazı dönüşümlerin sabit noktasının varlığını ve yaklaşık değerini hesaplamak için iterasyon yöntemleri kullanılmaktadır.

Normlu lineer uzaylarda sabit nokta teorisi çalışmaları 1909 yılında Brouwer ile başlamıştır. Brouwer, $\mathbb{R}^n$ uzayının kapalı birim yuvarlarından kendi üzerine tanımlı sürekli her dönüşümün en az bir sabit noktaya sahip olduğunu kanıtlamıştır. 1930 yılında Brouwer'in teoremi Schauder tarafından sonsuz boyutlu uzaylara genelleştirilmiştir [1].

Tam metrik uzaylarda sabit nokta teorisi çalışmaları ise 1922 yılında Banach ile başlamıştır. Banach sabit nokta teoremi, dönüşümün sabit noktasının varlığını garanti ettiği gibi Brouwer ve Schauder sabit nokta teoremlerinden farklı olarak sabit noktanın tekliğini ve nasıl bulunabileceğini ortaya koymuştur.

Bu teoremde, sabit noktaya ulaşmak için kullanılan yöntem Picard iterasyonudur. Ancak bu teoremde daralma dönüşümü yerine genişlemeyen dönüşüm alındığında Picard iterasyonundan elde edilen dizi bu sabit noktaya yakınsamaz. Bu nedenle, araştırmacılar tarafından yeni iterasyon yöntemleri tanımlama ihtiyacı ortaya çıkmıştır [2-10].

Bu tanımlanan iterasyon yöntemleri için uygun şartlar altında, varlığı veya tekliği garanti edilen bu sabit noktaya ulaşmak için yakınsaklık, yakınsaklık hızı, zayıf w^2 −kararlılık ve veri bağımlılığı gibi sabit nokta teoremleri elde edilerek geniş bir literatür oluşturulmuştur.

Sabit nokta iterasyon yöntemlerinin yakınsaklık anlamında denkliği, aynı dönüşüm ile inşa edilen iki iterasyon yönteminden elde edilecek dizilerden birisi dönüşümün sabit noktasına yakınsak iken diğer dizinin de yakınsak olması şeklinde ifade edilebilir [11].

Belirli şartlar altında aynı sabit noktaya yakınsayan iki iterasyon yönteminden elde edilen dizilerden hangisinin daha hızlı olduğunun belirlenmesi yakınsaklık hızı kavramını karşımıza çıkarmaktadır [12].

Sabit noktaların veri bağımlılığı; bir dönüşüm kullanılarak oluşturulan iterasyon yönteminden elde edilecek dizi ile bu dönüşüme çok yakın olan başka bir dönüşüm kullanılarak aynı iterasyon yönteminden elde edilecek dizinin yakınsadıkları noktaların farkının ne kadar olduğu şeklinde ifade edilebilir [12-13].

Matematiksel olarak kararlılık kavramı ise bir problemdeki verilerde ya da problemin belirli aşamalarında yapılan küçük değişimlerin elde edilmesi gereken temel sonuca etkisinin ne kadar olduğunun hesaplanması olarak açıklanabilir [14].

1.1. Literatür Özeti

Sabit nokta problemlerinde çalışılan uzayın geometrik özelliğinin önemli bir rolü vardır. Bu problemlerde ağırlıklı olarak konvekslik özelliği ve Banach uzaylarının diğer geometrik özellikleri kullanılmaktadır. Her Banach uzayı bir vektör uzayı olduğundan, bu uzaylara konveks bir yapı vermek daha kolaydır. Bu nedenle Banach uzaylarının konveks yapıları ile yoğun bir şekilde çalışılmıştır. Ancak metrik uzaylarda konveks bir yapı elde etmek daha zordur. Takahashi 1972'de konveks metrik uzay kavramını tanımlamış ve bu uzayda genişlemeyen dönüşümler için sabit nokta teorisi alanında çalışmıştır. Daha sonra metrik uzaylar üzerine konveks bir yapı kurmak için farklı çalışmalar yapılmıştır. Bu konveks yapı hiperbolik metrik uzaylarda vardır. Hiperbolik metrik uzay kavramı için literatürde farklı tanımlar mevcuttur. Kohlenbach tarafından 2005'te verilen hiperbolik metrik uzaylar, 1983'te Goebel ve Kirk tarafından tanımlanan hiperbolik tip uzaylara göre daha kısıtlayıcı, fakat 1990'da Reich ve Shafrir tarafından tanımlanan hiperbolik uzaylardan daha geneldir. Banach uzayı, CAT(0) uzayı ve Hilbert yuvarı bu uzayın özel durumlarıdır.

Diğer taraftan, son zamanlarda matematikte sabit nokta teorisi alanında genişlemeyen dönüşümlerin genelleştirilmesi çalışmaları yoğunlukla yapılmaktadır. Özellikle 2008'de Suzuki tarafından genelleştirilmiş genişlemeyen dönüşümlerin sunulmasından sonra gerek genelleştirme ve gerekse daha hızlı iterasyon yöntemleri sunularak bu dönüşümlerin sabit noktaya yakınsaklıkları ile ilgili çalışmalar artmıştır.

Yine yakın zamanda Aoyama ve Kohsaka, genişlemeyen dönüşümlerin "α −genişlemeyen dönüşümler'' olarak adlandırılan yeni bir sınıfını sunmuşlardır. 2017'de Pant ve Shukla, α −genişlemeyen dönüşümler ile Suzuki-genelleştirilmiş genişlemeyen dönüşümleri birleştirerek "genelleştirilmiş α −genişlemeyen dönüşümler'' olarak adlandırılan dönüşümlerin yeni bir sınıfını sunmuşlardır.

2021'de Akutsah ve Narain tarafından genişlemeyen dönüşümlerin daha genel bir sınıfları olan "1. tip ve 2. tip genelleştirilmiş (α, β) −genişlemeyen dönüşümler'' tanıtıldı. 1. tip dönüşüm sınıfı genelleştirilmiş α −genişlemeyen, ortalama genişlemeyen ve (C_λ) şartını sağlayan dönüşüm sınıfı gibi birçok dönüşüm sınıfını içermektedir.

2022'de ise Ullah, Ahmad ve Khan tarafından yapılan bir çalışmada ve Temir ve Korkut tarafından yapılan bir çalışmada sabit noktaya literatürdeki birçok iterasyon yönteminden daha hızlı bir şekilde yakınsayan bir iterasyon yöntemi tanıtıldı ve bu iterasyon yöntemi kullanılarak Banach uzaylarında genelleştirilmiş α −genişlemeyen dönüşümler için bazı kuvvetli ve zayıf yakınsaklık teoremleri elde edildi. Bu iterasyon Ullah, Ahmad ve Khan tarafından KF −iterasyon yöntemi olarak adlandırıldı.

1.2. Tezin Amacı

Bu tezin amacı; Kohlenbach tarafından verilen hiperbolik metrik uzaylarda KF −iterasyon yöntemini kullanarak daralma dönüşümleri için zayıf w^2 −kararlılık ve veri bağımlılığı teoremleri ile 1. tip genelleştirilmiş (α, β) −genişlemeyen dönüşümler için bazı Δ −yakınsaklık ve kuvvetli yakınsaklık teoremlerini ispatlayarak literatürde var olan sonuçları genelleştirmektir.

Bu amaç doğrultusunda, tez çalışması aşağıdaki şekilde planlandı.

İkinci bölümde, bu tezin diğer bolümlerinde kullanılacak temel kavramlar, tanımlar ve teoremler verildi.

Üçüncü bölümde, KF −iterasyon yöntemi hiperbolik metrik uzaylara modifiye edilerek daralma dönüşümleri için zayıf w^2 −kararlılık, veri bağımlılığı teoremleri ve 1. tip genelleştirilmiş (α, β) −genişlemeyen dönüşümler için Δ −yakınsaklık ve kuvvetli yakınsaklık teoremleri ispatlandı. Bu bölümde son olarak, 1. tip genelleştirilmiş $(\alpha, \beta)-$genişlemeyen dönüşüm için bir nümerik örnek verilerek $KF-$iterasyon yöntemi ile diğer iterasyon yöntemlerinin yakınsaklık hızları karşılaştırıldı.

Dördüncü bölümde ise araştırmacılar tarafından ileride yapılabilecek çalışma hakkında bilgi verildi. Bu tezde ele alınan konular hiperbolik metrik uzaylarda farklı dönüşüm sınıfları için ileride yapılacak çalışmalara kaynak teşkil edecek niteliktedir.

2. TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER

Bu bölümde ana sonuçlarımızın elde edilmesi amacıyla kullanılan bazı tanımlar, teoremler, dönüşüm sınıfları ve iterasyon yöntemleri verilmiştir.

2.1. Temel Tanımlar ve Teoremler

Tanım 2.1.1. (Metrik ve Metrik Uzay)

X boş olmayan bir küme ve $d: X \times X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $x, y, z \in X$ için

(i) $d(x,y) \geq 0$ (pozitif tanımlılık)

(ii) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(iii) $d(x,y) = d(y,x)$ (simetri)

(iv) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (üçgen eşitsizliği)

şartları sağlansın. Bu durumda d fonksiyonuna X kümesi üzerinde bir metrik ve (X,d) ikilisine de bir metrik uzay denir [15].

Örnek 2.1.2.

(i) $\mathbb{F}$ bir cisim ve $x, y \in \mathbb{F}$ olmak üzere; $d_{|.|}(x,y) = |x - y|$ ile tanımlı $d_{|.|}$ (mutlak değer) metriği ile $\mathbb{F}$ kümesi bir metrik uzaydır. Bu metriğe $\mathbb{F}$ de ki doğal (alışılmış, standart) metrik adı verilir [16].

(ii) Herhangi bir $k \geq 1$ tamsayısı için, $\mathbb{F}^k$ bir cisim ve $x, y \in \mathbb{F}^k$ olsun. Bu durumda

$$d_1(x,y) = \sum_{j=1}^{k} |x_j - y_j|$$

ile tanımlı $d_1: \mathbb{F}^k \times \mathbb{F}^k \to \mathbb{R}$ metriği ile $\mathbb{F}^k$ bir metrik uzaydır [16].

Tanım 2.1.3. (Kuvvetli Yakınsaklık)

(X,d) bir metrik uzay ve $\{x_n\}$ bu uzayda bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $n \geq n_0$ olduğunda $d(x_n, x) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı varsa $\{x_n\}$ dizisine $x \in X$ noktasına yakınsar ya da kuvvetli yakınsar denir. Bu durumda $lim_{n\to\infty} x_n = x$ veya $x_n \to x$ $(n \to \infty)$ şeklinde gösterilir [15].

Tanım 2.1.4. (Cauchy Dizisi)

(X,d) bir metrik uzay ve $\{x_n\}$ bu uzayda bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $n, m \geq n_0$ olduğunda $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ olacak şekilde bir n_0 doğal sayısı varsa $\{x_n\}$ dizisine bir Cauchy dizisi denir [15].

Metrik uzaylarda, yakınsak bir dizinin limiti tektir ve her yakınsak dizi bir Cauchy dizisidir, fakat her Cauchy dizisinin yakınsak dizi olması gerekmez. Metrik uzaylarda $\{x_n\}$ dizisi bir x noktasına yakınsak ise herhangi bir alt dizisi de aynı noktaya yakınsar.

Tanım 2.1.5. (Tam Metrik Uzay)

(X,d) bir metrik uzay olsun. X deki her $\{x_n\}$ Cauchy dizisi $x \in X$ noktasına yakınsak ise (X,d) metrik uzayına tam metrik uzay denir [17].

Tanım 2.1.6. (Kompakt Küme)

(X,d) bir metrik uzay ve $\mathrm{C} \subset \mathrm{X}$ olsun. C kümesindeki her $\{x_n\}$ dizisi C kümesinin bir elemanına yakınsayan bir alt diziye sahipse C kümesine kompakt küme denir [16].

Tanım 2.1.7. (Sürekli Dönüşüm)

(X,d) ve (X,ρ) iki metrik uzay, $f: X \to Y$ bir dönüşüm ve $x_0 \in X$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısı için $d(x, x_0) < \delta$ olduğunda $\rho\big(f(x), f(x_0)\big) < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı varsa f ye x_0 noktasında süreklidir denir. f, X in her noktasında sürekli ise f ye X de süreklidir denir [18].

Tanım 2.1.8. (Asimptotik Yarıçap ve Asimptotik Merkez)

(X,d) bir metrik uzay, $C \subseteq X$ boş olmayan bir alt küme ve $\{x_n\}$ bu uzayda sınırlı bir dizi olsun. $r(\cdot, x_n): X \to [0,\infty)$ fonksiyonu $x \in X$ olmak üzere

$$r(x, \{x_n\}) = \limsup_{n\to\infty} d(x, \{x_n\})$$

şeklinde tanımlanasın. C üzerindeki $r(\cdot, x_n)$ fonksiyonunun infimumuna $\{x_n\}$ dizisinin C ye göre asimptotik yarıçapı denir ve $r(C, \{x_n\})$ ile gösterilir. Yani asimptotik yarıçap $r(C, \{x_n\}) = inf\{\, r(x, \{x_n\}): x \in C\}$ dir [19].

Eğer $z \in C$ için

$$r(z, \{x_n\}) = inf\{\, r(x, \{x_n\}): x \in C\} = r(C, \{x_n\})$$

oluyorsa $z \in C$ noktasına $\{x_n\}$ dizisinin C ye göre asimptotik merkezi denir ve $\{x_n\}$ dizisinin C ye göre tüm asimptotik merkezlerinin kümesi $A(C, \{x_n\})$ ile gösterilir.

$\{x_n\}$ dizisinin asimptotik yarıçapı ve asimptotik merkezi X e göre alınırsa sırasıyla $r(\{x_n\})$ ve $A(\{x_n\})$ ile gösterilir [19].

Tanım 2.1.9. (Δ −Yakınsaklık)

(X, d) bir metrik uzay, $x \in X$ ve $\{x_n\}$ bu uzayda bir dizi olsun. $\{x_n\}$ dizisinin her $\{u_n\}$ alt dizisi bir tek x asimptotik merkezine sahipse $\{x_n\}$ dizisi x e Δ −yakınsar denir. Bu durum $\Delta - lim_{n\to\infty} x_n = x$ şeklinde yazılır ve x e $\{x_n\}$ dizisinin Δ −limiti denir [20].

Tanım 2.1.10. (Denk Dizi)

(X, d) bir metrik uzay, $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$ X de iki dizi olsun. Eğer,

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n,\, y_n) = 0$$

ise bu iki dizi denktir denir [11].

Timiş [21], denk dizileri kullanarak aşağıdaki zayıf w^2 − kararlılık tanımını verdi.

Tanım 2.1.11. (Zayıf w^2 −Kararlılık)

(X, d) bir metrik uzay, $T: X \to X$ bir dönüşüm ve f bir fonksiyon olmak üzere $\{x_n\} \subset X$ iterasyon dizisi

$$\begin{cases} x_1 \in X \\ x_{n+1} = f(T, x_n), \quad \forall n \geq 1 \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Ayrıca $\{x_n\}$ dizisinin T dönüşümünün p sabit noktasına kuvvetli yakınsadığı kabul edilsin. Eğer $\{x_n\}$ dizisinin herhangi bir $\{y_n\} \subset X$ denk dizisi için

$$\lim_{n\to\infty} d\big(y_{n+1}, f(T, y_n)\big) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} y_n = p$$

ise o zaman $\{x_n\}$ dizisi T dönüşümüne göre zayıf w^2 $-$kararlıdır denir [21].

Tanım 2.1.12. (Yaklaşım Operatörü)

(X, d) bir metrik uzay ve $T, \tilde{T}: X \to X$ iki operatör olsun. Her $x \in X$ ve her $\varepsilon > 0$ için

$$d\big(Tx, \tilde{T}x\big) \leq \varepsilon$$

ise $\tilde{T}$ ya T nin yaklaşım operatörü denir [13].

Tanım 2.1.13. (Vektör Uzayı)

X boş olmayan bir küme ve $\mathbb{F}$ bir cisim olsun. $+ : X \times X \to X$ ve $\cdot : \mathbb{F} \times X \to X$ işlemleri tanımlansın. Bu durumda aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa X kümesine $\mathbb{F}$ cismi üzerinde vektör uzayı (lineer uzay) denir.

a. X kümesi $+$ işlemine göre değişmeli gruptur. Yani,

   G_1. Her $x, y \in X$ için $x + y \in X$ dir.

   G_2. Her $x, y, z \in X$ için $x + (y + z) = (x + y) + z$ dir.

   G_3. Her $x \in X$ için $x + \theta = \theta + x = x$ olacak şekilde $\theta \in X$ vardır.

   G_4. Her $x \in X$ için $x + (-x) = (-x) + x = \theta$ olacak şekilde $-x \in X$ vardır.

   G_5. Her $x, y \in X$ için $x + y = y + x$ dir.

b. $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır.

   L_1. $\alpha x \in X$ dir.

   L_2. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ dir.

   L_3. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ dir.

   L_4. $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$ dir.

   L_5. $1x = x$ dir.

Burada $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ise X kümesine reel vektör uzayı, $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ ise X kümesine kompleks vektör uzayı denir [22].

Tanım 2.1.14. (Normlu Uzay)

X, $\mathbb{F}$ cismi üzerinde herhangi bir vektör uzayı olsun ve $\| \cdot \|: X \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun x noktasındaki değeri $\| x \|$ ile verilsin. Her $x, y \in X$ ve $\alpha \in \mathbb{F}$ için

(i) $\| x \| \geq 0$

(ii) $\| x \| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

(iii) $\|\alpha x \| = | \alpha | \| x \|$

(iv) $\| x + y\| \leq \| x \| + \| y \|$

şartlarını sağlayan $\| \cdot \|$ fonksiyonuna X üzerinde bir norm ve $(X, \| \cdot \|)$ ikilisine de normlu uzay denir [16].

Tanım 2.1.15. (Banach Uzayı)

$(X, \| . \|)$ bir normlu vektör uzay olsun. Eğer X uzayı,

$$d(x, y) = \| x - y \|, (x, y \in X)$$

ile verilen normdan üretilen metriğe göre tam ise bu uzaya Banach uzayı denir [23].

Tanım 2.1.16. (Konveks Küme)

X bir vektör uzayı ve $A \subseteq X$ olsun. Her $x \in A$ için

$$B = \{z \in X : z = \alpha x + (1 - \alpha) y, \quad 0 \leq \alpha \leq 1\} \subseteq A$$

ise A kümesine konvekstir denir [18].

Tanım 2.1.17. (Düzgün Konveks Uzay)

$(X, \| . \|)$ bir normlu vektör uzay olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve her $x, y \in X$ için $\| x \| \leq 1$ $\| y \| \leq 1$ ve $\| x - y \| \geq \varepsilon$ olduğunda

$$\frac{\| x - y \|}{2} \leq 1 - \delta$$

olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı varsa, X uzayına düzgün konvekstir denir [16].

Tanım 2.1.18. (Konveks Metrik Uzay)

(X, d) bir metrik uzay ve $W: X \times X \times [0,1] \to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y, z \in X$ ve $\alpha \in [0,1]$ için

$$d\big(z, W(x, y, \alpha)\big) \leq (1-\alpha)d(z, x) + \alpha d(z, y)$$

şartı sağlanıyorsa W dönüşümüne X üzerinde bir konveks yapı ve W konveks yapısıyla birlikte X e konveks metrik uzay denir [24].

Kohlenbach, 2005 yılında Takahashi'nin konveks metrik uzay tanımına aşağıdaki diğer üç şartı da ekleyerek hiperbolik metrik uzay kavramını tanımlamıştır.

Tanım 2.1.19. (Hiperbolik Metrik Uzay)

(X, d) bir metrik uzay ve $W: X \times X \times [0,1] \to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y, z, w \in X$ ve $\alpha, \beta \in [0,1]$ için

(i) $\quad d\big(z, W(x, y, \alpha)\big) \leq (1-\alpha)d(z, x) + \alpha d(z, y),$

(ii) $\quad d\big(W(x, y, \alpha), W(x, y, \beta)\big) = |\alpha - \beta| d(x, y),$

(iii) $\quad W(x, y, \alpha) = W(y, x, 1-\alpha),$

(iv) $\quad d\big(W(x, z, \alpha), W(y, w, \alpha)\big) \leq (1-\alpha)d(x, y) + \alpha d(z, w)$

şartları sağlanıyorsa (X, d) metrik uzayına hiperbolik metrik uzay denir ve (X, d, W) ile gösterilir [25].

Bu tanımdaki (i) şartından her hiperbolik metrik uzayın bir konveks metrik uzay olduğu görülür. Ancak, her konveks metrik uzay bir hiperbolik metrik uzay değildir.

Örnek 2.1.20.

$X = \mathbb{R}$ olsun. Her $x, y \in \mathbb{R}$, $\alpha \in [0,1]$ için $W: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [0,1] \to \mathbb{R}$ dönüşümü

$$W(x, y, \alpha) = \alpha x + (1-\alpha)y$$

ve $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0, \infty)$ metriği

$$d(x,y) = \frac{|x-y|}{1-|x-y|}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda X bir konveks metrik uzay olduğu halde hiperbolik metrik uzay değildir [24].

Diğer taraftan her Banach uzayı bir hiperbolik metrik uzaydır. Bunu görmek için Banach uzayını norm metriği ile düşünüp $W(x,y,\alpha) = \alpha x + (1-\alpha)y$ almak yeterlidir. Ancak her hiperbolik metrik uzay bir Banach uzayı teşkil etmez.

Örnek 2.1.21.

H bir kompleks Hilbert uzay ve B_H, H de açık birim yuvar olsun. B_H üzerinde

$$\sigma(x,y) = \frac{(1-\| x \|^2)(1-\| y\|^2)}{|1-\langle x,y\rangle|^2}$$

olmak üzere

$$d(x,y) = argtanh\big(1-\sigma(x,y)\big)^{\frac{1}{2}}$$

olarak tanımlanan Poincare metriği verilsin. (B_H, d) metrik uzayı Hilbert yuvarı olarak adlandırılır. Hilbert yuvarı bir hiperbolik metrik uzay olmasına rağmen Banach uzayı değildir [26].

Tanım 2.1.22. (Düzgün Konveks Hiperbolik Metrik Uzay)

(X,d,W) bir hiperbolik metrik uzay olsun. Her $x,y,u \in X$, $r > 0$ ve $\varepsilon \in (0,2]$ için

$$\left.\begin{array}{r} d(x,u) \le r \\ d(y,u) \le r \\ d(x,y) \ge \varepsilon r \end{array}\right\} \Rightarrow d\left(W\left(x,y,\frac{1}{2}\right),u\right) \le (1-\delta)r$$

olacak şekilde $\delta \in (0,1]$ sabiti varsa X e düzgün konveks hiperbolik metrik uzay denir [27].

Tanım 2.1.23. (Düzgün Konvekslik Modülü)

Verilen bir $r > 0$ ve $\varepsilon \in (0,2]$ için $\delta = \eta(r,\varepsilon)$ eşitliğini sağlayan $\eta\colon (0,\infty) \times (0,2] \to (0,1]$ dönüşümüne düzgün konvekslik modülü denir. Sabit bir ε için η dönüşümü r ye göre azalıyorsa η modülüne monotondur denir [27].

Tanım 2.1.24. (Sabit Nokta)

X boş olmayan bir küme ve $T: X \to X$ herhangi bir dönüşüm olsun. Eğer $Tx = x$ olacak şekilde bir $x \in X$ varsa bu x noktasına T dönüşümünün sabit noktası denir ve T nin tüm sabit noktalarının kümesi $F(T)$ ile gösterilir [28].

Aşağıdaki örneklerden de görülebileceği gibi $T: X \to X$ ile tanımlanan bir dönüşümün herhangi bir sabit noktası olmayabilir veya bir sabit noktası olabilir ya da birden fazla sabit noktası olabilir.

Örnek 2.1.25.

(i) $X = \mathbb{R}$ olmak üzere, $Tx = x - 4$ dönüşümü için $F(T) = \emptyset$ dir.

(ii) $X = [0,8]$ olmak üzere, $Tx = 8 - x$ dönüşümü için $F(T) = \{4\}$ olur.

(iii) $X = \mathbb{R}$ olmak üzere, $Tx = x^3$ dönüşümü için $F(T) = \{-1,0,1\}$ elde edilir.

Bu kısıma, bir sonraki bölümde kullanılacak olan lemmalar ile devam edilecektir.

Lemma 2.1.26.

(X, d, W), η monoton düzgün konvekslik modülüne sahip tam düzgün konveks bir hiperbolik metrik uzay olsun. Ayrıca C de X in boş olmayan kapalı konveks bir alt kümesi olsun. Bu durumda, X deki her sınırlı $\{x_n\}$ dizisi C ye göre bir tek asimptotik merkeze sahiptir [27].

Lemma 2.1.27.

$(X, d, W), \eta$ monoton düzgün konvekslik modülüne sahip tam düzgün konveks bir hiperbolik metrik uzay olsun. $x \in X$ ve $a, b \in (0,1)$ için $\{\alpha_n\}$, $[a, b]$ aralığında bir dizi olsun. $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$ X de iki dizi olmak üzere uygun bir $c \geq 0$ için

$limsup_{n\to\infty} d(x_n, x) \leq c$, $limsup_{n\to\infty} d(y_n, x) \leq c$ ve $lim_{n\to\infty} d(W(x_n, y_{n,} \alpha_n) = c$

şartları sağlansın. Bu durumda $lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$ dır [29].

Lemma 2.1.28.

$\forall\, n \in \mathbb{N}$ için $r_n \in (0,1)$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} r_n = \infty$ ile $\{a_n\}$, $\{r_n\}$ ve $\{t_n\}$ negatif olmayan reel sayı dizileri olsun. $\forall\, n \geq n_0$ için $a_{n+1} \leq (1 - r_n)a_n + r_n t_n$ eşitsizliğini sağlayan

$n_0 \in \mathbb{N}$ mevcut olsun. Bu durumda $0 \leq \limsup_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} t_n$ eşitsizliği sağlanır [11].

2.2. Bazı Dönüşüm Sınıfları

Bu kısımda, tezde kullanılan 1. tip genelleştirilmiş (α, β) −genişlemeyen dönüşüm tanımı verilmeden önce yaygın olarak kullanılan bazı dönüşümler hakkında bilgiler verilecektir.

Tanım 2.2.1. (Lipschitzian Dönüşüm)

(X, d) bir metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$$

olacak şekilde $k > 0$ sabit sayısı varsa T ye Lipschitzian dönüşüm ve bu eşitsizliği sağlayan en küçük k sayısına T nin Lipschitzian sabiti denir [28].

Yukarıdaki tanıma göre Lipschitzian şartını sağlayan her dönüşüm düzgün süreklidir. Çünkü, her $\varepsilon > 0$ için

$$d(x, y) < \delta = \frac{\varepsilon}{k} \Rightarrow kd(x, y) < k\delta = \varepsilon$$

olduğundan

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y) < \varepsilon$$

dur. Bu da T dönüşümünün düzgün sürekli olduğunu gösterir. Ancak, bu ifadenin tersi her zaman doğru değildir.

Tanım 2.2.2. (Daralma (Contraction) Dönüşümü)

(X, d) bir metrik uzay ve $T: X \to X$ bir Lipschitzian dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$$

olacak şekilde $k \in [0,1)$ varsa T ye daralma dönüşümü (contraction) denir [28].

Lipschitz koşulunu sağlayan her dönüşüm düzgün sürekli olduğundan daralma dönüşümleri de düzgün süreklidir. Dolayısıyla T sürekli değilse, bir daralma dönüşümü de olamaz.

Teorem 2.2.3. (Banach Daralma İlkesi)

(X, d) tam metrik uzay ve $T: X \to X$ bir daralma dönüşümü olsun. Bu durumda T dönüşümü bir tek sabit noktaya sahiptir [30].

Tanım 2.2.4. ((I) Şartı)

X Banach uzayı, C de X in konveks bir alt kümesi, $T: C \to C$ herhangi bir dönüşüm ve $F(T) \neq \emptyset$ olsun. Eğer $f(0) = 0$ ve $\forall\, r \in (0, \infty)$ için $f(r) > 0$ olacak şekilde azalmayan bir $f: [0, \infty) \to [0, \infty)$ fonksiyonu var ve her $x \in C$ için

$$d(x, Tx) \geq f(d(x, F(T)))$$

ise T ye (I) şartını sağlıyor denir [31].

Tanım 2.2.5. (Kesin Daralma (Contractive) Dönüşüm)

(X, d) bir metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in X$ ve $x \neq y$ için

$$d(Tx, Ty) < d(x, y)$$

ise T ye kesin daralma dönüşümü (contractive) denir [28].

T dönüşümü daralma dönüşümü ise kesin daralma dönüşümdür. Ancak bu ifadenin tersi doğru değildir.

Tanım 2.2.6. (Genişlemeyen Dönüşüm)

(X, d) bir metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq d(x, y)$$

ise T ye genişlemeyen dönüşüm (nonexpansive) denir [28].

Tanım 2.2.7. (Quasi− Genişlemeyen Dönüşüm)

(X, d) bir metrik uzay, $C \subseteq X$ boştan farklı bir alt küme ve $T: C \to C$ bir dönüşüm olsun. Eğer $y \in F(T) \neq \emptyset$ ve her $x \in C$ için

$d(Tx, y) \leq d(x, y)$

ise T ye quasi−genişlemeyen dönüşüm denir [28].

Tanım 2.2.8. (Ortalama Genişlemeyen Dönüşüm)

(X, d) bir metrik uzay, $C \subseteq X$ boştan farklı bir alt küme ve $T: C \to C$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in C$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y) + \beta d(x, Ty)$$

olacak şekilde $\alpha + \beta \leq 1$ şartını sağlayan $\alpha, \beta \in [0,1)$ sayıları varsa T ye ortalama genişlemeyen dönüşüm denir [32].

Tanım 2.2.9. (Suzuki Genelleştirilmiş Genişlemeyen Dönüşüm)

(X, d) bir metrik uzay ve $C \subseteq X$ boştan farklı bir alt küme ve $T: C \to C$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in C$ için

$$\frac{1}{2} d(Tx, x) \leq d(x, y) \Rightarrow d(Tx, Ty) \leq d(x, y)$$

ise T dönüşümüne Suzuki genelleştirilmiş genişlemeyen dönüşüm veya (C) şartını sağlar denir [33].

Tanım 2.2.10. ((C_λ) Şartı)

(X, d) bir metrik uzay ve $C \subseteq X$ boştan farklı bir alt küme ve $T: C \to C$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in C$ için

$$\lambda d(Tx, x) \leq d(x, y) \Rightarrow d(Tx, Ty) \leq d(x, y)$$

olacak şekilde $\lambda \in [0,1)$ sayısı varsa T dönüşümüne (C_λ) şartını sağlar denir [34].

Tanım 2.2.11. (α −Genişlemeyen Dönüşüm)

(X, d) bir metrik uzay ve $C \subseteq X$ boştan farklı bir alt küme ve $T: C \to C$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in C$ için

$$d(Tx, Ty)^2 \leq \alpha d(Tx, y)^2 + \alpha d(Ty, x)^2 + (1 - 2\alpha) d(x, y)^2$$

olacak şekilde $\alpha < 1$ sayısı varsa T ye $\alpha -$ genişlemeyen dönüşüm denir [35].

Tanım 2.2.12. (Genelleştirilmiş α −Genişlemeyen Dönüşüm)

(X,d) bir metrik uzay ve $C \subseteq X$ boştan farklı bir alt küme ve $T: C \to C$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in C$ için

$$\frac{1}{2}d(Tx,x) \leq d(x,y) \Rightarrow d(Tx,Ty) \leq \alpha d(Tx,y) + \alpha d(x,Ty) + (1-2\alpha)d(x,y)$$

olacak şekilde $\alpha \in [0,1)$ sayısı varsa T ye genelleştirilmiş $\alpha -$ genişlemeyen dönüşüm denir [36].

2021 yılında, Akutsah ve Narain [37] yukarıda tanımı verilen dönüşümleri içeren 1. tip genelleştirilmiş (α,β) −genişlemeyen dönüşüm sınıfını tanıttı ve bu dönüşüm sınıfı için bazı temel özellikleri verdi.

Tanım 2.2.13. (1. Tip Genelleştirilmiş $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ −Genişlemeyen Dönüşüm)

(X,d) bir metrik uzay ve $C \subseteq X$ boştan farklı bir alt küme ve $T: C \to C$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in C$ için

$$\begin{gathered} \lambda d(x,Tx) \leq d(x,y) \Rightarrow \\ d(Tx,Ty) \leq \alpha d(Tx,y) + \beta d(Ty,x) + \big(1-(\alpha+\beta)\big)d(x,y) \end{gathered} \tag{2.1}$$

olacak şekilde $\alpha \leq \beta$ ve $\alpha + \beta < 1$ şartlarını sağlayan $\alpha, \beta, \lambda \in [0,1)$ sayıları varsa T ye 1. tip genelleştirilmiş (α,β) −genişlemeyen dönüşüm denir [37].

Açıklama 2.2.14.

1. tip genelleştirilmiş (α,β) −genişlemeyen dönüşüm tanımından aşağıdaki ifadelerin doğru olduğunu görmek kolaydır.

(i) Eğer $\alpha = \beta = 0$ ve $\lambda = \frac{1}{2}$ alınırsa T dönüşümü (C) şartını sağlayan bir dönüşüm olur.

(ii) Eğer $\alpha = \beta = 0$ ve $\lambda \in [0,1)$ alınırsa T dönüşümü (C_λ) şartını sağlayan bir dönüşüm olur.

(iii) Eğer $\alpha, \beta \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ olacak şekilde $\alpha = \beta$ ve $\lambda = \frac{1}{2}$ alınırsa T genelleştirilmiş $\alpha -$ genişlemeyen bir dönüşüm olur.

Önerme 2.2.15. [37]

(i) Eğer T dönüşümü sabit noktaya sahip 1. tip genelleştirilmiş (α, β) −genişlemeyen dönüşüm ise T dönüşümü quasi−genişlemeyen dönüşümdür.

(ii) Eğer T dönüşümü 1. tip genelleştirilmiş (α, β) −genişlemeyen dönüşüm ise $F(T)$ kapalı kümedir.

Lemma 2.2.16. [37]

Eğer T dönüşümü 1. tip genelleştirilmiş (α, β) −genişlemeyen dönüşüm ise her $x, y \in C$, $\alpha \leq \beta$ ve $\alpha + \beta < 1$ şartlarını sağlayan $\alpha, \beta, \lambda, \gamma \in [0,1)$ için aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır.

(i) $d(T^2x, Tx) \leq d(Tx, x)$,

(ii) $\frac{\gamma}{2} d(Tx, x) \leq d(x, y)$ veya $\frac{\gamma}{2} d(T^2x, Tx) \leq d(Tx, y)$

(iii) $d(Tx, Ty) \leq \alpha d(Tx, y) + \beta d(Ty, x) + \big(1 - (\alpha + \beta)\big) d(x, y)$

veya

$$d(T^2x, Ty) \leq \alpha d(T^2x, y) + \beta d(Ty, Tx) + \big(1 - (\alpha + \beta)\big) d(Tx, y).$$

Önerme 2.2.17.

Eğer T dönüşümü 1. tip genelleştirilmiş (α, β) −genişlemeyen dönüşüm ise her

$x, y \in C$ için

$$d(x, Ty) \leq \frac{3 + \alpha}{1 - \beta} d(x, Tx) + d(x, y)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat.

Lemma 2.2.16. (iii) den her $x, y \in C$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha d(Tx, y) + \beta d(Ty, x) + \big(1 - (\alpha + \beta)\big) d(x, y)$$

eşitsizliği ya da

$$d(T^2x, Ty) \leq \alpha d(T^2x, y) + \beta d(Ty, Tx) + \big(1 - (\alpha + \beta)\big) d(Tx, y)$$

eşitsizliği elde edilir.

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha d(Tx, y) + \beta d(Ty, x) + \big(1 - (\alpha + \beta)\big) d(x, y)$$

eşitsizliği kullanılırsa

$$d(x, Ty)$$

$$\leq\ d(x, Tx) +\ d(Tx, Ty)$$

$$\leq\ d(x, Tx)\ + \alpha d(Tx, y) + \beta d(Ty, x) + \big(1 - (\alpha + \beta)\big) d(x, y)$$

$$\leq\ d(x, Tx)\ + \alpha d(Tx, x) + \alpha d(x, y) + \beta d(Ty, x) + \big(1 - (\alpha + \beta)\big) d(x, y)$$

$$\leq (1 + \alpha)\, d(x, Tx) + \beta d(Ty, x) + (1 - \beta) d(x, y)$$

elde edilir. Bu da

$$\begin{aligned} d(x, Ty) &\leq \frac{1 + \alpha}{1 - \beta} d(x, Tx) + d(x, y) \\ &\leq \frac{3 + \alpha}{1 - \beta} d(x, Tx) + d(x, y) \end{aligned}$$

olduğunu gösterir. Ayrıca,

$$d(T^2x, Ty) \leq \alpha d(T^2x, y) + \beta d(Ty, Tx) + \big(1 - (\alpha + \beta)\big) d(Tx, y)$$

eşitsizliği ile Lemma 2.2.16. (i) kullanılırsa

$$d(x, Ty)$$

$$\leq d(x, Tx) +\ d(Tx, T^2x) + d(T^2x, Ty)$$

$$\leq d(x, Tx) + d(x, Tx) + \alpha d(T^2x, y) + \beta d(Ty, Tx) + \big(1 - (\alpha + \beta)\big) d(Tx, y)$$

$$= 2\, d(x, Tx) + \alpha d(T^2x, Tx) + \alpha d(Tx, y) + \beta d(Ty, x) + \beta\, d(x, Tx)$$

$$+ \big(1 - (\alpha + \beta)\big) d(Tx, y)$$

$\leq 2\,d(x,Tx) + \ \alpha\, d(x,Tx) + \alpha\, d(Tx,y) + \beta d(Ty,x) + \beta\, d(x,Tx)$

$\quad +\big(1-(\alpha+\beta)\big)d(Tx,y)$

$\leq (2+\alpha+\beta)\, d(x,Tx) + \beta d(Ty,x) + (1-\beta) d(Tx,y)$

elde edilir. Buradan

$(1-\beta)d(x,Ty) \leq (2+\alpha+\beta)\, d(x,Tx) + (1-\beta)d(Tx,y)$

yazılır. Bu da

$$
\begin{aligned}
d(x,Ty) &\leq \frac{2+\alpha+\beta}{1-\beta}\ d(x,Tx) + d(Tx,y)\\
&\leq \frac{2+\alpha+\beta}{1-\beta}\ d(x,Tx) + d(Tx,x) + d(x,y)\\
&= \frac{3+\alpha}{1-\beta} d(x,Tx) + d(x,y)
\end{aligned}
$$

olduğunu gösterir. Böylece her iki durumda da istenilen sonuç elde edilir.

Bu kısıma, 1. tip genelleştirilmiş (α,β) $-$genişlemeyen dönüşüm örneği ile devam edilecektir.

Örnek 2.2.18.

$X=\mathbb{R}^2,\ \mathrm{C}\ = \{(0,0),(0,2),(1,4)\}$ ve her $x,y \in X$ için

$d(x,y) = d\big((x_1,x_2),(y_1,y_2)\big) = |x_1-y_1| + |x_2-y_2|$ olmak üzere $T: C \to C$ dönüşümü

$$
Tx = \begin{cases} (0,0), & x \in \{(0,0),(0,2)\},\\ (0,2), & x = (1,4) \end{cases}
$$

olarak tanımlansın. T dönüşümünün 1. tip genelleştirilmiş (α,β) $-$genişlemeyen dönüşüm olduğu gösterilecektir. Bunun için

$$
\alpha = \frac{1}{5}, \beta = \frac{1}{3}\ \ ve\ \lambda = 0
$$

alınarak aşağıdaki durumlar incelenecektir.

Durum 1: $x = (0,0)$ ve $y = (0,0)$ alınırsa

$$0.d(x, Tx) = 0.d\big((0,0), (0,0)\big) = 0 \leq d(x, y)$$

ve

$$\begin{aligned} d(Tx, Ty) &= 0 \\ &\leq \frac{1}{5}.d(Tx, y) + \frac{1}{3}.d(Ty, x) + \frac{7}{15}.d(x, y) \\ &= \frac{1}{5}.0 + \frac{1}{3}.0 + \frac{7}{15}.0 = 0 \end{aligned}$$

dır.

Durum 2a: $x = (0,0)$ ve $y = (0,2)$ alınırsa

$$0.d(x, Tx) = 0.d\big((0,0), (0,0)\big) = 0 \leq 2 = d(x, y)$$

ve

$$\begin{aligned} d(Tx, Ty) &= 0 \\ &\leq \frac{1}{5}.d(Tx, y) + \frac{1}{3}.d(Ty, x) + \frac{7}{15}.d(x, y) \\ &= \frac{1}{5}.2 + \frac{1}{3}.0 + \frac{7}{15}.2 = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

elde edilir.

Durum 2b: $x = (0,2)$ ve $y = (0,0)$ alınırsa

$$0.d(x, Tx) = 0.d\big((0,2), (0,0)\big) = 0 < 2 = d(x, y)$$

ve

$$\begin{aligned} d(Tx, Ty) &= 0 \\ &\leq \frac{1}{5}.d(Tx, y) + \frac{1}{3}.d(Ty, x) + \frac{7}{15}.d(x, y) \\ &= \frac{1}{5}.0 + \frac{1}{3}.2 + \frac{7}{15}.2 = \frac{8}{5} \end{aligned}$$

elde edilir.

Durum 3a: $x = (0,0)$ ve $y = (1,4)$ alınırsa

$$0.d(x,Tx) = 0.d\big((0,0),(0,0)\big) = 0 < 5 = d(x,y)$$

ve

$$\begin{aligned} d(Tx,Ty) &= 2 \\ &\leq \frac{1}{5}.d(Tx,y) + \frac{1}{3}.d(Ty,x) + \frac{7}{15}.d(x,y) \\ &= \frac{1}{5}.5 + \frac{1}{3}.2 + \frac{7}{15}.5 = \frac{13}{5} \end{aligned}$$

elde edilir.

Durum 3b: $x = (1,4)$ ve $y = (0,0)$ alınırsa

$$0.d(x,Tx) = 0.d\big((1,4),(0,2)\big) = 0 < 5 = d(x,y)$$

ve

$$\begin{aligned} d(Tx,Ty) &= 2 \\ &\leq \frac{1}{5}.d(Tx,y) + \frac{1}{3}.d(Ty,x) + \frac{7}{15}.d(x,y) \\ &= \frac{1}{5}.2 + \frac{1}{3}.5 + \frac{7}{15}.5 = \frac{22}{5} \end{aligned}$$

elde edilir.

Durum 4a: $x = (0,2)$ ve $y = (1,4)$ alınırsa

$$0.d(x,Tx) = 0.d\big((0,2),(0,0)\big) = 0 < 3 = d(x,y)$$

ve

$$\begin{aligned} d(Tx,Ty) &= 2 \\ &\leq \frac{1}{5}.d(Tx,y) + \frac{1}{3}.d(Ty,x) + \frac{7}{15}.d(x,y) \\ &= \frac{1}{5}.5 + \frac{1}{3}.1 + \frac{7}{15}.3 = \frac{41}{15} \end{aligned}$$

elde edilir.

Durum 4b: $x = (1,4)$ ve $y = (0,2)$ alınırsa

$$0.d(x,Tx)=0.d\big((1,4),(0,2)\big)=0<3=d(x,y)$$

ve

$$\begin{aligned}d(Tx,Ty)&=2\\&\leq\frac{1}{5}.d(Tx,y)+\frac{1}{3}.d(Ty,x)+\frac{7}{15}.d(x,y)\\&=\frac{1}{5}.0+\frac{1}{3}.5+\frac{7}{15}.3=\frac{46}{15}\end{aligned}$$

elde edilir.

Durum 5: $x=(1,4)$ ve $y=(1,4)$ alınırsa

$$0.d(x,Tx)=0.d\big((1,4),(0,2)\big)=0=d(x,y)$$

ve

$$\begin{aligned}d(Tx,Ty)&=0\\&\leq\frac{1}{5}.d(Tx,y)+\frac{1}{3}.d(Ty,x)+\frac{7}{15}.d(x,y)\\&=\frac{1}{5}.3+\frac{1}{3}.3+\frac{7}{15}.0=\frac{8}{5}\end{aligned}$$

elde edilir.

Durum 6: $x=(0,2)$ ve $y=(0,2)$ alınırsa

$$0.d(x,Tx)=0.d\big((0,2),(0,0)\big)=0=d(x,y)$$

ve

$$\begin{aligned}d(Tx,Ty)&=0\\&\leq\frac{1}{5}.d(Tx,y)+\frac{1}{3}.d(Ty,x)+\frac{7}{15}.d(x,y)\\&=\frac{1}{5}.3+\frac{1}{3}.3+\frac{7}{15}.0=\frac{8}{5}\end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç olarak T dönüşümü $F(T) = \{(0,0)\}$ ile 1. tip genelleştirilmiş $\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{3}\right)$ −genişlemeyen dönüşümdür.

2.3. Bazı İterasyon Yöntemleri

Bir dönüşümün sabit noktası veya noktalarını bulurken çeşitli iterasyon yöntemleri kullanılır. Bunlardan bazıları aşağıdaki gibidir.

Tanım 2.3.1. (Picard İterasyonu)

(X, d) bir metrik uzay ve $C \subseteq X$ kapalı bir alt küme ve $T: C \to C$ bir dönüşüm olsun. $x_0 \in X$ olmak üzere Picard iterasyonu

$$x_n = Tx_{n-1} = T^n x_0, \quad \forall n \geq 1$$

şeklinde tanımlanır [2].

Picard iterasyonu literatürde bazen ardışık yaklaşımlar dizisi olarak da adlandırılır.

Tanım 2.3.2. (Mann İterasyonu)

X bir normlu uzay, $C \subseteq X$ boş olmayan konveks bir alt küme, $T: C \to C$ bir dönüşüm ve $x_0 \in C$ olmak üzere Mann iterasyonu

$$x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T x_n, \qquad \forall n \geq 0$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\{\alpha_n\} \in [0,1]$ dir [3].

Tanım 2.3.3. (Ishikawa İterasyonu)

X bir normlu uzay, $C \subseteq X$ boş olmayan konveks bir alt küme, $T: C \to C$ bir dönüşüm ve $x_0 \in C$ olmak üzere Ishikawa iterasyonu

$$\begin{cases} y_n = (1 - \beta_n)x_n + \beta_n T x_n, \\ x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T y_n, \qquad \forall n \geq 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\} \in [0,1]$ dir [4].

Ishikawa iterasyonunda her $n \geq 0$ için $\beta_n = 0$ alınırsa Mann iterasyonu elde edilir.

Tanım 2.3.4. (Noor İterasyonu)

X bir normlu uzay, $C \subseteq X$ boş olmayan konveks bir alt küme, $T: C \rightarrow C$ bir dönüşüm ve $x_0 \in C$ olmak üzere Noor iterasyonu

$$\begin{cases} z_n = (1-\gamma_n)x_n + Tx_n, \\ y_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n Tz_n, \\ x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n Ty_n, \quad \forall n \geq 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}\ ve\ \{\gamma_n\} \in [0,1]$ dir [5].

Noor iterasyonunda her $n \geq 0$ için $\gamma_n = 0$ alınırsa Ishikawa iterasyonu ve her $n \geq 0$ için $\beta_n = \gamma_n = 0$ alınırsa Mann iterasyonu elde edilir.

Tanım 2.3.5. (S −İterasyonu)

X bir lineer uzay, $C \subseteq X$ boş olmayan konveks bir alt küme, $T: C \rightarrow C$ bir dönüşüm ve $x_1 \in C$ olmak üzere S−iterasyonu

$$\begin{cases} y_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n Tx_n, \\ x_{n+1} = (1-\alpha_n)Tx_n + \alpha_n Ty_n, \qquad \forall n \geq 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\} \in (0,1)$ dir [6].

S−iterasyonu literatürde bazen kısaca Agarwal iterasyonu olarak da adlandırılır.

Tanım 2.3.6. (Abbas ve Nazır İterasyonu)

X bir lineer uzay, $C \subseteq X$ boş olmayan konveks bir alt küme, $T: C \rightarrow C$ bir dönüşüm ve $x_0 \in C$ olmak üzere Abbas ve Nazır iterasyonu

$$\begin{cases} z_n = (1-\gamma_n)x_n + \gamma_n Tx_n, \\ y_n = (1-\beta_n)Tx_n + \beta_n Tz_n, \\ x_{n+1} = (1-\alpha_n)Ty_n + \alpha_n Tz_n, \quad \forall n \geq 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}\ ve\ \{\gamma_n\} \in (0,1)$ dir [7].

Abbas ve Nazır iterasyonu literatürde bazen kısaca Abbas iterasyonu olarak da adlandırılır.

Tanım 2.3.7. (Thakur İterasyonu)

X bir normlu uzay, $C \subseteq X$ boş olmayan konveks bir alt küme, $T: C \to C$ bir dönüşüm ve $x_0 \in C$ olmak üzere Thakur iterasyonu

$$\begin{cases} z_n = (1-\gamma_n)x_n + \gamma_n T x_n, \\ y_n = (1-\beta_n)z_n + \beta_n T z_n, \\ x_{n+1} = (1-\alpha_n)T z_n + \alpha_n T y_n, \quad \forall n \geq 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}\ ve\ \{\gamma_n\} \in [0,1]$ dir [8].

Tanım 2.3.8. (Thakur Yeni İterasyonu)

X bir normlu uzay, $C \subseteq X$ boş olmayan konveks bir alt küme, $T: C \to C$ bir dönüşüm ve $x_0 \in C$ olmak üzere Thakur yeni iterasyonu

$$\begin{cases} z_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n T x_n, \\ y_n = T\big((1-\alpha_n)x_n + \alpha_n z_n\big), \\ x_{n+1} = T y_n, \qquad \forall n \geq 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\} \in [0,1]$ dir [9].

Tanım 2.3.9. (M −İterasyonu)

X bir normlu uzay, $C \subseteq X$ boş olmayan konveks bir alt küme, $T: C \to C$ bir dönüşüm ve $x_1 \in C$ olmak üzere M−iterasyonu

$$\begin{cases} z_n = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n T x_n, \\ y_n = T z_n, \\ x_{n+1} = T y_n, \qquad \forall n \geq 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\{\alpha_n\} \in [0,1]$ dir [10].

Tanım 2.3.10. (KF −İterasyonu)

X bir Banach uzay, $C \subseteq X$ boş olmayan konveks bir alt küme, $T: C \to C$ bir dönüşüm olmak üzere KF −iterasyonu

$$
\begin{cases}
x_1 \in C, \\
z_n = T\big((1-\beta_n)x_n + \beta_n T x_n\big), \\
y_n = T z_n, \\
x_{n+1} = T\big((1-\alpha_n)T x_n + \alpha_n T y_n\big), \qquad \forall n \geq 1
\end{cases} \tag{2.2}
$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\} \in [0,1]$ dir [38-39].

2022'de Ullah, Ahmad ve Khan tarafından yazılan bir makalede aşağıdaki örnek yardımıyla genelleştirilmiş α −genişlemeyen dönüşümler için KF −iterasyon yönteminin dönüşümün sabit noktasına S, Thakur, M −iterasyon yöntemlerinden daha hızlı yakınsadığı nümerik olarak gösterildi.

Örnek 2.3.11. [38]

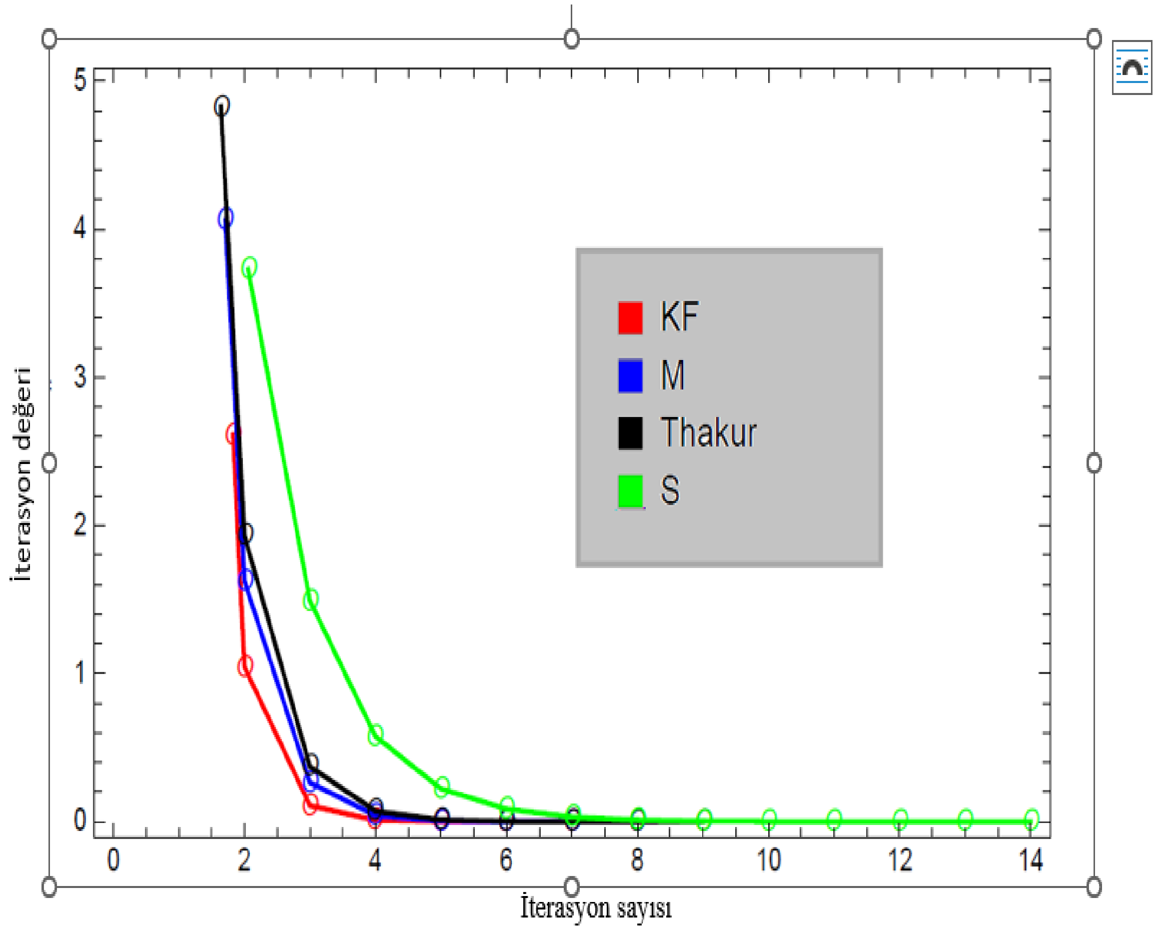
$X = \mathbb{R}$ ve her $x, y \in X$ için $\|x-y\| = |x-y|$ olsun. $C = [0,\infty)$ olmak üzere $T: C \to C$ dönüşümü

$$
Tx = \begin{cases} 0, & x \in \left[0, \dfrac{1}{5000}\right), \\ \dfrac{x}{2}, & x \in \left[\dfrac{1}{5000}, \infty\right) \end{cases}
$$

olarak tanımlansın. T, genelleştirilmiş $\frac{1}{3}$ −genişlemeyen bir dönüşüm olup Suzuki genelleştirilmiş genişlemeyen bir dönüşüm değildir. Ayrıca $F(T) = \{0\}$ dır. Aşağıdaki tablo ve şekil yardımıyla her $n \geq 1$ için $\alpha_n = 0.70$ ve $\beta_n = 0.65$ alınarak $x_1 = 10$ başlangıç noktası için KF −iterasyon yönteminin; S, Thakur, M −iterasyon yöntemlerinden daha hızlı bir şekilde T dönüşümünün sabit noktasına yakınsadığı gösterildi.

Tablo 2.1. Örnek 2.3.11. deki T dönüşümü için S, Thakur, M, KF $-$iterasyon yöntemlerinin yakınsaklık davranışları.

İterasyon sayısı	S	Thakur	M	KF
1	10	10	10	10
2	3.8625000000	1.9312500000	1.62500000000	1.0453120000
3	1.4918906250	0.3729726562	0.26406250000	0.1092678222
4	0.5762427539	0.0720303442	0.04291015625	0.0114219020
5	0.2225737636	0.0139108602	0.00697290039	0.0011939456
6	0.0859691162	0.0026865348	0.00113309631	0.0001248046
7	0.0332055711	0.0005188370	0.00018412815	0
8	0.0128256518	0.0001002004	0	0
9	0.0049539080	0	0	0
10	0.0019134469	0	0	0
11	0.0007390688	0	0	0
12	0.0002854653	0	0	0



Şekil 2.1. Tablo 2.1.'e karşılık gelen grafik.

Yine 2022'de Temir ve Korkut tarafından yapılan bir çalışmada aşağıdaki örnek yardımıyla daralma dönüşümleri için KF −iterasyon yönteminin dönüşümün sabit noktasına M −iterasyon yönteminden daha hızlı yakınsadığı nümerik olarak gösterilmiştir.

Örnek 2.3.14. [39]

$T: [0,10) \rightarrow [0,10)$ fonksiyonu $T(x) = \sqrt{2x+3}$ olarak tanımlansın. T bir daralma dönüşümüdür ve tek sabit noktası 3 tür. Aşağıdaki tablo yardımıyla için her $n \geq 1$ için $\alpha_n = 0{,}70$ ve $\beta_n = 0{,}30$ alınarak $x_1 = 4$ başlangıç noktası için KF −iterasyon yönteminin M −iterasyon yönteminden daha hızlı bir şekilde T dönüşümünün sabit noktasına yakınsadığı gösterilmiştir.

Tablo 2.2. Örnek 2.3.14. deki T dönüşümü için M ve KF $-$iterasyon yöntemlerinin yakınsaklık davranışları.

İterasyon sayısı	M	KF
1	4	4
2	3.083577194937360	3.037893699789630
3	3.007388352660220	3.001521367442330
4	3.000656421483590	3.000061224295530
5	3.000058346040820	3.000002464079130
6	3.000005186294710	3.000000099171560
7	3.000000461003820	3.000000003991350
8	3.000000040978120	3.000000000160640
9	3.000000003642500	3.000000000006470
10	3.000000000323780	3.000000000000260
11	3.000000000028780	3.000000000000010
12	3.000000000002560	3.000000000000000
13	3.000000000000230	3.000000000000000
14	3.000000000000020	3.000000000000000
15	3.000000000000000	3.000000000000000

3. HİPERBOLİK METRİK UZAYLARDA SABİT NOKTA TEOREMLERİ

Bu bölümde, (2.2) ifadesi ile verilen KF −iterasyon yöntemini hiperbolik metrik uzaylarda tanımlayarak bu uzayda daralma dönüşümleri için zayıf w^2 −kararlılık ve veri bağımlılığı teoremleri ile 1. tip genelleştirilmiş (α, β) −genişlemeyen dönüşümler için Δ −yakınsaklık ve kuvvetli yakınsaklık teoremleri ispatlanacaktır.

3.1. Zayıf w^2 −Kararlılık ve Veri Bağımlılığı Teoremleri

Bu bölüme, (2.2) ifadesi ile verilen KF −iterasyon yöntemi hiperbolik metrik uzaylarda tanımlanarak başlanacaktır.

X bir hiperbolik metrik uzay, C de X in boştan farklı konveks bir alt kümesi ve $T: C \to C$ bir dönüşüm olmak üzere KF −iterasyonu

$$\begin{cases} x_1 \in C, \\ z_n = T(W(x_n, Tx_n, \beta_n)), \\ y_n = Tz_n, \\ x_{n+1} = T\big(W(Tx_n, Ty_n, \alpha_n)\big), \qquad \forall n \geq 1 \end{cases} \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\} \in [0,1]$ dir.

Zayıf w^2 −kararlılık ve veri bağımlılığı teoremlerinin ispatlarını yapabilmek için ilk önce bir kuvvetli yakınsaklık teoremi verilecektir.

Teorem 3.1.1.

X bir hiperbolik metrik uzay, C de X in boştan farklı, kapalı ve konveks bir alt kümesi, $T: C \to C$ bir daralma dönüşümü ve $F(T) \neq \emptyset$ olsun. [0,1] aralığındaki $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ reel dizileri $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \beta_n = \infty$ şartını sağlasın ve (3.1)' de tanımlanan $\{x_n\}$ iterasyon dizisisi verilsin. Bu durumda $\{x_n\}$ dizisi T nin sabit noktasına kuvvetli yakınsar.

İspat.

T daralma dönüşümü bir sabit noktaya sahip olduğunda bu sabit nokta tektir. Bu tek sabit nokta p olsun. (3.1) iterasyon yönteminden

$$
\begin{aligned}
d(z_n, p) &= d(T(W(x_n, Tx_n, \beta_n)), Tp) \\
&\leq kd(W(x_n, Tx_n, \beta_n), p) \\
&\leq k[(1-\beta_n)d(x_n, p) + \beta_n d(Tx_n, p)] \\
&\leq k[(1-\beta_n)d(x_n, p) + \beta_n kd(x_n, p)] \\
&= k\big(1-\beta_n(1-k)\big)d(x_n, p)
\end{aligned}
$$

elde edilir ve $k \in [0,1)$ olduğundan

$$
\begin{aligned}
d(y_n, p) &= d(Tz_n, Tp) \leq kd(z_n, p) \\
&\leq k\big[(k\big(1-\beta_n(1-k)\big)d(x_n, p)\big] \\
&= k^2\big(1-\beta_n(1-k)\big)d(x_n, p) \\
&\leq \big(1-\beta_n(1-k)\big)d(x_n, p)
\end{aligned}
$$

olur. Benzer şekilde

$$
\begin{aligned}
d(x_{n+1}, p) &= d\big(T\big(W(Tx_n, Ty_n, \alpha_n)\big), Tp\big) \\
&\leq kd(W(Tx_n, Ty_n, \alpha_n), p) \\
&\leq k[(1-\alpha_n)d(Tx_n, p) + \alpha_n d(Ty_n, p)] \\
&\leq k[(1-\alpha_n)kd(x_n, p) + \alpha_n kd(y_n, p)] \\
&= k^2[(1-\alpha_n)d(x_n, p) + \alpha_n d(y_n, p)] \\
&\leq k^2\big[(1-\alpha_n)d(x_n, p) + \alpha_n\big(1-\beta_n(1-k)\big)d(y_n, p)\big] \\
&= k^2\big(1-\alpha_n\beta_n(1-k)\big)d(x_n, p)
\end{aligned}
$$

dir. Yukarıdaki işlemlerin tekrarı aşağıdaki eşitsizlikleri verir:

$$
\begin{aligned}
d(x_{n+1}, p) &\leq k^2\big(1-\alpha_n\beta_n(1-k)\big)d(x_n, p), \\
d(x_n, p) &\leq k^2\big(1-\alpha_{n-1}\beta_{n-1}(1-k)\big)d(x_{n-1}, p), \\
d(x_{n-1}, p) &\leq k^2\big(1-\alpha_{n-2}\beta_{n-2}(1-k)\big)d(x_{n-2}, p), \\
&\vdots \\
d(x_2, p) &\leq k^2\big(1-\alpha_1\beta_1(1-k)\big)d(x_1, p).
\end{aligned} \tag{3.2}
$$

(3.2) eşitsizliklerinden

$$d(x_{n+1},p) \leq d(x_1,p)(k^2)^n \prod_{m=1}^{n} \big(1-\alpha_m\beta_m(1-k)\big) \tag{3.3}$$

elde edilir. Burada her $n \in \mathbb{N}$ için α_n, β_n, $[0,1]$ aralığında ve $k \in [0,1)$ olduğundan $1-\alpha_m\beta_m(1-k) \leq 1$ dir. Klasik analizden iyi bilinir ki her $x \in [0,1]$ için $1-x \leq e^{-x}$ dir. Bu gerçek, (3.3) eşitsizliği ile birlikte göz önüne alınırsa

$$d(x_{n+1},p) \leq d(x_1,p)k^{2n}e^{-(1-k)\sum_{m=1}^{n}\alpha_m\beta_m} \tag{3.4}$$

olur. (3.4) eşitsizliğinin her iki tarafının limiti alınıp ve $k \in [0,1)$, $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\,\beta_n = \infty$ hipotezleri kullanılırsa $lim_{n\to\infty}d(x_n,p) = 0$ elde edilir. Yani $\{x_n\}$ dizisi T dönüşümünün sabit noktası olan p noktasına kuvvetli yakınsar.

Şimdi de (3.1) ile tanımlanan modifiye edilmiş iterasyon yönteminin T dönüşümüne göre zayıf w^2 $-$kararlılık teoremi ispatlanacaktır.

Teorem 3.1.2.

Teorem 3.1.1 in tüm koşulları geçerli olsun. Bu durumda (3.1) ile verilen $\{x_n\}$ iterasyon dizisi T dönüşümüne göre zayıf w^2 $-$ kararlıdır.

İspat.

$\{x_n\}$, (3.1) ile verilen iterasyon dizisi ve $\{p_n\} \subset C$, $\{x_n\}$ in bir denk dizisi olsun.

$q_n = Tr_n$ ve $r_n = T\big(W(p_n, Tp_n, \alpha_n)\big)$ olmak üzere

$$\varepsilon_n = d\left(p_{n+1}, T\big(W(Tp_n, Tq_n, \alpha_n)\big)\right)$$

olsun. Ayrıca, $lim_{n\to\infty}\varepsilon_n = 0$ kabul edilsin.

$$\begin{aligned} d(z_n, r_n) &= d(T(W(x_n, Tx_n, \beta_n)), T\big(W(p_n, Tp_n, \beta_n)\big)) \\ &\leq kd(W(x_n, Tx_n, \beta_n), W(p_n, Tp_n, \beta_n)) \\ &\leq k[(1-\beta_n)d(x_n, p_n) + \beta_n d(Tx_n, Tp_n)] \\ &\leq k[(1-\beta_n)d(x_n, p_n) + \beta_n k d(x_n, p_n)] \\ &= k\big(1-\beta_n(1-k)\big)d(x_n, p_n) \end{aligned} \tag{3.5}$$

olur. $k \in [0,1)$ olduğundan (3.5) ifadesinden

$$\begin{aligned} d(y_n, q_n) &= d(Tz_n, Tr_n) \\ &\leq kd(z_n, r_n) \\ &\leq k^2\big(1-\beta_n(1-k)\big)d(x_n, p_n) \\ &\leq \big(1-\beta_n(1-k)\big)d(x_n, p_n) \end{aligned} \tag{3.6}$$

elde edelir. Benzer şekilde (3.6) eşitsizliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned} & d(p_{n+1}, p) \\ & \leq d(p_{n+1}, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, p) \\ & \leq d\Big(p_{n+1}, T\big(W(Tp_n, Tq_n, \alpha_n)\big)\Big) \\ & \quad + d(T\big(W(Tp_n, Tq_n, \alpha_n)\big), d(T(W(Tx_n, Ty_n, \alpha_n))) + \ d(x_{n+1}, p) \\ & \leq \varepsilon_n + kd\big(W(Tp_n, Tq_n, \alpha_n), W(Tx_n, Ty_n, \alpha_n)\big) + d(x_{n+1}, p) \\ & \leq \varepsilon_n + k[(1-\alpha_n)d(Tp_n, Tx_n) + \alpha_n d(Tq_n, Ty_n)] + d(x_{n+1}, p) \\ & \leq \varepsilon_n + k[(1-\alpha_n)kd(p_n, x_n) + \alpha_n kd(q_n, y_n)] + d(x_{n+1}, p) \\ & \leq \varepsilon_n + k^2\Big[(1-\alpha_n)d(p_n, x_n) + \alpha_n\big[\big(1-\beta_n(1-k)\big)d(x_n, p_n)\big]\Big] \\ & \quad + d(x_{n+1}, p) \\ & = \varepsilon_n + k^2\big(1-\alpha_n\beta_n(1-k)\big)d(x_n, p_n) + d(x_{n+1}, p) \end{aligned} \tag{3.7}$$

olur. Teorem 3.1.1 den $lim_{n\to\infty}d(x_{n+1}, p) = 0$ dır. Ayrıca, $\{x_n\}$ ve $\{p_n\}$ denk diziler olduğundan $lim_{n\to\infty}d(x_n, p_n) = 0$ dır. Şimdi (3.7) eşitsizliğinin her iki tarafının limiti alınırsa $lim_{n\to\infty}\varepsilon_n = 0$ olduğundan $lim_{n\to\infty}d(p_{n+1}, p_n) = 0$ elde edilir. Dolayısıyla $\{x_n\}$ dizisi T dönüşümüne göre zayıf $w^2 -$ kararlıdır.

Teorem 3.1.3.

X, C ve T, Teorem 3.1.1 deki gibi verilsin ve $\tilde{T}: X \to X$, verilen bir ε için T nin yaklaşım operatörü olsun. (3.1) ile verilen bir $\{x_n\}$ iterasyon dizisi ele alalım ve $\{\tilde{x}_n\}$ aşağıdaki gibi tanımlanan iterasyon dizisi olsun.

$$\begin{cases} \tilde{x}_1 \in C, \\ \tilde{z}_n = \tilde{T}\big(W(\tilde{x}_n, \tilde{T}\tilde{x}_n, \beta_n)\big), \\ \tilde{y}_n = \tilde{T}\tilde{z}_n, \\ \tilde{x}_{n+1} = \tilde{T}\Big(W\big(\tilde{T}\tilde{x}_n, \tilde{T}\tilde{y}_n, \alpha_n\big)\Big), \qquad \forall n \geq 1. \end{cases} \tag{3.8}$$

Burada $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ [0,1] aralığındaki reel dizileri için $\alpha_n \beta_n \geq \frac{1}{2}$, $\forall n \geq 1$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \beta_n = \infty$ şartları sağlansın. Eğer $p = Tp$ ve $lim_{n\to\infty}\tilde{x}_n = \tilde{p}$ olacak şekilde $\tilde{p} = \tilde{T}\tilde{p}$ ise $k \in [0,1)$ olmak üzere

$$d(p, \tilde{p}) \leq \frac{9\varepsilon}{1-k}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat.

(3.1) ve (3.8) iterasyon yöntemlerini kullanarak

$$\begin{aligned} d(z_n, \tilde{z}_n) &= d(T(W(x_n, Tx_n, \beta_n)), \tilde{T}\big(W(\tilde{x}_n, \tilde{T}\tilde{x}_n, \beta_n)\big)) \\ &\leq d(T(W(x_n, Tx_n, \beta_n)), T\big(W(\tilde{x}_n, \tilde{T}\tilde{x}_n, \beta_n)\big)) \\ &\quad + d(T\big(W(\tilde{x}_n, \tilde{T}\tilde{x}_n, \beta_n)\big), \tilde{T}\big(W(\tilde{x}_n, \tilde{T}\tilde{x}_n, \beta_n)\big)) \\ &\leq kd(W(x_n, Tx_n, \beta_n), W(\tilde{x}_n, \tilde{T}\tilde{x}_n, \beta_n)) + \varepsilon \\ &\leq k\big[(1-\beta_n)d(x_n, \tilde{x}_n) + \beta_n d\big(Tx_n, \tilde{T}\tilde{x}_n\big)\big] + \varepsilon \\ &\leq k(1-\beta_n)d(x_n, \tilde{x}_n) + k\beta_n\big[d(Tx_n, T\tilde{x}_n) + d\big(T\tilde{x}_n, \tilde{T}\tilde{x}_n\big)\big] + \varepsilon \\ &\leq k(1-\beta_n)d(x_n, \tilde{x}_n) + k\beta_n[kd(x_n, \tilde{x}_n) + \varepsilon] + \varepsilon \\ &= k\big(1-\beta_n(1-k)\big)d(x_n, \tilde{x}_n) + k\beta_n\varepsilon + \varepsilon \end{aligned} \tag{3.9}$$

elde edilir. (3.9) eşitsizliğinden

$$
\begin{aligned}
d(y_n,\tilde{y}_n) &= d\big(Tz_n,\tilde{T}\tilde{z}_n\big)\\
&\le d(Tz_n,T\tilde{z}_n)+d\big(T\tilde{z}_n,\tilde{T}\tilde{z}_n\big)\\
&\le kd(z_n,\tilde{z}_n)+\varepsilon\\
&\le k\big[k\big(1-\beta_n(1-k)\big)d(x_n,\tilde{x}_n)+k\beta_n\varepsilon+\varepsilon\big]+\varepsilon\\
&\le k^2\big(1-\beta_n(1-k)\big)d(x_n,\tilde{x}_n)+k^2\beta_n\varepsilon+k\varepsilon+\varepsilon \qquad (3.10)
\end{aligned}
$$

olur. Benzer şekilde (3.10) eşitsizliğinden $k \in [0,1)$ olduğundan

$$d(x_{n+1},\tilde{x}_{n+1}) = d\left(T\big(W(Tx_n,Ty_n,\alpha_n)\big),\tilde{T}\left(W\big(\tilde{T}\tilde{x}_n,\tilde{T}\tilde{y}_n,\alpha_n\big)\right)\right)$$

$$\le d(T\big(W(Tx_n,Ty_n,\alpha_n)\big),T\left(W\big(\tilde{T}\tilde{x}_n,\tilde{T}\tilde{y}_n,\alpha_n\big)\right)$$

$$+d\left(T\left(W\big(\tilde{T}\tilde{x}_n,\tilde{T}\tilde{y}_n,\alpha_n\big)\right),\tilde{T}\left(W\big(\tilde{T}\tilde{x}_n,\tilde{T}\tilde{y}_n,\alpha_n\big)\right)\right)$$

$$\le kd(W(Tx_n,Ty_n,\alpha_n),W(\tilde{T}\tilde{x}_n,\tilde{T}\tilde{y}_n,\alpha_n))+\varepsilon$$

$$\le k\big[(1-\alpha_n)d\big(Tx_n,\tilde{T}\tilde{x}_n\big)+\alpha_n d\big(Ty_n,\tilde{T}\tilde{y}_n\big)\big]+\varepsilon$$

$$\le k(1-\alpha_n)\big[d(Tx_n,T\tilde{x}_n)+d\big(T\tilde{x}_n,\tilde{T}\tilde{x}_n\big)\big]+k\alpha_n\big[d(Ty_n,T\tilde{y}_n)+d\big(T\tilde{y}_n,\tilde{T}\tilde{y}_n\big)\big]+\varepsilon$$

$$\le k(1-\alpha_n)[kd(x_n,\tilde{x}_n)+\varepsilon]+k\alpha_n[kd(y_n,\tilde{y}_n)+\varepsilon]+\varepsilon$$

$$=k^2(1-\alpha_n)d(x_n,\tilde{x}_n)+k(1-\alpha_n)\varepsilon+k^2\alpha_n d(y_n,\tilde{y}_n)+k\alpha_n\varepsilon+\varepsilon$$

$$\le k^2(1-\alpha_n)d(x_n,\tilde{x}_n)+k(1-\alpha_n)\,\varepsilon$$

$$+k^2\alpha_n\big[k^2\big(1-\beta_n(1-k)\big)d(x_n,\tilde{x}_n)+k^2\beta_n\varepsilon+k\varepsilon+\varepsilon\big]+k\alpha_n\varepsilon+\varepsilon$$

$$=k^2(1-\alpha_n)d(x_n,\tilde{x}_n)+k(1-\alpha_n)\varepsilon+k^4\alpha_n\big(1-\beta_n(1-k)\big)d(x_n,\tilde{x}_n)$$

$$+k^4\alpha_n\beta_n\varepsilon+k^3\alpha_n\varepsilon+k^2\alpha_n\varepsilon+k\alpha_n\varepsilon+\varepsilon$$

$$\le \big[\alpha_n\big(1-\beta_n(1-k)\big)+(1-\alpha_n)\big]d(x_n,\tilde{x}_n)$$

$$+(1-\alpha_n)\varepsilon+\alpha_n\beta_n\varepsilon+\alpha_n\varepsilon+\alpha_n\varepsilon+\alpha_n\varepsilon+\varepsilon$$

$$=\big(1-\alpha_n\beta_n(1-k)\big)\,d(x_n,\tilde{x}_n)+\alpha_n\beta_n\varepsilon+2\alpha_n\varepsilon+2\varepsilon$$

bulunur. Her $n \geq 1$ için $\alpha_n \leq 1$ olduğundan

$$
\begin{aligned}
& d(x_{n+1}, \tilde{x}_{n+1}) \\
& \leq \big(1 - \alpha_n\beta_n(1-k)\big)\, d(x_n, \tilde{x}_n) + \alpha_n\beta_n\varepsilon + 4\varepsilon \\
& = \big(1 - \alpha_n\beta_n(1-k)\big) d(x_n, \tilde{x}_n) + \alpha_n\beta_n\varepsilon + 4(1 - \alpha_n\beta_n + \alpha_n\beta_n)\varepsilon
\end{aligned} \tag{3.11}
$$

dır. Her $n \geq 1$ için $\alpha_n\beta_n \geq \frac{1}{2}$ varsayımından $1 - \alpha_n\beta_n \leq \alpha_n\beta_n$ eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlik ile birlikte (3.11) eşitsizliği kullanılarak

$$
\begin{aligned}
& d(x_{n+1}, \tilde{x}_{n+1}) \\
& \leq \big(1 - \alpha_n\beta_n(1-k)\big)\, d(x_n, \tilde{x}_n) + 9\alpha_n\beta_n\varepsilon \\
& = \big(1 - \alpha_n\beta_n(1-k)\big)\, d(x_n, \tilde{x}_n) + \alpha_n\beta_n(1-k)\frac{9\varepsilon}{1-k}
\end{aligned} \tag{3.12}
$$

bulunur. $a_n = d(x_n, \tilde{x}_n)$, $r_n = \alpha_n\beta_n(1-k)$ ve $t_n = \frac{9\varepsilon}{1-k}$ alınıp, eşitsizlik (3.12) de yerine yazılırsa Lemma 2.1.28 den

$$
0 \leq \limsup_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{9\varepsilon}{1-k} \tag{3.13}
$$

elde edilir. Teorem 3.1.1 den $lim_{n\to\infty} x_n = p$ ve hipotezdeki varsayımdan $lim_{n\to\infty} \tilde{x}_n = \tilde{p}$ sonucu bulunur. Bunlar (3.13) eşitsizliği ile birlikte kullanırsa

$$
d(p, \tilde{p}) \leq \frac{9\varepsilon}{1-k}
$$

elde edilir.

3.2. *Δ* –Yakınsaklık ve Kuvvetli Yakınsaklık Teoremleri

Hiperbolik metrik uzaylarda 1. tip genelleştirilmiş (α, β) −genişlemeyen dönüşüm için (3.1) ile verilen iterasyon dizisinin Δ −yakınsaklık ve kuvvetli yakınsaklık teoremlerinin ispatlanabilmesi için ihtiyaç duyulan lemma aşağıda verilmiştir.

Lemma 3.2.1.

X bir hiperbolik metrik uzay, C de X in boştan farklı konveks bir alt kümesi, $F(T) \neq \emptyset$ olmak üzere $T: C \to C$ 1. tip genelleştirilmiş (α, β) −genişlemeyen dönüşüm ve $\{x_n\}$, (3.1) de verilen iterasyon yöntemi ile tanımlanan bir dizi olsun. O zaman her $p \in F(T)$ için $lim_{n\to\infty} d(x_n, p)$ vardır.

İspat.

Önerme 2.2.15. (i) den,

$$\begin{aligned} d(z_n, p) &= d(T(W(x_n, Tx_n, \beta_n)), p)) \\ &\leq d(W(x_n, Tx_n, \beta_n), p) \\ &\leq (1-\beta_n)\mathrm{d}(x_n, p) + \beta_n \mathrm{d}(Tx_n, p) \\ &\leq (1-\beta_n)\mathrm{d}(x_n, p) + \beta_n \mathrm{d}(x_n, p) \\ &= d(x_n, p) \end{aligned} \tag{3.14}$$

elde edilir ve buradan

$$d(y_n, p) = d(Tz_n, p) \leq d(z_n, p) \leq d(x_n, p) \tag{3.15}$$

bulunur. Benzer şekilde, Önerme 2.2.15. (i) ve (3.15) eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, p) &= d(T(W(Tx_n, Ty_n, \alpha_n)), p) \\ &\leq d(W(Tx_n, Ty_n, \alpha_n), p) \\ &\leq (1-\alpha_n) d(Tx_n, p) + \alpha_n d(Ty_n, p) \\ &\leq (1-\alpha_n) d(x_n, p) + \alpha_n d(y_n, p) \\ &\leq (1-\alpha_n) d(x_n, p) + \alpha_n d(x_n, p) \\ &= d(x_n, p) \end{aligned} \tag{3.16}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$d(x_{n+1}, p) \leq d(x_n, p)$

bulunur. Böylece her $p \in F(T)$ için $\{d(x_n, p)\}$ dizisi artmayan ve alttan sınırlıdır. Bu sebeple her $p \in F(T)$ için $lim_{n\to\infty} d(x_n, p)$ vardır.

Teorem 3.2.2.

X, η monoton düzgün konvekslik modülüne sahip tam düzgün konveks bir hiperbolik metrik uzay, C de X in boştan farklı kapalı konveks bir alt kümesi ve $T: C \rightarrow C$ 1. tip genelleştirilmiş (α, β) $-$genişlemeyen dönüşüm olsun. $a, b \in (0,1)$ olmak üzere $[a, b]$ aralığındaki $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ reel dizileri ile (3.1)' de tanımlanan $\{x_n\}$ iterasyon dizisisi verilsin. Bu durumda $F(T) \neq \emptyset$ olması için gerek ve yeter şart $\{x_n\}$ dizisinin sınırlı ve $lim_{n\to\infty} d(x_n, Tx_n) = 0$ olmasıdır.

İspat.

$F(T) \neq \emptyset$ ve $p \in F(T)$ olsun. Lemma 3.2.1 den $lim_{n\to\infty} d(x_n, p)$ vardır ve $\{x_n\}$ dizisi sınırlıdır. Bazı $c \geq 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, p) = c \tag{3.17}$$

kabul edilsin. Önerme 2.2.15. (i) den,

$d(Tx_n, p) \leq d(x_n, p)$

dır. Bu eşitsizliğin her iki tarafının limsup u alınırsa

$$\limsup_{n\to\infty} d(Tx_n, p) \leq c \tag{3.18}$$

bulunur. Ancak (3.15) eşitsizliğinden

$d(y_n, p) \leq d(x_n, p)$

dir. Benzer şekilde

$$\limsup_{n\to\infty} d(y_n, p) \leq c \tag{3.19}$$

bulunur. (3.16) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, p) &\leq (1 - \alpha_n) d(x_n, p) + \alpha_n d(y_n, p) \\ &= d(x_n, p) + \alpha_n (d(y_n, p) - d(x_n, p)) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{d(x_{n+1},p)-d(x_n,p)}{\alpha_n} \leq d(y_n,p)-d(x_n,p)$$

olur. $\{\alpha_n\}$ reel dizisi $[a,b]$ aralığında olduğundan

$$\frac{1}{b}\big(d(x_{n+1},p)-d(x_n,p)\big) \leq \frac{d(x_{n+1},p)-d(x_n,p)}{\alpha_n} \leq d(y_n,p)-d(x_n,p)$$

yazılır. Bu son eşitsizlik ve (3.17) eşitliği kullanılırsa

$$c \leq \liminf_{n\to\infty} d(y_n,p) \tag{3.20}$$

bulunur. (3.19) ve (3.20) eşitsizliklerinden

$$\lim_{n\to\infty} d(y_n,p) = c \tag{3.21}$$

olduğu görülür. (3.15) eşitsizliği (3.17) ve (3.21) eşitlikleri kullanılırsa

$$\lim_{n\to\infty} d(z_n,p) = c \tag{3.22}$$

bulunur. (3.14) eşitsizliğinden

$$d(z_n,p) \leq d(W(x_n,Tx_n,\beta_n),p) \leq \mathrm{d}(x_n,p)$$

yazılır. Bu son eşitsizlik ile (3.17) ve (3.22) eşitliklerinden

$$\lim_{n\to\infty} d(W(x_n,Tx_n,\beta_n),p) = c \tag{3.23}$$

elde edilir. Son olarak; (3.17), (3.18), (3.23) ve Lemma 2.1.27 den $lim_{n\to\infty} d(x_n,Tx_n) = 0$ eşitliği bulunur.

Şimdi tersine $\{x_n\}$ dizisi sınırlı ve $lim_{n\to\infty} d(x_n,Tx_n) = 0$ olsun. $p \in A(C,x_n)$ olsun. Önerme 2.2.17. den,

$$
\begin{aligned}
r(Tp,\{x_n\}) &= \limsup_{n\to\infty} d(x_n, Tp) \\
&\leq \frac{3+\alpha}{1-\beta} \limsup_{n\to\infty} d(x_n, Tx_n) + \limsup_{n\to\infty} d(x_n, p) \\
&= \limsup_{n\to\infty} d(x_n, p) \\
&= r(p,\{x_n\})
\end{aligned}
$$

olur. Buradan $Tp \in A(C,\{x_n\})$ elde edilir. $\{x_n\}$ dizisi sınırlı olduğundan Lemma 2.1.26 ya göre $A(C,\{x_n\})$ tek noktaya sahiptir. O halde $Tp = p$ olur. Yani $F(T) \neq \emptyset$ dir.

Yukarıdaki iki sonuç kullanılarak 1. tip genelleştirilmiş (α,β) −genişlemeyen dönüşümler için (3.1) ile verilen modifiye edilmiş iterasyon dizisinin Δ −yakınsaklık teoremi ispatlanacaktır.

Teorem 3.2.3.

X, η monoton düzgün konvekslik modülüne sahip tam düzgün konveks bir hiperbolik metrik uzay, C de X in boştan farklı kapalı konveks bir alt kümesi ve $T: C \to C$, $F(T) \neq \emptyset$ olacak şekilde 1. tip genelleştirilmiş (α,β) −genişlemeyen dönüşüm olsun. $a, b \in (0,1)$ olmak üzere $[a,b]$ aralığındaki $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ reel dizileri ile (3.1)' de tanımlanan $\{x_n\}$ iterasyon dizisisi verilsin. Bu durumda $\{x_n\}$ dizisi T dönüşümünün sabit noktasına Δ −yakınsar.

İspat.

Lemma 2.1.26 dan $\{x_n\}$ dizisi bir tek asimptotik merkeze sahiptir. Yani, $A(C,\{x_n\}) = x$ dir. $\{u_n\}$ dizisi $\{x_n\}$ dizisinin $A(C,\{u_n\}) = u$ olacak şekilde herhangi bir alt dizisi olsun. Bu durumda Teorem 3.2.2 den

$$\lim_{n\to\infty} d(u_n, Tu_n) = 0 \tag{3.24}$$

dır. Teorem 3.2.2 nin ispatına benzer şekilde u noktasının T dönüşümünün bir sabit noktası olduğu gösterilebilir. Şimdi u sabit noktasının, $\{x_n\}$ dizisinin $\{u_n\}$ alt dizisi için tek asimptotik merkez olduğu gösterilecektir. $x \neq u$ olsun. Lemma 3.2.1 den $\lim_{n\to\infty} d(x_n, u)$ vardır ve asimptotik merkezin tekliğinden

$$
\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} d(u_n, u) &< \limsup_{n\to\infty} d(u_n, x) \\
&\leq \limsup_{n\to\infty} d(x_n, x) \\
&< \limsup_{n\to\infty} d(x_n, u) \\
&= \limsup_{n\to\infty} d(u_n, u)
\end{aligned}
$$

olup bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $x = u$ dur. Yani $u \in F(T)$, $\{x_n\}$ dizisinin her $\{u_n\}$ alt dizisi için tek asimptotik merkezdir. Bu da $\{x_n\}$ dizisinin T nin sabit noktasına Δ −yakınsadığını gösterir.

Şimdi, 1. tip genelleştirilmiş (α, β) −genişlemeyen dönüşümler için iki kuvvetli yakınsaklık teoremi ispatlanacaktır.

Teorem 3.2.4.

Teorem 3.2.3 ün varsayımları altında eğer C, X in kompakt bir alt kümesi ise $\{x_n\}$ dizisi T dönüşümünün sabit noktasına kuvvetli yakınsar.

İspat.

$p \in C$ keyfi bir nokta olsun. C kompakt bir küme olduğundan $\{x_n\}$ dizisinin

$$\lim_{k\to\infty} d\left(x_{n_k}, p\right) = 0$$

olacak şekilde bir $\left\{x_{n_k}\right\}$ altdizisi vardır. Önerme 2.2.17. den,

$$\lim_{k\to\infty} d\left(x_{n_k}, Tp\right) \leq \frac{3+\alpha}{1-\beta} \lim_{k\to\infty} d\left(x_{n_k}, Tx_{n_k}\right) + \lim_{k\to\infty} d\left(x_{n_k}, p\right)$$

yazılır. Teorem 3.2.2 den

$$\lim_{k\to\infty} d\left(x_{n_k}, Tx_{n_k}\right) = 0$$

elde edilir. O halde $Tp = p$ olur, yani $p \in F(T)$ dir. Ayrıca, Lemma 3.2.1 den $\lim_{n\to\infty} d(x_n, p)$ vardır ve böylece $\{x_n\}$ dizisi p noktasına kuvvetli yakınsar.

Teorem 3.2.5.

X, C, T ve $\{x_n\}$ Teorem 3.2.3 de verilen özelliklere sahip olsun. $\{x_n\}$ dizisi T dönüşümünün sabit noktasına kuvvetli yakınsar ancak ve ancak

$$\liminf_{n\to\infty} d(x_n, F(T)) = 0 \; ya \; da \; \limsup_{n\to\infty} d\big(x_n, F(T)\big) = 0$$

dır. Burada $d\big(x, F(T)\big) = inf\{d(x,p) : p \in F(T)\}$ dir.

İspat.

Eğer, $\{x_n\}$ dizisi bir $p \in F(T)$ noktasına kuvvetli yakınsarsa $lim_{n\to\infty} d(x_n, p) = 0$ dır. Diğer taraftan, $0 \le d(x_n, F(T)) \le d(x_n, p)$ olduğundan $lim_{n\to\infty} d\big(x_n, F(T)\big) = 0$ elde edilir.

Tersine, $liminf_{n\to\infty} d\big(x_n, F(T)\big) = 0$ olsun. Lemma 3.2.1 den $lim_{n\to\infty} d\big(x_n, F(T)\big)$ limiti var ve $lim_{n\to\infty} d\big(x_n, F(T)\big) = 0$ elde edilir. Bu sebeple, her $k \ge 1$ için $d\big(x_{n_k}, p_k\big) < \frac{1}{2^k}$ olacak şekilde $\{x_n\}$ dizisinin bir $\{x_{n_k}\}$ altdizisi ve $F(T)$ de bir $\{p_k\}$ dizisi vardır. Diğer taraftan Lemma 3.2.1 den $d\big(x_{n_{k+1}}, p_{k+1}\big) \le d\big(x_{n_k}, p_k\big) < \frac{1}{2^k}$, yazılır. Bu da

$$\begin{aligned} d(p_{k+1}, p_k) &\le d\big(p_{k+1}, x_{n_{k+1}}\big) + d\big(x_{n_{k+1}}, p_k\big) \\ &< \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^k} < \frac{1}{2^{k-1}} \to 0 \; (k \to \infty \text{ iken}) \end{aligned}$$

olmasını gerektirir. Böylece $\{p_k\}$ dizisinin $F(T)$ içinde bir Cauchy dizisi olduğu görülür. Önerme 2.2.15. (ii) ye göre $F(T)$ kapalı olduğundan $\{p_k\}$ dizisi $p \in F(T)$ noktasına kuvvetli yakınsar. Diğer taraftan, aşağıdaki eşitsizlik yazılır:

$$d\big(x_{n_k}, p\big) \le d\big(x_{n_k}, p_k\big) + d(p_k, p).$$

Eğer bu eşitsizliğin her iki tarafının limiti alınırsa $\{x_{n_k}\}$ dizisinin p noktasına kuvvetli yakınsadığı görülür. Lemma 3.2.1 e göre $lim_{n\to\infty} d(x_n, p)$ vardır ve $\{x_n\}$ dizisi p noktasına kuvvetli yakınsar.

Şimdi ise (I) şartını kullanarak son kuvvetli yakınsaklık teoremi verilecektir.

Teorem 3.2.6.

X, η monoton düzgün konvekslik modülüne sahip tam düzgün konveks bir hiperbolik metrik uzay, C de X in boştan farklı kapalı konveks bir alt kümesi ve $T: C \to C$, $F(T) \neq \emptyset$ olacak şekilde 1. tip genelleştirilmiş (α, β) −genişlemeyen dönüşüm olsun.

$a, b \in (0,1)$ olmak üzere $[a, b]$ aralığındaki $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ reel dizileri ile (3.1)' de tanımlanan $\{x_n\}$ iterasyon dizisisi verilsin. Eğer T dönüşümü (I) şartını sağlıyor ise $\{x_n\}$ dizisi T dönüşümünün sabit noktasına kuvvetli yakınsar.

İspat.

Teorem 3.2.2 den $lim_{n\to\infty} d(x_n, Tx_n) = 0$ dır. O halde (I) şartından

$$\lim_{n\to\infty} f(d(x_n, F(T))) \leq \lim_{n\to\infty} d(x_n, Tx_n) = 0$$

yazılır. $f: [0, \infty) \to [0, \infty)$ fonksiyonu $f(0) = 0$ ve her $r > 0$ için $f(r) > 0$ olacak şekilde azalmayan bir fonksiyon olduğundan $lim_{n\to\infty} d\big(x_n, F(T)\big) = 0$ elde edilir. Teorem 3.2.5 in tüm şartları sağlanır ve bu nedenle $\{x_n\}$ dizisi T dönüşümünün sabit noktasına kuvvetli yakınsar.

Açıklama 3.2.7.

Bu bölümde, hiperbolik metrik uzaylarda genelleştirilmiş α −genişlemeyen dönüşüm sınıfını içeren 1. tip genelleştirilmiş (α, β) −genişlemeyen dönüşümü kullanılmıştır. Ayrıca Banach uzaylarından daha genel bir uzay olan hiperbolik metrik uzaylarda çalışılmıştır. Bu yüzden Teorem 3.2.3-Teorem 3.2.6, [38, 39] ın sonuçlarını iki şekilde genelleştirmiştir: 1) Dönüşüm sınıfı ve 2) Çalışılan uzay.

3.3. Nümerik Örnek

Bu kısımda, 1. tip genelleştirilmiş (α, β) −genişlemeyen dönüşüme bir nümerik örnek verilmiştir.

Örnek 3.3.1.

$X = \mathbb{R}$ ve her $x, y \in X$ için $d(x, y) = |x - y|$ olsun. $C = [0, \infty)$ olmak üzere $T: C \to C$ dönüşümü

$$Tx = \begin{cases} 0, & x \in \left[0, \frac{6}{5}\right), \\ \frac{5x}{12}, & x \in \left[\frac{6}{5}, \infty\right) \end{cases}$$

olarak tanımlansın. $x = 0$ noktasının T dönüşümünün sabit noktası olduğu açıktır.

i) $x = \frac{6}{5}$ noktası için T dönüşümü sürekli değildir. Dolayısıyla T genişlemeyen dönüşüm değildir.

ii) $x = \frac{4}{5}$ ve $y = \frac{6}{5}$ alınırsa

$$\frac{1}{2}|x - Tx| = \frac{2}{5} \leq \frac{2}{5} = |x - y|$$

fakat

$$|Tx - Ty| = \frac{1}{2} > \frac{2}{5} = |x - y|$$

olduğundan T Suzuki genelleştirilmiş genişlemeyen dönüşüm şartını sağlamaz.

iii) $x = \frac{4}{5}$ ve $y = \frac{6}{5}$ alınırsa

$$|Tx - Ty| \leq \alpha|x - y| + \beta|x - Ty|$$
$$\frac{1}{2} \leq \frac{2\alpha}{5} + \frac{3\beta}{10}$$
$$5 \leq 4\alpha + 3\beta$$

olduğundan T ortalama genişlemeyen dönüşüm şartını sağlamaz.

iv) Şimdi T nin 1. tip genelleştirilmiş (α, β) −genişlemeyen dönüşüm olduğu gösterilecektir. Bunun için $\alpha = \frac{5}{12}, \beta = \frac{6}{12}$ ve $\lambda = \frac{1}{3}$ alınarak aşağıdaki durumlar incelenecektir.

Durum A: $x \in \left[0, \frac{6}{5}\right)$ için $\lambda|x - Tx| = \frac{1}{3}x \leq |x - y|$ elde edilir. Burada iki durum söz konudur:

1) $x < y$ olsun. O zaman $\frac{1}{3}x \leq y - x \Rightarrow x \leq \frac{3y}{4} \Rightarrow y \in \left[0, \frac{8}{5}\right)$ elde edilir.

(a) $y \in \left[0, \frac{6}{5}\right)$ olsun. Bu durumda

$|Tx - Ty| = 0 \leq \frac{5}{12}|y| + \frac{6}{12}|x| + \frac{1}{12}|x - y|$ bulunur.

(b) $y \in \left[\frac{6}{5}, \frac{8}{5}\right)$ olsun. Bu durumda

$|Tx - Ty| = \frac{5}{12}|y| \leq \frac{5}{12}|y| + \frac{6}{12}\left|x - \frac{5y}{12}\right| + \frac{1}{12}|x - y|$ bulunur.

2) $x > y$ olsun. O zaman $\frac{1}{3}x \leq x - y \Rightarrow y \leq \frac{2x}{3} \Rightarrow y \in \left[0, \frac{4}{5}\right) \subset \left[0, \frac{6}{5}\right)$ olur ve bu durum 1) (a) da verilmiştir.

Durum B: $x \in \left[\frac{6}{5}, \infty\right)$ için $\lambda|x - Tx| = \frac{1}{3}\left|x - \frac{5}{12}x\right| = \frac{7}{36}x \leq |x - y|$ elde edilir. Burada iki durum söz konudur:

1) $x < y$ olsun. O zaman $\frac{7}{36}x \leq y - x \Rightarrow y \geq \frac{43x}{36}x \Rightarrow y \in \left[\frac{43}{30}, \infty\right) \subset \left[\frac{6}{5}, \infty\right)$ elde edilir. Bu durumda

$$\begin{aligned}
|Tx - Ty| &= \frac{5}{12}|x - y| \\
&< \frac{5}{12}\left(\left|\frac{17x}{12} - \frac{17y}{12}\right|\right) + \frac{1}{12}|x - y| \\
&\leq \frac{5}{12}\left|\frac{5x}{12} - y\right| + \frac{5}{12}\left|x - \frac{5y}{12}\right| + \frac{1}{12}|x - y| \\
&\leq \frac{5}{12}\left|\frac{5x}{12} - y\right| + \frac{6}{12}\left|x - \frac{5y}{12}\right| + \frac{1}{12}|x - y|
\end{aligned}$$

olur.

2) $x > y$ olsun. O zaman $\frac{7}{36}x \leq x - y \Rightarrow x \geq \frac{36y}{29} \Rightarrow y \in \left[\frac{29}{30}, \infty\right)$ elde edilir.

(a) $y \in \left[\frac{29}{30}, \frac{6}{5}\right)$ olsun. Bu durumda

$|Tx - Ty| = \frac{5}{12}|x| \leq \frac{5}{12}\left|\frac{5x}{12} - y\right| + \frac{6}{12}|x| + \frac{1}{12}|x - y|$ dir.

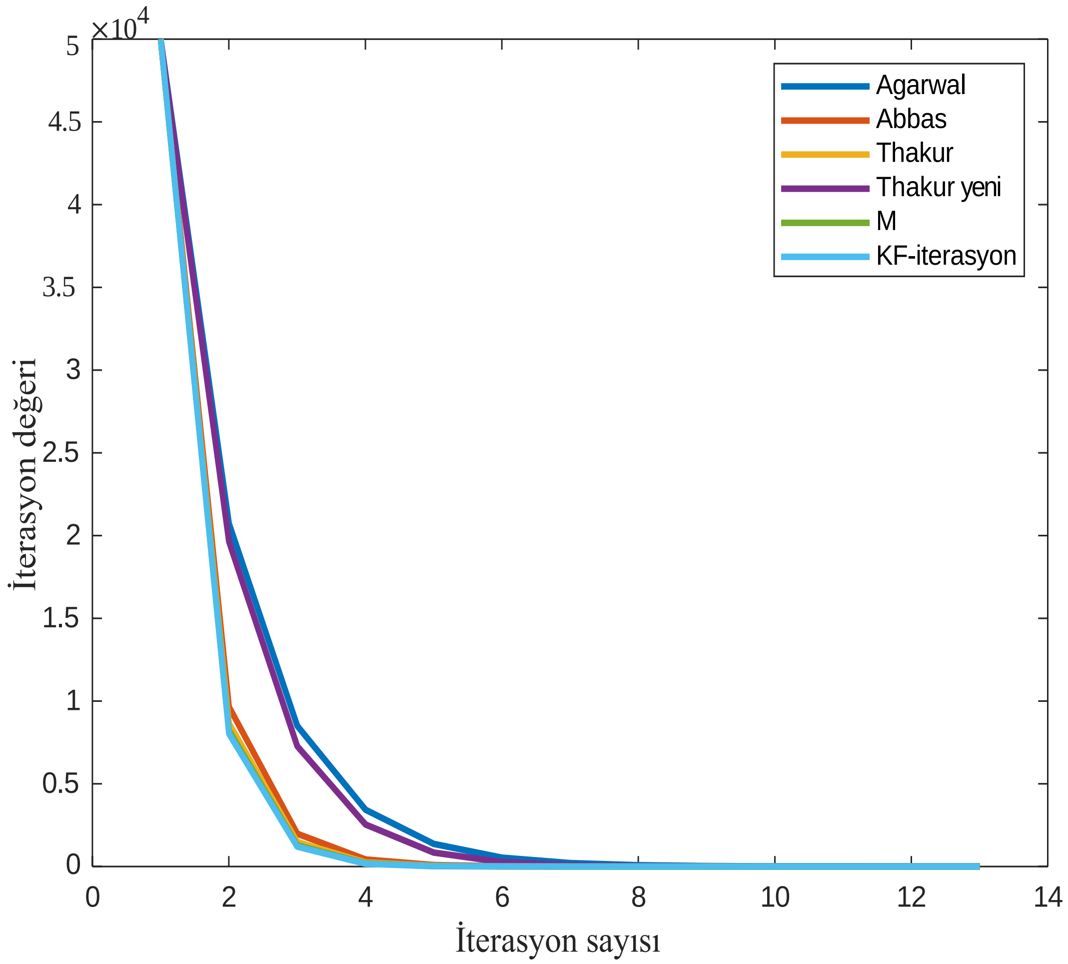
(b) $y \in \left[\frac{6}{5}, \infty\right)$ durumu ise 1) de verilmiştir.

Dolayısıyla T genelleştirilmiş $\left(\frac{5}{12}, \frac{6}{12}\right)$ $-$genişlemeyen tip 1 bir dönüşüm olup $F(T) \neq \emptyset$ dir.

Yukarıda verilen T dönüşümü kullanılarak KF −iterasyon yönteminin diğer iterasyon yöntemlerinden daha hızlı bir şekilde dönüşümün sabit noktasına yakınsadığı gösterilecektir. Bunun için $x_1 = 50000$ ve $\forall n \geq 1$ $için$ $\alpha_n = \beta_n = \gamma_n = \frac{n}{n+10}$ alınarak aşağıdaki tablo ve şekil elde edilmiştir.

Tablo 3.1. Örnek 3.3.1. deki T dönüşümü için farklı iterasyon yöntemlerinin yakınsaklık davranışları.

İterasyon sayısı	Agarwal	Abbas	Thakur	Thakur yeni	M	KF
1	50000	50000	50000	50000	50000	50000
2	20732.8971	9646.8733	8638.7071	19633.4253	8220.2230	8021.1525
3	8498.7280	1977.8457	1475.4736	7265.5898	1288.3740	1196.8442
4	3431.1309	420.5066	248.2010	2538.4195	193.5658	167.0390
5	1361.5599	91.3799	41.0385	839.4244	28.0043	21.9129
6	530.5461	20.1147	6.6629	263.4896	3.9164	2.7135
7	202.9269	4.4589	1.0618	78.7354	0.5312	0
8	76.1902	0.9915	0	22.4611	0	0
9	28.0879	0	0	6.1336	0	0
10	10.1715	0	0	1.6074	0	0
11	3.6200	0	0	0	0	0
12	1.2669	0	0	0	0	0
13	0.2399	0	0	0	0	0



Şekil 3.1. Tablo 3.1' e karşılık gelen grafik.

Yukarıdaki grafikte KF −iterasyon yönteminin T dönüşümünün sabit noktasına Agarwal, Abbas, Thakur, Thakur yeni, M −iterasyon yöntemlerinden daha hızlı yakınsadığı görülmektedir.

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışması kapsamında; önce KF $-$iterasyon yöntemi hiperbolik metrik uzaylara modifiye edilerek daralma dönüşümleri için zayıf w^2 $-$kararlılık ve veri bağımlılığı teoremleri ile modifiye edilmiş iterasyon yöntemi kullanılarak 1. tip genelleştirilmiş (α, β) $-$genişlemeyen dönüşümler için bazı Δ $-$yakınsaklık ve kuvvetli yakınsaklık teoremleri ispatlandı. Son olarak 1. tip genelleştirilmiş (α, β) $-$genişlemeyen dönüşüm için bir nümerik örnek verilip KF $-$iterasyon yöntemi ile literatürde var olan diğer iterasyon yöntemlerinin sabit noktaya yakınsama hızları karşılaştırıldı.

(X, d) bir metrik uzay, $C \subseteq X$ boştan farklı bir alt küme ve $T: C \to C$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in C$ için

$$P(x, y) = \alpha d(Tx, y) + \beta d(Ty, x) + \big(1 - (\alpha + \beta)\big) d(x, y)$$

$$Q(x, y) = \alpha d(Tx, x) + \beta d(Ty, y) + \big(1 - (\alpha + \beta)\big) d(x, y)$$

olmak üzere

$$\lambda d(x, Tx) \leq d(x, y) \Rightarrow d(Tx, Ty) \leq max\{P(x, y), Q(x, y)\} \tag{4.1}$$

olacak şekilde ve $\alpha + \beta < 1$ şartını sağlayan $\alpha, \beta, \lambda \in [0,1)$ sayıları varsa T ye 2. tip genelleştirilmiş (α, β) $-$genişlemeyen dönüşüm denir [37].

Araştırmacılar tarafından; bu tezdeki benzer yaklaşımlar kullanılarak hiperbolik metrik uzaylarda (4.1) eşitsizliği ile verilen 2. tip genelleştirilmiş (α, β) $-$genişlemeyen dönüşümler incelenebilir, ayrıca hiperbolik metrik uzaylarda bu dönüşüm sınıfı için bazı nümerik örnekler araştırılabilir.

KAYNAKLAR

[1] Neumann, J. V. (1928). Zur theorie der gesellschaftsspiele, *Mathematische Annalen*, *100*, 295-320. https://doi.org/10.1007/BF01448847

[2] Picard, É. (1890). Memoire sur la theorie des equations aux derivees partielles et la methode des approximations successives. *Journal de Mathématiques pures et appliquées*. *vol. 6*, pp. 145-210.

[3] Mann, W. R. (1953). Mean value methods in iteration. Proceedings of the *American Mathematical Society*, *4*, 506-510. http://dx.doi.org/10.1090/S0002-9939-1953-0054846-3

[4] Ishikawa, S. (1974). Fixed points by a new iteration method. Proceedings of the *American Mathematical Society*, *44(1)*, 147–150. https://doi.org/10.2307/2039245

[5] Noor, M.A. (2000). New approximation schemes for general variational inequalities, *Journal of Mathematical Analysis and applications*, *251*(1), 217-229. https://doi.org/10.1006/jmaa.2000.7042

[6] Agarwal, R. P., O Regan, D., & Sahu, D. (2007). Iterative construction of fixed points of nearly asymptotically nonexpansive mappings. *Journal of Nonlinear and convex Analysis*, *8*(1), 61-79.

[7] Abbas, M., & Nazir, T. (2014). A New faster iteration process applied to constrained minimization and feasibility problems. *Matematički Vesnik*, *66*, 223-234.

[8] Thakur, B. S., Thakur, D., and Postolache, M. (2016). A new iteration scheme for approximating fixed points of nonexpansive mappings. *Filomat*, *30(10)*, 2711-2720. https://doi.org/10.2298/FIL1610711T

[9] Thakur, B. S., Thakur, D., and Postolache, M. (2016). A new iterative scheme for numerical reckoning fixed points of Suzuki’s generalized nonexpansive mappings. *Applied Mathematics and Computation*, *275*, 147-155. https://doi.org/10.1016/j.amc.2015.11.065

[10] Ullah, K., Arshad, M. (2018). Numerical reckoning fixed points for Suzuki’s generalized nonexpansive mappings via new iteration process. *Filomat*, *32(1)*, 187-196. https://doi.org/10.2298/FIL1801187U

[11] Cardinali, T., and Rubbioni, P. (2010). A generalization of the Caristi fixed point theorem in metric spaces. *Fixed Point Theory*, *11(1)*, 3-10.

[12] Berinde, V. (2003). On the approximation of fixed points of weak contractive mappings. *Carpathian Journal of Mathematics*, *19(1)*, 7–22.

[13] Şoltuz, Ş. M., & Grosan, T. (2008). Data dependence for Ishikawa iteration when dealing with contractive-like operators. *Fixed Point Theory and Applications*, *2008*, 1-7.

[14] Harder, A. M., and Hicks, T. L. (1988). Stability results for fixed point iteration procedures. *Mathematics Japonica*, *33(5)*, 693-706.

[15] Kreyzig, E. (1978). Introductory Functional Analysis with Applications, John Wiley & Sons, New York.

[16] Soykan, Y. (2012). Fonksiyonel Analiz, Genişletilmiş ve Yeniden Düzenlenmiş (2. Baskı). Nobel Yayıncılık. Ankara.

[17] Maddox, I.J. (1970). Elements of Functional Analysis, Cambridge University Press.

[18] Brown, A. L., and Page, A. (1970). Elements of Functional Analysis, The New University Mathematics Series.

[19] Edelstein, M. (1972). The construction of an asymptotic center with a fixed-point property. *Bulletin of the American Mathematical Society*, *78*, 206-208.

[20] Lim, T. C. (1976). Remarks on some fixed point theorems. *Proceedings of the American Mathematical Society*, *60(1)*, 179-182. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1976-0423139-X

[21] Timis, I. (2010). On the weak stability of Picard iteration for some contractive type mappings. *Annals of the University of Craiova-Mathematics and Computer Science Series*, *37(2)*, 106-114. https://doi.org/10.52846/ami.v37i2.324

[22] Pugachev, V. S., and Sinitsyn, I. (1999). Lectures on functional analysis and applications. *World Scientific Publishing Company*.

[23] Curtain, R.F., Pritchard, A.J. (1977). Functional in Modern Applied Mathematics, *Academic Press*, London.

[24] Takahashi, W. (1970). A convexity in metric space and nonexpansive mappings, I. In Kodai mathematical seminar reports (Vol. 22, No. 2, pp. 142-149). *Department of Mathematics, Tokyo Institute of Technology*. https://doi.org/10.2996/kmj/1138846111

[25] Kohlenbach U. (2005). Some logical metatheorems with applications in functional analysis. *Transactions of the American Mathematical Society*, *357(1)*, 89–128.

[26] Khan, M. A. A. (2013). Convergence analysis of a multi-step iteration for a finite family of asymptotically quasi-nonexpansive mappings. *Journal of Inequalities and Applications, 2013,* 1-10.

[27] Shimizu,T. and Takahashi, W. (1996). Fixed points of multivalued mappings in certain convex metric spaces, *Topol. Methods Nonlinear Anal*., *8 (1),* 197–203.

[28] Berinde, V.(2007). Iterative Approximation of Fixed Points, *Springer*, Berlin.

[29] Khan, A. R., Fukhar-Ud-Din, H., and Ahmad Khan, M. A. (2012). An implicit algorithm for two finite families of nonexpansive maps in hyperbolic spaces. *Fixed Point Theory and Applications*, *2012(1),* 1-12. https://doi.org/10.1186/1687-1812-2012-54.

[30] Banach, S. (1922). Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales. *Fundamenta mathematicae*, *3(1)*, 133-181.

[31] Senter, H. F., Dotson, W. (1974). Approximating fixed points of nonexpansive mappings. *Proceedings of the American Mathematical Society*, *44(2)*, 375-380.

[32] Zhang, S. S. (1975). About fixed point theory for mean nonexpansive mapping in Banach spaces. *Journal of Sichuan University, 2*, 67-68.

[33] Suzuki, T. (2008). Fixed point theorems and convergence theorems for some generalized nonexpansive mappings. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, *340(2)*, 1088-1095. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2007.09.023

[34] García-Falset, J., Llorens-Fuster, E., and Suzuki, T. (2011). Fixed point theory for a class of generalized nonexpansive mappings. *Journal of Mathematical Analysis and Applications, 375(1)*, 185-195. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2010.08.069

[35] Aoyama, K., Kohsaka, F. (2011). Fixed point theorem for $\alpha-$nonexpansive mappings in Banach spaces. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, *74(13)*, 4387-4391. https://doi.org/10.1016/j.na.2011.03.057

[36] Shukla, R., Pant, R., and De la Sen, M. (2016). Generalized $\alpha-$nonexpansive mappings in Banach spaces. *Fixed Point Theory and Applications*, *2017*, 1-16. https://doi.org/10.1186/s13663-017-0597-9

[37] Akutsah, F., Narain, O. K. (2021). On generalized $(\alpha,\beta)-$ nonexpansive mappings in Banach spaces with applications, *Nonlinear Functional Analysis and Applications*, *26(4)*, 663-684. https://doi.org/10.22771/nfaa.2021.26.04.02

[38] Ullah, K., Ahmad, J., and Khan, F. M. (2022). Numerical reckoning fixed points via new faster iteration process. *Applied General Topology*, *23(1)*, 213-223. https://doi.org/10.4995/agt.2022.11902

[39] Temir, S., Korkut, Ö. (2022). Approximating fixed points of generalized $\alpha-$nonexpansive mappings by the new iteration process. *Journal of Mathematical Sciences and Modelling*, *5(1)*, 35-39. https://dx.doi.org/10.33187/jmsm.993823

ÖZGEÇMİŞ

Ad-Soyad :Emre ÖZTÜRK

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans :**2013, Bülent Ecevit Üniversitesi, Matematik Bölümü
- **Yüksek lisans :**Devam ediyor, Sakarya Üniversitesi, Matematik, Fonksiyonlar Teorisi ve Fonksiyonel Analiz

TEZDEN TÜRETİLEN ESERLER:

- Şahin, A., Öztürk, E., Aggarwal, G. (2023). Some fixed-point results for the $KF-$iteration process in hyperbolic metric spaces. *Symmetry*, 15(7), 1360. https://doi.org/10.3390/sym15071360
- Şahin, A., Öztürk, E., Aggarwal, G. (2023, 11-14, July). Some fixed point results for the $KF-$iteration process in Kohlenbach hyperbolic spaces. 14th International Conference on Fixed Point Theory and its Applications (ICFPTA - 2023). Braşov, Romania.