PEANO UZAYLARI VE HAHN-MAZURKIEWICZ TEOREMİ ÜZERİNE

Zekeriya GÜNEY[1], Murad ÖZKOÇ[2]
[1]*Muğla Üniversitesi Eğitim Fakültesi Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Bölümü*
48000 Kötekli-MUĞLA
[2]*Muğla Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü*
48000 Kötekli-MUĞLA
zguney@mu.edu.tr[1], murad.ozkoc@mu.edu.tr[2]

ÖZET

Camille Jordan (1838–1922), 1887'de sürekli düzlem eğrisi tanımını aşağıdaki gibi vermiştir: "Eğer f, $I=[0,1]$ *kapalı birim aralığından* $\mathbb{R}^2$ *Euclid düzlemine sürekli bir fonksiyon ise bunun* $f[I]$ *görüntüsüne bir sürekli eğri denir". 1890'da Giuseppe Peano (1858–1932), daha sonra David Hilbert (1862–1943) ve başkaları, Jordan'ın tanımına uyan fakat alışılmışın aksine bir düzlemsel bölge biçiminde eğri örnekleri verince, konu topolojicilerin ilgisini çekmiş ve eğri kavramı, Hausdorff uzayları, kompaktlık, ikinci sayılabilirlik, bağlantılılık, yerel bağlantılılık gibi topolojik kavramlarla ilişkilendirilerek genişletilmiştir. Çalışmamızda Peano uzayları adı verilen bu genişletilmiş eğri kavramı, topolojik ayrıntıları ve örnekleriyle ele alınmıştır.*

Anahtar Kelimeler: *Peano uzayı, kompakt – Hausdorff – ayrılabilir – ikinci sayılabilir – bağlantılı – yerel bağlantılı topolojik uzaylar.*

ON THE PEANO SPACES AND HAHN-MAZURKIEWICZ THEOREM

ABSTRACT

For the continuous plane curves, in 1887, Camille Jordan (1838–1922), gave following definition: "if f is a continuous function of the closed unit interval $I=[0,1]$ *into the Euclidean plane* $\mathbb{R}^2$*, then its image f[I] is called a continuous curve." In 1890 Giuseppe Peano (1858–1932) then David Hilbert (1862–1943) and the others, when gave examples of curve which is appropriate Jordan's definition but as opposite usual, than the topic aroused interest of topologists and the concept of curve has been expanded with topological concepts as Hausdorff spaces, compactness, the second countable, connected, locally connected. In our*

study, this expanded the concept of curve has been taken up with topological details and examples.

Keywords: *Peano space, compact – Hausdorff – separable – second countable – connected – local connected topological spaces.*

1. ÖN BİLGİLER

1.1. Eğri Kavramının Gelişimi

Geometri, Andrey Petrovich Kiselyov (1852–1940) tarafından "*Geometrik şekillerin özelliklerini inceleyen bilim*" olarak tanımlanmıştır; Felix Klein (1849–1925)'ın 1872'de verdiği tanım ise "Geometri eş geometrik şekillerde ortak olan özellikleri inceler" şeklindedir[1]. Bu tanımlarda geçen *geometrik şekiller* nokta kümeleridir ve bunlar arasında *eğri* diye nitelendirilenleri diğerlerinden ayırt etme probleminin geometri bilim tarihinde önemli bir yeri vardır.

Bernard Bolzano (1781–1848) geometride, kavramsal tanım ve aksiyomların net olarak verilmesinin önemini vurgulamış ve *eğri, yüzey, solid* kavramlarının tam tanımlarını aramıştır. Bolzano, matematiğin işe yararlılığının daha çok bir zihin antrenmanı olmasından geldiğini ve uygulamadan çok teorik yönünün önemli olduğunu vurgulamış ve geometrinin temel kavramlarının fizik dünyadan değil akıl ve mantıktan hareketle ele alınması gerektiğini savunmuştur[2].

Georg Cantor (1845–1918), bir kapalı karenin tüm noktalarının, bir kenarının noktalarıyla 1–1 eşlenebileceğini kanıtlamış ve böylece farklı boyuttan nokta kümelerinin denk olamayacağına dair, o zamana kadar yaygın olan inancı kırmıştır[2,3]. Bunun üzerine Richard Dedekind (1831–1916), farklı boyuttan nokta kümeleri arasındaki 1–1 eşlemelerin sürekli olamayacağını ileri sürmüş ve daha sonra Cantor'un "boyut değişmezliği" adı altında formüle ettiği bu prensip kanıtlanmaya çalışılmıştır. Bu çalışmalarla *Cantor Paradoksu*'nun ortadan kaldırılacağına inanılırken, 1890'da Giuseppe Peano (1858–1932), bir kare bölgenin tüm noktalarından oluşan bir *space filling* eğri oluşturarak, matematikçilerin bir eğri hakkındaki sezgisel düşüncelerini alt üst etmiştir[2,4,5,7]. Sonraları çeşitli *space filling* eğriler oluşturulmuştur. Bunlardan bir üçgen yüzeyinin tüm noktalarını içeren bir örnek tüm analizi ile birlikte [4]'te verilmiştir.

Bir kare yüzeyini kaplayan bir örnek [5]'te bulunmaktadır. David Hilbert (1862–1943) tarafından verilen ve bir karenin tüm noktalarından oluşan başka bir Peano eğrisi, limiti olduğu eğri dizisinin ilk üç terimi ile [6]'da çizilerek açıklanmıştır. Bu terimlerin analitik kurallarını 2. bölümde hesaplamış bulunuyoruz. William Osgood (1864–1943) pozitif dış ölçümü olan bir basit kapalı eğri, Henri Lebesgue (1875–1941) ölçülebilir bir alanı olan ilginç eğri örnekleri vermişlerdir. Üstelik Peano eğrisinin aksine Lebesgue eğrisinin katlı noktaları da yoktur. Jordan'ın "bir kapalı eğri düzlemi, her ikisinin de sınırı olduğu iki bölgeye ayırır" önermesine rağmen Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881–1966), düzlemi üç bölgeye ayıran ve her birinin sınırı olduğu bir kapalı eğri örneği üretmiştir. William Henry ve Grace Chisholm Young'ın *Theory of Sets of Points (1906)* adlı kitaplarında ilginç eğrilerin bir kataloğu bulunmaktadır. Adolf Hurwitz (1859–1919), ilk matematik kongresinde, "Nedir basit kapalı eğri? Nedir bir eğri? Genelde bir kapalı eğri ve sadece Cauchy teoreminin ifadesindeki kabul edilebilir bazı eğriler veya tamamı mı?" diye sormuştur. Felix Hausdorff (1868–1942), topolojik uzaylar teorisi ve nokta küme teorisinin sonuçları birleştirilerek genel bir eğri kavramının oluşturulmasını önermiştir. Eğri kavramının pür matematiksel şekillenişi topolojistler tarafından gerçekleştirilmiştir. Bunlar arasında James Waddell Alexander II (1888–1971), Solomon Lefschetz (1884–1972), Zygmunt Janiszewski (1888–1920), Waclaw Sierpinski (1882–1969) ve Stefan Mazurkiewicz (1888–1945) sayılabilir. Son üç topolojist, öğrencileri Bronislaw Knaster (1893–1990) ve Casimir Kuratowski (1896–1980) ile birlikte boyut–eğri sorularıyla ilgili topolojik problemler üzerinde önemli ilerlemeler kaydetmişlerdir. Pavel Urysohn (1898–1924), düzlemsel eğrinin bir gerçek topolojik tanımını, "düzlemde hiçbir yerde yoğun olmayan bir sürekli" olarak vermişti. Hans Hahn (1879–1934)'ın formüle ettiği ve önemini vurguladığı "eğrileri tanımlama problemi", eğri olmanın en önemli özelliğinin "1–boyutlu olmak" olduğunu ileri süren Karl Menger (1902–1985) gibi birçok topolojist tarafından ele alınmıştır[2].

Nipissing Üniversitesi matematikçilerinden Murat Tuncalı, Hahn-Mazurkiewicz teoreminin genelleştirilişleri üzerine bir doktora tezi hazırladı ve bu tezden hareketle yazdığı bazı makaleler de "Proceed of the American Mathematical Society" da yayınlandı (1991). Murat Tuncalı, [9]'de H-M teoremini, "Hahn-Mazurkiewicz Teoremi, [0,1] aralığının bir

Hausdorff uzayına sürekli görüntülerini, lokal bağlantılı metrik continua'ların sınıfı olarak karakterize eder" şeklinde tanıtmıştır. Alexandrov, "Cantor kümesinin Hausdorff sürekli görüntülerini, kompakt metrik uzaylar sınıfı" olarak karakterize etmiştir. Nikiel (1988) "kompakt sıralı uzayların lokal bağlantılı sürekli görüntüleri" Bula ve Turzanski (1986) ise "kompakt sıralı uzayların sürekli görüntüleri" ile ilgili bazı sonuçlar elde etmişlerdir. Bu çalışmalar sıralı sürekli eğrilerin ve kompakt sıralı uzayların sürekli görüntüleri olan uzaylar sınıfı ile ilgili önemli gelişmelerdir[9]. Tuncalı'nın çalışmaları bu konularla ilgili bir genel bakış içermektedir.

Sonuç olarak genel bir topolojik eğri, belli özellikleri olan bir topolojik uzaydır ve Peano'nun bu aşamaya gelinmesindeki hatırı sayılır rolü nedeniyle, bu anlamdaki eğrilere *Peano Uzayları* denilmiştir[7]. Aşağıda bu topolojik gelişmelerin bir bölümü, içerdiği birçok temel topolojik kavramla birlikte *matematiğin biçimsel sembolik dili* ile formüle edilmiştir.

1.2. Kullanılan Terimler, Semboller, Kısaltmalar

(X,τ) topolojik uzayı; kompakt:kom., sayılabilir kompakt:say. kom., yerel kompakt:yer. komp., Hausdorff (T_2) uzayı: $H.$, ikinci sayılabilir:2. say., bağlantılı:bağ., bağlantısız:bağ.sız, yerel bağlantılı:yer. bağ., ayrılabilir:ayr., total bağlantısız uzay:tot. bağ.sız, regüler uzay:reg., tam regüler uzay:tam reg., Banach uzayı: B-uz., bileşenler ailesi: $bil\,X$, kapalılar ailesi: $\mathcal{K}_\tau$, açık örtü: $\mathcal{A}$, baz: $\mathcal{B}$, metrik topolojik uzay: (X,τ_d) m. top. uz., ayrılabilir metrik uzay:ayr. m. uz., tam metrik uzay:tam m. uz., d metrikli metrik uzay: (X,d) m. uz., (X,τ_d) metrik uzayının açıkları-kapalıları: τ_d-$\mathcal{K}_d$, sınırlı sürekli gerçel fonksiyonlar uzayı: $C(X,\mathbb{R})$ bir A kümesinin türev kümesi: $D(A)$, bir A kümesinin çapı: $d(A)$, bir A kümesinin kardinalitesi: $|A|$, sınırlılık: $d(A)<\infty$, sonluluk: $|A|<\mathcal{N}_0$, sayılabilirlik: $|A|\leq\mathcal{N}_0$, sayılabilir sonsuzluk: $|A|=\mathcal{N}_0$, sonsuzluk: $|A|\geq\mathcal{N}_0$, sayılamaz sonsuzluk: $|A|>\mathcal{N}_0$, Cauchy dizisi:C-diz., noktasal yakınsaklık:nok. yak., düzgün yakınsaklık:düz. yak., normda yakınsaklık:nor. yak., Y alt uzayına relatif topoloji: τ_Y, alışılmış topoloji:

$\mathcal{U}$, $\mathbb{R}^n$'nin alışılmış topolojisi: $\mathcal{U}^n$, homeomorfizm:home., birim kapalı aralık: $I = [0,1]$, Jordan eğrisi:J-eğ., sürekli eğri:sür. eğ., space-filling eğri:s-f eğ., $M(A)$:A kümesinin maksimali.

1.3. Yararlanılan Kavramların Formel Tanımları

1.3.1. Kompaktlık : (X,τ) kom. :$\Leftrightarrow$
$[(\mathcal{A} \subset \tau)(\cup\mathcal{A} = X) \Rightarrow (\exists\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A})(|\mathcal{A}_1| < \mathcal{N}_0)(\cup\mathcal{A}_1 = X)]$

1.3.2. Sayılabilir kompaktlık : (X,τ) say. kom. :$\Leftrightarrow$
$[(\mathcal{A} \subset \tau)(|\mathcal{A}| \leq \mathcal{N}_0)(\cup\mathcal{A} = X) \Rightarrow (\exists\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A})(|\mathcal{A}_1| < \mathcal{N}_0)(\cup\mathcal{A}_1 = X)]$

1.3.3. İkinci Sayılabilirlik : (X,τ) 2.say.: $\Leftrightarrow$
$(\exists\mathcal{B} \subset \tau)(|\mathcal{B}| \leq \mathcal{N}_0)(\mathcal{B},\ \tau$ için baz$)$

1.3.4. Yerel Kompaktlık : (X,τ) yer. komp. :$\Leftrightarrow$
$(\forall x \in X)(\exists A \in \tau)(x \in A)(cl(A)$ komp.$)$

1.3.5. Bağlantılılık : (X,τ) bağ. :$\Leftrightarrow$
$[(A, B \in \tau \setminus \{\varnothing\})(A \cap B = \varnothing) \Rightarrow X \neq A \cup B]$

1.3.6. Bağlantısızlık : (X,τ) bağ.sız :$\Leftrightarrow$
$(\exists A, B \in \tau \setminus \{\varnothing\})(A \cap B = \varnothing)(X = A \cup B)$

1.3.7. Yerel Bağlantılılık : (X,τ) yer. bağ. :$\Leftrightarrow$
$[x \in A \in \tau \Rightarrow (\exists B \in \tau)(x \in B \subset A)((B, \tau_B)$ bağ.$)]$

1.3.8. Total Bağlantılılık : (X,τ) tot. bağ.sız :$\Leftrightarrow [(x, y \in X)$
$(x \neq y) \Rightarrow (\exists A \in \mathcal{U}(x))(\exists B \in \mathcal{U}(y))(A \cap B = \varnothing)(X = A \cup B)]$

1.3.9. Bir Topolojik Uzayın Bileşenleri :
(Y,τ_Y) alt uzayı (X,τ) topolojik uzayının bir bileşeni: $\Leftrightarrow$
$Y \in M\{Z \mid [(Z,\tau_Z)$ bağ.$](Z \subset X)\} := bil\, X$

1.3.10. Ayrılabilirlik : (X,τ) ayr. :$\Leftrightarrow$
$(\exists A \subset X)(|A| \leq \mathcal{N}_0)(cl(A) = X)$

1.3.11. Tam Regülerlik : (X,τ) tam. reg.: $\Leftrightarrow [(X,\tau)\ T_1]$
$[(a \notin A \in \mathcal{K}_\tau) \Rightarrow (\exists f \in C(X,\mathbb{R}))(f[A] = \{1\})(f(a) = 0)]$...[3]

1.4. Yararlanılan Teoremler

1.4.1. $((X,d)$ tam m. uz.$)(d(F_n) \to 0)(\forall n \in \mathbb{N})$
$(X \supset F_n \supset F_{n+1})(F_n \in \mathcal{K}_d)(F_n \neq \varnothing) \Rightarrow |\cap_{n=1}^{\infty} F_n| = 1$

1.4.2. $[n \in \mathbb{N} \Rightarrow f_n : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ sür.$][f_n \to f$ düz.$] \Rightarrow$
$f : (X, d_1) \to (Y, d_2),\ f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ sür.

1.4.3. $[f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R}) = \{f \mid f : (X, d) \to \mathbb{R}$, sınırlı, sür.$\}]$
$(\| f \| = \sup | f(x) |) \Rightarrow f_n \to f$ nor. yak. $:\Leftrightarrow f_n \to f$ düz. yak.

1.4.4. $[(X, \tau)$ kom.$](\varnothing \neq Y \in \mathcal{K}_\tau) \Rightarrow (Y, \tau_Y)$ kom.

1.4.5. $[(X, \tau)$ kom.$][f : (X, \tau) \to (Y, \mu)$ sür.$]$
$\Rightarrow (f[X], \mu_{f[X]})$ kom.

1.4.6. $(A \subset \mathbb{R})(A \in \mathcal{K}_{\mathcal{U}})(d(A) < \infty) \Rightarrow A$ kom.

1.4.7. $(A \subset \mathbb{R})(A$ kom.$) \Rightarrow (A \in \mathcal{K}_{\mathcal{U}})(d(A) < \infty)$

1.4.8. $((X, d)$ m. uz.$)(A \subset X)(A$ kom.$) \Rightarrow (A \in \mathcal{K}_d)(d(A) < \infty)$

1.4.9. $(A \subset \mathbb{R}^n)(A \in \mathcal{K}_{\mathcal{U}}^n)(d(A) < \infty) \Rightarrow A$ kom.

1.4.10. $[(X, \tau)\ H.](x \in X)(Y \subset X)(x \notin Y)[(Y, \tau_Y)$ kom.$] \Rightarrow$
$(\exists A, B \in \tau)(x \in A)(Y \subset B)(A \cap B = \varnothing)$

1.4.11. $[(X, \tau)\ H.](Y \subset X)[(Y, \tau_Y)$ kom.$] \Rightarrow Y \in \mathcal{K}_\tau$

1.4.12. $[(X, \tau)$ kom.$][(Y, \mu)\ H.][f : (X, \tau) \to (Y, \mu)$ bij. sür.$]$
$\Rightarrow f$, home.

1.4.13. $[(X, \tau)$ kom.$][(Y, \mu)\ H.][f : (X, \tau) \to (Y, \mu)$ sür.$]$
$\Rightarrow f$, kap.

1.4.14. (X, τ) 2. say. $\Rightarrow [(X, \tau)$ say. kom.$][(X, \tau)$ kom.$]$

1.4.15. (X, τ) kom. $\Rightarrow (X, \tau)$ yer. kom.

1.4.16. $[(X, \tau)$ bağ.$][f : (X, \tau) \to (Y, \mu)$ sür.$]$
$\Rightarrow (f[X], \mu_{f[X]})$ bağ.

1.4.17. (X, τ) B-uz. $\Rightarrow (X, \tau)$ yer. bağ.

1.4.18. $[\exists (X, \tau)$ yer. bağ.$][(X, \tau)$ bağ. değil$][\exists (Y, \mu)$ bağ.$]$
$[(Y, \mu)$ yer. bağ. değil$]$

1.4.19. $[(X, \tau)$ top. uz.$](Z \in bil\, X) \Rightarrow Z \in \mathcal{K}_\tau$

1.4.20. $[(X, \tau)$ yer. bağ.$](Y \in \tau)(Z \in bil\, Y) \Rightarrow Z \in \tau$

1.4.21. $[(X, \tau)$ yer. bağ.$](Z \in bil\, X) \Rightarrow Z \in \tau$

1.4.22. $[(X, \tau)$ top. uz.$][(Y \in \tau)(Z \in bil\, Y) \Rightarrow Z \in \tau]$
$\Rightarrow (X, \tau)$ yer. bağ.

1.4.23. $[(X, \tau)$ 2. say.$](\varnothing \neq A \in \tau)(\mathcal{A} \subset \tau)(A = \cup \mathcal{A})$
$\Rightarrow (\exists \mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A})(| \mathcal{A}_1 | \leq \mathcal{N}_0)(A = \cup \mathcal{A}_1)$

1.4.24. $[(X, \tau)$ 2. say.$](\mathcal{B} \subset \tau)(\mathcal{B}, \tau$ için baz$)$
$\Rightarrow (\exists \mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B})(\mathcal{B}_1, \tau$ için baz$)(| \mathcal{B}_1 | \leq \mathcal{N}_0)$

1.4.25. (X, d) ayr. m. uz. $\Rightarrow (X, \tau)$ 2. say. [3,7]

2. DÜZLEMSEL SÜREKLİ EĞRİ

Tanım 2.1. (Jordan 1887) $I=[0,1]$ kapalı birim aralığından $\mathbb{R}^2$ Euclid düzlemine sürekli bir f fonksiyonunu altındaki $f[I]$ görüntüsüne $\mathbb{R}^2$'de bir sürekli eğri (sür. eğ.) denir[6].

$$f[I],\ \mathbb{R}^2\text{'de sür. eğ.:} \Leftrightarrow f: I \to \mathbb{R}^2 \text{ sür.}$$

Tanım 2.2. (*Space-filling eğri*): Bir düzlemsel bölgenin her noktasından geçen bir sürekli eğriye $\mathbb{R}^2$'de bir space-filling eğri (s-f eğ.) denir.

$$f[I],\ \mathbb{R}^2\text{'de s-f eğ.:} \Leftrightarrow (\exists a \in f[I])(\exists \varepsilon > 0)(B(a,\varepsilon) \subset f[I])$$

Örnek 2.1. Hilbert Space-Filling Eğrisi: Genel terimi

$$f_n : I = [0,1] \to \mathbb{R}^2,\ f_n(t) = (x_n(t), y_n(t))$$

ve ilk üç teriminin kuralı

$$f_1 : I \to \mathbb{R}^2,\ f_1(t) = \begin{cases} (t,1/4) & , \ t\in[0,1/8] \\ (1/4,t) & , \ t\in[1/8,1/2] \\ (t,3/4) & , \ t\in[1/2,3/8] \\ (3/4,t) & , \ t\in[3/8,5/8] \\ (t,1/4) & , \ t\in[5/8,1] \end{cases}$$

$$f_2 : I \to \mathbb{R}^2,\ f_2(t) = \begin{cases} (t,1/8) & , \quad t\in[0,3/32] \\ (1/8,t) & , \quad t\in[3/32,5/32] \\ (t,3/8) & , \quad t\in[5/32,7/32] \\ (3/8,t) & , \quad t\in[7/32,9/32] \\ (t,5/8) & , \quad t\in[9/32,11/32] \\ (1/8,t) & , \quad t\in[11/32,13/32] \\ (t,7/8) & , \quad t\in[13/32,19/32] \\ (7/8,t) & , \quad t\in[19/32,21/32] \\ (t,5/8) & , \quad t\in[21/32,23/32] \\ (5/8,t) & , \quad t\in[23/32,25/32] \\ (t,3/8) & , \quad t\in[25/32,27/32] \\ (7/8,t) & , \quad t\in[27/32,29/32] \\ (t,1/4) & , \quad t\in[29/32,1] \end{cases}$$

$$f_3 : I \to \mathbb{R}^2,\ f_3(t) = \begin{cases} (t,1/16) & , \quad t\in[0,1/128] \\ (7/16,t) & , \quad t\in[1/128,3/128] \\ (t,3/16) & , \quad t\in[3/128,5/128] \\ (5/16,t) & , \quad t\in[5/128,7/128] \\ (t,1/16) & , \quad t\in[7/128,11/128] \\ (1/16,t) & , \quad t\in[11/128,13/128] \\ (t,3/16) & , \quad t\in[13/128,15/128] \\ (3/16,t) & , \quad t\in[15/128,17/128] \\ (t,5/16) & , \quad t\in[17/128,19/128] \\ (1/16,t) & , \quad t\in[19/128,21/128] \\ (t,7/16) & , \quad t\in[21/128,25/128] \\ (5/16,t) & , \quad t\in[25/128,27/128] \\ (t,5/16) & , \quad t\in[27/128,29/128] \\ (7/16,t) & , \quad t\in[29/128,35/128] \\ (t,11/16) & , \quad t\in[35/128,37/128] \\ (5/16,t) & , \quad t\in[37/128,39/128] \\ (t,9/16) & , \quad t\in[39/128,43/128] \\ (1/16,t) & , \quad t\in[43/128,45/128] \end{cases}$$

$$f_3 : I \to \mathbb{R}^2,\ f_3(t) = \begin{cases} (t, 11/16) & , \quad t \in [45/128, 47/128] \\ (3/16, t) & , \quad t \in [47/128, 49/128] \\ (t, 13/16) & , \quad t \in [49/128, 51/128] \\ (1/16, t) & , \quad t \in [51/128, 53/128] \\ (t, 15/16) & , \quad t \in [53/128, 57/128] \\ (5/16, t) & , \quad t \in [57/128, 59/128] \\ (t, 13/16) & , \quad t \in [59/128, 61/128] \\ (7/16, t) & , \quad t \in [61/128, 63/128] \\ (t, 15/16) & , \quad t \in [63/128, 65/128] \\ (9/16, t) & , \quad t \in [65/128, 67/128] \\ (t, 13/16) & , \quad t \in [67/128, 69/128] \\ (11/16, t) & , \quad t \in [69/128, 71/128] \\ (t, 15/16) & , \quad t \in [71/128, 75/128] \\ (15/16, t) & , \quad t \in [75/128, 77/128] \\ (t, 13/16) & , \quad t \in [77/128, 79/128] \\ (13/16, t) & , \quad t \in [79/128, 81/128] \\ (t, 11/16) & , \quad t \in [81/128, 83/128] \\ (15/16, t) & , \quad t \in [83/128, 85/128] \\ (t, 9/16) & , \quad t \in [85/128, 89/128] \\ (11/16, t) & , \quad t \in [89/128, 91/128] \\ (t, 11/16) & , \quad t \in [91/128, 93/128] \\ (9/16, t) & , \quad t \in [93/128, 99/128] \\ (t, 5/16) & , \quad t \in [99/128, 101/128] \\ (11/16, t) & , \quad t \in [101/128, 103/128] \\ (t, 7/16) & , \quad t \in [103/128, 107/128] \\ (15/16, t) & , \quad t \in [107/128, 109/128] \\ (t, 5/16) & , \quad t \in [109/128, 111/128] \\ (13/16, t) & , \quad t \in [111/128, 113/128] \\ (t, 3/16) & , \quad t \in [113/128, 115/128] \\ (15/16, t) & , \quad t \in [115/128, 117/128] \end{cases}$$

$$f_3 : I \to \mathbb{R}^2,\ f_3(t) = \begin{cases} (t, 1/16) & , \quad t \in [117/128, 121/128] \\ (11/16, t) & , \quad t \in [121/128, 123/128] \\ (t, 3/16) & , \quad t \in [123/128, 125/128] \\ (7/16, t) & , \quad t \in [125/128,\ 127/128] \\ (t, 1/16) & , \quad t \in [127/128, 1] \end{cases}$$

olan, bir $< f_n >$ sürekli fonksiyonlar dizisini ele alalım. $\forall n \in \{2,3,4,\ldots\}$ için f_n fonksiyonları belirli bir kuralla bir önceki f_{n-1} fonksiyonundan elde edildiği için $< f_n >$ dizisi bir

$$f : I = [0,1] \to \mathbb{R}^2,\ f(t) = (x(t), y(t))$$

fonksiyonuna düzgün noktasal olarak yakınsadığı gösterilebilir. Teorem 1.4.2 gereğince f süreklidir. O halde tanım 2.1 gereğince $f[I]$ bir sürekli eğridir. Fakat

$$f[I] = \{ f(t) \mid t \in I\} = \{(x(t), y(t)) \mid 0 \le t \le 1\}$$

görüntü kümesi, ilk üç terimi,

$$\begin{aligned}
f_1[I] = {} & \{(x,y) \mid 1/4 \le x \le 3/4,\ y = 1/4\} \cup \\
& \{(x,y) \mid x = 1/4, 1/4 \le y \le 3/4\} \cup \\
& \{(x,y) \mid 1/4 \le x \le 3/4,\ y = 3/4\} \cup \\
& \{(x,y) \mid x = 3/4,\ 1/4 \le y \le 3/4\} \cup \\
f_2[I] = {} & \{(x,y) \mid 1/8 \le x \le 7/8,\ y = 1/8\} \cup \\
& \{(x,y) \mid x = 1/8,\ 1/8 \le y \le 3/8\} \cup \\
& \{(x,y) \mid 1/8 \le x \le 3/8,\ y = 3/8\} \cup \\
& \{(x,y) \mid x = 3/8,\ 3/8 \le y \le 5/8\} \cup \\
& \{(x,y) \mid 1/8 \le x \le 3/8,\ y = 5/8\} \cup \\
& \{(x,y) \mid x = 1/8,\ 5/8 \le y \le 7/8\} \cup \\
& \{(x,y) \mid 1/8 \le x \le 7/8,\ y = 7/8\} \cup \\
& \{(x,y) \mid x = 7/8,\ 5/8 \le y \le 7/8\} \cup \\
& \{(x,y) \mid 5/8 \le x \le 7/8,\ y = 5/8\} \cup \\
& \{(x,y) \mid x = 5/8,\ 3/8 \le y \le 5/8\} \cup \\
& \{(x,y) \mid 5/8 \le x \le 7/8,\ y = 3/8\} \cup \\
& \{(x,y) \mid x = 7/8, 1/8 \le y \le 3/8\} \cup
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f_3[I] = & \{(x,y) \mid 7/16 \le x \le 9/16,\ y = 1/16\} \cup \\
& \{(x,y) \mid x = 7/16,\ 1/16 \le y \le 3/16\} \cup \\
& \{(x,y) \mid 5/16 \le x \le 7/16,\ y = 3/16\} \cup \\
& \{(x,y) \mid x = 3/16,\ 1/16 \le y \le 3/16\} \cup \\
& \{(x,y) \mid 1/16 \le x \le 5/16,\ y = 1/16\} \cup \\
& \{(x,y) \mid x = 1/16,\ 1/16 \le y \le 3/16\} \cup \\
& \{(x,y) \mid 1/16 \le x \le 3/16,\ y = 3/16\} \cup \\
& \{(x,y) \mid x = 3/16,\ 3/16 \le y \le 5/16\} \cup \\
& \{(x,y) \mid 1/16 \le x \le 3/16,\ y = 5/16\} \cup \\
& \{(x,y) \mid x = 1/16,\ 5/16 \le y \le 7/16\} \cup \\
& \{(x,y) \mid 1/16 \le x \le 5/16,\ y = 7/16\} \cup \\
& \{(x,y) \mid x = 5/16,\ 5/16 \le y \le 7/16\} \cup \\
& \{(x,y) \mid 5/16 \le x \le 7/16,\ y = 5/16\} \cup \\
& \{(x,y) \mid x = 7/16,\ 5/16 \le y \le 11/16\} \cup \\
& \{(x,y) \mid 5/16 \le x \le 7/16,\ y = 11/16\} \cup \\
& \{(x,y) \mid x = 5/16,\ 9/16 \le y \le 11/16\} \cup \\
& \{(x,y) \mid 1/16 \le x \le 5/16,\ y = 9/16\} \cup \\
& \{(x,y) \mid x = 1/16,\ 9/16 \le y \le 11/16\} \cup \\
& \{(x,y) \mid 1/16 \le x \le 3/16,\ y = 11/16\} \cup \\
& \{(x,y) \mid x = 3/16,\ 11/16 \le y \le 13/16\} \cup \\
& \{(x,y) \mid 1/16 \le x \le 3/16,\ y = 13/16\} \cup \\
& \{(x,y) \mid x = 1/16,\ 13/16 \le y \le 15/16\} \cup \\
& \{(x,y) \mid 1/16 \le x \le 5/16,\ y = 15/16\} \cup \\
& \{(x,y) \mid x = 5/16,\ 13/16 \le y \le 15/16\} \cup \\
& \{(x,y) \mid 5/16 \le x \le 7/16,\ y = 13/16\} \cup \\
& \{(x,y) \mid x = 7/16,\ 13/16 \le y \le 15/16\} \cup \\
& \{(x,y) \mid 7/16 \le x \le 9/16,\ y = 15/16\} \cup \\
& \{(x,y) \mid x = 9/16,\ 13/16 \le y \le 15/16\} \cup \\
& \{(x,y) \mid 9/16 \le x \le 15/16,\ y = 13/16\} \cup \\
& \{(x,y) \mid x = 11/16,\ 13/16 \le y \le 15/16\} \cup \\
& \{(x,y) \mid 11/16 \le x \le 15/16,\ y = 15/16\} \cup \\
& \{(x,y) \mid x = 15/16,\ 13/16 \le y \le 15/16\} \cup \\
& \{(x,y) \mid 13/16 \le x \le 15/16,\ y = 13/16\} \cup \\
& \{(x,y) \mid x = 13/16,\ 11/16 \le y \le 13/16\} \cup \\
& \{(x,y) \mid 13/16 \le x \le 15/16,\ y = 11/16\} \cup
\end{aligned}
$$

$$\{(x,y) \mid x = 15/16,\ 9/16 \le y \le 11/16\} \cup$$
$$\{(x,y) \mid 11/16 \le x \le 15/16,\ y = 9/16\} \cup$$
$$\{(x,y) \mid x = 11/16,\ 9/16 \le y \le 11/16\} \cup$$
$$\{(x,y) \mid 9/16 \le x \le 11/16,\ y = 11/16\} \cup$$
$$\{(x,y) \mid x = 9/16,\ 5/16 \le y \le 11/16\} \cup$$
$$\{(x,y) \mid 9/16 \le x \le 11/16,\ y = 5/16\} \cup$$
$$\{(x,y) \mid x = 11/16,\ 5/16 \le y \le 7/16\} \cup$$
$$\{(x,y) \mid 11/16 \le x \le 15/16,\ y = 7/16\} \cup$$
$$\{(x,y) \mid x = 15/16,\ 5/16 \le y \le 7/16\} \cup$$
$$\{(x,y) \mid 13/16 \le x \le 15/16,\ y = 5/16\} \cup$$
$$\{(x,y) \mid x = 13/16,\ 3/16 \le y \le 5/16\} \cup$$
$$\{(x,y) \mid 13/16 \le x \le 15/16,\ y = 3/16\} \cup$$
$$\{(x,y) \mid x = 15/16,\ 1/16 \le y \le 3/16\} \cup$$
$$\{(x,y) \mid 11/16 \le x \le 15/16,\ y = 1/16\} \cup$$
$$\{(x,y) \mid x = 11/16,\ 1/16 \le y \le 3/16\} \cup$$
$$\{(x,y) \mid 9/16 \le x \le 11/16,\ y = 3/16\} \cup$$
$$\{(x,y) \mid x = 9/16,\ 1/16 \le y \le 3/16\} \cup$$

olan $< f_n[I] >$ görüntü kümeler dizisinin limiti,

$$K = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$$

kapalı birim karesidir. O halde tanım 2.2 gereğince bu Jordan eğrisi bir space filling eğridir. Bu eğri, Hilbert'in space filling eğrisi olarak bilinir[6]. Genişletilmiş Heine-Borel teoremi gereğince her bir terimi kompakt olan $< f_n[I] >$ küme dizisinin yakınsaklığı, $\mathbb{R}^2$ tam metrik uzayının kompakt alt kümelerinden oluşan $H(\mathbb{R}^2)$ kümesinin (d, $\mathbb{R}^2$'nin alışılmış metriği olmak üzere) [7]'de verilen

$$h : H(\mathbb{R}^2) \times H(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{R},$$

$$h(A,B) = \max\{\max_{a\in A}(\min_{b\in B} d(a,b)), \max_{b\in B}(\min_{a\in A} d(a,b))\}$$

Hausdorff Metrik'li $(H(\mathbb{R}^2), h)$ metrik uzayında anlamlıdır.

Peano'dan sonra yukarıdaki gibi birçok örnekleri inşa edilen space-filling eğrilerin keşfedilmeleriyle, eğrilerin bir boyutlu olduğuna dair sezgisel görüşler sarsılırken, eğriler için yeni topolojik tanımlamalar getirilme gereği ortaya çıkmış ve eğrilerin belirli şartları sağlayan bir topolojik uzay olarak ele alınma düşüncesi gelişmiştir[2].

3. PEANO UZAYLARI

Tanım 3.1. (Peano Uzayı $(P\text{-}U)$): (X,τ) bir T_2 topolojik uzayı olmak üzere eğer I 'dan X 'e örten ve sürekli bir fonksiyon varsa (X,τ) topolojik uzayına bir Peano uzayı ya da bir sürekli eğri denir.

$$(X,\tau)\ P\text{-}U :\Leftrightarrow [(X,\tau)\ T_2][\exists f : I \to (X,\tau) \text{ sür., örten}]$$

Örnek 3.1. $X=\{\varnothing\}, \tau=\{\varnothing, X\}$ olmak üzere (X,τ) topolojik uzayı bir Peano uzayıdır. Çünkü bu uzay T_2 'dir ve

$$f : I \to (X,\tau),\ f(x)=\varnothing$$

fonksiyonu sürekli ve örtendir.

Teorem 3.1. Her Peano uzayı kompakt ve bağlantılı bir topolojik uzaydır.

$$(X,\tau)\ P\text{-}U \Rightarrow [(X,\tau) \text{ komp.}][(X,\tau) \text{ bağ.}]$$

İspat: Teorem 1.4.4 ve teorem 1.4.16′nın sonucu.

Teorem 3.2. Her Peano uzayı ikinci sayılabilir bir topolojik uzaydır.

$$(X,\tau)\ P\text{-}U \Rightarrow (X,\tau)\ 2.\text{ say.}$$

İspat : $A=\mathbb{Q}\cap I \Rightarrow (A\subset I)(cl(A)=I)(|A|\leq \mathcal{N}_0)$

$$\overset{1.3.1}{\Rightarrow} I,\ \text{ayr.} \overset{1.4.25}{\Rightarrow} I,\ 2.\text{ say.}$$

$$\left.\begin{array}{r} \overset{1.3.3}{\Rightarrow}(\exists \mathcal{B}\subset \mathcal{U}_I)(|\mathcal{B}|\leq \mathcal{N}_0)[\mathcal{B}, (I,\mathcal{U}_I) \text{ için baz}] \\ \mathcal{B}_1=\{\cup\mathcal{A} \mid (\mathcal{A}\subset\mathcal{B})(|A|\leq\mathcal{N}_0)\} \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{B}_1, (I,\mathcal{U}_I) \text{ için sayılabilir açık baz} \ldots (i)$$

$$\left.\begin{array}{r} (X,\tau)\ P\text{-}U \overset{3.1}{\Rightarrow}[(X,\tau)\ T_2][\exists f : I \to (X,\tau)\text{ sür., örten}] \\ I,\text{ komp.}(1.4.6) \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} \overset{1.4.13}{\Rightarrow} f,\text{ kap.} \\ A\in\mathcal{B}_1 \Rightarrow \setminus A \in \mathcal{K}_{\mathcal{U}_I} \end{array}\right\} \Rightarrow f[\setminus A]\in\mathcal{K}_\tau \\ \mathcal{B}_2 = \{\setminus f[\setminus A] \mid A\in\mathcal{B}_1\} \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow (|\mathcal{B}_2| \le \mathcal{N}_0)(\mathcal{B}_2 \subset \tau)\ldots(ii)$$

$$\left.\begin{array}{r} (x\in X)[(X,\tau)\ T_2]\Rightarrow\{x\}\in\mathcal{K}_\tau \\ f:I\to(X,\tau)\text{ sür.} \end{array}\right\}\Rightarrow f^{-1}[\{x\}]\in\mathcal{K}_{\mathcal{U}_I}$$

$$\left.\begin{array}{r} \overset{1.4.6}{\Rightarrow} f^{-1}[\{x\}]\text{ komp.} \\ x\in B\in\tau \Rightarrow f^{-1}[\{x\}]\subset f^{-1}[B] \\ (i)\Rightarrow(\forall y\in f^{-1}[\{x\}])(\exists C\in\mathcal{B}_1)(y\in C\subset f^{-1}[B]) \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\exists A=\cup\mathcal{A}\in\mathcal{B}_1)(f^{-1}[\{x\}]\subset A\subset f^{-1}[B])$$
$$\Rightarrow \setminus f^{-1}[B]\subset\setminus A\subset\setminus f^{-1}[\{x\}]$$
$$\Rightarrow f^{-1}[\setminus B]\subset\setminus A\subset f^{-1}[\setminus\{x\}]$$
$$\Rightarrow f[f^{-1}[\setminus B]]\subset f[\setminus A]\subset f[f^{-1}[\setminus\{x\}]]$$
$$\Rightarrow \setminus B\subset f[\setminus A]\subset\setminus\{x\}$$
$$\Rightarrow x\in\setminus f[\setminus A]\subset B$$

O halde $\mathcal{B}_2$, (X,τ) için baz ... (iii)

$(ii),(iii)\Rightarrow\mathcal{B}_2$, (X,τ) için sayılabilir baz $\Rightarrow (X,\tau)$ 2.say.

Teorem 3.3. Her Peano uzayı yerel bağlantılıdır.

$$(X,\tau)\ P\text{-}U \Rightarrow (X,\tau)\text{ yer. bağl.}$$

İspat : $(X,\tau)\ P\text{-}U \Rightarrow [(X,\tau)\ T_2][f : I\to(X,\tau)$ sür., örten]

$$\left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} f: I\to(X,\tau)\text{ sür., örten} \\ Y\in\tau \\ A\in bil\ f^{-1}[Y] \end{array}\right\} \overset{1.3.11}{\Rightarrow} A\text{ bağ.} \overset{1.4.16}{\Rightarrow} f[A],\ Y\text{'de bağ.} \\ Z\in bil\,Y \Rightarrow f[A]\subset Z \vee f[A]\cap Z=\varnothing \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} \Rightarrow(\exists\mathcal{A}\subset bil\ f^{-1}[Y])(f^{-1}[Z]=\cup\mathcal{A}) \\ f^{-1}[Y]\in\mathcal{U}_I \overset{1.4.20}{\Rightarrow} bil\ f^{-1}[Y]\subset\mathcal{U}_I \end{array}\right\}\Rightarrow f^{-1}[Z]\in\mathcal{U}_I \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} \Rightarrow\setminus f^{-1}[Z]=f^{-1}[\setminus Z]\in\mathcal{K}_I \\ Z\in\tau \end{array}\right\}\Rightarrow f[f^{-1}[\setminus Z]]=\setminus Z\in\mathcal{K}_I \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f: I\to(X,\tau)\text{ kap.}(1.4.13)$$

O halde $[(Y\in\tau)(Z\in bil\,Y)\Rightarrow Z\in\tau] \overset{1.4.22}{\Rightarrow} (X,\tau)$ yer. bağ.

Teorem 3.4. Bir Peano uzayı, kompakt, bağlantılı, ikinci sayılabilir ve yerel bağlantılı bir T_2 uzayıdır.

$$(X,\tau)\ P\text{-}U \Rightarrow [(X,\tau)\ \text{komp., bağ., 2. say., yer.bağ.,}\ T_2]$$

İspat: Teorem 3.1, 3.2 ve 3.3'ün sonucu.

Teorem 3.5. (Hahn-Mazurkiewicz Teoremi): Bir topolojik uzayın bir Peano uzayı olması için gerek ve yeter şart, kompakt, bağlantılı, ikinci sayılabilir ve yerel bağlantılı bir T_2 uzay olmasıdır.

$$(X,\tau)\ P\text{-}U \Leftrightarrow [(X,\tau)\ \text{komp., bağ., 2. say., yer.bağ.,}\ T_2]$$

İspat: $(\Rightarrow)$: Teorem 3.4.

$(\Leftarrow)$: [8], [9], [6].

4. SONUÇ

Sezgiciler, her şeyde pratikliği tercih ederler ve eğri konusunda da "sezgisel olarak herkes aynı besbelli kavramı anlar, o halde işi uzatmaya gerek yoktur" diye düşünürler. *Biçimciler*, sezgilerin yanıltabileceğine dair birçok örnek ortaya koymuşlardır ve bunların eğri kavramı ile ilgili olan bazılarını çalışmamızda konu ettik. Ayrıca, klasik eğri kavramının, biçimci pür matematikçiler tarafından belki anlaşılması daha zor fakat dakik tanımları yapılmış birçok topolojik kavramla ilişkilendirilerek nasıl pür matematikselleştirildiğini açıkladık.

Çalışmamızda, *obje dil* olarak, herhangi bir ulus dili yerine, *matematiğin evrensel sembolik dili*nin kullanılmasına özen gösterilmiştir. Eğri kavramı, Tuncalı ve diğerlerinin yaptığı gibi [9], başka bazı daha ileri topolojik kavramlarla da ilişkilendirilebilir ve daha da soyutlaştırılabilir.

KAYNAKLAR

[1] Yaglom, I.M. (çev:Vehbi Kemal Güney), "Geometrik Transformasyonlar", Türk Matematik Derneği Yayınları, Sayı:34, İstanbul, 1969.

[2] Crilly, T., "The Emergence of Topological Dimesion Theory", History of Topology, I.M. James, Amsterdam, 1999.

[3] Güney, Z., "Metrik ve Topolojik Formüller", Muğla Üniversitesi Yayınları, Muğla, 2003.

[4] Mangoldt, H.V., Knopp, K., Yüksek Matematiğe Giriş, çev:Berki Yurtsever, İstanbul, 1964.
[5] Godeaux, L., (çev:Ferruh Şemin), Çeşitli Geometriler, Türk Matematik Derneği Yayınları, Sayı:17, İstanbul, 1965.
[6] Simmons, G.F., "Introduction to Topology and Modern Analysis", Tokyo, 1963.
[7] Savacı, F.A., "Kaos ve Fraktal Geometri", Mantık, Matematik ve Felsefe I. Ulusal Sempozyumu Bildirileri, İstanbul Kültür Üniversitesi Yayınları, 2003, s. 301-311.
[8] Wilder, R. L., "The Origin and Growth of Mathematical Concepts", Bull. Amer. Math. Soc., 59, 1953, pp.423-448.
[9] Tuncalı, M., "On Generalizations of the Hahn- Mazurkiewicz Theorem", Canadian Mathematical Society Winter Meeting, Kingston, ON, Canada, 1998.