T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DÖRT BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA ÇATILANDIRILMIŞ GENEL VE ÇATILANDIRILMIŞ η_3 −SLANT HELİSLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mine ATEŞ

Matematik Anabilim Dalı

Geometri Bilim Dalı

ARALIK 2022

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DÖRT BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA ÇATILANDIRILMIŞ GENEL VE ÇATILANDIRILMIŞ $\boldsymbol{\eta_3}$ −SLANT HELİSLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mine ATEŞ

Matematik Anabilim Dalı

Geometri Bilim Dalı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Mahmut AKYİĞİT

ARALIK 2022

Mine Ateş tarafından hazırlanan "Dört Boyutlu Öklid Uzayında Çatılandırılmış Genel ve Çatılandırılmış $\eta_3 -$ Slant Helisler" adlı tez çalışması 26.12.2022 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Geometri Bilim Dalı'nda Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi

Jüri Başkanı :	**Doç. Dr. Önder Gökmen YILDIZ** Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi	....
Jüri Üyesi :	**Doç. Dr. Mahmut AKYİĞİT**(Danışman) Sakarya Üniversitesi	....
Jüri Üyesi :	**Doç. Dr. Hidayet Hüda KÖSAL** Sakarya Üniversitesi	....

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Eğitim-Öğretim Yönetmeliğine ve Yükseköğretim Kurumları Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Yönergesine uygun olarak hazırlamış olduğum "Dört Boyutlu Öklid Uzayında Çatılandırılmış Genel ve Çatılandırılmış $\eta_3 -$Slant Helisler" başlıklı tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın tüm aşamalarında yukarıda belirtilen yönetmelik ve yönergeye uygun davrandığımı, tezin içerdiği yenilik ve sonuçları başka bir yerden almadığımı, tezde kullandığım eserleri usulüne göre kaynak olarak gösterdiğimi, bu tezi başka bir bilim kuruluna akademik amaç ve unvan almak amacıyla vermediğimi ve 20.04.2016 tarihli Resmi Gazete'de yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince Sakarya Üniversitesi'nin abonesi olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Enstitü tarafından belirlenmiş ölçütlere uygun rapor alındığını, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun ortaya çıkması halinde doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi beyan ederim.

26/12/2022

Mine Ateş

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın her aşamasında ve yüksek lisans eğitimim boyunca değerli bilgi ve deneyimlerinden yararlandığım, her konuda bilgi ve desteğini almaktan çekinmediğim, araştırmanın planlanmasından yazılmasına kadar tüm aşamalarında yardımlarını esirgemeyen, teşvik eden, aynı titizlikte beni yönlendiren başta değerli danışman hocam Doç. Dr. Mahmut AKYİĞİT'e ve Doç. Dr. Önder Gökmen YILDIZ'a en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca her zaman her konuda yanımda olan ve desteğini esirgemeyen aileme teşekkürlerimi borç bilirim.

Mine Ateş

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER

Δ_3	: Altı boyutlu düzgün manifold
$\boldsymbol{\gamma}$	: Dayanak eğrisi
$\boldsymbol{V_i}$	: $\mathbb{E}^n$ Öklid uzayında $i.$ Frenet vektörü
$\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B_1}, \boldsymbol{B_2}$	: $\mathbb{E}^4$'te regüler bir eğrinin Frenet vektörleri
$(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\mu})$	: Çatılandırılmış eğri
$\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\eta_1}, \boldsymbol{\eta_2}, \boldsymbol{\eta_3},$	: Çatılandırılmış eğrinin genelleştirilmiş Frenet vektörleri
$\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}$	: Çatılandırılmış eğrinin genelleştirilmiş eğrilikleri
$\langle , \rangle$	: İç çarpım fonksiyonu
$\boldsymbol{V}$	: Vektör uzayı
$\boldsymbol{I}, \boldsymbol{J}$	: Reel sayılar uzayında açık aralıklar
$\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$	: n – boyutlu reel vektör uzayı
$\mathbb{E}^{\boldsymbol{n}}$	: n – boyutlu Öklid uzayı
$\Vert , \Vert$	: Norm
$\boldsymbol{\alpha}$	: Regüler eğri
$\boldsymbol{k_i}$	: Regüler eğrinin $i.$ eğriliği
$\boldsymbol{C^n}$	: Sürekli ve $n.$ basamaktan kısmi türevleri olan fonksiyonların kümesi

DÖRT BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA ÇATILANDIRILMIŞ GENEL VE ÇATILANDIRILMIŞ η_3- SLANT HELİSLER

ÖZET

Bu tez 5 bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde helis eğrilerinin gerçek hayattaki kullanım alanlarından ve bir eğrinin helis olabilmesi için eğrilik ve burulma arasındaki ilişkiden bahsedilmiştir. Ayrıca genel helis, slant helis ve B_2-slant helis kavramları ile ilgili kuramsal gelişmeler hakkında literatür özeti yapılmıştır.

İkinci bölüm dört alt bölümde ele alınmıştır. İlk alt bölümde Öklid uzayında temel tanımlar verilmiştir. Daha sonra bu uzayda bir eğrinin, bir t anındaki Frenet çatısı ve eğrilikleri açıklanmıştır. Bu alt bölümde Öklid uzayı ile ilgili tanımlar n doğal sayı olmak üzere $n-$boyutta verilmiştir. Fakat diğer alt bölümlerde ise tez çalışmasında kullanılacak olan kavramlar olması sebebiyle ilgili tanım ve teoremler özel olarak $4-$boyutlu uzayda verilmiştir. İkinci alt bölümde $4-$boyutlu Öklid uzayında çatılandırılmış eğri tanımlanmış ve bu çatının her bir noktasındaki genelleştirilmiş teğet, genelleştirilmiş esas normal, genelleştirilmiş binormal ve genelleştirilmiş ikinci binormal vektörleri verilmiştir. Üçüncü alt bölümde $3-$boyutlu uzayda oldukça fazla kullanım alanı olan genel helislerin $4-$boyutlu uzayda tanımı verilmiş ve bir eğrinin genel helis olabilmesi için gerek ve yeter şartları incelenmiştir. İkinci bölümün son alt bölümünde ise eğrinin B_2 ikinci birim binormal vektörünün sabit bir vektörle sabit açı yapması sonucu oluşan eğrinin B_2-slant helis olduğu açıklanmış ve eğrinin B_2-slant helis olması durumunda eğrilikler arasındaki bağıntılar verilmiştir.

Üçüncü bölümde $4-$boyutlu Öklid uzayında çatılandırılmış genel helisler kavramı ele alınmıştır. Bu uzayda çatılandırılmış genel helisin, genelleştirilmiş teğet vektörün sabit bir vektörle sabit açı yapması sonucu oluşan eğri olduğu açıklanmıştır. Daha sonra çatılandırılmış bir eğrinin eğriliklerinden oluşan sabit değerli bir $\frac{p^2}{q^2}+\left(\frac{1}{r}\left(\frac{p}{q}\right)'\right)^2$ denklemin sağlanmasının bu eğrinin çatılandırılmış bir genel helis olabilmesi için gerek ve yeter şart olduğu ifade edilmiştir. Bu teorem yardımıyla elde edilen denklemin türevinin alınması sonucu bulunan $\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{p}{q}\right)'+\left(\frac{1}{r}\left(\frac{p}{q}\right)'\right)\left(\frac{1}{r}\left(\frac{p}{q}\right)'\right)'=0$ denklemin sağlanması halinde bu eğrinin çatılandırılmış bir genel helis olabilmesi için gerek ve yeter şart verilmiştir. Son olarak $p(s)$, $q(s)$ birinci dereceden ve $t(s)$ ikinci dereceden

diferensiyellenebilir fonksiyonlar yardımıyla elde edilen $\frac{p}{q}=C_1\cos t+C_2\sin t$ eşitliğin

sağlanması halinde bu eğrinin çatılandırılmış bir genel helis olabilmesi için gerek ve yeter şart verilmiştir.

Dördüncü bölümde ise $4-$boyutlu Öklid uzayında B_2-slant helisler konusunu genelleştirmek, kullanım alanlarını arttırmak ve yapılacak olan yeni çalışmalara zemin hazırlamak için bu uzayda singüler noktalara sahip olan çatılandırılmış eğriler ile incelenmiştir. İlk olarak Önder ve ark. tarafından ele alınan $4-$boyutlu Öklid uzayında B_2-slant helisler ve Akyiğit, Yıldız tarafından ele alınan $4-$boyutlu Öklid uzayında çatılandırılmış normal eğriler makalelerinden yola çıkarak $4-$boyutlu Öklid uzayında çatılandırılmış η_3-slant helislerin tanımı verilmiştir. Burada $4-$boyutlu Öklid uzayında çatılandırılmış η_3-slant helis; genelleştirilmiş η_3-ikinci binormal vektörünün, sabit bir doğrultuyla sabit bir açı yapması sonucu oluşan eğri olarak tanımlanmıştır. Daha sonra çatılandırılmış eğrinin eğriliklerinden oluşan sabit değerli bir $\left(\frac{r}{q}\right)^2+\frac{1}{p^2}\left(\frac{r}{q}\right)'^2$ denklemin sağlanması halinde bu eğrinin çatılandırılmış bir η_3-slant helis olabilmesi için gerek ve yeter şartı ifade eden teorem verilmiştir. Bu teorem yardımıyla elde edilen denklemden yola çıkarak ikinci dereceden diferensiyellenebilir bir f fonksiyonu bulunmuş ve bu fonksiyonun $f(s)\,p=\frac{d}{ds}\left(\frac{r}{q}\right)$, $\frac{d}{ds}f(s)=-p\frac{r}{q}$ denklemlerini sağlaması halinde çatılandırılmış eğrinin bir çatılandırılmış η_3-slant helis olabilmesi için gerek ve yeter şartı verilmiştir. Son olarak $q(s)$, $r(s)$ birinci dereceden ve $\beta(s)$ ikinci dereceden diferensiyellenebilir fonksiyonlar yardımıyla elde edilen $\frac{r}{q}=A\cos\beta(s)+B\sin\beta(s)$ eşitliğin sağlanması halinde bu eğrinin çatılandırılmış bir η_3-slant helis olabilmesi için gerek ve yeter şart verilmiştir.

Sonuç bölümünde ise üçüncü bölümde, $4-$boyutlu uzayda çatılandırılmış genel helisler için genelleştirilmiş eğrilikleri p,q,r cinsinden bulunan bir karakterizasyon verilmiştir. Ardından, bu karakterizasyonun sağlanması halinde elde edilen farklı bir karakterizasyon daha verilmiştir. Son olarak ise uygun olarak seçilen birinci ve ikinci derecen diferensiyellenebilir fonksiyonlar yardımıyla $4-$boyutlu uzayda çatılandırılmış genel helisler için bulunan bir karakterizasyonu daha verilmiştir. Ayrıca bu bölümde, dördüncü bölümde $4-$boyutlu uzayda çatıandırılmış η_3-slant helisler için genelleştirilmiş eğrilikleri cinsinden bulunmuş bir $\left(\frac{r}{q}\right)^2+\frac{1}{p^2}\left(\frac{r}{q}\right)'^2$ karakterizasyonu verilmiştir. Ardından, bu veriden hareketle çatılandırılmış η_3-slant helisler için ikinci dereceden diferensiyellenebilir bir fonksiyon yardımıyla elde edilen farklı bir karakterizasyon verilmiştir. Son olarak ise uygun olarak seçilen birinci ve ikinci dereceden diferensiyellenebilir fonksiyonlar yardımıyla çatılandırılmış η_3-slant helis için elde edilmiş bir karakterizasyon daha verilmiştir. Bu bölümün sonunda ise gelecek çalışmalar için öneriler verilmiştir.

FRAMED GENERAL AND FRAMED η_3-SLANT HELICES IN THE EUCLIDEAN $4-$SPACE

SUMMARY

This thesis consists of 5 sections. In the first section, real-life applications of helix curves in our daily life, the relationship between curvature and torsion for a curve to be a helix, and a literature review about the concepts of the general helix, slant helix, and B_2-slant helix are given.

The second section is divided into four subsections. In the first subsection, basic definitions and notions are given in Euclidean space. After that, a curve in this space, the curvatures and the Frenet frame of a curve are mentioned. In this subsection, the definitions related to higher-dimensional Euclidean space are given. However, in the other subsections, the necessary definitions and theorems are given for $4-$dimensional space since the concepts used in this thesis depend on $4-$dimensional space. In the second subsection, a framed curve (γ,η) in $4-$dimensional Euclidean space is defined, and the generalized tangent v, generalized principal normal η_1, generalized binormal η_2 and generalized second binormal η_3 vectors at each point of this generalized frame are introduced. In the third subsection, the definition of general helices, which are widely used in $3-$dimensional space, in $4-$dimensional space, and the necessary and sufficient conditions for a curve to be a general helix are examined. In the last subsection of the second part, B_2-slant helix is defined as a curve formed by the relation that the second unit binormal vector B_2 of this curve makes a constant angle with a constant vector. Moreover, the relations between the curvatures are presented while the curve is a B_2-slant helix.

In the third section, the notion of framed general helices in $4-$dimensional Euclidean space are discussed. It is defined that the framed general helix in this space is the framed curve formed as a result of the generalized tangent vector v making a constant angle θ with a constant vector U. Then, the theorem expressing the necessary and sufficient condition for a framed curve to be a framed general helix is given as a constant value $\frac{p^2}{q^2}+\left(\frac{1}{r}\left(\frac{p}{q}\right)'\right)^2$ equation consisting of the generalized curvatures p,q,r of the framed curve is provided. The necessary and sufficient conditions are given for this framed curve to be a framed general helix as the equation $\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{p}{q}\right)'+\left(\frac{1}{r}\left(\frac{p}{q}\right)'\right)\left(\frac{1}{r}\left(\frac{p}{q}\right)'\right)'=0$ which is found by taking the derivative of the equation with the help of this theorem, is satisfied. Finally, the necessary and sufficient conditions are given for this framed curve to be a framed general

helix,such as the equality $\frac{p}{q}=C_1\cos t+C_2\sin t$ obtained with the help of first and second-order differentiable functions $p(s)$, $q(s)$ and $t(s)$ are provided.

In the fourth section, B_2-slant helices in $4-$dimensional Euclidean space are examined with framed curves that can have singular points in order to generalize the subject of B_2-slant helices, to increase their usage areas, and prepare the base for new studies. The definition of framed η_3-slant helices in $4-$dimensional Euclidean space is given considering a study on B_2-slant helices in $4-$dimensional Euclidean space presented by Önder et al., and a study on the framed curves in $4-$dimensional Euclidean curve discussed by Akyiğit and Yıldız. Here the framed η_3-slant helix in $4-$dimensional Euclidean space is defined as the framed curve formed as a result of the generalized second binormal vector η_3 making a constant angle θ with a fixed direction U. Then, if a constant value $\left(\frac{r}{q}\right)^2+\frac{1}{p^2}\left(\frac{r}{q}\right)'^2$ equation consisting of the generalized curvatures p,q,r of the framed curve is provided, the theorem expressing the necessary and sufficient condition for this framed curve to be a framed η_3-slant helix is given. Starting from the equation obtained with the help of this theorem, a quadratic differentiable function f is found and if this function satisfies the $f(s)p=\frac{d}{ds}\left(\frac{r}{q}\right)$ and $\frac{d}{ds}f(s)=-p\frac{r}{q}$ equations, the necessary and sufficient condition is given for the framed curve to be a framed η_3-slant helix. Finally, necessary and sufficient conditions are given for this framed curve to be a framed η_3-slant helix if the equality $\frac{r}{q}=A\cos\beta(s)+B\sin\beta(s)$ obtained with the help of first and second-order differentiable functions $q(s)$, $r(s)$ and $\beta(s)$ are provided.

In the conclusion section, in the third section, a characterization $\frac{p^2}{q^2}+\left(\frac{1}{r}\left(\frac{p}{q}\right)'\right)^2$ is given for framed generalized helices in $4-$dimensional space in terms of their generalized curvatures p,q,r. Then, a different characterization obtained if this characterization is provided is given. Finally, a characterization $\frac{p}{q}=C_1\cos t+C_2\sin t$ is given for framed general helices in $4-$dimensional space with the help of properly selected first and second-order differentiable functions. In the fourth section, a characterization $\left(\frac{r}{q}\right)^2+\frac{1}{p^2}\left(\frac{r}{q}\right)'^2$ of framed η_3-slant helices found in terms of generalized curvatures is given. Then, based on this data, a different characterization is given for the framed η_3-slant helices, which is obtained with the help of a second-order differentiable function f. Finally, another characterization is given for the framed η_3-slant helix with the help of properly selected first and second-order differentiable functions. At the end of this section, suggestions for advanced research are given.

1. GİRİŞ

Helis eğrilerine matematikte, biyolojide, mühedislikte, mimarlıkta, teknolojide, doğada ve bir çok alanda rastlanılmaktadır. Vida, boynuz, minare merdivenleri, DNA molekülü, çoğu proteinin yapısı, bazı bakteri şekilleri, bazı teknolojik araçların çalışma mekanizması karşımızı çıkan örneklerden sadece birkaçıdır.

Diferensiyel geometride helis, sabit bir eğriliğe ve sıfırdan farklı sabit bir burulmaya sahip bir geometrik eğridir (Barros, 1997). Eğri teğetinin, eksen olarak isimlendirilen sabit bir doğrultuyla sabit bir açı yapması genel helis olarak bilinir. Lancret 1802'de bir eğrinin genel helis olması için gerek ve şartın eğrinin $\frac{\kappa}{\tau}$ oranının sabit olması gerektiğini iddia etmiştir. Burada κ eğrinin eğriliği, τ ise eğrinin burulmasıdır. Daha sonra 1845 yılında Venant tarafından bu idda ispatlanmıştır (Struik, 1961). Genel helislere benzer olan slant helisler, Izumiya ve Takeuchi (2004) tarafından eğrinin asli normal vektörü, sabit bir doğrultuyla sabit bir açı yapan eğri olarak tanımlanmıştır. Ali ve López (2009), $4-$boyutlu Öklid uzayında slant helisleri tanıtmışlar ve eğilikleri cinsinden bazı karakterizasyonlarını vermişlerdir. Kula ve Yaylı (2005), slant helisin küresel görüntülerini, teğet göstergesini ve binormal göstergesini araştırmışlar ve bu küresel görüntülerinin küresel helisler olduğunu bulmuşlardır. Önder ve ark. (2008), $4-$boyutlu Öklid uzayında slant helisin yeni bir çeşidi olan B_2-slant helisleri tanıtmış ve bu yeni çeşit slant helis için bazı karakterizasyonlar vermişlerdir. Yoon (2012), $4-$boyutlu Öklid uzayında kuaterniyonik genel helislerin tanıtmış ve eğrilikleri cinsinden bazı karakterizasyonlarını vermiştir. $4-$boyutlu Öklid uzayında helislerin bir karakterizasyonu Mağden (1993) ve $4-$boyutlu Minkowski uzayın karşılık gelen karakterizasyonu ise Kocayiğit ve Önder (2007) tarafından verilmiştir. Gök ve ark. (2011), $4-$boyutlu Öklid uzayında kuaterniyonik B_2-slant helisi tanıtmışlar ve eğrilikleri cinsinden bazı karakterizasyonlarını vermişlerdir. Bunların dışında helisler ile ilgili bir çok çalışma yapılmıştır (Ali, 2012; Bulut ve Bektaş, 2020; Barros ve

Ferrández, 2009; Chouaieb ve ark., 2006; Forterre ve Dumais, 2011; Kula ve ark., 2010).

Bu çalışmada daha önce dört boyutlu Öklid uzayında çalışılmış kuaterniyonik genel helislerin ve B_2 – slant helislerin genelleştirilmesi amacıyla dört boyutlu Öklid uzayında singüler noktalara sahip olabilen çatılandırılmış eğriler çalışılmış ve dört boyutlu Öklid uzayında uyarlanmış çatı ile çatılandırılmış genel helisler ve çatılandırılmış η_3 – slant helisler tanımlanmıştır. Ayrıca bu eğrilerin genelleştirilmiş eğrilik fonksiyonları cinsinden bazı karakterizasyonları verilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde eğriler teorisi ile ilgili temel tanım ve kavramlara yer verildi.

2.1. Öklid Uzayında Temel Kavramlar

Bu alt başlıkta, Öklid uzayında eğriler teorisi ile ilgili bazı temel tanım ve kavramlara yer verildi.

Tanım 2.1.1. $\mathbb{R}^n$ vektör uzayında $p,q \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \langle\, , \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ (p\ ,\ q) &\to \langle p,q\rangle = \sum_{i=1}^{n} p_i q_i \end{aligned}$$

fonksiyonuna Öklid iç çarpımı denir (Hacısalihoğlu, 1993).

Tanım 2.1.2. $p \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \|\,.\,\| : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ p &\to \|p\| = \sqrt{\langle p,p\rangle} \end{aligned}$$

fonksiyonu $\mathbb{R}^n$ uzayında bir normdur (Hacısalihoğlu, 1993).

Tanım 2.1.3.

$$\begin{aligned} d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ (p,q) &\to d(p,q) = \|p-q\| \end{aligned}$$

fonksiyonu $\mathbb{R}^n$ uzayında bir metriktir. Bu metrik ile birlikte $\mathbb{R}^n$ uzayına Öklid Uzayı denir. Bu uzay $\mathbb{E}^n$ ile gösterilir (Hacısalihoğlu, 1993).

Tanım 2.1.4. $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ biçiminde düzgün (C^∞ sınıfından) bir α dönüşümüne $\mathbb{R}^n$ uzayında bir eğri denir. $I \subseteq \mathbb{R}$ açık aralığına eğrinin parametre aralığı ve $s \in I$ değişkenine ise eğrinin parametresi denir (Gray, 1997).

Tanım 2.1.5. $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ bir eğri ve J bir açık aralık olsun. $h : J \to I$ difeomorfizmine, α eğrisinin bir parametre dönüşümü denir. $\alpha o h$ eğrisi α eğrisinin h ile yeniden parametrelendirilmiş halidir (Gray, 1997)

Tanım 2.1.6. $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ eğrisi verilsin. O halde

$$\alpha'(s) = \frac{d\alpha(s)}{ds} = \left(\frac{d\alpha_1}{ds}(s), \frac{d\alpha_2}{ds}(s), ..., \frac{d\alpha_n}{ds}(s) \right)$$

vektörüne α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki hız vektörü denir (Gray, 1997).

Tanım 2.1.7. Her noktasındaki hız vektörü sıfırdan farklı olan eğriye regüler eğri denir (Hacısalihoğlu, 1993).

Tanım 2.1.8. Eğrinin hız vektörünün sıfır olduğu noktaya eğrinin singüler noktası denir (Hacısalihoğlu, 1993).

Tanım 2.1.9. $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ olarak tanımlı regüler bi eğri olsun.

$$\begin{aligned} \|\alpha'\| : I &\to \mathbb{R} \\ s &\to \|\alpha'\|(s) = \|\alpha'(s)\| \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı $\|\alpha'\|$ fonksiyonuna , α eğrisinin skalar hız fonksiyonu, $\|\alpha'(s)\|$ reel sayısına da α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki skalar hızı denir (Gray, 1997).

Tanım 2.1.10. $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ eğrisinin her bir $s \in I$ noktası için $\|\alpha'(s)\| = 1$ ise α eğrisine birim hızlı eğri ve s parametresine ise yay parametresi denir (Bär, 2010).

Tanım 2.1.11. $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ ve $a, b \in I$ olsun.

$$t = \int_a^b \|\alpha'(s)\| ds$$

reel sayısına eğrinin $\alpha(a)$ ve $\alpha(b)$ noktaları arasındaki yay-uzunluğu denir (Gray, 1997).

Tanım 2.1.12. $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ olarak tanımlı diferensiyellenebilir bir eğri ve

$$\xi = \{\alpha', \alpha'', ..., \alpha^{(r)}\}$$

sistemi linner bağımsız olsun. ξ lineer bağımsız sisteminden elde edilen $\{V_1, V_2, ..., V_r\}$ ortonormal sistemine, α eğrisinin Serret-Frenet $r-$ayaklı alanı, $\{V_1(s), V_2(s), ..., V_r(s)\}$ sistemine $s \in I$ noktasındaki Serret-Frenet $r-$ayaklısı denir ve her bir V_i $(1 \leq i \leq r)$ vektörüne de Serret-Frenet vektörü denir (Gluck, 1966).

Tanım 2.1.13. $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ ve α eğrisinin yay parametresi s olmak üzere $\alpha(s)$ noktasındaki Serret-Frenet $r-$ayaklısı $\{V_1(s), V_2(s), ..., V_r(s)\}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} k_i : I &\to \mathbb{R} \qquad (1 \leq i \leq r) \\ s &\to k_i(s) = \langle V_i'(s), V_{i+1}(s) \rangle \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan k_i fonksiyonuna α eğrisinin i. eğrilik fonksiyonu denir ve $\forall s \in I$ için $k_i(s)$ sayısına da $\alpha(s)$ noktasında α eğrisinin i. eğriliği denir (Gluck, 1966).

Tanım 2.1.14. $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ olarak tanımlansın ve s, α eğrisinin yay parametresi olmak üzere, eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki i. eğriliği $k_i(s)$ ve Frenet r-ayaklısı $\{V_1(s), V_2(s), ..., V_r(s)\}$ olmak üzere

$$i.\ V_1'(s) = k_1(s) V_2(s),$$

$$ii.\ V_i'(s) = -k_{i-1}(s) V_{i-1}(s) + k_i(s) V_{i+1}(s),$$

$$iii.\ V_r'(s) = -k_{r-1}(s) V_{r-1}(s)$$

dir. Dört boyutlu Öklid uzayında α eğrisinin Serret-Frenet formülü

$$\begin{bmatrix} V_1' \\ V_2' \\ V_3' \\ V_4' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix}$$

veya

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B_1' \\ B_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir (Gluck, 1966).

Tanım 2.1.15 Dört boyutlu Öklid Uzayında vektör çarpımı aşağıdaki gibi verilir.

$$x \times y \times z = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix}$$

Burada e_1, e_2, e_3, e_4 vektörleri $\mathbb{R}^4$'ün ortonormal baz vektörleri ve $x, y, z \in \mathbb{R}^4$'tür (Mağden, 1990).

Tanım 2.1.16. $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ olarak tanımlı diferensiyellenebilir bir eğri olsun. $t \in I$, α eğrisinin herhangi bir parametresi olmak üzere α eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki $\{T(t), N(t), B_1(t), B_2(t)\}$ Frenet vektörleri

$$T(t) = \frac{1}{\|\alpha'(t)\|} \alpha'(t),$$

$$N(t) = \frac{\|\alpha'(t)\|^2 \alpha''(t) - \langle \alpha'(t), \alpha''(t) \rangle \alpha'(t)}{\left\| \|\alpha'(t)\|^2 \alpha''(t) - \langle \alpha'(t), \alpha''(t) \rangle \alpha'(t) \right\|},$$

$$B_1(t) = \varepsilon B_2(t) \times T(t) \times N(t),$$

$$B_2(t) = \varepsilon \frac{T(t) \times N(t) \times \alpha'''(t)}{\|T(t) \times N(t) \times \alpha'''(t)\|}, \quad (\varepsilon = \pm 1)$$

şeklinde hesaplanır (Özyılmaz ve Yılmaz, 2009).

Tanım 2.1.17. $t \in I$, α eğrisinin herhangi bir parametresi olsun. α eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki Frenet eğrilikleri sırasıyla $k_1(t),\ k_2(t)$ ve $k_3(t)$ olmak üzere,

$$k_1(t) = \frac{\left\| \|\alpha'(t)\|^2 \alpha''(t) - \langle \alpha'(t), \alpha''(t) \rangle \alpha'(t) \right\|}{\|\alpha'(t)\|^4},$$

$$k_2(t) = \frac{\|T(t) \times N(t) \times \alpha'''(t)\| \|\alpha'(t)\|}{\left\| \|\alpha'(t)\|^2 \alpha''(t) - \langle \alpha'(t), \alpha''(t) \rangle \alpha'(t) \right\|},$$

$$k_3(t) = \frac{\langle \alpha^{(4)}(t), B_2(t) \rangle}{\|T(t) \times N(t) \times \alpha'''(t)\| \|\alpha'(t)\|}$$

şeklinde hesaplanır (Özyılmaz ve Yılmaz, 2009).

2.2. 4-Boyutlu Öklid Uzayında Çatılandırılmış Eğriler

Δ_3, $\mathbb{R}^4$ uzayında

$$\Delta_3 = \left\{ \mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3) \in \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 : \langle \mu_i, \mu_j \rangle = \delta_{ij}, i, j = 1, 2, 3 \right\}$$

şeklinde tanımlı bir küme olsun. Δ_3, $6-$boyutlu düzgün bir manifolddur. v birim vektörü $\det(v, \mu_1, \mu_2, \mu_3) = 1$ ve $(\mu_1, \mu_2, \mu_3) \in \Delta_3$ olmak üzere $v = \mu_1 \times \mu_2 \times \mu_3$ şekilde tanımlanır.

Tanım 2.2.1. Her $t \in I$ ve $i = 1, 2, 3$ için $\langle \gamma'(t), \mu_i(t) \rangle = 0$ ise $(\gamma, \mu): I \to \mathbb{R}^4 \times \Delta_3$ dönüşümüne çatılandırılmış eğri denir. (γ, μ) çatılandırılmış eğri olacak şekilde bir $\mu : I \to \Delta_3$ varsa $\gamma : I \to \mathbb{R}^4$ bir çatılandırılmış temel eğri olarak adlandırılır. $(\gamma, \mu): I \to \mathbb{R}^4 \times \Delta_3$ çatılandırılmış eğri olmak üzere $\gamma'(s) = \alpha(s).v(s)$ olacak biçimde bir $\alpha : I \to \mathbb{R}$ düzgün fonksiyonu vardır (Honda ve Takahashi, 2016).

Bir çatılandırılmış eğri için regüler eğrinin Serret-Frenet formüllerine benzer Serret-Frenet tipi formülleri tanımlanabilir. $\{v(s),\mu(s)\}$ ikilisi $\gamma(s)$ çatılandırılmış temel eğri, boyunca hareketli bir çatı olsun. O halde $(\gamma,\mu):I\to\mathbb{R}^4\times\Delta_3$ çatılandırılmış eğrisi için Serret-Frenet tipi formül,

$$\begin{bmatrix} \mu_1'(s) \\ \mu_2'(s) \\ \mu_3'(s) \\ v'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & f(s) & g(s) & h(s) \\ -f(s) & 0 & j(s) & k(s) \\ -g(s) & -j(s) & 0 & l(s) \\ -h(s) & -k(s) & -l(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1(s) \\ \mu_2(s) \\ \mu_3(s) \\ v(s) \end{bmatrix}$$

şeklinde verilir. Burada $f(s),g(s),h(s),j(s),k(s)$ ve $l(s)$ düzgün eğrilik fonksiyonlarıdır. Bir $\alpha:\mathrm{I}\to\mathbb{R}$ düzgün dönüşümü vardır öyle ki $\gamma'(s)=\alpha(s)v(s)$ dır. $(f,g,h,j,k,l,\alpha):I\to\mathbb{R}^4$, düzgün bir dönüşüm olmak üzere $(f(s),g(s),h(s),j(s),k(s),l(s),\alpha(s))$ ye $\gamma(s)$ noktasında γ'nın çatılandırılmış eğrilikleri denir. Eğer $\alpha(s_0)=0$ ise s_0, γ'nın singüler noktasıdır (Takahashi ve Honda, 2016).

Teorem 2.2.2. $(f,g,h,j,k,l,\alpha):I\to\mathbb{R}^4$ düzgün bir dönüşüm olmak üzere, çatılandırılmış eğriliği (f,g,h,j,k,l,α) olan bir $(\gamma,\mu):I\to\mathbb{R}^4\times\Delta_3$ çatılandırılmış eğris vardır (Honda ve Takahashi, 2016).

Teorem 2.2.3. (γ,μ) ve $(\tilde{\gamma},\eta):I\to\mathbb{R}^4\times\Delta_3$, çatılandırılmış eğrilerin eğrilikleri sırasıyla (f,g,h,j,k,l,α) ve $(\tilde{f},\tilde{g},\tilde{h},\tilde{j},\tilde{k},\tilde{l},\tilde{\alpha})$ olsun. Bu eğrilikler çakışık ise (γ,μ) ve $(\tilde{\gamma},\eta)$ framed eğrileri kongurenttirler (Honda ve Takahashi, 2016).

$(\gamma,\mu):I\to\mathbb{R}^4\times\Delta_3$ dönüşümü, eğriliği (f,g,h,j,k,l,α) olan bir çatılandırılmış eğri olsun. Euler açılarını kullanarak $\eta=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)\in\Delta_3$,

$$\begin{bmatrix}\eta_1\\\eta_2\\\eta_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta\cos\psi & -\cos\varphi\sin\psi+\sin\varphi\cos\psi\sin\theta & \sin\varphi\sin\psi+\cos\varphi\cos\psi\sin\theta\\ \cos\theta\sin\psi & \cos\varphi\cos\psi+\sin\varphi\sin\psi\sin\theta & -\sin\varphi\cos\psi+\cos\varphi\sin\psi\sin\theta\\ -\sin\theta & \sin\varphi\cos\theta & \cos\varphi\cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mu_1\\\mu_2\\\mu_3\end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanır. Burada θ,φ ve ψ düzgün fonksiyonlardır. Basit hesaplamalar ile

$$\tilde{v}=\eta_1\times\eta_2\times\eta_3=\mu_1\times\mu_2\times\mu_3=v$$

olduğu kolayca görülebilir.

Bu yüzden $(\gamma,\eta):I\to\mathbb{R}^4\times\Delta_3$ dönüşümü de bir çatılandırılmış eğridir. Kabul edelim ki θ,φ ve ψ (Euler açı) düzgün fonksiyonları için

$$\frac{\tan\psi}{\cos\theta}=l\sin\varphi-k\cos\varphi,$$

$$h=\cot\theta\left(l\cos\varphi+k\sin\varphi\right)$$

sağlansın. O halde uyarlanmış çatısının türev formülleri

$$\begin{bmatrix}v'(s)\\\eta_1'(s)\\\eta_2'(s)\\\eta_3'(s)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & p(s) & 0 & 0\\ -p(s) & 0 & q(s) & 0\\ 0 & -q(s) & 0 & r(s)\\ 0 & 0 & -r(s) & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v(s)\\\eta_1(s)\\\eta_2(s)\\\eta_3(s)\end{bmatrix}$$

olan γ eğrisinin $\left(p(s),q(s),r(s),\alpha(s)\right)$ eğrilikleri de

$$p=-h\sec\theta\sec\psi,$$

$$q=-\left(j-\varphi'\right)\sin\theta-\psi',$$

$$r=\frac{\cos\theta}{\cos\psi}\left(j-\varphi'\right)$$

şeklinde elde edilir. Burada

$$f = -\sin\varphi\left(\theta' - r\sin\psi\right),$$

$$g = -\cos\varphi\left(\theta' - r\sin\psi\right),$$

$$j = r\frac{\cos\psi}{\cos\theta} + \theta'$$

şeklindedir.

$v, \eta_1, \eta_2, \eta_3$ vektörlerini sırasıyla çatılandırılmış eğrinin genelleştirilmiş teğet, genelleştirilmiş esas normal, genelleştirilmiş binormal ve genelleştirilmiş ikinci binormal vektörü olarak adlandırılır (Akyiğit ve Yıldız, 2021).

2.3. 4-Boyutlu Öklid Uzayında Genel Helisler

Bu bölümde dört boyutlu Öklid uzayında genel helislerin tanımı ve ilgili bazı teoremler verildi.

$\alpha : I \to \mathbb{R}^4$ eğrilikleri sıfırdan farklı birim hızlı bir eğri ve Frenet elemanları $\{T, N, B_1, B_2\}$ olsun.

Tanım 2.3.1. Birim hızlı bir α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki birim teğet vektörü $T(s)$, bir U birim vektörü ile sabit bir θ açısı yapıyorsa, α eğrisine genel helis denir ve $Sp\{U\}$'ya ise helisin ekseni denir (Hacısalihoğlu, 1993).

Teorem 2.3.2. $\alpha = \alpha(s)$, $\mathbb{R}^4$'te sıfırdan farklı eğrilikleriyle birim hızlı bir eğri olsun. α bir genel helis olması için gerek ve yeter şart $\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^2 + \left(\left(\frac{k_1}{k_2}\right)' \frac{1}{k_3}\right)^2 = \text{sabit}$ ifadesinin var olmasıdır (Yoon, 2012).

İspat: Kabul edelim ki α eğrisi bir genel helis, U birim vektörü genel helisin ekseni ve θ sabit olsun. O halde genel helis boyunca $\langle T, U\rangle = \cos\theta =$ sabittir. Bu ifadenin türevi alınıp ve Frenet formülleri kullanılırsa

$$\frac{d}{ds}\left(\langle T,U\rangle\right)=0,$$

$$k_1\langle N,U\rangle=0$$

bulunur. $k_1\neq 0$ olduğundan dolayı $\langle N,U\rangle=0$ dir. O halde U birim vektörü aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$U=a_1(s)T(s)+a_2(s)B_1(s)+a_3(s)B_2(s) \tag{2.1}$$

burada $a_1(s)=\langle T,U\rangle=\text{sabit}$, $a_2(s)=\langle B_1,U\rangle$, $a_3(s)=\langle B_2,U\rangle$ ve U birim vektör olduğundan $a_1^{\,2}+a_2^{\,2}+a_3^{\,2}=1$ dir.

(2.1) ifadesinin türevinden

$$U'=\left(a_1k_1-a_2k_2\right)N+\left(a_2^{'}-a_3k_3\right)B_1+\left(a_2k_3+a_3^{'}\right)B_2=0 \tag{2.2}$$

elde edilir. (2.2) eşitliğinden

$$a_2=\frac{a_1}{k_2}k_1=-\frac{a_3^{'}}{k_3}, \tag{2.3}$$

$$a_2^{'}=a_3k_3 \tag{2.4}$$

elde edilir.

$a_2=-\dfrac{a_3^{'}}{k_3}$ ifadesinin türevi (2.4) eşitliğinde yazılırsa

$$a_3^{''}-\frac{k_3^{'}}{k_3}a_3^{'}+k_3^{\,2}a_3=0 \tag{2.5}$$

bulunur. $t=\int_0^s k_3ds$ ifadesi (2.5) denkleminde kullanılırsa

$$\frac{d^2a_3}{dt^2}+a_3=0 \tag{2.6}$$

elde edilir. Bu denklemin çözümünden

$$a_3 = A\cos t(s) + B\sin t(s) \tag{2.7}$$

bulunur. Burada A ve B sabit fonksiyonlardır. (2.7) ifadesi, (2.3) ve (2.4) ifadelerinde kullanılırsa

$$a_2 = \frac{k_1}{k_2} a_1 = A\sin t(s) - B\cos t(s),$$

$$a_3 = \left(\frac{k_1}{k_2}\right)' a_1 \frac{1}{k_3} = A\cos t(s) + B\sin t(s)$$

bulunur. Buradan

$$A^2 + B^2 = a_1{}^2 \left[\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^2 + \left(\left(\frac{k_1}{k_2}\right)' \frac{1}{k_3} \right)^2 \right]$$

elde edilir. A, B ve a_1 sabit olduğundan

$$\text{sabit } = \left(\frac{k_1}{k_2}\right)^2 + \left(\left(\frac{k_1}{k_2}\right)' \frac{1}{k_3} \right)^2 \tag{2.8}$$

olur.

Tersine kabul edelim ki $\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^2 + \left(\left(\frac{k_1}{k_2}\right)' \frac{1}{k_3} \right)^2$ ifadesi sabit olsun. O halde $\langle T, U \rangle = \text{sabit}$ olacak şekilde bir U birim vektörü herzaman vardır. U birim vektörü

$$U = T + \frac{k_1}{k_2} B_1 + \frac{1}{k_3} \left(\frac{k_1}{k_2}\right)' B_2$$

şeklinde tanımlansın, (2.8) ifadesinin türevi kullanılarak $U' = 0$ bulunur. Buradan U bir sabit vektördür. Dolayısıyla α eğrisinin bir genel helis olduğu görülür.

Teorem 2.3.3. α birim hızlı eğrisinin $\mathbb{R}^4$'te bir genel helis olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$k_3 f(s) = \left(\frac{k_1}{k_2}\right)' \text{ ve } f'(s) = -k_3\left(\frac{k_1}{k_2}\right)$$

olacak şekilde bir f fonksiyonu olmasıdır (Yoon, 2012).

İspat: Kabul edelim ki α bir genel helis olsun. O halde Teorem 2.3.2'den $\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^2 + \left(\left(\frac{k_1}{k_2}\right)' \frac{1}{k_3}\right)^2$ ifadesi sabittir. Bu ifadenin türevinden

$$\left(\frac{k_1}{k_2}\right)\left(\frac{k_1}{k_2}\right)' + \left(\frac{1}{k_3}\left(\frac{k_1}{k_2}\right)'\right)\left(\frac{1}{k_3}\left(\frac{k_1}{k_2}\right)'\right)' = 0 \tag{2.9}$$

denklemi bulunur. Buradan

$$\frac{1}{k_3}\left(\frac{k_1}{k_2}\right)' = -\frac{\frac{k_1}{k_2}\left(\frac{k_1}{k_2}\right)'}{\left(\frac{1}{k_3}\left(\frac{k_1}{k_2}\right)'\right)'} \tag{2.10}$$

elde edilir. Eğer f fonksiyonu $f(s) = -\frac{\frac{k_1}{k_2}\left(\frac{k_1}{k_2}\right)'}{\left(\frac{1}{k_3}\left(\frac{k_1}{k_2}\right)'\right)'}$ şeklinde tanımlanırsa, (2.10)

$$\frac{1}{k_3}\left(\frac{k_1}{k_2}\right)' = f(s)$$

olur.

Diğer taraftan (2.9) denkleminden

$$\left(\frac{1}{k_3}\left(\frac{k_1}{k_2}\right)'\right)' = -\left(\frac{k_1}{k_2}\right)k_3 \tag{2.11}$$

dir. $\frac{1}{k_3}\left(\frac{k_1}{k_2}\right)' = f(s)$ ’den (2.11) ifadesi,

$$f'(s) = -\left(\frac{k_1}{k_2}\right)k_3$$

olur.

Tersine kabul edelim ki $k_3 f(s) = \left(\frac{k_1}{k_2}\right)'$ ve $f'(s) = -k_3\left(\frac{k_1}{k_2}\right)$ ifadeleri için bir f fonksiyonu var olsun ve U birim vektörü $U = T + \frac{k_1}{k_2}B_1 + f\,B_2$ şeklinde tanımlansın. O halde $\langle T,U\rangle = 1$ dır. Dolayısıyla α eğrisi bir genel helistir.

Teorem 2.3.4. α birim hızlı eğrisinin bir genel helis olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$\frac{k_1}{k_2} = C_1\cos t + C_2\sin t \tag{2.12}$$

olmasıdır. Burada C_1, C_2 sabit ve $t(s) = \int_0^s k_3 ds$ dir (Yoon, 2012).

İspat: Kabul edelim ki α, bir genel helis olsun. Teorem 2.3.3 kullanılarak $t(s)$, C^2 -fonksiyonu ve $m(s)$, $n(s)$, C^1 – fonksiyonları

$$t(s) = \int_0^s k_3 ds, \tag{2.13}$$

$$\begin{aligned} m &= \frac{k_1}{k_2}\cos t - f(s)\sin t, \\ n &= \frac{k_1}{k_2}\sin t + f(s)\cos t \end{aligned} \tag{2.14}$$

şeklinde verilsin. $k_3 f(s) = \left(\dfrac{k_1}{k_2}\right)'$, $f'(s) = -k_3\left(\dfrac{k_1}{k_2}\right)$ ve (2.13) ifadelerinden $m' = n' = 0$ bulunur. Buradan $m = C_1$ ve $n = C_2$ gibi sabit fonksiyonlardır. Böylece (2.14) ifadesinden $C_1 \cos t + C_2 \sin t = \dfrac{k_1}{k_2}$ elde edilir.

Tersine $C_1 \cos t + C_2 \sin t = \dfrac{k_1}{k_2}$ ifadesi var olsun. O halde (2.14)'ten $C_2 \cos t - C_1 \sin t = f(s)$ bulunur. Teorem 2.3.3'den α eğrisinin bir genel helis olduğu görülür.

2.4. 4-Boyutlu Öklid Uzayında B_2 −Slant Helisler

Bu bölümde dört boyutlu Öklid uzayında B_2-slant helislerin tanımı ve ilgili bazı teoremler verilmiştir.

$\alpha : I \to \mathbb{E}^4$, eğrilikleri sıfırdan farklı birim hızlı bir eğri ve Frenet elemanları, $\{T, N, B_1, B_2\}$ olsun.

Tanım 2.4.1. $\alpha : I \to \mathbb{E}^4$ eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki esas birim normal vektörü $N(s)$, bir U birim vektörü ile sabit bir θ açısı yapıyorsa, α eğrisine slant helis denir (Izumiya ve Takeuchi, 2004).

Tanım 2.4.2. $\alpha : I \to \mathbb{E}^4$ eğrisinin $\alpha(s)$ noktasında ikinci birim binormal vektörü $B_2(s)$, bir U birim vektörü ile sabit bir θ açısı yapıyorsa yani eğri boyunca

$$\langle B_2(s), U\rangle = \cos\theta,$$

ise α eğrisi B_2-slant helis olarak adlandırılır (Önder ve ark., 2008).

Teorem 2.4.3 Birim hızlı bir α eğrisi $\mathbb{R}^4$ uzayında bir B_2-slant helis olabilmesi için gerek ve şart

$$\left(\frac{k_3}{k_2}\right)^2 + \frac{1}{k_1^2}\left(\left(\frac{k_3}{k_2}\right)'\right)^2 = \tan^2\theta = \text{sabit}$$

denkleminin var olmasıdır. Burada θ, ikinci birim binormal vektör B_2 ile bir U birim sabit vektörü arasındaki sabit açıdır (Önder ve ark., 2008).

İspat: Kabul edelim ki α eğrisi bir B_2-slant helis olsun. O halde Frenet formüllerini kullanarak $\langle B_2,U\rangle=\cos\theta$ ifadesinin türevinden

$$-k_3\langle B_1,U\rangle=0$$

bulunur.

$$k_3\neq 0$$

olduğundan $\langle B_1,U\rangle=0$ dır. Yani $U\in Sp\{T,N,B_2\}$ dır. Buradan

$$U=a_1T+a_2N+a_3B_2 \tag{2.15}$$

şeklinde yazılabilir.

$a_1(s)=\langle U,T\rangle,\quad a_2(s)=\langle U,N\rangle,\quad a_3(s)=\langle U,B_2\rangle=\cos\theta(s)=$sabittir. U birim olduğundan

$$a_1^{\,2}+a_2^{\,2}+a_3^{\,2}=1 \tag{2.16}$$

dir. (2.15) ifadesinin türevinden

$$\frac{dU}{ds}=\left(\frac{da_1}{ds}-a_2k_1\right)T+\left(a_1k_1+\frac{da_2}{ds}\right)N+\left(a_2k_2-a_3k_3\right)B_1=0 \tag{2.17}$$

denklemi elde edilir. (2.17) den

$$a_2=\frac{1}{k_1}\frac{da_1}{ds}=a_3\frac{k_3}{k_2}\quad ,$$

$$\frac{da_2}{ds}=-a_1k_1$$

elde edilir. Buradan

$$a_2=\frac{1}{k_1}\frac{da_1}{ds}$$

ifadesinin türevinden (2.18) ifadesi,

$$\frac{da_2}{ds}=-\frac{k_1'}{k_1^2}\frac{da_1}{ds}+\frac{1}{k_1}\frac{d^2a_1}{ds^2}\Rightarrow\frac{1}{k_1}\frac{d^2a_1}{ds^2}-\frac{k_1'}{k_1^2}\frac{da_1}{ds}-\frac{da_2}{ds}=0,$$

$$\Rightarrow\frac{d^2a_1}{ds^2}-\frac{k_1'}{k_1}\frac{da_1}{ds}-k_1\frac{da_2}{ds}=0,$$

$$\Rightarrow\frac{d^2a_1}{ds^2}-\frac{k_1'}{k_1}\frac{da_1}{ds}+k_1^2a_1=0 \tag{2.19}$$

şeklinde ikinci dereceden diferensiyel denklem olur. $t=\int_0^s k_1(s)\,ds$ ifadesinden (2.19) denklemi

$$\frac{d^2a_1}{dt^2}+a_1=0$$

olur. A ve B sabit fonksiyonlar olmak üzere bu denklemin çözümünden

$$a_1=A\cos\int_0^s p(s)\,ds+B\sin\int_0^s p(s)\,ds \tag{2.20}$$

bulunur. (2.20)'den (2.18) ifadesi

$$a_2=\frac{k_3}{k_2}a_3=-A\sin\int_0^s k_1(s)\,ds+B\cos\int_0^s k_1(s)\,ds,$$

$$a_1=-\frac{1}{k_1}\left(\frac{k_3}{k_2}\right)'a_3=A\cos\int_0^s k_1(s)\,ds+B\int_0^s k_1(s)\,ds$$

olur. Buradan

$$A=-a_3\left(\frac{k_3}{k_2}\sin\int_0^s k_1(s)\,ds+\frac{1}{k_1}\left(\frac{k_3}{k_2}\right)'\cos\int_0^1 k_1(s)\,ds\right),$$

$$B = a_3\left(\frac{k_3}{k_2}\cos\int_0^s k_1(s)\,ds - \frac{1}{k_1}\left(\frac{k_3}{k_2}\right)'\sin\int_0^s k_1(s)\,ds\right)$$

bulunur. Basit işlemlerle

$$A^2 + B^2 = a_3^{\,2}\left(\left(\frac{k_3}{k_2}\right)^2 + \frac{1}{k_1^{\,2}}\left(\frac{k_3}{k_2}\right)'^2\right)$$

elde edilir. Böylece (2.16) ve (2.18) ifadelerinden

$$A^2 + B^2 = \left[\left(\frac{k_3}{k_2}\right)^2 + \frac{1}{k_1^{\,2}}\left(\frac{k_3}{k_2}\right)'^2\right]\cos^2\theta = \sin^2\theta$$

yani

$$\left(\frac{k_3}{k_2}\right)^2 + \frac{1}{k_1^{\,2}}\left(\frac{k_3}{k_2}\right)'^2 = \tan^2\theta = \text{sabit} \qquad (2.22)$$

bulunur.

Tersine, $\left(\frac{k_3}{k_2}\right)^2 + \frac{1}{k_1^{\,2}}\left(\frac{k_3}{k_2}\right)'^2 = \tan^2\theta = \text{sabit}$ ifadesinin olduğunu kabul edelim. O halde daima $\langle B_2, U\rangle = \cos\theta$ olacak şekilde bir U birim vektörü vardır. U birim vektörü

$$U = \left[-\frac{1}{k_1}\left(\frac{k_3}{k_2}\right)' T + \frac{k_3}{k_2}N + B_2\right]\cos\theta$$

şeklinde tanımlansın. (2.22) eşitliğinin türevinden

$$\frac{dU}{ds} = \left(\frac{k_1'}{k_1^{\,2}}\left(\frac{k_3}{k_2}\right)' - \frac{1}{k_1}\left(\frac{k_3}{k_2}\right)'' - k_1\frac{k_3}{k_2}\right)T,$$

$$\frac{dU}{ds} = 0$$

bulunur. Buradan U sabit bir vektördür. Dolayısıyla α eğrisi dört boyutlu Öklid uzayında B_2-slant helis olarak bulunur.

Teorem 2.4.4. Birim hızlı bir α eğrisinin B_2-slant helis olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$f(s)k_1=\frac{d}{ds}\left(\frac{k_3}{k_2}\right) \text{ ve } \frac{d}{ds}f(s)=-k_1\frac{k_3}{k_2} \tag{2.23}$$

olacak şekilde bir C^2-fonksiyon f olmasıdır (Önder ve ark., 2008).

İspat: α eğrisinin bir B_2-slant helis olduğu kabul edilsin. O halde Teorem 2.4.3'den

$$\left(\frac{k_3}{k_2}\right)^2+\frac{1}{k_1^{\,2}}\left(\frac{k_3}{k_2}\right)^{\prime 2}=\text{sabit}$$

ifadesi vardır. Bu ifadenin türevinden

$$\left(\frac{k_3}{k_2}\right)\frac{d}{ds}\left(\frac{k_3}{k_2}\right)+\frac{1}{k_1}\frac{d}{ds}\left(\frac{k_3}{k_2}\right)\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{k_1}\frac{d}{ds}\left(\frac{k_3}{k_2}\right)\right)=0, \tag{2.24}$$

denklemi bulunur. Buradan

$$\frac{1}{k_1}\frac{d}{ds}\left(\frac{k_3}{k_2}\right)=-\frac{\left(\frac{k_3}{k_2}\right)\frac{d}{ds}\left(\frac{k_3}{k_2}\right)}{\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{k_1}\frac{d}{ds}\left(\frac{k_3}{k_2}\right)\right)} \tag{2.25}$$

elde edilir. f fonksiyonu,

$$f(s)=-\frac{\left(\frac{k_3}{k_2}\right)\left(\frac{k_3}{k_2}\right)'}{\left(\frac{1}{k_1}\left(\frac{k_3}{k_2}\right)'\right)'} \tag{2.26}$$

şeklinde tanımlanırsa, (2.25) ifadesi $\frac{1}{k_1}\left(\frac{k_3}{k_2}\right)'=f(s)$ olur. Buradan

$$\left(\frac{k_3}{k_2}\right)' = k_1 f(s) \tag{2.27}$$

elde edilir.

Diğer taraftan (2.24) denkleminden

$$\left(\frac{1}{k_1}\left(\frac{k_3}{k_2}\right)'\right)' = -k_1\frac{k_3}{k_2} \tag{2.28}$$

elde edilir. $\frac{1}{k_1}\left(\frac{k_3}{k_2}\right)' = f(s)$ 'den (2.28) ifadesi

$$\frac{d}{ds} f(s) = -k_1\frac{k_3}{k_2} \tag{2.29}$$

olur.

Tersine kabul edelim ki (2.27) ifadesi var olsun ve U birim vektörü $U = \cos\theta\left(-f(s)T + \frac{k_3}{k_2}N + B_2\right)$ şeklinde tanımlansın. Buradan $\langle B_2, U\rangle = \cos\theta$ $=$sabittir. Dolayısıyla α eğrisi B_2-slant helis olarak bulunur.

Teorem 2.4.5. Birim hızlı bir α eğrisinin B_2-slant helis olabilmesi için gerek ve yeter şart $\frac{k_3}{k_2} = A\cos\int_0^s k_1 ds + B\sin\int_0^s k_1 ds$ olmasıdır (Önder ve ark., 2008).

İspat: Birim hızlı α eğrisi bir B_2-slant helis olsun. O halde Teorem 2.4.4'den $\beta(s)$, C^2 fonksiyonu ve $m(s)$, $n(s)$, C^1 fonksiyonları

$$\beta(s) = \int_0^s k_1(s)ds\,, \tag{2.30}$$

$$\begin{aligned} m(s) &= \frac{k_3}{k_2}\cos\beta - f\sin\beta, \\ n(s) &= \frac{k_3}{k_2}\sin\beta + f\cos\beta \end{aligned} \tag{2.31}$$

şeklinde tanımlanabilir. $f(s)k_1 = \frac{d}{ds}\left(\frac{k_3}{k_2}\right)$, $\frac{d}{ds} f(s) = -k_1 \frac{k_3}{k_2}$ ve (2.30)

ifadelerinden,

$$
\begin{aligned}
\frac{dm}{ds} &= \frac{d}{ds}\left(\frac{k_3}{k_2}\cos\beta - f\sin\beta\right) \\
&= \left(\frac{k_3}{k_2}\right)'\cos\beta - \frac{k_3}{k_2}k_1\sin\beta + \frac{k_3}{k_2}k_1\sin\beta - \left(\frac{k_3}{k_2}\right)'\cos\beta \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{dn}{ds} &= \frac{d}{ds}\left(\frac{k_3}{k_2}\sin\beta + f\cos\beta\right) \\
&= \left(\frac{k_3}{k_2}\right)'\sin\beta + \left(\frac{k_3}{k_2}\right)k_1\cos\beta - \left(\frac{k_3}{k_2}\right)k_1\cos\beta - \left(\frac{k_3}{k_2}\right)'\sin\beta \\
&= 0
\end{aligned}
$$

olarak bulunur. Buradan m ve n fonksiyonları A ve B gibi sabit fonksiyonlardır. O halde (2.31)'den

$$\frac{k_3}{k_2} = A\cos\beta + B\sin\beta \tag{2.32}$$

bulunur.

Tersine $\frac{k_3}{k_2} = A\cos\int_0^s k_1 ds + B\sin\int_0^s k_1 ds$ ifadesi var olsun. O halde (2.31)'den

$$f = -A\sin\beta + B\cos\beta$$

bulunur. Teorem 2.4.4'den α eğrisi B_2-slant helis olarak bulunur.

3. 4-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA ÇATILANDIRILMIŞ GENEL HELİSLER

Bu bölümde çatılandırılmış genel helislerin tanımını ve bazı karekterizasyonları verildi.

Tanım 3.1. (γ,η), eğrilikleri sıfırdan farklı bir çatılandırılmış eğri ve $\{v,\eta_1,\eta_2,\eta_3\}$, γ eğrisinin uyarlanmış Frenet çatısı olsun. Eğrinin genelleştirilmiş teğet vektörü v, bir U birim vektörü ile sabit bir θ açısı yapıyor ise $(\gamma,\eta): I \to \mathbb{R}^4 \times \Delta_3$ bir çatılandırılmış genel helistir.

Teorem 3.2. (γ,η), $\mathbb{R}^4$'te bir çatılandırılmış eğrinin bir çatılandırılmış genel helis olabilmesi için gerek ve şart $\frac{p^2}{q^2}+\left(\frac{1}{r}\left(\frac{p}{q}\right)'\right)^2=\tan^2\theta=\text{sabit}$ olmasıdır.

İspat: Kabul edelim ki (γ,η) framed eğrisi bir genel helis ve bu helisin ekseni U birim vektörü olsun. O halde eğri boyunca $\langle v,U\rangle=\text{sabittir}$. Frenet formülleri kullanılarak bu ifadenin türevinden

$$\langle v',U\rangle=0,$$

$$p\langle \eta_1,U\rangle=0$$

denklemleri elde edilir. $p\neq 0$ olduğundan U vektörü,

$$U=a_1v+a_2\eta_2+a_3\eta_3 \tag{3.1}$$

şeklinde yazılır. Burada $a_1=\langle v,U\rangle=\text{sabit}$, $a_2=\langle \eta_2,U\rangle$, $a_2=\langle \eta_2,U\rangle$, $a_3=\langle \eta_3,U\rangle$ 'dır. U birim vektör olduğundan $a_1^2+a_2^2+a_3^2=1$ dir. (3.1) ifadesinin türevinden

$$U'=(a_1p-a_2q)\eta_1+(a_2'-a_3r)\eta_2+(a_2r+a_3')\eta_3=0 \tag{3.2}$$

bulunur. (3.2) eşitliğinden

$$a_2 = \frac{a_1}{q} p = -\frac{a_3^{'}}{r}, \tag{3.3}$$

$$a_2^{'} = a_3 r \tag{3.4}$$

elde edilir. $a_2 = -\frac{a_3^{'}}{r}$ ifadesinin türevi (3.4)'te yazılırsa

$$a_3^{''} - \frac{r'}{r} a_3^{'} + r^2 a_3 = 0 \tag{3.5}$$

denklemi bulunur. $t = \int_0^s r ds$ ifadesinden (3.5) denklemi

$$\frac{d^2 a_3}{dt^2} + a_3 = 0 \tag{3.6}$$

olur. Bu denklemin çözümünden

$$a_3 = A\cos t(s) + B\sin t(s) \tag{3.7}$$

bulunur. Burada A ve B sabit fonksiyonlardır. (3.7)'den (3.3) ve (3.4) ifadeleri,

$$a_2 = \frac{p}{q} a_1 = A\sin t(s) - B\cos t(s),$$

$$a_3 = \left(\frac{p}{q}\right)^{'} a_1 \frac{1}{r} = A\cos t(s) + B\sin t(s)$$

olur. Buradan

bulunur. Böylece

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 + \left(\left(\frac{p}{q}\right)^{'} \frac{1}{r}\right)^2 = \text{sabit} \tag{3.8}$$

elde edilir.

Tersine $\left(\frac{p}{q}\right)^2+\left(\left(\frac{p}{q}\right)'\frac{1}{r}\right)^2=\text{sabit}$ ifadesinin var olduğunu kabul edelim. O halde $\langle v,U\rangle=\text{sabit}$ olacak şekilde bir U birim vektörü her zaman vardır. U birim vektörü $U=v+\frac{p}{q}\eta_2+\frac{1}{r}\left(\frac{p}{q}\right)'\eta_3$ şeklinde tanımlansın. (3.8) eşitliğinden $U'=0$ dır. Buradan U sabit bir vektördür. Dolayısıyla (γ,η) çatılandırılmış eğrisi bir çatılandırılmış genel helis olarak bulunur.

Teorem 3.3. (γ,η) çatılandırılmış eğrisinin bir genel helis olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$rf(s)=\left(\frac{p}{q}\right)' \text{ ve } f'(s)=-r\left(\frac{p}{q}\right)$$

olacak şekilde bir f, C^2-fonksiyonunun var olmasıdır.

İspat: (γ,η)'nın bir çatılandırılmış genel helis olduğu kabul edilsin. O halde Teorem 3.2.'den $\left(\frac{p}{q}\right)^2+\left(\frac{1}{r}\left(\frac{p}{q}\right)'\right)^2=\text{sabit}$ vardır. Bu ifadenin türevinden

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{p}{q}\right)'+\left(\frac{1}{r}\left(\frac{p}{q}\right)'\right)\left(\frac{1}{r}\left(\frac{p}{q}\right)'\right)'=0 \tag{3.9}$$

bulunur. Buradan

$$\frac{1}{r}\left(\frac{p}{q}\right)'=-\frac{\frac{p}{q}\left(\frac{p}{q}\right)'}{\left(\frac{1}{r}\left(\frac{p}{q}\right)'\right)'} \tag{3.10}$$

elde edilir. f fonksiyonu $f(s)=-\frac{\frac{p}{q}\left(\frac{p}{q}\right)'}{\left(\frac{1}{r}\left(\frac{p}{q}\right)'\right)'}$ şeklinde tanımlanılırsa (3.10) ifadesi

$$\frac{1}{r}\left(\frac{p}{q}\right)' = f(s)$$

olur.

Diğer taraftan (3.9) denkleminden

$$\left(\frac{1}{r}\left(\frac{p}{q}\right)'\right)' = -\left(\frac{p}{q}\right)r \qquad (3.11)$$

elde edilir. $\frac{1}{r}\left(\frac{p}{q}\right)' = f(s)$ eşitliğinden (3.11) ifadesi

$$f'(s) = -\left(\frac{p}{q}\right)r$$

elde edilir.

Tersine $rf(s) = \left(\frac{p}{q}\right)'$ ve $f'(s) = -r\left(\frac{p}{q}\right)$ ifadeleri için bir f fonksiyonunun olduğu kabul edilsin ve U birim vektörü $U = v + \frac{p}{q}\eta_2 + f\eta_3$ şeklinde tanımlansın. O halde

$\langle v, U\rangle = 1$ dır. Dolayısıyla (γ,η) çatılandırılmış eğrisi bir çatılandırılmış genel helis olarak bulunur.

Teorem 3.4. (γ,η) çatılandırılmış eğrinin çatılandırılmış bir genel helis olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$\frac{p}{q} = C_1\cos t + C_2\sin t \qquad (3.12)$$

olmasıdır. Burada C_1, C_2 sabit fonksiyonlar ve $t(s) = \int_0^s r\,ds$ dir.

İspat: (γ,η) çatılandırılmış eğrinin bir çatılandırılmış genel helis olduğunu kabul edelim. Teorem 3.2 den $t(s)$, C^2 – fonksiyon ve $m(s)$, $n(s)$, C^1-fonksiyonları

$$t(s)=\int_0^s r\,ds\,, \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned} m&=\frac{p}{q}\cos t-f(s)\sin t,\\ n&=\frac{p}{q}\sin t+f(s)\cos t \end{aligned} \tag{3.14}$$

şeklinde verilsin. $rf(s)=\left(\dfrac{p}{q}\right)'$, $f'(s)=-r\left(\dfrac{p}{q}\right)$ ve (3.13) ifadelerinden $m'=n'=0$ bulunur. Buradan $m=C_1$ ve $n=C_2$ gibi sabitlerdir. Böylece (3.14) ifadesinden $C_1\cos t+C_2\sin t=\dfrac{p}{q}$ bulunur.

Tersine $C_1\cos t+C_2\sin t=\dfrac{p}{q}$ ifadesinin var olduğu kabul edilsin. O halde (3.14) ifadesinden

$$C_2\cos t-C_1\sin t=f(s)$$

bulunur. O halde Teorem 3.3'den (γ,η) çatılandırılmış eğrisi bir çatılandırılmış genel helis olduğu görülür.

4. 4-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA ÇATILANDIRILMIŞ $\eta_3 -$SLANT HELİSLER

Bu bölümde çatılandırılmış $\eta_3 -$slant helislerin tanımını ve bazı karakterizasyonları verildi.

$(\gamma,\eta): I \to \mathbb{R}^4 \times \Delta_3$ genelleştirilmiş eğrilikleri sıfırdan faklı bir çatılandırılmış eğri ve Frenet elemanları $\{v,\eta_1,\eta_2,\eta_3\}$ olsun.

Tanım 4.1. $(\gamma,\eta): \mathrm{I} \to \mathbb{R}^4 \times \Delta_3$ çatılandırılmış eğrinin genelleştirilmiş ikinci binormal vektörü η_3, bir U birim vektörü ile sabit bir θ açısı yapıyorsa, (γ,η) çatılandırılmış eğri bir çatılandırılmış $\eta_3 -$slant helis olarak adlandırılır.

Teorem 4.2. $(\gamma,\eta): \mathrm{I} \to \mathbb{R}^4 \times \Delta_3$ çatılandırılmış eğrisinin, çatılandırılmış $\eta_3 -$slant helis olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$\left(\frac{r}{q}\right)^2 + \frac{1}{p^2}\left(\frac{r}{q}\right)'^2 = \tan^2\theta = \text{sabit}$$

ifadesinin var olmasıdır. Burada θ, genelleştirilmiş ikinci birim binormal vektörü η_3 ile sabit U birim vektörü arasındaki sabit açıdır.

İspat: $(\gamma,\eta): \mathrm{I} \to \mathbb{R}^4 \times \Delta_3$ çatılandırılmış eğrisi bir çatılandırılmış $\eta_3 -$slant helis olsun. O halde $\langle \eta_3, U\rangle = \cos\theta$ ifadesi sabittir. Frenet formülleri kullanılarak bu ifadenin türevinden

$$\langle -r\eta_2, U\rangle = 0$$

bulunur. $r \neq 0$ olduğundan U, $Sp\{v,\eta_1,\eta_3\}$ alt uzayındadır ve U aşağıdaki gibi verilir.

$$U = a_1 v + a_2\eta_1 + a_3\eta_3, \tag{4.1}$$

burada $a_1 = \langle U, v \rangle$, $a_2 = \langle U, \eta_1 \rangle$ ve $a_3 = \langle U, \eta_3 \rangle = \cos\theta(s) = \text{sabittir.}$ U birim vektör olduğundan

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1 \tag{4.2}$$

dir. (4.1) ifadesinin türevinden

$$\frac{dU}{ds} = \left(\frac{da_1}{ds} - a_2 p \right) v + \left(a_1 p + \frac{da_2}{ds} \right) \eta_1 + \left(a_2 q - a_3 r \right) \eta_2 = 0, \tag{4.3}$$

elde edilir. (4.3) denkleminden

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{1}{p}\frac{da_1}{ds} = a_3 \frac{r}{q}, \\ \frac{da_2}{ds} &= -a_1 p \end{aligned} \tag{4.4}$$

bulunur. Buradan $a_2 = \frac{1}{p}\frac{da_1}{ds}$ ifadesinin türevi ve basit işlemlerle (4.4) ifadesi,

$$\frac{d^2 a_1}{ds^2} - \frac{p'}{p}\frac{da_1}{ds} + a_1 p^2 = 0 \tag{4.5}$$

şeklinde ikinci dereceden bir diferensiyel denklem olur. $t = \int_0^s p(s)\,ds$ için (4.5) denklemi

$$\frac{d^2 a_1}{dt^2} + a_1 = 0$$

olur. A ve B sabit fonksiyonlar olmak üzere bu denklemin çözümünden

$$a_1 = A \cos \int_0^s p(s)\,ds + B \sin \int_0^s p(s)\,ds, \tag{4.6}$$

elde edilir. (4.6) ifadesi (4.4)'de kullanıldığında

$$a_2 = \frac{r}{q} a_3 = -A\sin\int_0^s p(s)\,ds + B\cos\int_0^s p(s)\,ds,$$

$$a_1 = -\frac{1}{p}\left(\frac{r}{q}\right)' a_3 = A\cos\int_0^s p(s)\,ds + B\int_0^s p(s)\,ds$$

bulunur. Bu ifadeler düzenlenirse

$$A = -a_3\left(\frac{r}{q}\sin\int_0^s p(s)\,ds + \frac{1}{p}\left(\frac{r}{q}\right)'\cos\int_0^1 p(s)\,ds\right),$$

$$B = a_3\left(\frac{r}{q}\cos\int_0^s p(s)\,ds - \frac{1}{p}\left(\frac{r}{q}\right)'\sin\int_0^s p(s)\,ds\right) \tag{4.7}$$

elde edilir. Buradan

$$a_3^{\,2} = \cos^2\theta \tag{4.8}$$

olduğu görülür. O halde (4.2) ve (4.4) eşitlikleri yardımıyla (4.7) ifadesini düzenlenirse

$$A^2 + B^2 = \left[\left(\frac{r}{q}\right)^2 + \frac{1}{p^2}\left(\frac{r}{q}\right)'^2\right]\cos^2\theta = \sin^2\theta$$

elde edilir. Yani

$$\left(\frac{r}{q}\right)^2 + \frac{1}{p^2}\left(\frac{r}{q}\right)'^2 = \tan^2\theta = \text{sabit} \tag{4.9}$$

olur.

Tersine, $\left(\frac{r}{q}\right)^2 + \frac{1}{p^2}\left(\frac{r}{q}\right)'^2 = \tan^2\theta = \text{sabit}$ ifadesinin var olduğunu kabul edelim. O halde daima $\langle \eta_3, U\rangle = \cos\theta$=sabit olacak şekilde bir U birim vektörü vardır. U birim vektörü

$$U=\left[-\frac{1}{p}\left(\frac{r}{q}\right)' v+\frac{r}{q}\eta_1+\eta_3\right]\cos\theta$$

şeklinde tanımlansın. (4.8)'in türevinden U vektörünün türevi

$$\frac{dU}{ds}=\left(\frac{p'}{p^2}\left(\frac{r}{q}\right)'-\frac{1}{p}\left(\frac{r}{q}\right)''-p\frac{r}{q}\right)v,$$

$$\frac{dU}{ds}=0$$

bulunur. Buradan U sabit bir vektördür. O halde (γ,η) çatılandırılmış eğrisi dört boyutlu Öklid uzayında bir çatılandırılmış η_3-slant helis olarak bulunur.

Teorem 4.3. (γ,η) çatılandırılmış eğrisinin bir çatılandırılmış η_3-slant helis olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$f(s)\,p=\frac{d}{ds}\left(\frac{r}{q}\right) \text{ ve } \frac{d}{ds}f(s)=-p\frac{r}{q} \tag{4.10}$$

olacak şekilde bir C^2-fonksiyon f olmasıdır.

İspat: (γ,η) çatılandırılmış eğrisinin bir çatılandırılmış η_3-slant helis olduğu kabul edilsin. O halde Teorem 4.2'den

$$\left(\frac{r}{q}\right)^2+\frac{1}{p^2}\left(\frac{r}{q}\right)'^2=\tan^2\theta=\text{sabittir.}$$

vardır. Bu ifadenin türevinden

$$\left(\frac{r}{q}\right)\frac{d}{ds}\left(\frac{r}{q}\right)+\frac{1}{p}\frac{d}{ds}\left(\frac{r}{q}\right)\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{p}\frac{d}{ds}\left(\frac{r}{q}\right)\right)=0 \tag{4.11}$$

denklemi elde edilir. Buradan

$$\frac{1}{p}\frac{d}{ds}\left(\frac{r}{q}\right)=-\frac{\left(\frac{r}{q}\right)\frac{d}{ds}\left(\frac{r}{q}\right)}{\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{p}\frac{d}{ds}\left(\frac{r}{q}\right)\right)} \tag{4.12}$$

bulunur. f fonksiyonu

$$f(s)=-\frac{\left(\frac{r}{q}\right)\left(\frac{r}{q}\right)'}{\left(\frac{1}{p}\left(\frac{r}{q}\right)'\right)'} \tag{4.13}$$

şeklinde tanımlanırsa, (4.12) ifadesinden $\frac{1}{p}\left(\frac{r}{q}\right)' = f(s)$ bulunur. Buradan

$$\left(\frac{r}{q}\right)' = pf(s) \tag{4.14}$$

elde edilir.

Diğer taraftan (4.11) denkleminden

$$\left(\frac{1}{p}\left(\frac{r}{q}\right)'\right)' = -p\frac{r}{q} \tag{4.15}$$

elde edilir. (4.14) eşitliğini (4.15) de yerine yazıldığında

$$f'(s)=-p\frac{r}{q} \tag{4.16}$$

olur.

Tersine kabul edelim ki (4.14) ifadesi sağlansın ve U birim vektörü $U=\cos\theta\left(-f(s)v+\frac{r}{q}\eta_1+\eta_3\right)$ şeklinde tanımlansın. Buradan $\langle\eta_3,U\rangle=\cos\theta$ ifadesi sabittir. O halde (γ,η) çatılandırılmış eğrisi bir çatılandırılmış η_3-slant helis olarak bulunur.

Teorem 4.4. (γ,η) çatılandırılmış eğrinin bir çatılandırılmış η_3-slant helis olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$\frac{r}{q}=A\cos\beta(s)+B\sin\beta(s) \tag{4.17}$$

olmasıdır.

İspat: (γ,η) çatılandırılmış eğrisinin bir çatılandırılmış η_3-slant helis olduğu kabul edilsin. O halde Teorem (4.3)'den $\beta(s)$, C^2-fonksiyonu ve $m(s)$, $n(s)$, C^1-fonksiyonları

$$\beta(s)=\int_0^s p(s)ds \tag{4.18}$$

$$\begin{aligned} m&=\frac{r}{q}\cos\beta-f\sin\beta,\\ n&=\frac{r}{q}\sin\beta+f\cos\beta \end{aligned} \tag{4.19}$$

vardır. (4.17) ve (4.18) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}\frac{dm}{ds}&=\frac{d}{ds}\left(\frac{r}{q}\cos\beta-f\sin\beta\right)\\ &=\left(\frac{r}{q}\right)'\cos\beta-\frac{r}{q}\sin\beta p+\frac{r}{q}\sin\beta p-\left(\frac{r}{q}\right)'\cos\beta\\ &=0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dn}{ds}&=\frac{d}{ds}\left(\frac{r}{q}\sin\beta+f\cos\beta\right)\\ &=\left(\frac{r}{q}\right)'\sin\beta+\left(\frac{r}{q}\right)\cos\beta p-\left(\frac{r}{q}\right)\cos\beta p-\left(\frac{r}{q}\right)'\sin\beta\\ &=0\end{aligned}$$

bulunur. Buradan $m(s)=A$ ve $n(s)=B$ gibi sabit fonksiyonlardır. O halde (4.19) ifadesi $\frac{r}{q}$ için çözüldüğünde

$$\frac{r}{q} = A\cos\beta + B\sin\beta \tag{4.20}$$

bulunur.

Tersine (4.17) ifadesi var olsun. O halde (4.19) ifadesinden

$$f = -A\sin\beta + B\cos\beta$$

bulunur. Teorem 4.3'den (γ,η) çatılandırılmış eğrisi bir çatılandırılmış η_3-slant helis olarak bulunur.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmanın üçüncü bölümünde $4-$boyutlu Öklid uzayında çatılandırılmış genel helislerin tanımı ve p,q,r genelleştirilmiş eğrilikleri cinsinden, sabit değerli bir denklemin sağlanması halinde, bir çatılandırılmış genel helis olabilmesi için gerek ve yeter şart verilmiştir. Daha sonra bu teoremden yararlanılarak $rf(s)=\left(\frac{p}{q}\right)'$ ve $f'(s)=-r\left(\frac{p}{q}\right)$ ifadeleri için ikinci dereceden diferensiyellenebilir bir f fonksiyonunun bulunması halinde çatılandırılmış eğrinin bir çatılandırılmış genel helis olabilmesinin gerek ve yeter şartı verilmiştir. Son olarak ise birinci dereceden m, n ve ikinci dereceden t fonksiyonları yardımıyla elde edilen belli bir eşitliğin sağlanması halinde çatılandırılmış eğrinin bir çatılandırılmış genel helis olabilmesi için gerek ve yeter şart verilmiştir.

Dördüncü bölümde ise ilk olarak dört boyutlu Öklid uzayında çatılandırılmış η_3-slant helislerin tanımı verilmiştir. Ardından, bir teorem ile çatılandırılmış eğrinin p,q,r genelleştirilmiş eğrilikleri cinsinden elde edilen sabit değerli bir $\left(\frac{r}{q}\right)^2+\frac{1}{p^2}\left(\frac{r}{q}\right)'^2$ denklemin sağlanması halinde çatılandırılmış eğrinin bir çatılandırılmış η_3-slant helis olabilmesi için gerek ve yeter şart verilmiştir. Bu teoremden hareketle $f(s)\,p=\frac{d}{ds}\left(\frac{r}{q}\right)$ ve $\frac{d}{ds}f(s)=-p\frac{r}{q}$ şeklinde elde edilen denklemler için ikinci dereceden diferensiyellenebilir bir f fonksiyonunun bulunması halinde çatılandırılmış eğrinin bir çatılandırılmış η_3-slant helis olabilmesi için gerek ve yeter şart verilmiştir. Son olarak birinci ve ikinci dereceden fonksiyonlar yardımıyla elde edilen eşitliğin sağlanması halinde bu eğrinin çatılandırılmış bir η_3-slant helis olabilmesi için gerek ve yeter şart verilmiştir.

Bu tezde çalışmış olduğumuz $4-$boyutlu Öklid uzayında uyarlanmış çatı ile çatılandırılmış genel helis ve çatılandırılmış η_3-slant helisler konusu yine dört boyutlu Öklid uzayında darboux çatı ve bishop çatı ile çalışılabilir.

KAYNAKLAR

Ali, A.T. (2012). Position vectors of slant helices in Euclidean 3–Space. *J. Egyptian Math. Soc.*, 20(1), 1-6. https://doi.org/10.1016/j.joems.2011.12.005

Ali, A. T., & López, R. (2009). Slant helices in Euclidean 4-space $\mathbb{E}^4$. *arXiv preprint arXiv:0901.3324*. https://doi.org/10.48550/arXiv.0901.3324

Akyiğit, M., & Yıldız, Ö. G. (2021). On the Framed Normal Curves in Euclidean 4-space. *Fundamental Journal of Mathematics and Applications*, 4(4), 258-263. https://doi.org/10.33401/fujma.992917

Bär, C. (2010). *Elementary differential geometry*. Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9780511844843

Barros, M. (1997). General helices and a theorem of Lancret. *Proceedings of the American Mathematical Society, 125*(5), 1503-1509. S 0002-9939(97)03692-7

Barros, M., & Ferrández, A. (2009). A conformal variational approach for helices in nature. *Journal of Mathematical Physics, 50*(10), 103529. https://doi.org/10.1063/1.3236683

Bulut, F., & Bektaş, M. (2020). Special helices on equiform differential geometry of spacelike curves in Minkowski space-time. *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics*, *69*(2), 1045-1056. https://doi.org/10.31801/cfsuasmas.686311

Chouaieb, N., Goriely, A., & Maddocks, J. H. (2006). Helices. *Proceedings of the National Academy of Sciences, 103*(25), 9398-9403. https://doi.org/10.1073/pnas.0508370103

Forterre, Y., & Dumais, J. (2011). Generating helices in nature. *Science, 333*(6050), 1715-1716. https://doi.org/10.1126/science.1210734

Gluck, H. (1966). Higher curvatures of curves in Euclidean space. *The American Mathematical Monthly, 73*(7), 699-704. https://doi.org/10.1080/00029890.1966.11970818

Gök, İ., Okuyucu, O. Z., Kahraman, F., & Hacisalihoğlu, H. H. (2011). On the quaternionic B_2-slant helices in the Euclidean space $\mathbb{E}^4$. *Advances in Applied Clifford Algebras, 21*(4), 707-719. http://dx.doi.org/10.1007/s00006-011-0284-6

Gray, A. (1997). *Modern differential geometry of curves and surfaces with Mathematica* (2nd ed.). CRC press.

Hacısalihoğlu, H.H. (1993). *Diferensiyel Geometri* (1.Cilt, 2. Baskı). Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları.

Honda, S. I., & Takahashi, M. (2016). Framed curves in the Euclidean space. *Advances in geometry*, *16*(3), 265-276. https://doi.org/10.1515/advgeom-2015-0035

Izumiya, S., & Takeuchi, N. (2004). New special curves and developable surfaces. *Turkish Journal of Mathematics*, *28*(2), 153-164. https://journals.tubitak.gov.tr/math/vol28/iss2/6

Kocayiğit, H., & Önder, M. (2007). Timelike curves of constant slope in Minkowski space. *J. Science Techn. Beykent Üni*, *1*, 311-318.

Kula, L., Ekmekci, N., Yaylı, Y., & İlarslan, K. (2010). Characterizations of slant helices in Euclidean 3-space. *Turkish Journal of Mathematics*, *34*(2), 261-274. https://doi.org/10.3906/mat-0809-17

Kula, L., & Yayli, Y. (2005). On slant helix and its spherical indicatrix. *Applied Mathematics and Computation*, *169*(1), 600-607. https://doi.org/10.1016/j.amc.2004.09.078

Lancret, M. A. (1806). Mémoire sur les courbesa double courbure. *Memoires presentes alInstitut*, 1, 416-454.

Mağden, A. (1990). *Characterizations of some special curves in* $\mathbb{E}^4$ [Doktora Tezi]. Atatürk Universitesi.

Mağden, A. (1993). On the curves of constant slope. *YYÜ Fen Bilimleri Dergisi, 4,* 103-109.

Önder, M., Kazaz, M., Kocayiğit, H., & Kılıç, O. (2008). B_2-slant helix in Euclidean $4-$space $\mathbb{E}^4$. *Int. J. Cont. Math. Sci*, *3*(29), 1433-1440

Özyılmaz, E., & Yılmaz, S. (2009). Involute-evolute curve couples in the Euclidean 4-Space. *Int. J. Open Problems Compt. Math*, *2*(2), 168-174.

Struik, D. J. (1961). *Lectures on classical differential geometry* (2nd ed.). Courier Corporation.

Yoon, D. W. (2012). On the quaternionic general helices in Euclidean 4-space. *Honam Mathematical Journal*, *34*(3), 381-390. http://dx.doi.org/10.5831/HMJ.2012.34.3.381

ÖZGEÇMİŞ

Ad-Soyad :Mine Ateş

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans** : 2019, Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik.
- **Yükseklisans** **:** 2022, Sakarya Üniversitesi, Matematik, Geometri**.**