

**T.C.  
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**DİSORİENTED DÜĞÜM TEORİSİNİN TEMEL KAVRAMLARI**

**DOKTORA TEZİ**

**Hatice PARLATICI**

**Matematik Anabilim Dalı**

**Topoloji Bilim Dalı**

**OCAK 2023**



**T.C.  
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**DİSORİENTED DÜĞÜM TEORİSİNİN TEMEL KAVRAMLARI**

**DOKTORA TEZİ**

**Hatice PARLATICI**

**Matematik Anabilim Dalı**

**Topoloji Bilim Dalı**

**Tez Danışmanı: Prof. Dr. Soley ERSOY**

**Ortak Danışman: Prof. Dr. İsmet ALTINTAŞ**

**OCAK 2023**



Hatice Parlaticı tarafından hazırlanan “Disoriented Dügüm Teorisinin Temel Kavramları” adlı tez çalışması 16.01.2023 tarihinde aşğıdaki jüri tarafından oy birliğı/oy çokluğu ile Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Topoloji Bilim Dalı’nda Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

### Tez Jürisi

<b>Jüri Başkanı :</b>	<b>Prof. Dr. Soley ERSOY</b> (Danışman) Sakarya Üniversitesi	.....
<b>Jüri Üyesi :</b>	<b>Prof. Dr. Selma ALTUNDAĞ</b> Sakarya Üniversitesi	.....
<b>Jüri Üyesi :</b>	<b>Prof. Dr. Davut AVCI</b> Sakarya Üniversitesi	.....
<b>Jüri Üyesi :</b>	<b>Doç. Dr. Merve İLKHAN KARA</b> Düzce Üniversitesi	.....
<b>Jüri Üyesi :</b>	<b>Dr. Öğr. Üyesi Kemal TAŞKÖPRÜ</b> Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi	.....



## **ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ**

Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Eğitim-Öğretim Yönetmeliğine ve Yükseköğretim Kurumları Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Yönergesine uygun olarak hazırlamış olduğum “DİSORİENTED DÜĞÜM TEORİSİNİN TEMEL KAVRAMLARI” başlıklı tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın tüm aşamalarında yukarıda belirtilen yönetmelik ve yönergeye uygun davrandığımı, tezin içerdiği yenilik ve sonuçları başka bir yerden almadığımı, tezde kullandığım eserleri usulüne göre kaynak olarak gösterdiğimi, bu tezi başka bir bilim kuruluna akademik amaç ve unvan almak amacıyla vermediğimi ve 20.04.2016 tarihli Resmi Gazete’de yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince Sakarya Üniversitesi’nin aboneliği olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Enstitü tarafından belirlenmiş ölçütlere uygun rapor alındığımı, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun ortaya çıkması halinde doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi beyan ederim.

(16/01/2023)

(imza)

Hatice PARLATICI





*Rahmetli anneme ve kardeşime*



## **TEŞEKKÜR**

Doktora eğitimim boyunca bilgi ve tecrubesinden istifade ettiğim, desteklerini her zaman hissettiğim ortak danıőmanım Prof. Dr. İsmet ALTINTAŞ ve danıőmanım Prof. Dr. Soley ERSOY'a en içten teőekkürlerimi sunarım. Eğitim hayatımda önemli role sahip, yüksek lisans danıőmanım Prof. Dr. Mehmet Ali GÜNGÖR'e, katkıları için Dr. Öğr. Üyesi Kemal TAŞKÖPRÜ'ye ve bütün öğretmen ve öğretim üyelerime teőekkürü borç bilirim.

Eğitim hayatıma devam etmem için beni teővik eden, sonrasında yardımlarını esirgemeyen Zeliha KÖKSAL'a, araőtırmam sırasında veritabanları konusunda beni bilgilendiren Mehmet Ali YAR'a teşekkür ederim. Kırgız Türk-Manas Üniversitesi'ne KTMU-BAP-2021.FB.02 numaralı proje kapsamında verdikleri destekten dolayı teşekkür ederim.

Ayrıca çalıőmam boyunca bana katlanan babam Hamza PARLATICI'ya ve beni yetiőtiren aileme teőekkürlerimi iletirim.

Hatice PARLATICI



## İÇİNDEKİLER

### Sayfa

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ .....	v
TEŞEKKÜR .....	ix
SİMGELER .....	xiii
ŞEKİL LİSTESİ .....	xv
ÖZET .....	xvii
SUMMARY .....	xix
<b>1. GİRİŞ .....</b>	<b>1</b>
1.1. Literatür Özeti .....	1
1.2. Tezin Amacı .....	3
<b>2. TEMEL KAVRAMLAR .....</b>	<b>7</b>
2.1. Düğüm ve Halka .....	7
2.2. Düğümün Bazı İnvaryantları .....	10
2.3. Gauss Diyagramları .....	11
2.4. Bazı Polinom İnvaryantlar .....	13
2.5. Disoriented Düğüm ve Halka .....	16
2.6. Disoriented Düğüm Polinomları .....	18
<b>3. DİSORIENTED DÜĞÜMLERİ TANIMLAMA VE DİYAGRAMATİK METODLAR .....</b>	<b>21</b>
3.1. Disoriented Düğüm ve Halkaları Tanımlama .....	21
3.2. Disoriented Düğümlerin Bağlantılı Toplamı .....	24
3.3. Disoriented Reidemeister Hareketlerinin Minimum Üreteç Kümeleri .....	26
3.4. Disoriented Düğümler için Gauss Kodları ve Diyagramları .....	28
<b>4. DİSORIENTED HALKALAR İÇİN İKİ DEĞİŞKENLİ POLİNOM İNVARYANTI .....</b>	<b>33</b>
4.1. İki Değişkenli $M$ ve $N$ Polinomu .....	33
4.2. $M$ Polinomunun İyi Tanımlılığı ve Regüler İzotopi İnvaryantlığı .....	43
<b>5. SONUÇ VE ÖNERİLER .....</b>	<b>61</b>
<b>KAYNAKLAR .....</b>	<b>63</b>
<b>ÖZGEÇMİŞ .....</b>	<b>67</b>



## SİMGELER

$S^3$	: Üç boyutlu küre
$S^1$	: Birim çember
$lk(K_1, K_2)$	: Halkalanma sayısı
$w(D)$	: Burulma
$cw(D)$	: Tam burulma
$\langle D   S \rangle$	: Köşe ağırlıklarının normal çarpımı
$ S $	: S durumundaki çember sayısı
$K_1 \sqcup K_2$	: $K_1$ ve $K_2$ düğümlerinin ayırık birleşimi
$K_1 \# K_2$	: $K_1$ ve $K_2$ düğümlerinin bağlantılı toplamı





## ŞEKİL LİSTESİ

### Sayfa

Şekil 2.1. Yonca Yaprığı Düğümünün Tünel Komşuluğu.....	8
Şekil 2.2. Kavşak işaretleri. ....	8
Şekil 2.3. Reidemeister hareketleri. ....	9
Şekil 2.4. Üç bileşenli bir halka. ....	10
Şekil 2.5. İki bileşenli bir halka. ....	11
Şekil 2.6. Sekiz şekilli düğüm. ....	12
Şekil 2.7. Sekiz şekilli düğüm ve Gauss diyagramı.....	12
Şekil 2.8. Reidemeister hareketlerine karşılık gelen Gauss diyagramları. ....	13
Şekil 2.9. Kavşaklar ve ayırmalar. ....	14
Şekil 2.10. Yönlendirilmiş kavşaklar ve ayırma. ....	15
Şekil 2.11. I. tip Reidemeister hareketleri.....	16
Şekil 2.12. Disoriented çember.....	16
Şekil 2.13. Kavşaklar ve ayırmalar. ....	18
Şekil 2.14. Bazı disoriented I. Reidemeister hareketleri.....	20
Şekil 3.1. Bazı disoriented diyagramlar ve yer değiştirmeler.....	22
Şekil 3.2. Bazı disoriented yonca yaprağı düğümü diyagramları .....	23
Şekil 3.3. Yönlendirilmiş ve disoriented kavşaklar. ....	24
Şekil 3.4. İki disoriented düğümün bağlantılı toplamı.....	26
Şekil 3.5. Düzlemsel ve bazı I. tip disoriented Reidemeister hareketleri. ....	27
Şekil 3.6. Bazı II. tip disoriented Reidemeister hareketleri. ....	28
Şekil 3.7. Bazı III. tip disoriented Reidemeister hareketleri.....	28
Şekil 3.8. Sağ el yonca yaprağı düğümünün Gauss diyagramları.....	30
Şekil 3.9. Disoriented Reidemeister hareketlerinin minimum kümesine karşılık gelen Gauss diyagramları.....	31
Şekil 4.1. Diyagramlar, kavşaklar ve ayırmalar.....	34
Şekil 4.2. Bir kavşaklı aşikâr disoriented düğüm diyagramları.....	36
Şekil 4.3. İki bileşenli disoriented halka diyagramları. ....	37
Şekil 4.4. Disoriented kavşaklı disoriented yonca yaprağı düğümünün bir ayrışımı. ....	39
Şekil 4.5. Bir disoriented kavşaklı $(2, n)$ – tor düğümünün bir ayrışımı. ....	40
Şekil 4.6. İki disoriented kavşaklı sekiz şekilli düğümün bir ayrışımı. ....	41
Şekil 4.7. İki disoriented düğümün bağlantılı toplamı ve bazı diyagramlar.....	43
Şekil 4.8. i. kavşağın alt üst edilmesi ve ayırmalar.....	44
Şekil 4.9. Standart düğümlememiş düğüm elde etme.....	45
Şekil 4.10. Bir düğümün standart düğümlememiş düğüm durumları ve ayırmaları. ....	51
Şekil 4.11. Bir $\hat{K}(P)$ standart düğümünün bir kavşağı. ....	53
Şekil 4.12. $K(P)$ düğümünün bir alt kavşağının $\hat{K}(P)$ standart düğümünün bir kavşağına dönüşmesi.....	53
Şekil 4.13. $K(Q)$ diyagramının $\hat{K}(Q)$ diyagramına dönüşmesi. ....	54

Şekil 4.14. $K(P)$ diyagramının $\hat{K}(P)$ diyagramına dönüşmesi.....	55
Şekil 4.15. $K(Q)$ diyagramının $\hat{K}(Q)$ diyagramına dönüşmesi.....	55
Şekil 4.16. Kavşakta taban noktasının durumu.....	57
Şekil 4.17. Bir disoriented II. tip Reidemeister hareketi.....	58
Şekil 4.18. Taban noktası belirlenmiş bir disoriented II. tip Reidemeister hareketi..	58
Şekil 4.19. Taban noktası belirlenmiş bir disoriented II. tip Reidemeister hareketi..	59
Şekil 4.20. Bir disoriented II. tip Reidemeister hareketi ve ayrışımı.....	60
Şekil 4.21. Bir disoriented III. tip Reidemeister hareketi ve ayrışımı. ....	60

## DİSORIENTED DÜĞÜM TEORİSİNİN TEMEL KAVRAMLARI

### ÖZET

Bu tezin amacı, disoriented düğüm ve halkaların diyagramatik ve polinom invaryantlarını ortaya çıkararak disoriented düğüm teorisinin temellerini oluşturmaktır. Bu amaç doğrultusunda disoriented düğüm ve halka kavramı yeniden tanımlandı. İlk kez [1] de verilen disoriented düğüm tanımını genelleştiren bu yeni tanım sayesinde disoriented düğümlerin bağlantılı toplamı kolayca açıklandı ve bir düğümün tüm disoriented diyagramlarının sayısı belirlendi. Disoriented düğüm ve halka diyagramları için bütün Reidemeister hareketlerini üreten minimum üreteçler kümesi belirlendi. Bu minimum üreteçler kümesi disoriented düğümlerin ve halkaların invaryantlarını ispatlamak için bir temel yöntem olarak kullanıldı. Bu bağlamda ilk olarak disoriented düğüm ve halka diyagramları için Gauss kodları tanımlandı ve Gauss kodları yardımıyla disoriented çemberler üzerinde Gauss diyagramları çizildi. Disoriented Reidemeister hareketlerinin minimum üreteçler kümesinin her bir hareketine karşılık gelen Gauss kodu belirlendi ve Gauss diyagramları çizildi.

Disoriented düğüm ve halkaların diyagramatik invaryantları ortaya çıkarıldıktan sonra disoriented düğümlerin ve halkaların sınıflandırmasında çok önemli olan polinom invaryantları konusu ele alındı. Bu bağlamda, disoriented düğüm ve halka diyagramları için parantez polinomunun bir genellemesi olan iki değişkenli ve  $M$  adı verilen bir polinom tanımlandı ve bu polinomun iyi tanımlı bir regüler izotopi invaryantı olduğu ispatlandı. Bu polinomun, klasik düğüm ve halka diyagramları için regüler izotopinin önemli invaryantı olan Kauffman  $L$  polinomunu, disoriented düğüm teorisine genişlettiği görüldü.  $M$  polinomu tam burulma ile normalleştirilerek disoriented halka diyagramları için kuşatan izotopinin invaryantı olan ve  $N$  adı verilen bir polinom elde edildi. Bu normalleştirilmiş polinomun, hem disoriented halkalar için Jones polinomunun bir genellemesi olduğu hem de klasik düğüm teorisindeki Kauffman  $F$  polinomunu disoriented halka diyagramlarına genişlettiği görüldü. Aynı zamanda  $M$  ve  $N$  polinomlarının bazı temel özellikleri de ispatlandı ve birkaç disoriented düğüm ve halka diyagramının  $M$  ve  $N$  polinomları hesaplandı.

Bu tezden üretilen ve ISI veri tabanında taranan dergilerde yayımlanan iki makale ve [1] çalışması ile birlikte disoriented düğüm teorisinin temelleri büyük ölçüde atılmış oldu. Bu açıdan bu tez ve üretilen makaleler düğüm teorisinin gelişimi için kaynak teşkil edecek niteliktedir.



## BASIC CONCEPTS OF DISORIENTED KNOT THEORY

### SUMMARY

The aim of this thesis is to establish the basis of disoriented knot theory by finding out diagrammatic and polynomial invariants of disoriented knots and links. For this purpose, the following studies are carried out.

1. A disoriented circle with a  $2n$  arcs is defined and a disoriented knot is redefined as an embedding of a disoriented circle to 3-dimensional space or 3 dimensional sphere. All possible disoriented diagrams of the right hand trefoil knot are drawn (Figure 3.2). This new definition of the disoriented knot is a generalization of the disoriented knot definition given in [1].
2. Connected sum of disoriented knots is defined such that the disorientation is preserved and some properties of it are given. As an explanatory example, the connected sum of a disoriented trefoil knot and a disoriented figure eight knot is drawn (Figure 3.4).
3. The set of the Reidemeister moves which can be used as a fundamental method to find out invariants of disoriented knots and links is created (Figure 3.5, Figure 3.6 and Figure 3.7). The equivalence relation generated by  $\Omega_2$  and  $\Omega_3$  moves drawn in Figure 3.6 and Figure 3.7 (and planar moves) is named as regular isotopy and the equivalence relation generated by  $\Omega_1$  moves drawn in Figure 3.5 and  $\Omega_2$  and  $\Omega_3$  moves is named as ambient isotopy. In order to check whether a property is an invariant of disoriented knots and links, it is needed to examine behaviour of it under all Reidemeister moves. This process consumes too much time. Instead of this, it is necessary to determine minimum generating set of all the disoriented Reidemeister moves. In this regard, the set  $S = \{\Omega_1a, \Omega_1b, \Omega_1e, \Omega_1f, \Omega_2a, \Omega_2e, \Omega_2f, \Omega_2l, \Omega_3a_i : i \in \{0, \dots, 7\}\}$  is determined which generates all disoriented Reidemeister moves and has minimum generators. Thus, it is enough to investigate under the moves of the set  $S$  to check if a situation brought about is right.
4. The Gauss code of a disoriented knot diagram is defined via a similar method in classical knot theory as follows: Let  $K$  be a disoriented knot with  $n$  crossings and choose a starting point on  $K$ . Move on the diagram  $K$  according to its direction until arriving at first crossing. With arriving at first crossing, check whether the crossing is disoriented or not. Suppose that the crossing is disoriented. If it is overpass arc of the crossing and the orientation of the overpass arc is opposite to the orientation of the movement and the sign of the crossing is positive, indicate this situation with the symbol  $\bar{O}1+$ . If the sign of the crossing is negative, indicate this situation with  $\bar{O}1-$ . If it is underpass arc of the crossing, indicate this situation with  $\bar{U}1+$  or  $\bar{U}1-$  depending on the sign of the crossing. If the crossing is not disoriented, indicate this situation with  $O1+, O1-, U1+$  and  $U1-$  depending on the sign

of the crossing and the situation of the pass. When indicating all crossings and arriving again at the first crossing, each crossing is passed twice. If the first pass is over the overpass arc, the second pass is over the underpass arc (or vice versa). A sequence with  $2n$  symbols is created when composing all the consecutive symbols. This sequence is called the Gauss code of the disoriented knot diagram  $K$ .

5. In order to determine the equivalence of Gauss diagrams, it is important to determine Gauss diagrams corresponding to the disoriented Reidemeister moves. Therefore, it is enough to draw Gauss diagrams corresponding to the minimum generating set of the Reidemeister moves

$$S = \{\Omega 1a, \Omega 1b, \Omega 1e, \Omega 1f, \Omega 2a, \Omega 2e, \Omega 2f, \Omega 2i, \Omega 3a_i : i \in \{0, \dots, 7\}\}.$$

These diagrams are drawn in Figure 3.9.

6. Let  $K$  be a disoriented link diagram and  $M_K \in \mathbb{Z}[a, a^{-1}, z, z^{-1}]$  be a Laurent polynomial assigned to the diagram  $K$ . The polynomial  $M_K$  satisfies the following properties :

- i)  $M_K$  is an invariant of regular isotopy,
- ii)  $M_{\bigcirc} = 1$ ,
- iii)  $M_{I_+} = aM_{I_0}$ ,  $M_{I_-} = a^{-1}M_{I_0}$ ,
- iv)  $M_{I_+'} = a^{-1}M_{I_0'}$ ,  $M_{I_-' } = aM_{I_0'}$ ,
- v)  $M_{K_+} + M_{K_-} = z(M_{K_0} + M_{K_\infty})$ .

$\bigcirc$  indicates the unknot with zero crossing. The diagrams of  $I_+$ ,  $I_-$ ,  $I_0$ ,  $I_+'$ ,  $I_-'$ ,  $I_0'$ ,  $K_+$ ,  $K_-$ ,  $K_0$  and  $K_\infty$  are drawn in Figure 4.1.

To prove that the polynomial  $M_K$  is a well-defined Laurent polynomial, the induction method is applied. The operations of splicing and switching of the crossings are used. Let  $K$  be a disoriented link diagram and  $i$  be a crossing of it.

- i) Indicate the disoriented link diagram with  $T_iK$  if the crossing  $i$  is switched.
- ii) Indicate the disoriented link diagram with  $E_iK$  if the crossing  $i$  is spliced according to oriented orientation.
- iii) Indicate the disoriented link diagram with  $F_iK$  if the crossing  $i$  is spliced according to disoriented orientation. (Figure 4.8)

Thus, the following equation can be written for the polynomial  $M_K$  similar to the fifth axiom:

$$M_K + M_{T_iK} = z(M_{E_iK} + M_{F_iK})$$

The related axiom of the polynomial  $M_K$  is given such that it is a consequence of this equation and the polynomial  $M_K$  is given as a sequence of the some remarks (definitions and lemmas). Thus, it is proved that the polynomial  $M_K$  is well-defined and an invariant of regular isotopy with the help of these remarks.

Inductive definition: Let  $K$  be a disoriented link diagram with  $(n+1)$ -crossings. Label all crossings with  $0, 1, \dots, n$  in this diagram. The following equation list can be written:

$$\begin{aligned} M_K + M_{T_0K} &= z(M_{E_0K} + M_{F_0K}) \\ M_{T_0K} + M_{T_1T_0K} &= z(M_{E_1T_0K} + M_{F_1T_0K}) \\ &\vdots \\ M_{T_{n-1}\dots T_0K} + M_{T_n\dots T_0K} &= z(M_{E_nT_{n-1}\dots T_0K} + M_{F_nT_{n-1}\dots T_0K}). \end{aligned}$$

Let us indicate the consequence of switching all crossings with  $\hat{K} = T_n \dots T_0K$  and splicing process with  $A_iK = E_iT_{i-1} \dots T_0K$ ,  $B_iK = F_iT_{i-1} \dots T_0K$ . If the operations of addition and subtraction are applied

$$M_K = (-1)^{n+1} M_{\hat{K}} + z \left( \sum_{i=0}^n (-1)^i (M_{A_iK} + M_{B_iK}) \right)$$

is obtained. The best way to describe inductive definition is to use a standard unknot diagram related to a disoriented knot diagram with a directed base point. Standard unknot is constructed as follows:

Let  $K$  be a disoriented knot diagram,  $U$  be its planar projection and  $P$  be an interior point of an arc of the projection  $U$ . While moving through  $U$  with the direction of  $P$ , the first underpass crossing is changed to overpass crossing at every first meeting until to arrive the point  $P$ . Thus, the disoriented diagram  $\hat{K} = \hat{K}(U, P)$  is illustrated in Figure 4.9. The standard unknot  $\hat{K} = \hat{K}(U, P)$  can be used to generate a special unknotting sequence for the disoriented diagram  $K$ . Move on  $K$  starting from the base point  $P$  and label every crossing corresponding in  $\hat{K}$  which differs from  $K$ . Determine the crossings with a decreasing sequence of  $n, n-1, \dots, 0$ . Therefore  $\hat{K}$  is obtained from switching these crossings in  $K$  such that  $\hat{K} = T_n \dots T_0K$ . This switching sequence is determined with selecting a directed base point on  $K$ . Thus, the polynomial  $M$  for a standard unknot is given by the formula

$$M_{\hat{K}(U, P)} = a^{cw(\hat{K}(U, P))}.$$

Here,  $cw(\hat{K})$  is the complete writhe of the diagram  $\hat{K}$ . In this way, the value of  $M$  is related only to the standard unknot  $\hat{K} = \hat{K}(U, P)$ . Proving that this value is independent from the choice of base point  $P$  means that the polynomial  $M$  is well defined. It is shown that the polynomial  $M$  is independent from the base point in the part from Lemma 4.2.5 to Lemma 4.2.10. Also, in Lemma 4.2.11 it is proved that the polynomial  $M$  is an invariant of regular isotopy.

7. The polynomial  $N$ , which is an ambient isotopy invariant, is defined by normalizing the polynomial  $M$  with complete writhe as follows : Let  $K$  be a

disoriented knot diagram. A bivariate polynomial  $N_K$  is defined by the equality  $N_K = a^{-cw(K)}M_K$ . Here,  $cw(K)$  is the complete writhe of the disoriented knot  $K$ .

8. Some properties of the polynomials  $M$  and  $N$  are found as follows:

i) Let  $K$  be a disoriented knot or link diagram and  $K^*$  be its mirror image. In this case

$$M_{K^*}(a, z) = M_K(a^{-1}, z),$$

$$N_{K^*}(a, z) = N_K(a^{-1}, z).$$

ii) If  $K_1 \# K_2$  is connected sum of two disoriented knots, then

$$M_{K_1 \# K_2} = M_{K_1} M_{K_2}.$$

iii) If  $K_1 \sqcup K_2$  is disjoint union of two disoriented knots, then

$$M_{K_1 \sqcup K_2} = \delta M_{K_1} M_{K_2}, \quad \delta = (a + a^{-1})z^{-1} - 1.$$

9. The polynomial  $M$  is an expansion of Kauffman polynomial  $L$  in classical knot theory given in [2] to disoriented knot theory. The polynomial  $N$  is a generalization of Jones polynomial for disoriented knots and an expansion of Kauffman polynomial  $F$  to disoriented knot theory.



## 1. GİRİŞ

Disoriented düğüm teorisi henüz yeni çalışılan bir konudur. Bu sebepten disoriented düğüm teorisinin temellerini oluşturarak kaynak teşkil edecek nitelikte çalışmalar ortaya koymak oldukça önemlidir.

Bu tezde ele alınan disoriented düğüm kavramı, ilk olarak 2018 yılında İ. Altıntaş [1] tarafından ortaya atıldı. Altıntaş'ın çalışmasında, disoriented düğüm ve halka ile disoriented kavşak gibi yeni kavramlar tanımlandı. Disoriented düğüm teorisinde ileri sürülen bir iddianın doğruluğunun ispatında temel bir yöntem olarak kullanılan, disoriented diyagramlar için genelleştirilmiş Reidemeister hareketleri tam olarak verildi. Disoriented halkalar için halkalanma sayısı tanımlandı ve halkalanma sayısının invaryant olduğu ispatlandı ve tam burulma sayısı adıyla yeni bir sayısal kavram ortaya konuldu. Aynı zamanda disoriented düğümler için genelleştirilmiş parantez polinomu ve tam burulma yardımıyla normalleştirilen genelleştirilmiş Jones polinomu gibi polinom invaryantlar çalışıldı.

Bu tezin merkezinde yer alan temel araştırma konuları, disoriented düğüm teorisinde, klasik düğüm teorisinde var olan bazı kavramları ve önemli diyagramatik ve polinom invaryantlarını genelleştiren yeni invaryantlar elde etmek üzerine olacaktır.

### 1.1. Literatür Özeti

1833 yılında Alman matematikçi C. F. Gauss ile başlayan düğüm teorisindeki çalışmaların çoğu, düğüm invaryantlarını bulma, bu invaryantlar ışığında düğüm ve halkaların sınıflandırma (tipini belirleme) problemi ile ilgilidir. Şimdiye kadar düğümler ile ilgili önemli sayısal, grupsal ve polinom invaryantlar tanımlanmıştır. Bir düğümün veya halkanın bileşen sayısı, kavşak noktalarının minimum sayısı, köprü sayısı, düğümlenmeme sayısı, halkalanma sayısı, renklenme sayısı gibi sayısal invaryantları [3,4] düğüm grubu, homotopi grubu, homoloji grubu gibi grupsal invaryantları [5,6] Alexander, Alexander-Conway, Jones, BLM/Ho gibi tek değişkenli ve HOMFLY, Kauffman F-polinomu gibi önemli iki değişkenli polinom invaryantları vardır [2, 7-16].

1928 yılında J.W. Alexander, düğüm diyagramının her bir kavşağı için bir denklem yazmış ve böylece bütün kavşaklar için elde edilen denklem sisteminin katsayılar matrisinin determinantının bir Laurent polinomu olduğunu görmüştür [7]. Alexander polinomu birkaç istisna hariç düğüm tipini belirleyen önemli bir invaryanttır. 1970 yılında J.H. Conway bir skein bağıntısını sağlayan yeni bir polinom tanımlamıştır. Bu polinom, Alexander polinomunun başka bir versiyonudur ve literatürde Alexander-Conway polinomu olarak adlandırılır [8].

1985 yılında V. F. R. Jones, von Neumann cebirini kullanarak Alexander polinomundan tamamen farklı olan yeni bir yönlendirilmiş düğüm polinomu keşfetmiştir [9]. Cebirsel yönden, Jones kendi polinomu ile statik mekaniğin Potth modelinde yakını bir ilişki olduğunu göstermiştir [17]. Jones'un bu buluşu sayesinde düğüm teorisindeki teorik çalışmalar değişik bilim dallarına uygulanmış ve yeni yan çalışma alanları oluşturulmuştur. Böylece düğüm teorisi; graf teorisi, istatistiksel mekanik, kuantum fiziği, kimya ve biyoloji gibi alanlarla ilişkilendirilmiştir. Kısa bir zaman dilimi içinde Jones polinomu değişik modellerle tanımlanmış ve Jones polinomundan geliştirilen yeni polinom invaryantları bulunmuştur. Bunların en önemlisi yönlendirilmiş düğüm diyagramlarının bir invaryantı olan HOMFLY polinomudur [10,11]. Aynı yıllarda R. D. Brandt ve arkadaşları tarafından tanımlanan BLM/Ho polinomu [18] ve özellikle L. H. Kauffman tarafından yönlendirilmemiş düğüm diyagramları için parantez polinomu, normalize edilmiş parantez polinomu, Kauffman  $L$ -polinomu ve Kauffman  $F$ -polinomu olarak bilinen polinom invaryantları tanımlanmıştır [2,14,15]. Ayrıca İ. Altıntaş tarafından, parantez polinomundan farklı, regüler izotopi invaryantı olan tek değişkenli bir  $G$ -polinomu ve  $G$ -polinomunun normalize edilmiş durumu olan bir  $N$ -polinomu tanımlanmış ve onların bazı özellikleri verilmiştir [19,20].  $N$ -polinomu, Jones polinomunun bir yönlendirilmiş durum modelidir. HOMFLY polinomu; Alexander, Alexander-Conway ve Jones polinomlarının bir genellemesidir. Normalize edilmiş parantez polinomu, Jones polinomunu sağlar.  $L$ -polinomu, parantez polinomunun ve  $F$ -polinomu, Jones polinomu ile BLM/Ho polinomunun bir genellemesidir. Bu düğüm polinomlarının hem birbirleriyle hem de diğer alanlarla olan ilişkilerinin incelenmesi ile ilgili çalışmalar devam etmektedir.

Değişik alanlarla ilişkili bazı çalışmalar için [21-24] yayınlarına ve diğer yayınlara bakılabilir.

1999 yılında Kauffman tarafından, klasik düğüm teorisinin bir genellemesi olarak virtual düğüm teorisi keşfedildi [25]. Günümüzde klasik düğüm teorisindeki birçok kavram virtual düğüm teorisine genelleştirilmiş ve virtual düğüm teorisi ile özellikle kuantum teorisi arasında ilişkiler kurulmuştur. Virtual düğüm teorisi ve diğer alanlarla ilişkileri üzerine çok sayıda çalışma yapılmaktadır. Belli başlı çalışmalar olarak, [26-35] numaralı kaynaklar alınabilir.

HOMFLY ve Jones polinomu gibi yönlendirilmiş düğüm polinomlarını, bir yönlendirilmiş durum modeliyle hesaplarken klasik düğüm sınıfında bulunmayan disoriented diyagramlar ortaya çıkmaktadır. Hesaplamalarda disoriented diyagramlarla karşılaşmamak için yönlendirilmiş düğümün yönlendirilmesi ihmal edilmektedir. [1] de, hem bu durumu ortadan kaldırmak hem de disoriented diyagramları içine alacak şekilde klasik düğüm sınıfını genişletmek fikriyle disoriented düğüm kavramı ileri sürüldü. Bu çalışmada, bir disoriented düğüm, klasik ve virtual düğümlerden farklı bir bakışla, bir disoriented çemberin üç boyutlu uzaya veya üç boyutlu küreye gömülmesi olarak tanımlandı. Klasik ve virtual kavşaklardan farklı olarak yeni tanımlanan disoriented kavşak temelinde çalışılarak disoriented düğüm ve halkaların birkaç önemli diyagramatik, sayısal ve polinom invaryantları ispatlandı. Böylece disoriented düğüm teorisine bir giriş yapılmış oldu. Disoriented çember ve disoriented diyagramlar hakkında geniş bilgi için [32,33,36] kaynaklarına bakılabilir.

## **1.2. Tezin Amacı**

Bu tezin temel amacı, henüz yeni bir çalışma alanı olan disoriented düğüm ve halkaların diyagramatik ve polinom invaryantlarını ortaya çıkararak disoriented düğüm teorisinin temellerini oluşturmaktır.

Bu amaç doğrultusunda, tez çalışması aşağıdaki şekilde planlandı.

İkinci bölümde, bu tezin diğer bölümlerinde kullanılacak klasik düğüm teorisinin ve disoriented düğüm teorisinin bazı temel kavramları verildi.

Üçüncü bölümde bir  $2n$  yaylı bir disoriented çember tanımlandı ve bir disoriented düğüm,  $2n$  yaylı bir disoriented çemberin 3-boyutlu uzaya veya 3-boyutlu küreye bir gömmesi olarak yeniden tanımlandı. Bu bağlamda disoriented halka ve disoriented kavşak tanımları verildi. Disoriented düğümün bu tanımını hem [1]'de verilen disoriented düğüm tanımını genellemekte hem de disoriented düğümlerin bağlantılı toplamının kolayca tanımlanmasını sağlamaktadır. Bu bölümde aynı zamanda disoriented düğümlerin bağlantılı toplamı, disorientasyon korunacak şekilde tanımlandı ve açıklayıcı bir örnek verildi. Disoriented düğümlerin ve halkaların invaryantlarını ispatlamak amacıyla bir yöntem olarak kullanılacak olan disoriented diyagramlar için bütün Reidemeister hareketlerini üreten minimum üreteçler kümesi belirlendi. Ayrıca disoriented düğüm ve halka diyagramları için Gauss kodları disoriented kavşaklar dikkate alınarak tanımlandı ve bu Gauss kodları yardımıyla disoriented çemberler üzerinde Gauss diyagramları çizildi. Disoriented Reidemeister hareketlerinin üreteçler kümesinin her bir hareketine karşılık gelen Gauss kodu belirlendi ve Gauss diyagramları çizildi. Böylece disoriented homoloji ve disoriented kohomoloji kavramlarının tanımlanmasında bir temel yöntem olarak kullanılacak disoriented Gauss hareketleri tam olarak belirlendi.

Dördüncü bölümde, disoriented düğümlerin ve halkaların sınıflandırmasında çok önemli rol alan polinom invaryantları konusu ele alındı. Bu bağlamda, disoriented düğüm ve halka diyagramları için parantez polinomunun bir genellemesi olan iki değişkenli ve  $M$  adı verilen bir polinom tanımlandı ve bu polinomun iyi tanımlı bir regüler izotopi invaryantı olduğu ispatlandı. Bu polinomun, klasik düğüm ve halka diyagramları için [2]'de verilen Kauffman  $L$  polinomunu disoriented düğüm teorisine genişlettiği görüldü. Ayrıca  $M$  polinomu tam burulma ile normalleştirilerek disoriented halka diyagramları için kuşatan izotopinin invaryantı olan  $N$  adı verilen bir polinom elde edildi. Bu normalleştirilmiş polinomun, hem disoriented halkalar için Jones polinomunun bir genellemesi olduğu hem de klasik düğüm teorisindeki Kauffman  $F$  polinomunu disoriented halka diyagramlarına genişlettiği görüldü. Bu bölümde  $M$  ve  $N$  polinomlarının bazı temel özellikleri ispatlandı ve birkaç disoriented düğüm ve halka diyagramının  $M$  ve  $N$  polinomları hesaplandı.

Disoriented düğüm teorisinde, disoriented örgü, disoriented dolaşık, disoriented homoloji ve kohomoloji vb. gibi çalışabilecek çok teori vardır. Bu tezde ele alınan

konular bu çalışmalarda temel yöntemler olacağından, tez bu disoriented düğüm teorisi üzerinde yapılan çalışmalara kaynak teşkil edecek niteliktedir.



## 2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, diğer bölümlerde kullanılacak olan klasik düğüm teorisi ve disoriented düğüm teorisinin bazı temel kavramları verilmektedir.

### 2.1. Düğüm ve Halka

**Tanım 2.1.1.** [37]  $X$  ve  $Y$ , Hausdorff uzayları olmak üzere  $f: X \rightarrow f(X)$  bir homeomorfizm ise  $f: X \rightarrow Y$  dönüşümüne bir gömme denir.

**Tanım 2.1.2.** [2,13-15]  $S^1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1, x, y \in \mathbb{R}\}$  birim çemberinin  $\mathbb{R}^3$  (veya  $S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ ) uzayına gömmesine bir düğüm ve  $n \in \mathbb{N}$  tane düğümün ayrık birleşimine halka denir.

**Tanım 2.1.3.** [4]  $\pi: S^3 \rightarrow S^3$ ,  $\pi(x, y, z) = (x, y, 0)$  ile tanımlanan fonksiyona izdüşüm fonksiyonu denir.  $S^3$  içinde bir  $K$  düğümünün  $\pi$  izdüşüm fonksiyonu altındaki görüntüsü,  $\pi(K)$ ,  $K$  nın  $xoy$ - düzlemindeki izdüşümüdür.  $a \in \pi(K)$  için  $\pi^{-1}(a) \cap K$ ,  $n > 1$  olmak üzere  $n$  tane noktadan ibaret ise,  $a$  noktasına  $\pi(K)$  görüntü kümesinin bir  $n$  katlı noktası denir. Eğer  $n = 2$  ise  $a$  noktasına kavşak noktası (geçit noktası) adı verilir.

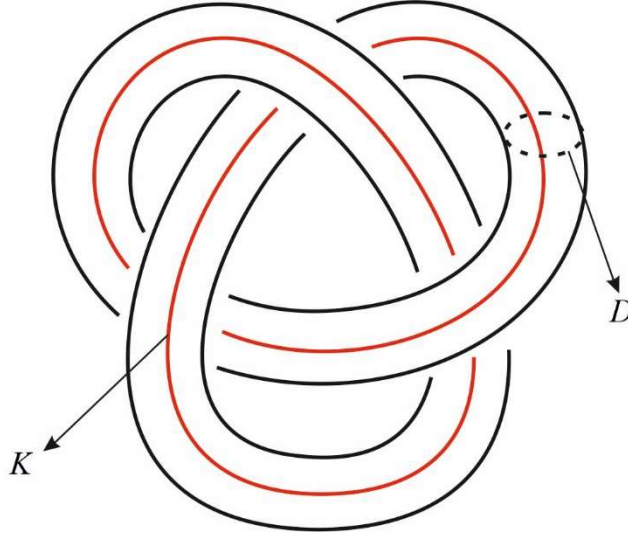
**Tanım 2.1.4.** [4,37]  $K$  bir düğüm ve  $\pi$  izdüşüm fonksiyonu olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanırsa  $\pi(K)$  görüntü kümesine  $K$  düğümünün regüler izdüşümü denir. Bu durumda  $K$  düğümüne uzayda regüler pozisyondadır denir.

1.  $\pi(K)$  nın katlı noktaları sadece sonlu sayıda geçit noktasıdır,
2. Hiçbir geçit noktası  $K$  düğümüne ait bir köşe noktasının  $\pi$  altında görüntüsü değildir.

Regüler pozisyonda bulunan bir  $K$  düğümü ile bir  $\varepsilon > 0$  reel sayısı verilsin.  $K$  düğümünün her alt geçit noktasından uzaklığı  $\varepsilon$ 'dan küçük olan noktaların kümesi  $A$

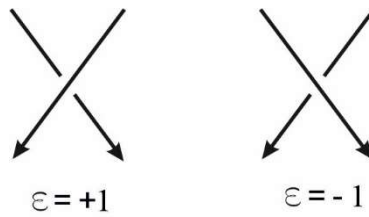
ise,  $\pi(K - A)$  kümesine  $K$  düğümünün normal diyagramı kısaca düğüm diyagramı denir [3,36]. Buna göre  $K$  düğümünün normal diyagramı ayrık yay parçalarından oluşur.

**Tanım 2.1.5.**  $K \subset S^3$  bir düğüm olsun.  $K$ 'nın tünel komşuluğu  $V = D \times K$  olarak tanımlanır. Burada  $D$  birim daireyi gösterir.  $V \subset S^3$  tünel komşuluğunun bir alt manifold olduğu aşıkardır. Aşağıdaki şekilde yonca yaprağı düğümünün tünel komşuluğu çizilmiştir.



**Şekil 2.1.** Yonca Yaprığı Düğümünün Tünel Komşuluğu.

**Tanım 2.1.6.** [4,37] Eğer bir düğümün üzerine veya bir halkanın her bir birleşeninin üzerine bir ok konularak yön verilmiş ise düğüme yönlendirilmiş düğüm veya halkaya yönlendirilmiş halka denir. Yönlendirilmiş kavşakların işaretleri Şekil 2.2'de gösterildiği gibi pozitif kavşağın işareti +1 ve negatif kavşağın işareti -1 ile gösterilir.



**Şekil 2.2.** Kavşak işaretleri.

**Tanım 2.1.7.** [37] Bir  $K$  düğüm diyagramının tüm kavşaklarını alt üst ederek veya işaretini değiştirerek elde edilen diyagrama düğümün ayna görüntüsü denir ve  $K^*$  ile gösterilir.

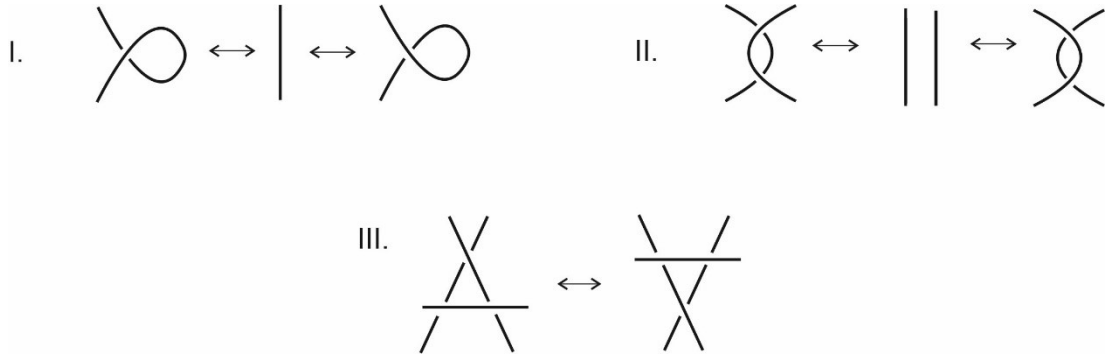


**Tanım 2.1.8.** [37]  $K$  ve  $L$ ,  $S^3$  uzayında yönlendirilmiş iki düğüm olsun. Eğer  $h(K) = L$  olacak şekilde yönlendirilmeyi koruyan bir  $h: S^3 \rightarrow S^3$  homeomorfizmi varsa  $K$  düğümü  $L$  düğümüne denktir denir.

İki düğümün denkliği tanımı,  $S^3$  içindeki düğümler kümesi üzerinde bir denklik bağıntısı verir. Bu bağıntı söz konusu kümeyi ayrık denklik sınıflarına ayırır. Her denklik sınıfına bir düğüm tipi denir. Denk iki düğüm, aynı düğüm tipindedir.

Yönlendirilmiş bir çember ile aynı tipte olan bir düğümüne düğümlenmemiş (aşıkâr) düğüm denir. Halkalanmamış halkaya ise aşıkâr halka denir.

Düğümlerin denkliği Şekil 2.3'te çizilen üç tip Reidemeister hareketleri ve onların tersleri ile üretilir [14,28]. Yani bir düğümüne ait bir diyagram üzerine sonlu sayıda Reidemeister hareketlerinin uygulanmasıyla düğümün bir başka diyagramı elde ediliyorsa bu iki diyagram denktir.



**Şekil 2.3.** Reidemeister hareketleri.

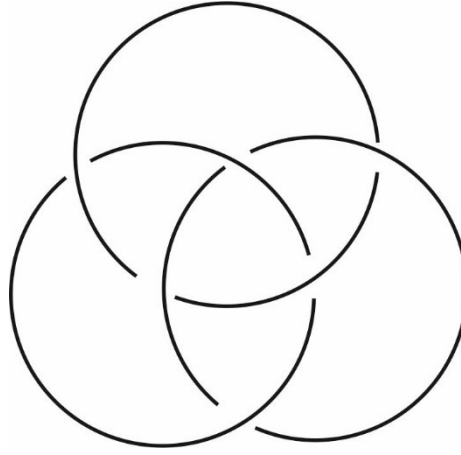
I. tip hareket bir burulmuş eğri ekleyerek veya çıkararak, II. tip hareket iki ardışık alttan veya üstten kavşağı ekleyerek veya çıkararak, III. tip hareket üçgen hareketi olarak elde edilir.

II. ve III. Reidemeister hareketleri ile üretilen denklik bağıntısına regüler izotopi, bütün Reidemeister hareketleri ile üretilen denklik bağıntısına da kuşatan izotopi denir.

## 2.2. Düğümün Bazı İnvaryantları

**Tanım 2.2.1.** [4,36] Bir  $K$  düğümünün herhangi bir diyagramındaki kavşakların minimum sayısına düğümün kavşak sayısı denir ve  $c(K)$  ile gösterilir. Kavşak sayısı düğümün bir invaryantıdır.

**Tanım 2.2.2.** [4,37] Bir halka diyagramının bir yayı üzerinde bir nokta seçildiğinde ve diyagram etrafında dolaşarak aynı noktaya dönüldüğünde geçit noktalarının kavşaklanması ile oluşan her bir tam devire halkanın bir bileşeni denir. Bu tanıma göre tek bileşenli bir halkaya bir düğüm denir. Şekil 2.4'te bir üç bileşenli bir halka çizilmiştir.



**Şekil 2.4.** Üç bileşenli bir halka.

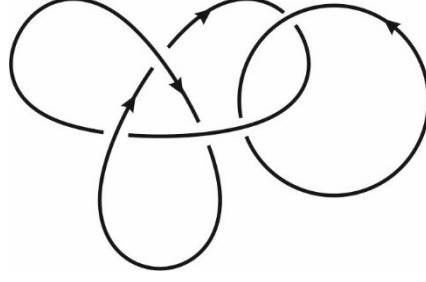
**Tanım 2.2.3.** [38] Bileşenleri  $K_1$  ve  $K_2$  olan bir halka verilsin.  $K_1 \cap K_2$ , bu iki bileşenin ortak kavşaklarının kümesi olmak üzere  $K_1$  ile  $K_2$  bileşenlerinin halkalanma sayısı

$$lk(K_1, K_2) = \frac{1}{2} \sum_{p \in K_1 \cap K_2} \varepsilon(p)$$

ile tanımlanır. Burada  $\varepsilon(p)$ ,  $p$  ile gösterilen kavşağın işaretidir ve toplam, bütün  $p$  kavşakları üzerinden alınmıştır.

**Tanım 2.2.4.** [38] Bir  $K$  düğüm veya halkasının bütün kavşaklarının işaretlerinin toplamına burulma sayısı denir ve  $w(K)$  ile gösterilir.

**Örnek 2.2.5.** Şekil 2.5'te çizilen halkanın halkalanma sayısı 1 ve burulma sayısı 5'tir.



**Şekil 2.5.** İki bileşenli bir halka.

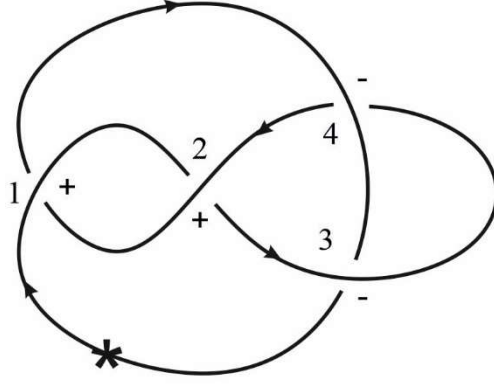
### 2.3. Gauss Diyagramları

Bir Gauss diyagramı, düğümün klasik Gauss kodunun bir diyagramatik temsidir. Gauss kodu, yönlendirilmiş düğüm diyagramında ardışık kavşaklarının 1,2,... şeklinde numaralanması ve kavşak tipinin +1 veya -1 olarak belirtilmesi ile elde edilir. Bu durumda düğüm diyagramı üzerinde bir başlangıç noktası seçilir ve düğümün yönlendirmesi doğrultusunda hareket edilir. Bir kavşağa varıldığında kavşağın işaretine ve geçilen geçidin üst veya alt geçit olma durumuna bakılır. Eğer 1 numaralı kavşağın işareti + ve alt geçidinden geçiliyorsa, bu durum  $U1+$  sembolü ile gösterilir. Eğer üst geçitten geçiliyorsa  $O1+$  sembolü kullanılır. Bu şekilde düğüm diyagramı üzerinden hareket edilerek başlangıç noktasına varıldığında elde edilen sembollerin yan yana yazılması ile oluşan kelimeye düğümün Gauss kodu denir. Detaylı bilgi için [39]'a bakınız.

Örneğin Şekil 2.6'da kavşakları numaralanan sekiz şekilli düğümün Gauss kodu

$$O1+U2+O3-U4-O2+U1+O4-U3-$$

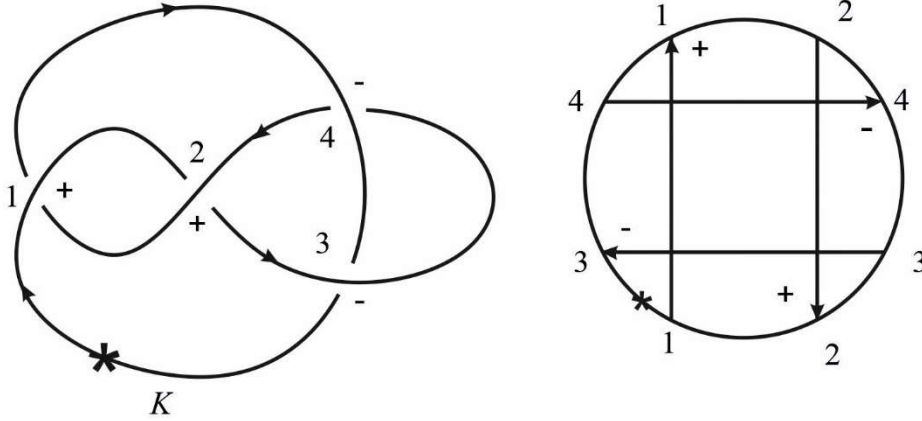
olarak verilebilir.



**Şekil 2.6.** Sekiz şekilli düğüm.

Bir Gauss kodundan bir Gauss diyagramını şekillendirmek için, bir yönlendirilmiş çember üzerinde seçilen bir taban noktası ile birlikte çemberi alalım. Çember boyunca kavşaklar için Gauss kodunda verilen numaralandırmalar ile çemberi işaretleyerek hareket edilir ve sonra çember üzerinde aynı numaraya sahip noktalar arasında kirişler çizilir. Her kiriş üst geçit noktasından alt geçit noktasına doğru yönlendirilir ve her kiriş Gauss kodunda karşılık gelen işaret + veya - ile işaretlenir. Sonuç olarak elde edilen ve taban noktalı graf düğüm için Gauss diyagramı adını alır.

Örneğin, sekiz şekilli düğümün Gauss diyagramı Şekil 2.7'deki gibidir.



**Şekil 2.7.** Sekiz şekilli düğüm ve Gauss diyagramı.

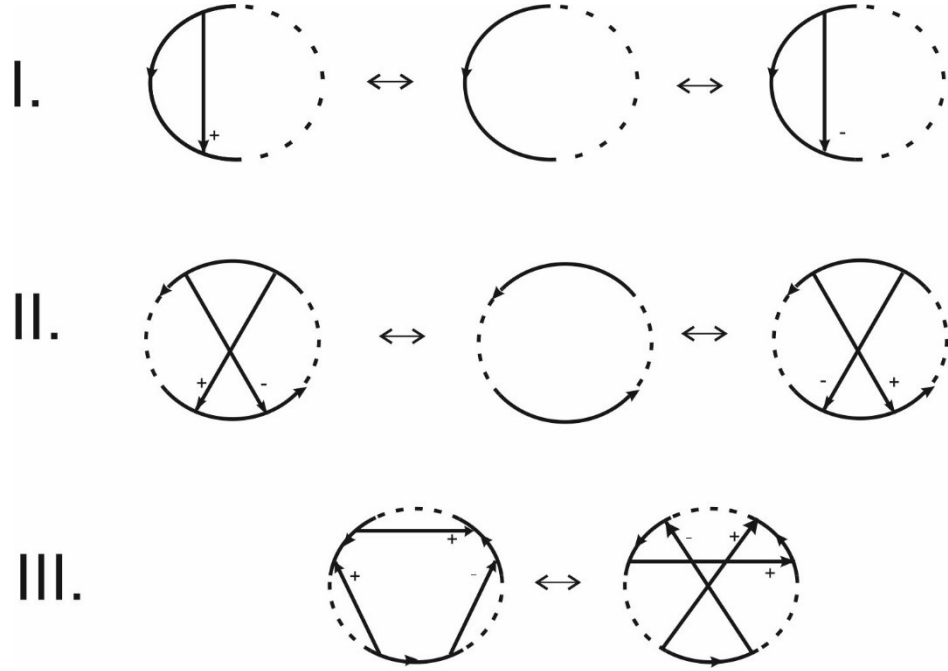
**Uyarı 2.3.1.** [39]

1. Bir düğüm, Gauss diyagramı ve Gauss kodu tarafından tek şekilde belirtilir.

2. Gauss diyagramları çemberin yönlendirmeyi koruyan dönüşümlerine göre düşünülür.

Bir yönlendirilmiş düğüm diyagramı, yönlendirilmiş Reidemeister hareketlerinin bir dizisi ile bir başka düğüm diyagramına dönüşüyorsa bu iki diyagram aynı düğümü temsil eder.

Şekil 2.3'te verilen Reidemeister hareketlerine karşılık gelen yönlendirilmiş Gauss diyagramları Şekil 2.8'de çizilmiştir.



Şekil 2.8. Reidemeister hareketlerine karşılık gelen Gauss diyagramları.

#### 2.4. Bazı Polinom İnvaryantlar

**Tanım 2.4.1.** [14,15]  $K$  bir halka diyagramı olsun.  $[K] \in \mathbb{Z}[A, B, \delta]$ ,  $K$  halkasını temsil eden bir Laurent polinomunu gösterebilir. Bu polinom aşağıdaki aksiyomları sağlar.

1.  $[K_+] = A[K_0] + B[K_\infty]$   
 $[K_-] = B[K_0] + A[K_\infty]$
2.  $[\bigcirc] = 1, \quad [\bigcirc K] = \delta[K]$

Burada  $K_+$ ,  $K_-$ ,  $K_0$ ,  $K_\infty$ , Şekil 2.9'da çizilen diyagramlar ve  $\circ$ , sıfır kavşaklı aşıkardır.

Bu polinom  $B = A^{-1}$  ve  $\delta = -A^2 - A^{-2}$  ile regüler izotopinin bir invaryantıdır [11,12]. Regüler izotopinin invaryantı olan polinoma düğümün parantez polinomu denir ve aşağıdaki gibi tanımlanır.

**Tanım 2.4.2.** [14,15]  $K$  bir halka diyagramı olsun.  $\langle K \rangle \in \mathbb{Z}[A, A^{-1}]$ ,  $K$  halkasını temsil eden bir Laurent polinomunu gösterebilir. Bu polinom aşağıdaki aksiyomları sağlar.

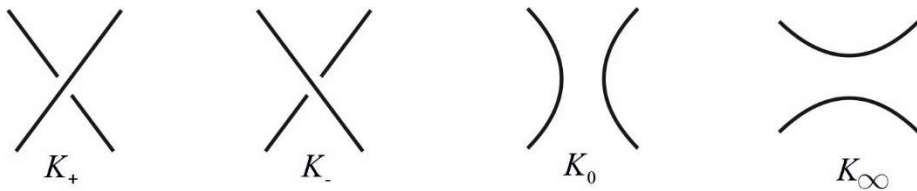
1.  $K$ , bir regüler izotopi invaryantıdır,
2.  $\langle \circ \rangle = 1$ ,  $\langle \circ K \rangle = \delta \langle K \rangle$ ,
3.  $\langle K_+ \rangle = A \langle K_0 \rangle + A^{-1} \langle K_\infty \rangle$   
 $\langle K_- \rangle = A^{-1} \langle K_0 \rangle + A \langle K_\infty \rangle$ .

Burada  $\delta = -A^2 - A^{-2}$ ,  $K_+$ ,  $K_-$ ,  $K_0$ ,  $K_\infty$ , Şekil 2.9'da çizilen diyagramlar ve  $\circ$ , sıfır kavşaklı aşıkardır.

Bir  $K$  düğümünün herhangi bir  $D$  diyagramı için parantez polinomu

$$\langle D \rangle = \sum_S \langle D | S \rangle \delta^{|S|-1}$$

toplamı olarak yazılabilir. Burada  $S$ ,  $D$  diyagramının parantez durumları üzerinden ilerlemektedir.  $\langle D | S \rangle$ , köşe ağırlıklarının normal çarpımı ve  $|S|$ ,  $S$  durumundaki çember sayısını gösterir.



**Şekil 2.9.** Kavşaklar ve ayırmalar.

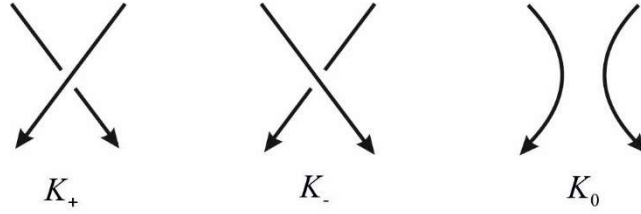
**Tanım 2.4.3.** [14,15]  $\langle K \rangle$ ,  $K$  bir halka diyagramının regüler izotopinin invaryantı olan parantez polinomu ve  $w(K)$ ,  $K$  halkasının burulma sayısı olsun.

$f_K(A) = (-A^3)^{-w(K)} \langle K \rangle$  polinomuna normalleştirilmiş parantez polinomu denir. Normalleştirilmiş polinom, halkanın bir kuşatan izotopi invariantıdır.

**Tanım 2.4.4.** [9]  $K$  bir yönlendirilmiş halka diyagramı olsun. Aşağıdaki aksiyomları sağlayan  $\sqrt{t}$  değişkenli Laurent polinomuna Jones polinomu denir ve  $V_K(t)$  ile gösterilir.

1.  $V_K(t)$ , bir kuşatan izotopi invariantıdır.
2.  $V_\circ(t) = 1$ .
3.  $t^{-1}V_{K_+}(t) + tV_{K_-}(t) = (t^{1/2} - t^{-1/2})V_{K_0}(t)$ .

Burada  $\circ$ , aşık düğümü ve  $K_+, K_-, K_0$ , Şekil 2.10'da çizilen diyagramları göstermektedir.



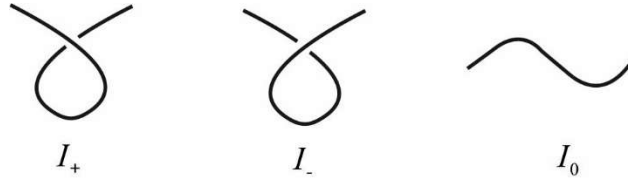
**Şekil 2.10.** Yönlendirilmiş kavşaklar ve ayırma.

**Teorem 2.4.5.** [14,15]  $K$  bir halka diyagramı,  $V_K(t)$  ve  $f_K(A)$  sırasıyla onun Jones polinomu ve normalleştirilmiş parantez polinomu olsun. Bu durumda  $f_K(t^{-1/4}) = V_K(t)$  olur.

**Tanım 2.4.6.** [2] Bir yönlendirilmemiş  $K$  halkası için aşağıdaki aksiyomları sağlayan iki değişkenli  $L_K(a, z) \in \mathbb{Z}[a, a^{-1}, z, z^{-1}]$  Laurent polinomuna Kauffman  $L$  polinomu denir.

1.  $L_K(a, z)$  bir regüler izotopi invariantıdır, .
2.  $L_\circ = 1$ ,
3.  $L_{I_+} = aL_{I_0}$ ,  $L_{I_-} = a^{-1}L_{I_0}$ ,
4.  $L_{K_+} + L_{K_-} = z(L_{K_0} + L_{K_\infty})$ .

Burada  $\circ$  aşıkâr düğümü,  $K_+, K_-, K_0$  ve  $K_\infty$  Şekil 2.9'daki diyagramları,  $I_+, I_-$  ve  $I_0$  Şekil 2.11'de çizilen I. tip Reidemeister hareketlerini gösterir.

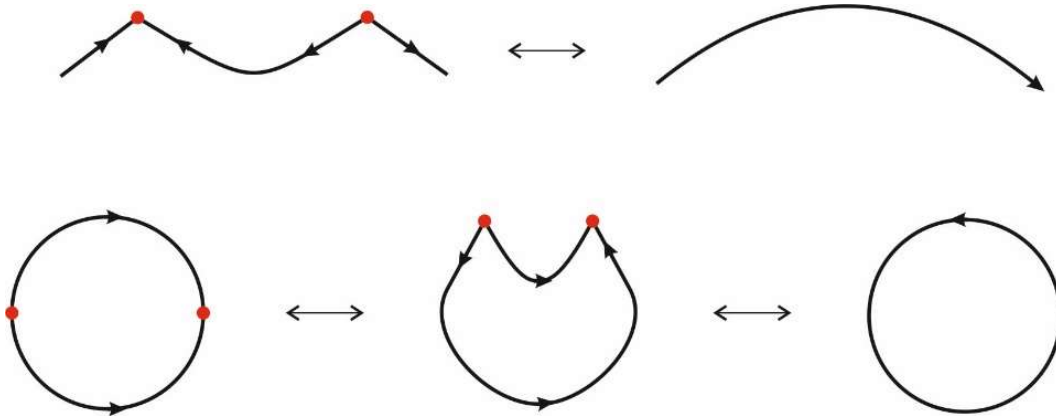


Şekil 2.11. I. tip Reidemeister hareketleri.

**Tanım 2.4.7.** [2] Bir yönlendirilmemiş  $K$  halkası için  $F_K(a, z) = a^{-w(K)} L_K(a, z)$  eşitliği ile verilen Laurent polinomuna Kauffman  $F$  polinomu denir. Burada  $w(K)$ ,  $K$  halkasının burulma sayısıdır. Kauffman  $F$  polinomu, kuşatan izotopinin bir invaryantıdır.

## 2.5. Disoriented Düğüm ve Halka

**Tanım 2.5.1.** [1] Bir disoriented çember, üzerinde iki nokta seçilen ve bu iki nokta arasındaki her bir yaya bir yönlendirme verilen bir çemberdir. Yaylardan birinin yönlendirmesi, diğerinin yönlendirmesinin tersidir. Şekil 2.12'de bir disoriented çember gösterilmektedir.



Şekil 2.12. Disoriented çember.

**Tanım 2.5.2.** [1] Bir disoriented düğüm, bir disoriented çemberin  $\mathbb{R}^3$  (veya  $S^3$ ) uzayına bir gömmesidir.  $k$ - bileşenli bir disoriented halka  $k$  tane çemberin ayrık



birleşimlerinin  $\mathbb{R}^3$  uzayına bir gömmesidir ki burada çemberlerin en az biri disorientededir.

**Tanım 2.5.3.** [1] Bir  $K$  disoriented düğümün bir kavşağının üstgeçit ve altgeçit yayları zıt yönlendirmelere sahip ise bu kavşağa disoriented kavşak denir. Başka bir deyişle,  $A_1$  ve  $A_2$ , gömmesi  $K$  olan disoriented çemberin iki yayı olsun. Eğer  $K$  düğümünün bir kavşağın üstgeçit ve altgeçit yaylarından biri  $A_1$  ve diğeri  $A_2$  ise bu kavşağa disoriented kavşak denir.

**Tanım 2.5.4.** [1]  $L$ ,  $K_1$  ve  $K_2$  gibi iki bileşenli bir halka olsun.  $K_1$  ve  $K_2$  bileşenlerinin her ikisinden de bir disorientasyon seçilsin. Gömmesi  $K_1$  olan disoriented çemberin iki yayını  $A_1^1$  ve  $A_1^2$  ile, gömmesi  $K_2$  olan disoriented çemberin iki yayı  $A_2^1$  ve  $A_2^2$  ile gösterilsin.  $L$  halkasının herhangi bir kavşağı için aşağıdakilerden biri sağlanıyorsa bu kavşağa disoriented kavşak denir.

1. Kavşağın altgeçit ve üstgeçit yaylarından biri  $A_1^1$  ve diğeri  $A_2^1$  veya  $A_2^2$  dir.
2. Kavşağın altgeçit ve üstgeçit yaylarından biri  $A_1^2$  ve diğeri  $A_2^2$  veya  $A_2^1$  dir.

Diğer durumlarda kavşağa yönlendirilmiş kavşak denir.

**Tanım 2.5.5.** [1]  $L$ ,  $K_1$  ve  $K_2$  gibi iki bileşenli bir disoriented halka olsun.  $L$  halkasının halkalanma sayısı,

$$lk(L) = \frac{1}{2} \left| \sum_{o \in K_1 \sqcap K_2} \varepsilon(o) - \sum_{d \in K_1 \sqcap K_2} \varepsilon(d) \right|$$

formülü ile tanımlanır. Burada  $K_1 \sqcap K_2$ ,  $K_1$  ile  $K_2$  bileşenlerinin ortak kavşak kümesini gösterir. İlk toplam  $K_1 \sqcap K_2$ 'nin yönlendirilmiş kavşakları üzerinden yapılırken, ikinci toplam  $K_1 \sqcap K_2$ 'nin disoriented kavşakları üzerinden yapılır.  $\varepsilon(o)$  ve  $\varepsilon(d)$  sırasıyla  $K_1 \sqcap K_2$ 'ye ait olan yönlendirilmiş ve disoriented kavşağın işaretini gösterir.

**Tanım 2.5.6.** [1]  $D$ ,  $K$  düğümünün (veya halkasının) disoriented regüler diyagramı olsun.  $D$  diyagramının tam burulması,

$$cw(D) = \sum_o \varepsilon(o) - \sum_d \varepsilon(d)$$

formülü ile tanımlanır. Burada ilk toplam  $D$  diyagramının yönlendirilmiş kavşakları üzerinden ve ikinci toplam onun disoriented kavşakları üzerinden yapılır.  $\varepsilon(o)$  ve  $\varepsilon(d)$  sırasıyla  $D$  diyagramının yönlendirilmiş ve disoriented kavşağının işaretini gösterir.

**Teorem 2.5.7.** [1]  $D$  disoriented diyagramının  $cw(D)$  tam burulması, bir regüler izotop invariantıdır.

**Teorem 2.5.8.** [1] Aşık olmayan düğümün (veya halkanın) bütün disoriented diyagramlarının tam burulmaları aynıdır.

## 2.6. Disoriented Düğüm Polinomları

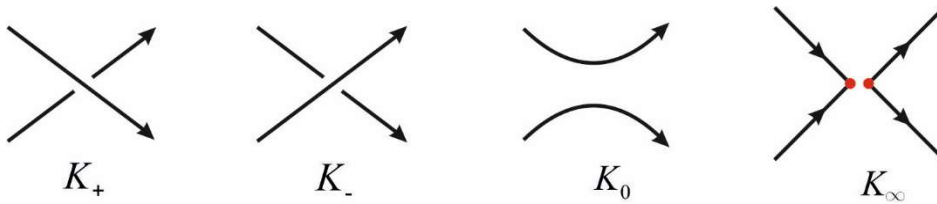
Parantez polinom modeli (Tanım 2.4.2), yönlendirilmiş bir düğüm veya halka diyagramına genişletilerek

$$\begin{aligned}\langle K_+ \rangle &= A \langle K_0 \rangle + A^{-1} \langle K_\infty \rangle \\ \langle K_- \rangle &= A^{-1} \langle K_0 \rangle + A \langle K_\infty \rangle\end{aligned}\quad (2.1)$$

$$\delta = -A^2 - A^{-2}, \quad \langle \bigcirc \sqcup D \rangle = \delta \langle D \rangle$$

şeklinde yazılabilir. Burada  $K_+$ ,  $K_-$ ,  $K_0$  ve  $K_\infty$  Şekil 2.13'te çizilen diyagramlardır.

$\bigcirc$  düğümlenmemiş düğümün yönlendirilmiş diyagramını,  $D$  yönlendirilmiş düğüm veya halka diyagramını ve  $\sqcup$  ayrık birleşimi gösterir.



**Şekil 2.13.** Kavşaklar ve ayırmalar.

Bu model, disoriented düğüm ve halka diyagramında hem yönlendirilmiş hem de disoriented kavşaklar için de kullanılabilir. Disoriented düğüm ve halka diyagramları için (2.1) modelinden elde edilen polinom, genişletilmiş parantez polinomu olarak adlandırılır.

Klasik parantez polinomunda olduğu gibi genişletilmiş parantez polinoma karşılık gelen disoriented durum, toplam modelinde

$$\langle D \rangle = \sum_S \langle D | S \rangle \delta^{|S|-1}$$

biçiminde yazılır [1]. Burada  $S$ ,  $D$  disoriented diyagramının hem yönlendirilmiş hem de disoriented parantez durumları üzerinden ilerlemektedir.  $\langle D | S \rangle$ , köşe ağırlıklarının normal çarpımı ve  $|S|$ ,  $S$  durumundaki çember sayısını gösterir.

**Teorem 2.6.1.** [1] Genişletilmiş parantez polinomu, disoriented düğüm ve halka diyagramları için regüler izotopinin bir invaryantıdır.

**Tanım 2.6.2.** [1]  $D$  bir disoriented düğüm veya halka diyagramı ve  $\langle D \rangle$ , onun parantez polinomu olsun. Bu durumda diyagramın burulma sayısı ile normalleştirilen polinomu

$$f_D(A) = (-A^3)^{-w(K)} \langle D \rangle$$

ile tanımlanır.

**Tanım 2.6.3.** [1] Bir  $K$  düğümünün veya halkasının bir  $D$  disoriented diyagramı için aşağıdaki formülle bir  $\tau_K \in \mathbb{Z}[A, A^{-1}]$  polinomu tanımlayalım.

$$\tau_K(A) = (-A^3)^{-cw(D)} \langle D \rangle$$

Burada  $cw(D)$ ,  $D$  disoriented diyagramının tam burulmasıdır.  $\tau_K$  polinomuna tam normalleştirilmiş polinom denir.

**Teorem 2.6.4.**[1] Tam normalleştirilmiş polinom, disoriented düğüm ve halka diyagramları için bir tam kuşatan izotop invaryantıdır.

**Tanım 2.6.5.** [1]  $K$  bir disoriented halka diyagramı olsun. Aşağıdaki aksiyomları sağlayan Laurent polinomuna tam Jones polinomu denir ve  $v_K(t)$  ile gösterilir.

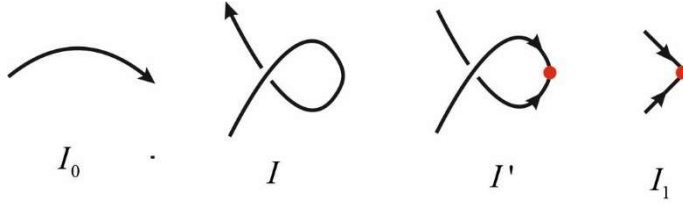
1.  $v_K(t)$ , bir kuşatan izotopi invaryantıdır.
2.  $v_{\circ}(t) = 1$ .

$$3. \quad t^{-1}v_{K_+}(t) + tv_{K_-}(t) = (t^{1/2} - t^{-1/2})v_{K_0}(t).$$

Burada  $\circ$ , aşıkâr düğümü ve  $K_+, K_-, K_0$ , Şekil 2.10'da çizilen diyagramları göstermektedir.

**Teorem 2.6.6.** [1]  $\tau_K$  tam normalleştirilmiş polinom,  $v_K$  tam Jones polinomunu sağlar. Yani  $\tau_K(t^{-1/4}) = v_K(t)$  olur.

**Önerme 2.6.7.** [1]  $I, I_0, I'$  ve  $I_1$  Şekil 2.14'te verilen diyagramlar olmak üzere,  $\langle I \rangle = (-A^3)\langle I_0 \rangle$  ve  $\langle I' \rangle = (-A^3)\langle I_1 \rangle$  olur.



**Şekil 2.14.** Bazı disoriented I. Reidemeister hareketleri.

### 3. DİSORIENTED DÜĞÜMLERİ TANIMLAMA VE DİYAGRAMATİK METODLAR

Disoriented düğüm, iki yaylı bir disoriented çemberin üç boyutlu uzaya veya üç boyutlu küreye gömmesi olarak Altıntaş [1] tarafından 2018 yılında tanımlanmıştır. Bu bölümde ise bir disoriented düğüm,  $2n$  yaylı bir çemberin 3–boyutlu uzaya veya 3-boyutlu küreye bir gömmesi olarak yeniden tanımlanmaktadır. Bu tanım hem [1]'de verilen disoriented düğüm tanımını genellemekte hem de disoriented düğümlerin bağlantılı toplamı ve sınırı disoriented düğüm olan yüzeyler gibi kavramların kolayca tanımlanmasını sağlamaktadır. Bu bölümde aynı zamanda disoriented düğümlerin bağlantılı toplamı disorientasyon korunacak şekilde tanımlanmaktadır. Disoriented düğümlerin ve halkaların invaryantlarını ispatlamak amacıyla bir yöntem olarak kullanılacak olan disoriented Reidemeister hareketlerini üreten minimum üreteçler kümesi, yönlendirilmiş diyagramlar için Reidemeister hareketlerinin bir genişletilmesi olarak ele alınmakta, disoriented Gauss kodları, disoriented Gauss diyagramları ve Reidemeister hareketlerinin üreteçler kümesine karşılık gelen disoriented Gauss hareketleri tam olarak verilmektedir.

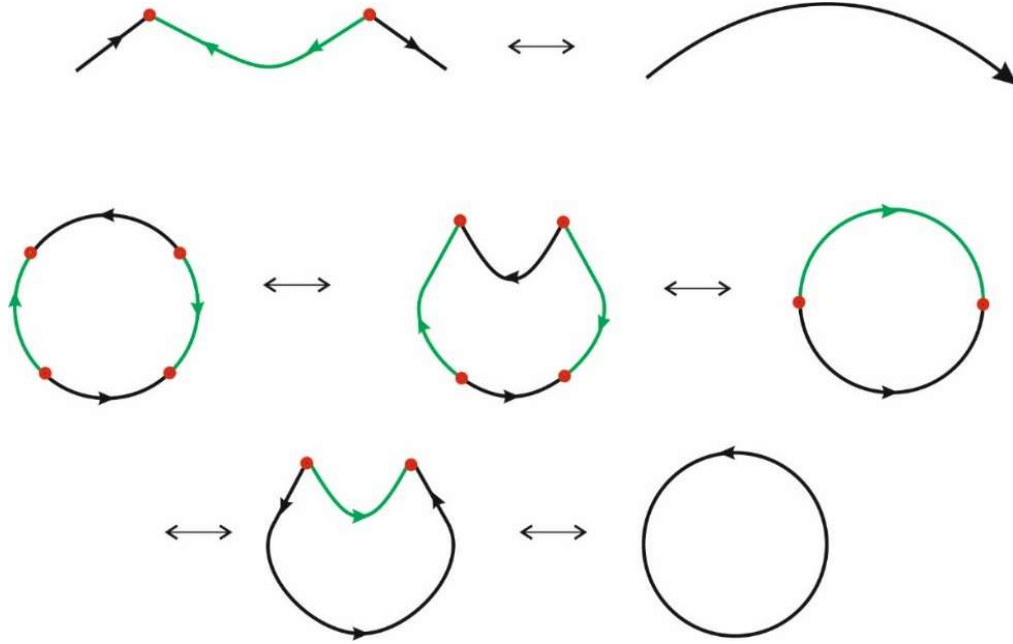
#### 3.1. Disoriented Düğüm ve Halkaları Tanımlama

**Tanım 3.1.1.** Bir çember üzerinde  $n \in \mathbb{N}$  olmak üzere  $2n$  nokta seçilsin. Çemberin bu noktaları arasındaki ardışık yayları zıt yönlendirmeye sahip olacak şekilde bir yönlendirme verilsin. Bu durumda bu çembere  $2n$  yaylı disoriented çember adı verilir.

$C$ ,  $2n$  yaylı bir disoriented çember olsun.  $C$ 'nin herhangi bir yayı  $A_i$  ve bu yayın ardışık yayı  $B_i$  ile gösterilsin. Bu durumda  $C$ ;  $i, j = 1, 2, \dots, n$  için  $A_i$  yayının yönlendirmesi  $B_j$  yayının yönlendirmesinin tersi olmak üzere  $A_1B_1A_2B_2 \dots A_nB_n$  şeklindeki bir kelimeyle ifade edilebilir.

Birkaç basit disoriented diyagram, onların yer değiştirmeleri ve bir disoriented çember Şekil 3.1'de çizilmiştir. Şekil 3.1'deki temel indirgeme hareketi basit bir ilmek üzerindeki ardışık iki parçanın elenmesine karşılık gelir. Dikkat edilmelidir ki

bir ilmek boyunca disoriented parçaların çarpımı bir yönlendirilebilir eğrinin varlığına imkân verir. Disoriented diyagramlar hakkında detaylı bilgi için [32,33,36] kaynaklarına bakılabilir. Böylece disoriented bir eğri, yönlendirilmiş bir eğriyle değiştirilebilir.



Şekil 3.1. Bazı disoriented diyagramlar ve yer değiştirmeler.

**Tanım 3.1.2.** Bir  $2n$  yaylı disoriented çemberin  $\mathbb{R}^3$  (veya  $S^3$ ) uzayına bir gömmesine bir disoriented düğüm denir.

**Tanım 3.1.3.** En az biri disoriented olmak üzere  $k$  tane çemberin ayrık birleşimlerinin  $\mathbb{R}^3$  uzayına bir gömmesine  $k$ -bileşenli bir disoriented halka denir.

Tanımlardan anlaşılacağı gibi bir disoriented düğüm tek bileşenli bir disorientend halkadır.  $\mathbb{R}^3$  uzayında bir disoriented düğümün bir diyagramından başka bir diyagramının elde edildiği bir deformasyon (disorientasyonu koruyan bir homeomorfizm) varsa bu disoriented düğüm diyagramları denktir (aynı disoriented düğümü temsil eden diyagramlar) denir.

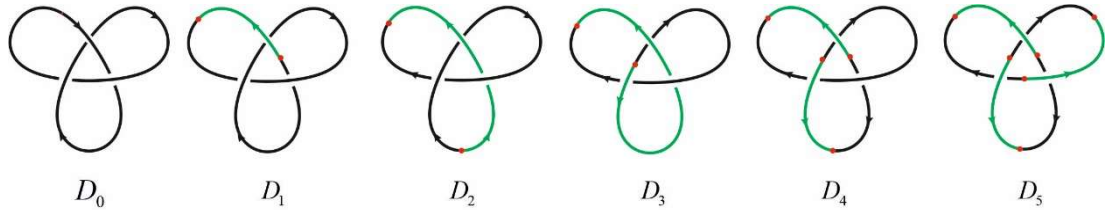
**Tanım 3.1.4.**  $\pi$ ,  $\mathbb{R}^3$  uzayının  $z$ -ekseni boyunca  $xy$ -düzlemine izdüşümü olmak üzere  $\mathbb{R}^3$  uzayında bir  $K$  disoriented düğümün (veya halkanın)  $\pi(K) \subset \mathbb{R}^2$  izdüşümünün herhangi bir noktasının ters görüntüsü  $K$  düğümünün bir veya iki noktasından ibaret ise bu izdüşüme, regüler izdüşüm denir.

Bir  $K$  düğümünün regüler izdüşümü üzerinde ona karşılık gelen disoriented diyagram tanımlanabilir. Bu diyagram, kavşakların üstgeçit ve altgeçit yaylarını belirlemek için kavşaklarının küçük bir komşuluğunda iki geçidinden birinin küçük bir parçası ihmal edilerek elde edilir.

**Tanım 3.1.5.** Bir  $K$  disoriented düğümün bir kavşağının üstgeçit ve altgeçit yayları zıt yönlendirmelere sahip ise bu kavşağa disoriented kavşak denir.

Daha açık bir ifade ile  $A_i$  ve  $B_j$ , gömmesi  $K$  olan disoriented çemberin iki yayı olmak üzere  $K$  düğümünün bir kavşağın üstgeçit ve altgeçit yaylarından biri  $A_i$  ve diğeri  $B_j$  ise bu kavşağa disoriented kavşak denir.  $K$  disoriented düğümünün bir kavşağı disoriented değilse, o kavşağa yönlendirilmiş kavşak denir.

Dolayısıyla bir yönlendirilmiş düğüm, disoriented kavşak sayısı sıfır olan bir disoriented düğümdür. Örnek için Şekil 3.2'ye bakınız.



**Şekil 3.2.** Bazı disoriented yonca yaprağı düğümü diyagramları

Şekil 3.2'de sağ el yonca yaprağı düğümünün disoriented diyagramları çizilmiştir. Dikkat edilmelidir ki bu diyagramlar  $n \leq 3$  olacak şekilde bir  $n \in \mathbb{N}$  için  $2n$  yaya sahip bir  $C$  disoriented çemberinin gömmesidir.  $D_0$  diyagramında disoriented kavşak bulunmamaktadır. Böylece sadece bir yayı kendisiyle kavşaklanan bir  $C$  disoriented çemberinin gömmesidir.  $D_1$ ,  $D_2$  ve  $D_3$ ; yönlendirmesi zıt iki yayı birbiriyle kavşaklanan  $C$ 'nin bir gömmesidir.  $D_4$  diyagramı,  $C$ 'nin dört yayının birbiriyle kavşaklandığı bir gömmesidir öyle ki bu dört yaydan birbiriyle kavşaklanan çiftler zıt yönlendirmeye sahiptir.  $D_5$  diyagramı  $C$ 'nin altı yayının birbiriyle kavşaklandığı bir gömmesidir öyle ki  $C$ 'nin altı yayından zıt yönlendirmeye sahip her iki ardışık yay birbiriyle kavşaklanmıştır.

**Tanım 3.1.6.**  $L$ ,  $K_1$  ve  $K_2$  gibi iki bileşenden oluşan bir halka olsun.  $K_1$  ve  $K_2$  düğümlerinin her ikisinde bir disorientasyon seçilsin.  $K_1$ 'in (zıt yönlendirmeye

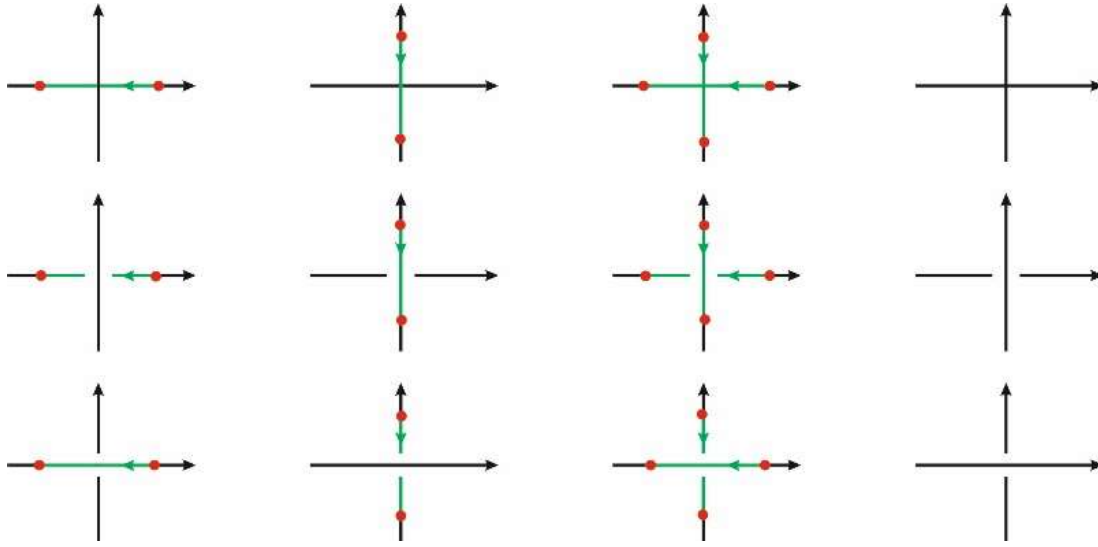
sahip) iki yayı  $A_i^1$  ve  $B_i^1$  ile  $K_2$ 'nin (zıt yönlendirmeye sahip) iki yayı  $A_i^2$  ve  $B_i^2$  ile gösterilsin. Aşağıdakilerden birinin sağlanması durumunda  $L$  halkasının ilgili kavşağı disorienteedir denir.

1. Kavşağın alt geçit ve üst geçit yaylarından biri  $A_i^1$ , ve diğeri  $A_i^2$  veya  $B_i^2$ ,
2. Kavşağın alt geçit ve üst geçit yaylarından biri  $B_i^1$  ve diğeri  $A_i^2$  veya  $B_i^2$  dir.

Bu durumlar dışında kavşak yönlendirilmiştir denir.

**Uyarı 3.1.7.** İki'den fazla bileşene sahip halkalar için disoriented kavşak benzer şekilde tanımlanabilir.

Bir yönlendirilmiş kavşağın üst geçit ve alt geçidi, bir disoriented kavşağın üst geçit ve alt geçidiyle aynı olmasına rağmen, işaretleri aynı değildir. Böylece disoriented kavşak, yönlendirilmiş kavşak ile değiştirilemez. Yönlendirilmiş ve disoriented kavşaklar Şekil 3.3'te çizilmiştir.



Şekil 3.3. Yönlendirilmiş ve disoriented kavşaklar.

### 3.2. Disoriented Dügümlerin Bağlantılı Toplamı

Bu kısımda  $S^3$ 'de verilen  $n$  kavşaklı bir disoriented düğüm  $(S^3, K)$  çifti ile gösterilmektedir.  $A^i$  ve  $B^j$  gömmesi  $K$  olan bir  $C$  disoriented çemberin yayları ve  $P, K$  düğümü üzerinde kavşak noktaları dışında bir nokta olsun. Bu durumda  $P$ ;  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$  için ya  $A^i$  veya  $B^j$  yayına aittir ya da  $A^i$  ve  $B^j$  yaylarının



arakesitindedir. Dikkat edilmelidir ki  $P$ ,  $A^i$  ve  $B^j$  yaylarının bir arakesit noktası ise  $P \in A^i \cap B^i$ ,  $P \in A^i \cap B^{i+1}$  veya  $P \in A^1 \cap B^n$  durumlarından biri gerçekleşir.

**Tanım 3.2.1.**  $(S^3, K_1)$  ve  $(S^3, K_2)$  iki disoriented düğüm ve  $k \in \{1, 2\}$ ,  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$  için  $A_k^i$  ve  $B_k^j$ ,  $K_k$ 'nin gömmesi olan  $C_k$  disoriented çemberinin yayları olsun.  $K_k$  üzerinde kavşak noktasından farklı bir  $P_k$  noktası alınsın.  $K_1$  ve  $K_2$  düğümlerinin bağlantılı toplamı (ya da birleşimi),  $k=1, 2$  için  $(S^3 - \text{int } V_k^3, K_k - \text{int } V_k^1)$  manifold çiftinin ayrık birleşiminden elde edilen bir disoriented düğümdür. Bu manifoldların sınırları;  $U_k^3$ ,  $P_k$  merkezli bir 3-yuvar ve  $U_k^1$ ,  $P_k$  merkezli bir 1-yuvar olmak üzere bir disorientasyon koruyan  $\varphi: (\partial U_2^3, \partial U_2^1) \rightarrow (\partial U_1^3, \partial U_1^1)$  homeomorfizmi boyunca yapıştırılır.  $K_1$  ve  $K_2$  düğümlerinin birleşimi  $K_1 \# K_2$  ile gösterilir.

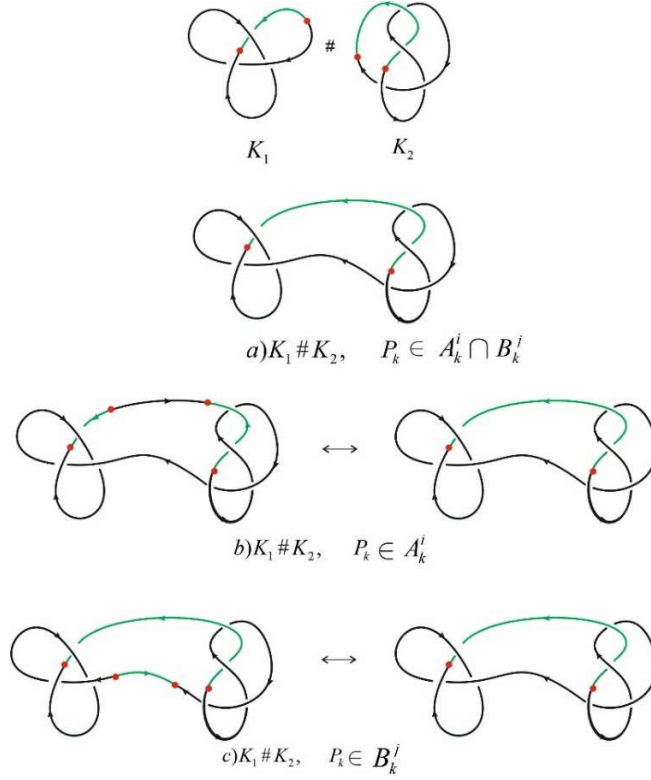
$K_1 \# K_2$ , seçilen  $P_k$  noktalarından bağımsız olarak belirlenir. Böylece  $K_1 \# K_2$  bağlantılı toplamının  $K_1$  ve  $K_2$  tarafından tek olarak belirlendiği görülür. Bağlantılı toplamın tanımından aşağıdaki önerme açıkça görülmektedir.

**Önerme 3.2.2.** İki disoriented düğümün bağlantılı toplamı için aşağıdakiler geçerlidir:

1.  $d(K)$ ,  $K$  düğümünün disoriented kavşak sayısını göstermek üzere  $d(K_1 \# K_2) = d(K_1) + d(K_2)$  olur.
2. İki disoriented düğümün bağlantılı toplamı değişmelidir. Başka bir deyişle  $K_1 \# K_2 \cong K_2 \# K_1$  dir. Daha somut olarak  $K_1 \# K_2$  ve  $K_2 \# K_1$ , disorientasyon ile birlikte denktirler.
3. Üç disoriented düğümün bağlantılı toplamı birleşmelidir. Başka bir deyişle  $K_1 \# (K_2 \# K_3) \cong (K_1 \# K_2) \# K_3$  sağlanır.

Yukarıdaki önermeden disoriented düğümlerin bağlantılı toplamı, bütün disoriented düğümlerin kümesi üzerinde tanımlanır. Ancak, bu küme bağlantılı toplam işlemine göre bir grup değildir. Bunun sebebi; birim elemanının aşikâr düğüm olmasına rağmen ters elemanının bulunmamasıdır. Bu küme bağlantılı toplam işlemine göre bir yarı gruptur.

Bağlantılı toplamın inşası aşağıdaki gibi gösterilebilir:  $K_1 \# K_2$ , Şekil 3.4'teki gibi  $K_1$  disoriented düğümünün herhangi bir diyagramının  $K_2$  düğümünün bir diyagramı ile birleştirilmesiyle oluşan bir disoriented düğümdür. Şekil 3.4'te siyah yaylar  $A_k^i$  ile ve yeşil yaylar  $B_k^j$  ile temsil edilmiştir.



Şekil 3.4. İki disoriented düğümün bağlantılı toplamı.

### 3.3. Disoriented Reidemeister Hareketlerinin Minimum Üreteç Kümeleri

Disoriented diyagramlar üzerindeki Reidemeister hareketleri, yönlendirilmiş diyagramlar üzerindeki Reidemeister hareketlerini genellemektedir. Yönlendirilmiş Reidemeister hareketlerinin koleksiyonu için Polyak [40]' a bakınız. Polyak; Şekil 3.5'teki  $\Omega 1a$ ,  $\Omega 1b$  hareketlerinin, Şekil 3.6'daki  $\Omega 2a$  hareketinin ve Şekil 3.7'deki  $\Omega 3a$  hareketinin tüm yönlendirilmiş Reidemeister hareketlerini ürettiğini ispatlamıştır. Bu üreteç kümesi, minimum sayıda üreteç bulundurmaktadır. Ayrıca Şekil 3.7'deki  $\Omega 3b$ , Şekil 3.6'daki  $\Omega 2b$  ve  $\Omega 2c$  ve Şekil 3.5'deki  $(\Omega 1a, \Omega 1b)$ ,  $(\Omega 1a, \Omega 1c)$ ,  $(\Omega 1b, \Omega 1d)$  veya  $(\Omega 1c, \Omega 1d)$  çiftlerinden biri bütün Reidemeister hareketlerini üretmektedir.

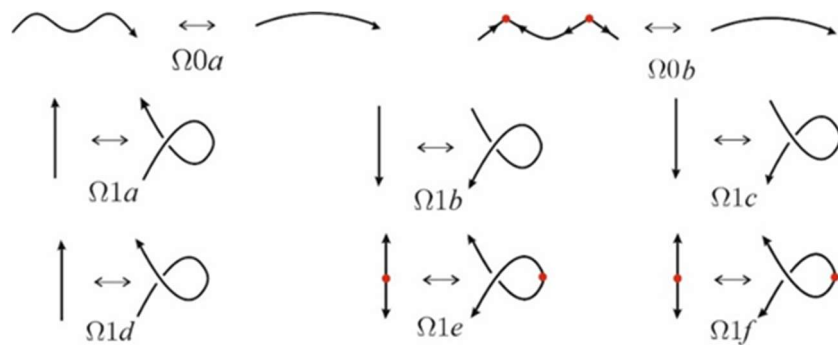
Disoriented Reidemeister hareketlerin üreteç kümesini oluşturmak için, yönlendirilmiş Reidemeister hareketlerin üreteç kümesi disoriented diyagramlara genişletilmelidir. Bu hareketler Şekil 3.5, Şekil 3.6 ve Şekil 3.7’de gösterilmektedir. Şekil 3.5’teki  $\Omega 0a$  ve  $\Omega 0b$  hareketleri disoriented diyagramlardaki düzlemsel hareketleri belirtmektedir.

Şekil 3.6’daki  $\Omega 2e$  hareketi,  $\Omega 2a$  ve  $\Omega 2c$  hareketlerinin bir disoriented genişlemesidir.  $\Omega 2f$  hareketi,  $\Omega 2a$  ve  $\Omega 2b$  hareketlerinin bir disoriented genişlemesidir.  $\Omega 2g$  hareketi,  $\Omega 2b$  ve  $\Omega 2d$  hareketlerinin bir disoriented genişlemesidir.  $\Omega 2h$  hareketi ise  $\Omega 2c$  ve  $\Omega 2d$  hareketlerinin bir disoriented genişlemesidir. Ayrıca  $\Omega 2i$  hareketi  $\Omega 2a$ ,  $\Omega 2b$  ve  $\Omega 2c$  hareketlerinin bir disoriented genişlemesidir.

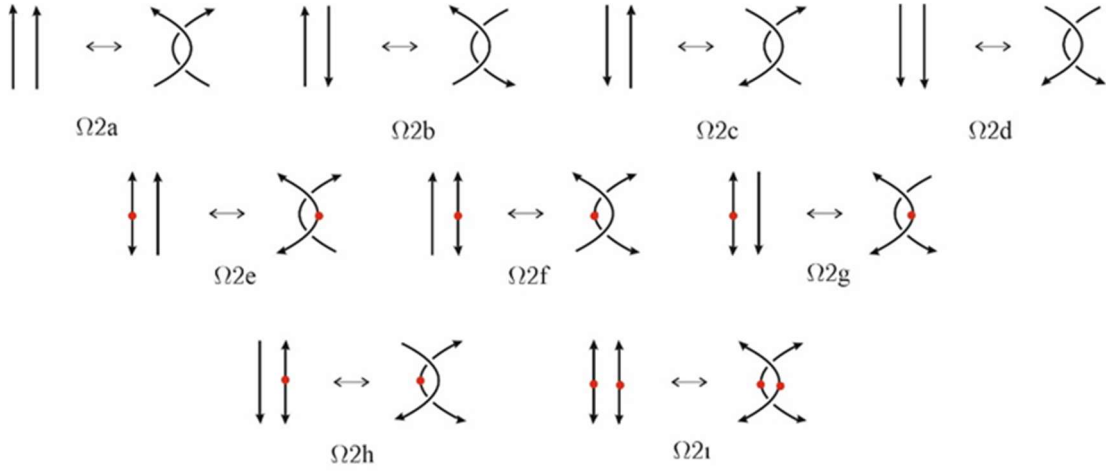
Disoriented diyagramlardaki  $\Omega 2$  ve  $\Omega 3$  hareketlerinin (ve düzlemsel hareketlerin) ürettiği denklik ilişkisine regüler izotopi,  $\Omega 1$ ,  $\Omega 2$  ve  $\Omega 3$  hareketlerinin ürettiği denklik ilişkisine ise kuşatan izotopi denir.

$S = \{\Omega 1a, \Omega 1b, \Omega 1e, \Omega 1f, \Omega 2a, \Omega 2e, \Omega 2f, \Omega 2l, \Omega 3a_i : i \in \{0, \dots, 7\}\}$  disoriented hareketlerin kümesi minimum sayıda üreteç bulundurmaktadır.  $D$  ve  $D'$  aynı disoriented halkaya ait disoriented diyagramlarsa,  $D$  diyagramından  $D'$  diyagramına düzlemsel hareketler ve  $S$  üreteç kümesinde bulunan disoriented hareketlerin bir dizisi ile geçilebilir.

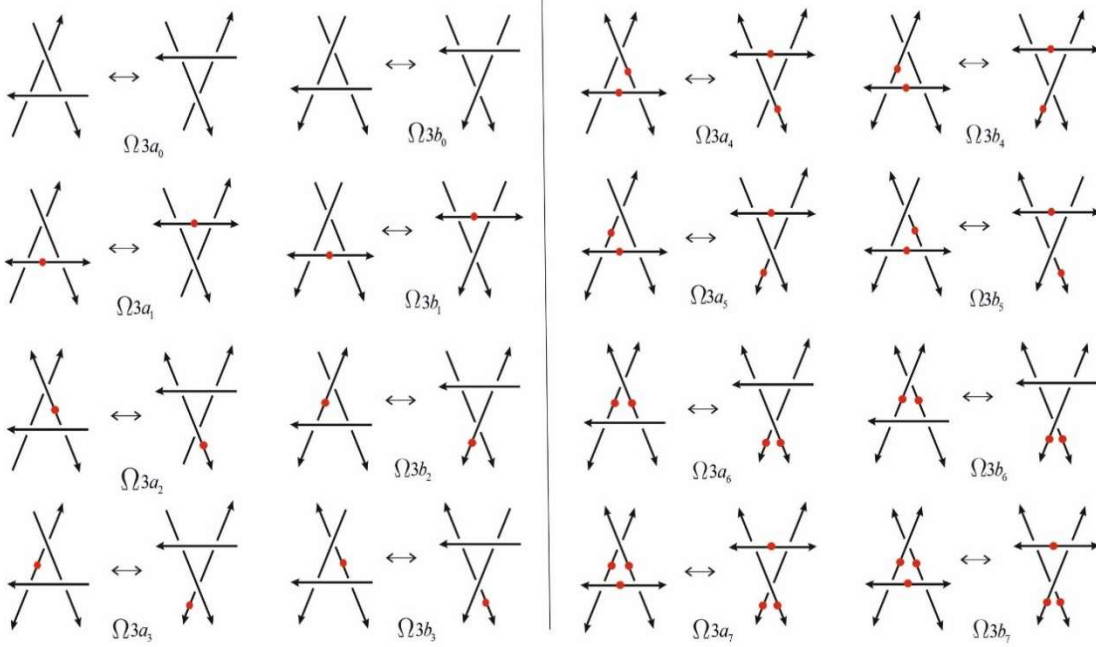
Ayrıca  $\Omega 3b_i, i \in \{0, \dots, 7\}$ ,  $\Omega 2b$ ,  $\Omega 2e$ ,  $\Omega 2f$ ,  $\Omega 2g$ ,  $\Omega 2h$ ,  $\Omega 2i$  ve  $(\Omega 1a, \Omega 1b, \Omega 1e)$ ,  $(\Omega 1c, \Omega 1d, \Omega 1f)$  üçlülerinden biri veya  $(\Omega 1a, \Omega 1c, \Omega 1e, \Omega 1f)$ ,  $(\Omega 1b, \Omega 1d, \Omega 1e, \Omega 1f)$  dörtlülerinden biri bütün Reidemeister hareketlerini üretmektedir.



Şekil 3.5. Düzlemsel ve bazı I. tip disoriented Reidemeister hareketleri.



Şekil 3.6. Bazı II. tip disoriented Reidemeister hareketleri.



Şekil 3.7. Bazı III. tip disoriented Reidemeister hareketleri.

### 3.4. Disoriented Dügümler için Gauss Kodları ve Diyagramları

Bir disoriented düğüm diyagramının Gauss kodunu tanımlamak için klasik düğüm teorisindeki metoda benzer bir yol izlenmesine rağmen bazı ilave yöntemler de bulunmaktadır.

$K$ ,  $n$  kavşaklı bir disoriented düğüm diyagramı olmak üzere  $K$  üzerinde bir başlangıç noktası seçilsin.  $K$  diyagramı üzerinde diyagramın yönlendirmesine göre hareket edilsin ve bu harekete ilk kavşağa ulaşana kadar devam edilsin. İlk kavşağa varıldığında kavşağın disoriented olup olmadığına bakılır. Kavşağın disoriented

olduğu varsayalım. Eğer üst geçitten geçiliyorsa, kavşağın yönü hareketin yönüne zıtsa ve kavşağın işareti pozitifse; bu durumu  $\bar{O}1+$  ile gösterilsin. Kavşağın işareti negatifse, bu durum  $\bar{O}1-$  ile gösterilsin. Eğer kavşağın alt geçit yayından geçiliyorsa, kavşağın işaretine bağlı olarak  $\bar{U}1+$  ve  $\bar{U}1-$  ile gösterilsin. Kavşak disoriented değilse, kavşağın işareti ve geçidin durumuna göre  $O1+$ ,  $O1-$ ,  $U1+$  ve  $U1-$  sembollerinden biri ile gösterilsin. Bütün kavşakları aynı şekilde numaralayıp ilk kavşağa ulaşıldığında her kavşaktan tam iki kez geçilmiş olur. Eğer bir kavşaktan ilk geçiş üst geçit yayı üzerinden oluyorsa, ikinci geçiş alt geçit yayı üzerinden (ya da tam tersi) olacaktır.

**Tanım 3.4.1.** Yukarıdaki işlem boyunca elde edilen tüm ardışık sembolleri birleştirerek  $2n$  sembollü bir dizi oluşturulur. Bu diziye  $K$  disoriented düğüm diyagramının Gauss kodu denir ve  $G_K$  ile gösterilir.

Disoriented halka diyagramlarında Gauss kodu, disoriented düğüm diyagramları için Gauss kodunun bir aşikâr genişlemesi olarak aşağıdaki gibi açıklanabilir:

$n \geq 2$  olmak üzere  $L ; K_1, K_2, \dots, K_n$  gibi  $n$  bileşenden oluşan bir disoriented halka diyagramı olsun.  $i$ . bileşeni gösteren  $K_i$  düğümü için  $G_{K_i}$  onun Gauss kodu olsun.

Bu durumda  $L$  halkasının bir Gauss kodu olan  $G_L$ , her bileşen için bir  $P_i$  taban noktası ile birlikte bileşenlerin Gauss kodlarının kümesidir. Bileşenlerin adlandırılması keyfi olduğundan  $G_L$  uygun şekilde bir küme olarak tanımlanır.  $G_L$  bir tek Gauss kodundan ibaretse bu küme bir düğüm diyagramını temsil etmektedir. Ayrıca bütün bileşenlerin Gauss kodu belirlendiğinde halka diyagramındaki bütün kavşaklar numaralandırılmış olur ve her kavşak Gauss kodunda iki defa belirir. (Bu durum aynı bileşen altında gerçekleşmek zorunda değildir.)

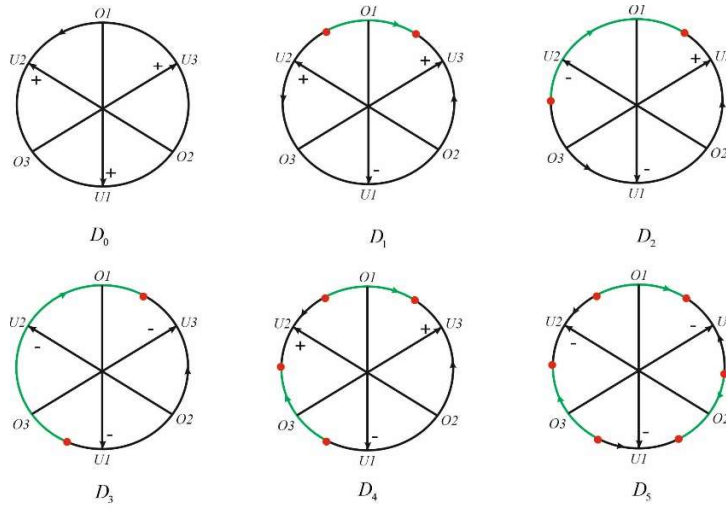
**Örnek 3.4.2.** Şekil 3.2’de verilen disoriented yonca yaprağı diyagramlarının Gauss kodları sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
D_0 &: O_1 + U_2 + O_3 + U_1 + O_2 + U_3 + \\
D_1 &: \bar{O}_1 - U_2 + O_3 + U_1 - O_2 + U_3 + \\
D_2 &: \bar{O}_1 - \bar{U}_2 - O_3 + U_1 - O_2 - U_3 + \\
D_3 &: \bar{O}_1 - \bar{U}_2 - \bar{O}_3 - U_1 - O_2 - U_3 - \\
D_4 &: \bar{O}_1 - U_2 + \bar{O}_3 - U_1 - O_2 + U_3 - \\
D_5 &: \bar{O}_1 - U_2 - \bar{O}_3 - U_1 - \bar{O}_2 - U_3 -
\end{aligned}$$

**Tanım 3.4.3.** Bir (disoriented) Gauss diyagramı  $G$ ; bir  $S$  disoriented çember ve bu çember üzerindeki  $2n$  adet noktayı birbirine bağlayan işareti belirlenmiş ve yönlendirilmiş  $n$  adet kirişten oluşmaktadır. Her klasik düğüm diyagramına bir Gauss diyagramı karşılık geldiğinden, her disoriented düğüm diyagramına da karşılık gelen bir disoriented Gauss diyagramı vardır.

Bir disoriented düğüm diyagramına karşılık gelen Gauss diyagramı, aşağıdaki örnekte gösterildiği gibi, Gauss kodunun yardımıyla kolayca çizilebilir.

**Örnek 3.4.4.** Şekil 3.2’de gösterilen disoriented yonca yaprağı diyagramlarına karşılık gelen Gauss diyagramları, Örnek 3.4.2’deki Gauss kodları yardımıyla Şekil 3.8’de çizilmiştir.

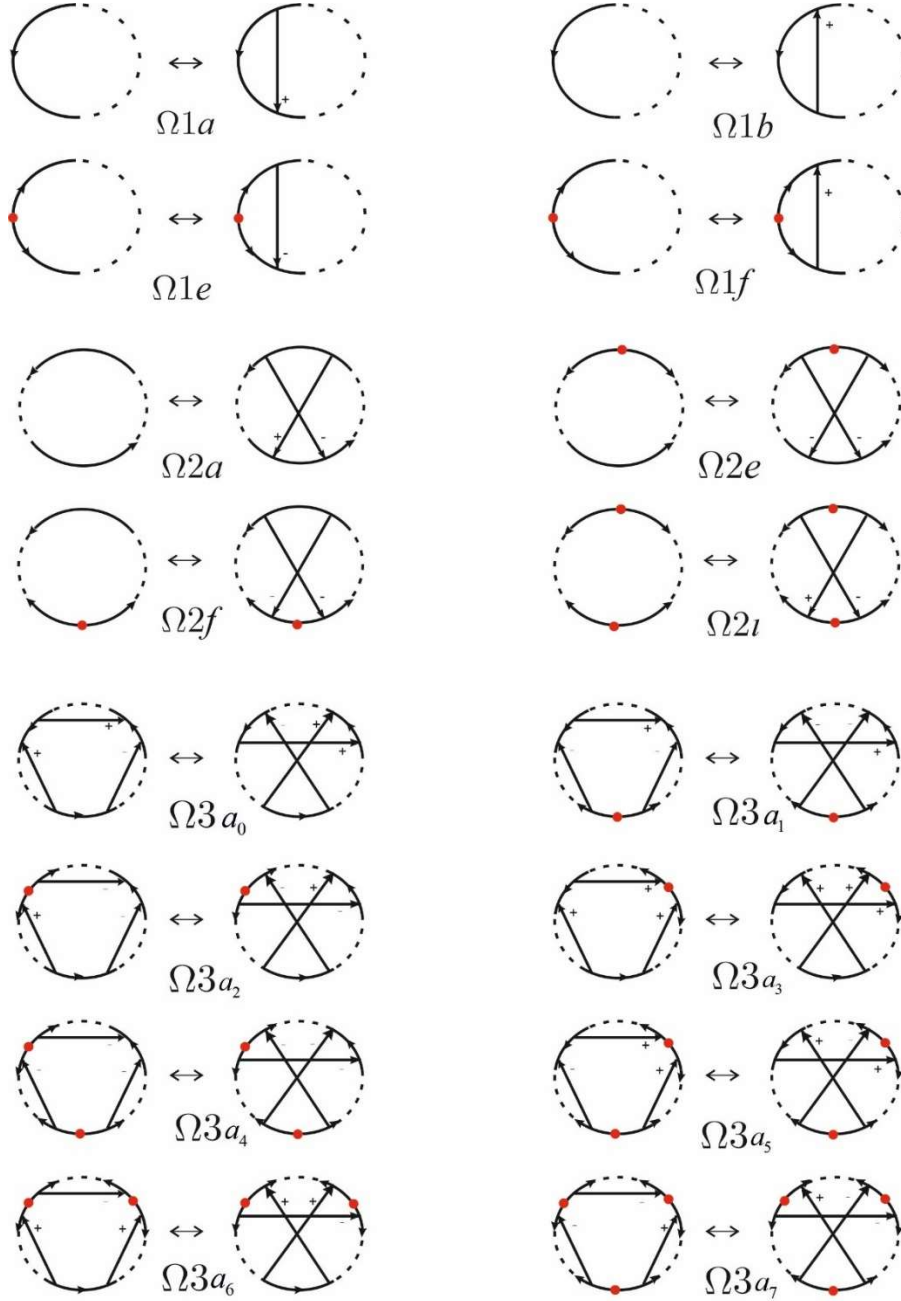


**Şekil 3.8.** Sağ el yonca yaprağı düğümünün Gauss diyagramları.

Disoriented diyagramlarına karşılık gelen Gauss diyagramlarının denkleğini belirlemek için disoriented Reidemeister hareketlerine karşılık gelen Gauss diyagramlarını belirlemek gerekir. Bunun için disoriented Reidemeister hareketlerinin üreteç kümesi olan

$$S = \{\Omega 1a, \Omega 1b, \Omega 1e, \Omega 1f, \Omega 2a, \Omega 2e, \Omega 2f, \Omega 2l, \Omega 3a_i : i \in \{0, \dots, 7\}\}$$

kümesine karşılık gelen Gauss diyagramlarını çizmek yeterlidir. Bu diyagramlar Şekil 3.9’da çizilmiştir.



Şekil 3.9. Disoriented Reidemeister hareketlerinin minimum kümesine karşılık gelen Gauss diyagramları.





#### 4. DİSORIENTED HALKALAR İÇİN İKİ DEĞİŞKENLİ POLİNOM İNVARYANTI

Bu bölümde, disoriented düğüm ve halkalar, polinom invaryantları yoluyla sınıflandırılacaktır. Bir başka ifade ile birbirine kuşatan izotop olan disoriented düğüm veya halka diyagramlarına atanan polinomların aynı oldukları ispatlanacaktır.

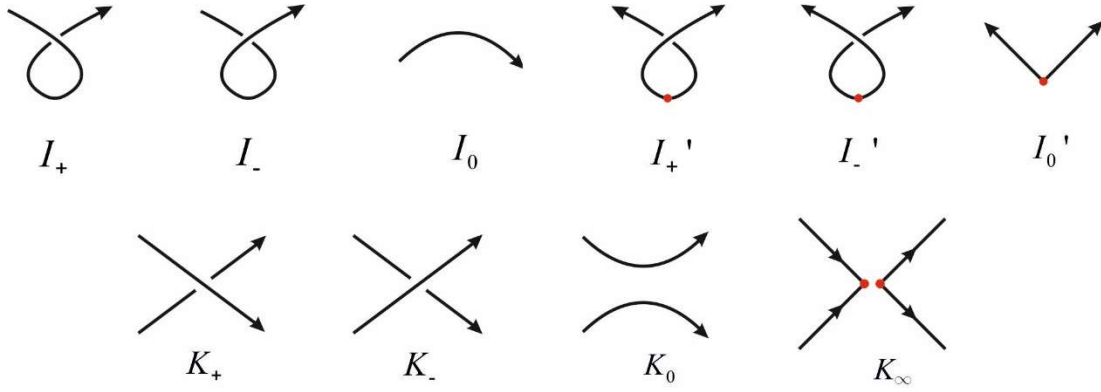
Bu doğrultuda disoriented düğüm ve halka diyagramları için parantez polinomunun bir genellemesi olan iki değişkenli bir polinom tanımlanacak ve bir regüler izotopi invaryantı olduğu ispatlanacaktır. Bu polinom, klasik düğüm ve halka diyagramları için [2]'de verilen Kauffman  $L$  polinomunu da disoriented düğüm teorisine genişletecektir. Ayrıca bu polinom tam burulma ile normalleştirilerek disoriented halka diyagramları için kuşatan izotopinin invaryantı olan bir polinom elde edilecektir. Bu normalleştirilmiş polinom disoriented halkalar için Jones polinomunun bir genellemesi olacaktır. Aynı zamanda Kauffman  $F$  polinomunu da disoriented halka diyagramlarına genişletecektir.

##### 4.1. İki Değişkenli $M$ ve $N$ Polinomu

**Tanım 4.1.1.**  $K$  bir disoriented halka diyagramını gösterebilir ve  $M_K \in \mathbb{Z}[a, a^{-1}, z, z^{-1}]$ ,  $K$  diyagramına atanmış bir 2-değişkenli Laurent polinomu olsun.  $M_K$  polinomu aşağıdaki özellikleri sağlar:

1.  $M_K$ , regüler izotopinin bir invaryantıdır,
2.  $M_{\circ} = 1$ ,
3.  $M_{I_+} = aM_{I_0}$ ,  $M_{I_-} = a^{-1}M_{I_0}$ ,
4.  $M_{I'_+} = a^{-1}M_{I'_0}$ ,  $M_{I'_-} = aM_{I'_0}$ ,
5.  $M_{K_+} + M_{K_-} = z(M_{K_0} + M_{K_{\infty}})$ .

Buradaki diyagramlar Şekil 4.1'de çizilmiş diyagramlardır.  $\circ$ , sıfır kavşaklı düğümlenmemiş düğümü göstermektedir.



Şekil 4.1. Diyagramlar, kavşaklar ve ayırmalar.

**Teorem 4.1.2.**  $M_K$  polinomu iyi tanımlı bir Laurent polinomudur ve regüler izotopinin invariantıdır.

$M_K$  polinomu aşağıda tanımlanan  $N_K$  polinomuyla ortak özellikleri sağlamaktadır. Bu özellikler Teorem 4.1.2'nin ispatında kullanılacaktır. Bu sebeple Teorem 4.1.2'nin ispatı kısım 4.2'de verilecektir.

**Tanım 4.1.3.**  $K$ , bir disoriented düğüm diyagramı olsun. İki değişkenli  $N_K \in \mathbb{Z}[a, a^{-1}, z, z^{-1}]$  Laurent polinomu

$$N_K = a^{-cw(K)} M_K$$

ile tanımlanır. Burada  $cw(K)$ ,  $K$  disoriented düğümünün tam burulmasını gösterir.

**Teorem 4.1.4.**  $N_K$  polinomu kuşatan izotopinin bir invariantıdır.

**İspat.**  $cw(K)$  disoriented halka diyagramlarının bir regüler izotopi invariantı olduğundan  $a^{-cw(K)}$  da regüler izotopi invariantıdır. Böylece  $N_K$ , iki regüler izotopi invariantının çarpımı olduğundan kendisi de regüler izotopinin invariantıdır. Bu durumda  $N_K$  polinomunun I. hareket altındaki davranışını incelemek yeterlidir.

$$cw(I_+) = 1 + cw(I_0), \quad cw(I_-) = -1 + cw(I_0),$$

$$cw(I'_+) = -1 + cw(I'_0), \quad cw(I'_-) = 1 + cw(I'_0)$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
N_{I_+} &= a^{-cw(I_+)} M_{I_+} & N_{I_-} &= a^{-cw(I_-)} M_{I_-} \\
&= a^{-(1+cw(I_0))} a M_{I_0} & &= a^{-(1+cw(I_0))} a^{-1} M_{I_0} \\
&= a^{-cw(I_0)} M_{I_0} & &= a^{-cw(I_0)} M_{I_0} \\
&= N_{I_0} & &= N_{I_0}
\end{aligned}$$
  

$$\begin{aligned}
N_{I'_+} &= a^{-cw(I'_+)} M_{I'_+} & N_{I'_-} &= a^{-cw(I'_-)} M_{I'_-} \\
&= a^{-(1+cw(I'_0))} a^{-1} M_{I'_0} & &= a^{-(1+cw(I'_0))} a M_{I'_0} \\
&= a^{-cw(I'_0)} M_{I'_0} & &= a^{-cw(I'_0)} M_{I'_0} \\
&= N_{I'_0} & &= N_{I'_0}
\end{aligned}$$

eşitliklerine ulaşılır. Burada  $I_+$ ,  $I_-$ ,  $I_0$ ,  $I'_+$ ,  $I'_-$  ve  $I'_0$  Şekil 4.1' deki diyagramlardır.

Bu diyagramlar Şekil 3.5'teki I. Reidemeister hareketlerine karşılık gelmektedir.

**Teorem 4.1.5.**  $K$ , bir disoriented halka diyagramı olsun. Bu durumda

$$\langle K \rangle(A) = M_K(-A^3, A + A^{-1})$$

$$\tau_K(A) = N_K(-A^3, A + A^{-1})$$

$$\nu_K(t) = N_K(-t^{-3/4}, t^{-1/4} + t^{1/4})$$

olur.

**İspat.** Sadece  $\langle K \rangle(A) = M_K(-A^3, A + A^{-1})$  olduğunu yani  $M_K$  polinomunda  $a = -A^3$  ve  $z = A + A^{-1}$  alınarak parantez polinomunun elde edildiğini gösterelim. Ayrıca  $N_K$  polinomunda  $a = -A^3$  ve  $z = A + A^{-1}$  alınarak tam normalleştirilmiş polinomunun ve  $a = -t^{-3/4}$  ve  $z = t^{-1/4} + t^{1/4}$  alınarak tam Jones polinomunun elde edilişi benzer şekilde gösterilir.

$$\langle K_+ \rangle = A \langle K_0 \rangle + A^{-1} \langle K_\infty \rangle$$

$$\langle K_- \rangle = A^{-1} \langle K_0 \rangle + A \langle K_\infty \rangle$$

olduğundan  $\langle K_+ \rangle + \langle K_- \rangle = (A + A^{-1})[\langle K_0 \rangle + \langle K_\infty \rangle]$  yazılır. Bu  $z = A + A^{-1}$  ile  $M_{K_+} + M_{K_-} = z(M_{K_0} + M_{K_\infty})$  aksiyomunun özel halidir. Diğer aksiyomların  $a = -A^3$  alınarak sağlandığı açıktır.

**Önerme 4.1.6.**  $K^*$ ,  $K$  disoriented halka diyagramının ayna görüntüsü olsun. Bu durumda

$$M_{K^*}(a, z) = M_K(a^{-1}, z)$$

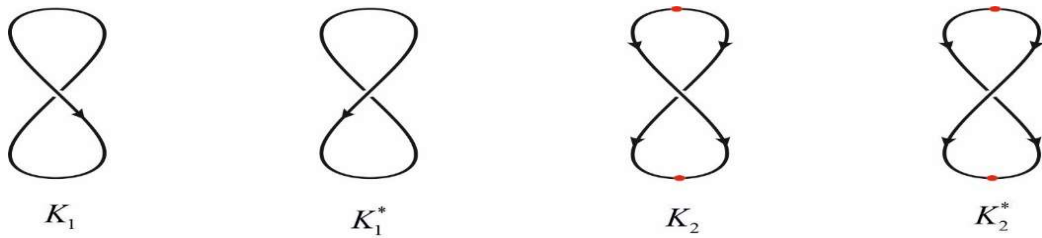
$$N_{K^*}(a, z) = N_K(a^{-1}, z)$$

ilişkileri vardır.

**İspat.**  $K^*$ ,  $K$  diyagramının kavşaklarının üst geçitlerinin alt geçit ve alt geçitlerinin üst geçit yapılmasıyla elde edilen diyagramdır. Böylece Tanım 4.1.1'in 3. ve 4. aksiyomlarında  $a$  ile  $a^{-1}$ 'in yer değiştirildiği görülmektedir. Ayrıca  $cw(K^*) = -cw(K)$  olduğu da açıktır. Bundan dolayı  $M_{K^*}(a, z) = M_K(a^{-1}, z)$  ve  $N_{K^*}(a, z) = N_K(a^{-1}, z)$  olur.

**Uyarı 4.1.7.** Bu önermenin bir sonucu olarak; eğer  $N_K(a, z) \neq N_K(a^{-1}, z)$  ise  $K$ , ayna görüntüsüne kuşatan izotop değildir.

**Örnek 4.1.8.** Şekil 4.2'deki disoriented düğüm polinomlarını hesaplayalım.



**Şekil 4.2.** Bir kavşaklı aşikâr disoriented düğüm diyagramları.

Tanım 4.1.1'in 3. aksiyomundan

$$M_{K_1} = aM_{\circ} = a, \quad N_{K_1} = a^{-cw(K_1)}M_{K_1} = a^{-1}a = 1,$$

$$M_{K_1^*} = a^{-1}M_{\circ} = a^{-1}, \quad N_{K_1^*} = a^{-cw(K_1^*)}M_{K_1^*} = 1.$$

elde edilir.  $M_{K_+} + M_{K_-} = z(M_{K_0} + M_{K_\infty})$  bağıntısından

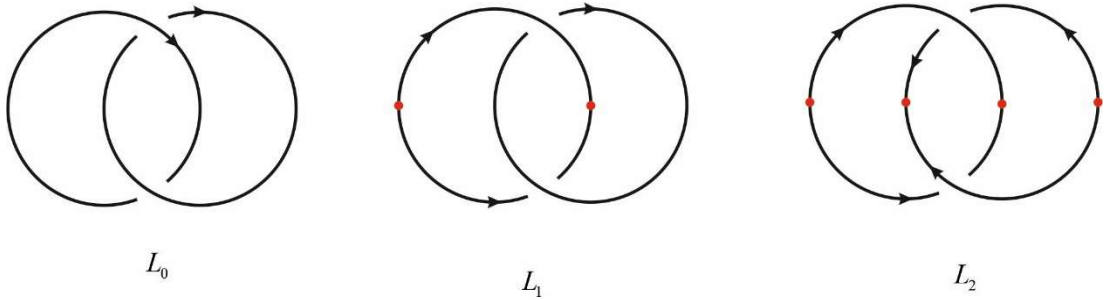
$$\begin{aligned}
M_{K_1} + M_{K_1^*} &= z(M_{\infty} + M_{\circ}) \\
zM_{\infty} &= aM_{\circ} + a^{-1}M_{\circ} - zM_{\circ} \\
z\delta &= a + a^{-1} - z, & M_{\infty} &= \delta \\
\delta &= (a + a^{-1})z^{-1} - 1
\end{aligned}$$

bulunur. Bu, iki düğümlenmemiş düğümün ayrık birleşiminin  $M_K$  polinomunu temsil etmektedir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
M_{K_2} &= a^{-1}M_{\circ} = a^{-1}, & N_{K_2} &= a^{-cw(K_2)}M_{K_2} = 1, \\
M_{K_2^*} &= aM_{\circ} = a, & N_{K_2^*} &= a^{-cw(K_2^*)}M_{K_2^*} = 1.
\end{aligned}$$

olur.  $M_{K_2} + M_{K_2^*} = z(M_{\circ} + M_{\infty})$  eşitliğinden  $\delta = (a + a^{-1})z^{-1} - 1$  elde edildiğine dikkat edilmelidir.

**Örnek 4.1.9.** Şekil 4.3'teki halkaların  $M$  ve  $N$  polinomlarını hesaplayalım.



**Şekil 4.3.** İki bileşenli disorientated halka diyagramları.

Tanım 4.1.1'in 3. aksiyomu olan  $M_{K_+} + M_{K_-} = z(M_{K_0} + M_{K_{\infty}})$  bağıntısından

$$\begin{aligned}
M_{L_0} + \delta &= z(M_{K_1} + M_{K_2}) \\
M_{L_0} &= (a + a^{-1})z - (a + a^{-1})z^{-1} + 1 \\
M_{L_0} &= (a + a^{-1})(z - z^{-1}) + 1
\end{aligned}$$

bulunur. Burada  $K_1$  ve  $K_2$ , Şekil 4.2'deki diyagramlardır.  $cw(L_0) = 2$  olduğundan

$N_{L_0} = a^{-cw(L_0)}M_{L_0} = a^{-2}M_{L_0} = (a^{-1} + a^{-3})(z - z^{-1}) + a^{-2}$  olur.  $L_1$  için

$$\begin{aligned}
M_{L_1} + \delta &= z(M_{K_2^*} + M_{K_1^*}) \\
M_{L_1} &= (a + a^{-1})z - (a + a^{-1})z^{-1} + 1 \\
M_{L_1} &= (a + a^{-1})(z - z^{-1}) + 1
\end{aligned}$$

ve  $cw(L_1) = \sum_o \varepsilon(o) - \sum_d \varepsilon(d) = 1 - (-1) = 2$  olduğundan

$$N_{L_1} = a^{-cw(L_1)} M_{L_1} = a^{-2} M_{L_1} = N_{L_0}$$

dir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
M_{L_2} + \delta &= z(M_{K_1} + M_{K_2}) \\
M_{L_2} &= (a + a^{-1})(z - z^{-1}) + 1
\end{aligned}$$

ve  $N_{L_2} = N_{L_0}$  olur. Böylece  $M_{L_0} = M_{L_1} = M_{L_2}$  ve  $N_{L_0} = N_{L_1} = N_{L_2}$  elde edilir.

**Örnek 4.1.10.** Şekil 3.2'de çizilen sağ el yonca yaprağı düğümünün  $D_1$  disoriented diyagramının bir ayrışımı Şekil 4.4'te çizilmiştir. Bu düğüm diyagramının  $M$  ve  $N$  polinomlarını araştıralım.  $M_{D_1} + M_{K_1} = z(M_{L'} + M_{L_0})$  olduğundan  $L'$  durumu göz önüne alınsın. Bu durumda

$$\begin{aligned}
M_{L'} + M_{\circ} &= z(\delta M_{K_2^*} + M_{K_2^*}) \\
M_{L'} + 1 &= z\left[\left((a + a^{-1})z^{-1} - 1\right)a^{-1} + a^{-1}\right] \\
M_{L'} &= a^{-2}
\end{aligned}$$

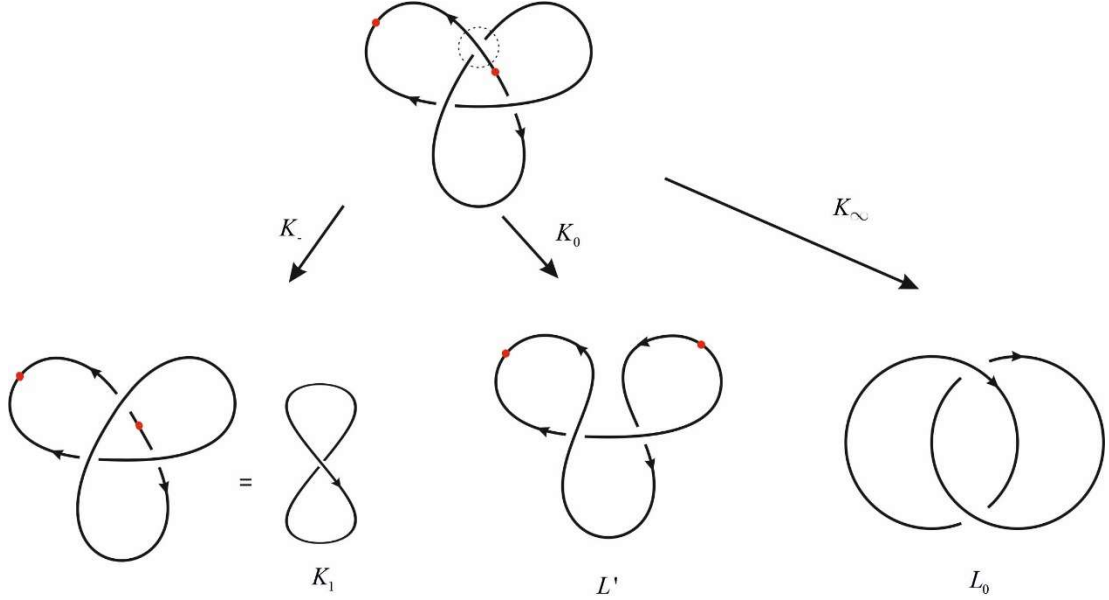
olur ve böylece

$$\begin{aligned}
M_{D_1} + M_{K_1} &= z(M_{L'} + M_{L_0}) \\
M_{D_1} &= z\left[a^{-2} + (a + a^{-1})(z - z^{-1}) + 1\right] - a \\
M_{D_1} &= a^{-2}z + (a + a^{-1})z^2 - (a + a^{-1}) + z - a \\
M_{D_1} &= (-2a - a^{-1}) + (1 + a^{-2})z + (a + a^{-1})z^2
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur.  $cw(D_1) = \sum_o \varepsilon(o) - \sum_d \varepsilon(d) = 2 - (-1) = 3$  olduğundan

$$\begin{aligned}
N_{D_1} &= a^{-cw(D_1)} M_{D_1} \\
&= a^{-3} M_{D_1} \\
&= (-2a^{-2} - a^{-4}) + (a^{-3} + a^{-5})z + (a^{-2} + a^{-4})z^2
\end{aligned}$$

elde edilir.



Şekil 4.4. Disoriented kavşaklı disoriented yonca yaprağı düğümünün bir ayrışımı.

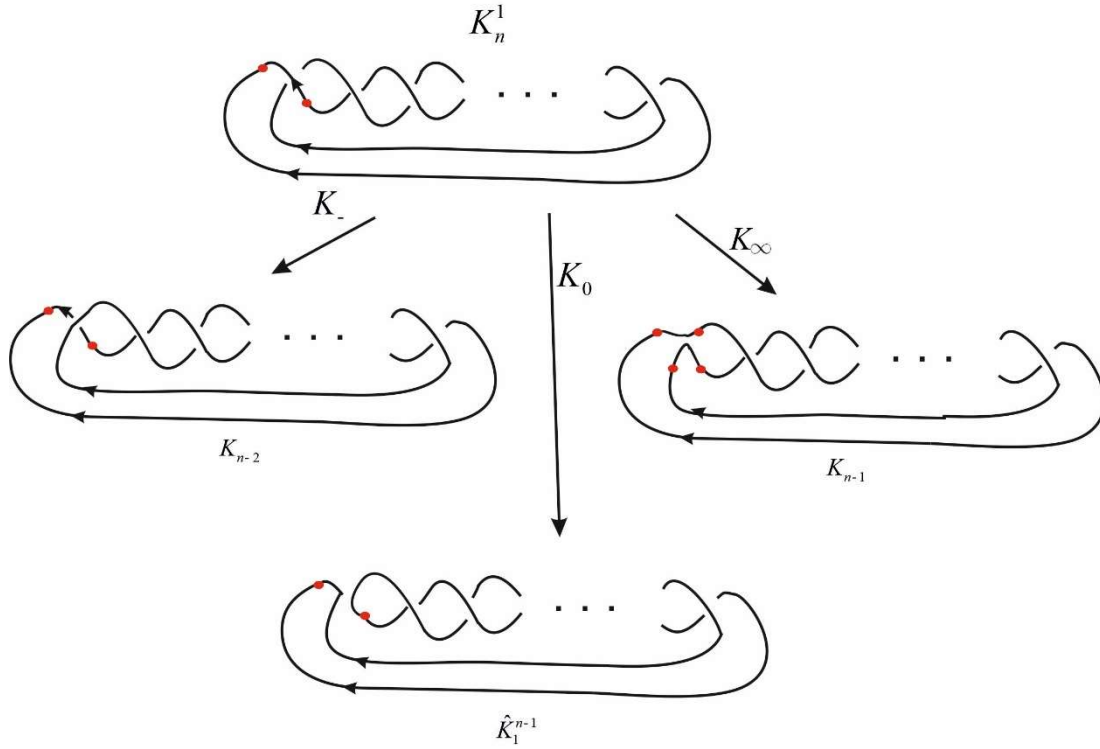
**Örnek 4.1.11.**  $K_n^1$  Şekil 4.5'te çizilen bir disoriented kavşaklı  $(2, n)$ -tor halkasını gösterebiliriz ( $n \geq 2$ ). Tanım 4.1.1 gereği  $M_{K_+} + M_{K_-} = z(M_{K_0} + M_{K_\infty})$  olduğundan  $K_n^1$  halkasının Şekil 4.5'teki disoriented kavşak üzerindeki ayrışımından

$$\begin{aligned}
M_{K_n^1} + M_{K_{n-2}} &= z(M_{\widehat{K}_1^{n-1}} + M_{K_{n-1}}) \\
M_{K_n^1} &= zM_{K_{n-1}} - M_{K_{n-2}} + a^{1-n}z
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Burada  $K_{n-2}$  yönlendirilebilir  $(2, n-2)$  tor halkasını,  $K_{n-1}$  yönlendirilebilir  $(2, n-1)$  tor halkasını ve  $\widehat{K}_1^{n-1}$ ,  $n-1$  kavşaklı aşık düğümü gösterir.  $N$  polinomu için

$$N_{K_n^1} = a^{-n} M_K = a^{-n} z M_{K_{n-1}} - a^{-n} M_{K_{n-2}} + a^{1-2n} z$$

yazılır. Burada  $M_{\widehat{K}_1^{n-1}} = a^{-(n-1)} = a^{1-n}$  olduğuna dikkat edilmelidir.



**Şekil 4.5.** Bir disoriented kavşaklı  $(2, n)$  – tor düğümünün bir ayrışımı.

**Örnek 4.1.12.**  $L$ , sekiz şekilli düğümün Şekil 4.6'daki disoriented diyagramı olsun.  $L$  diyagramının bir kavşak ayrışımında  $L'$ ,  $\delta L_0$  ve  $D_0$  diyagramlarının elde edildiği şekilden gözükmektedir. Bu durumda

$$M_L + M_{L'} = z(\delta M_{L_0} + M_{D_0})$$

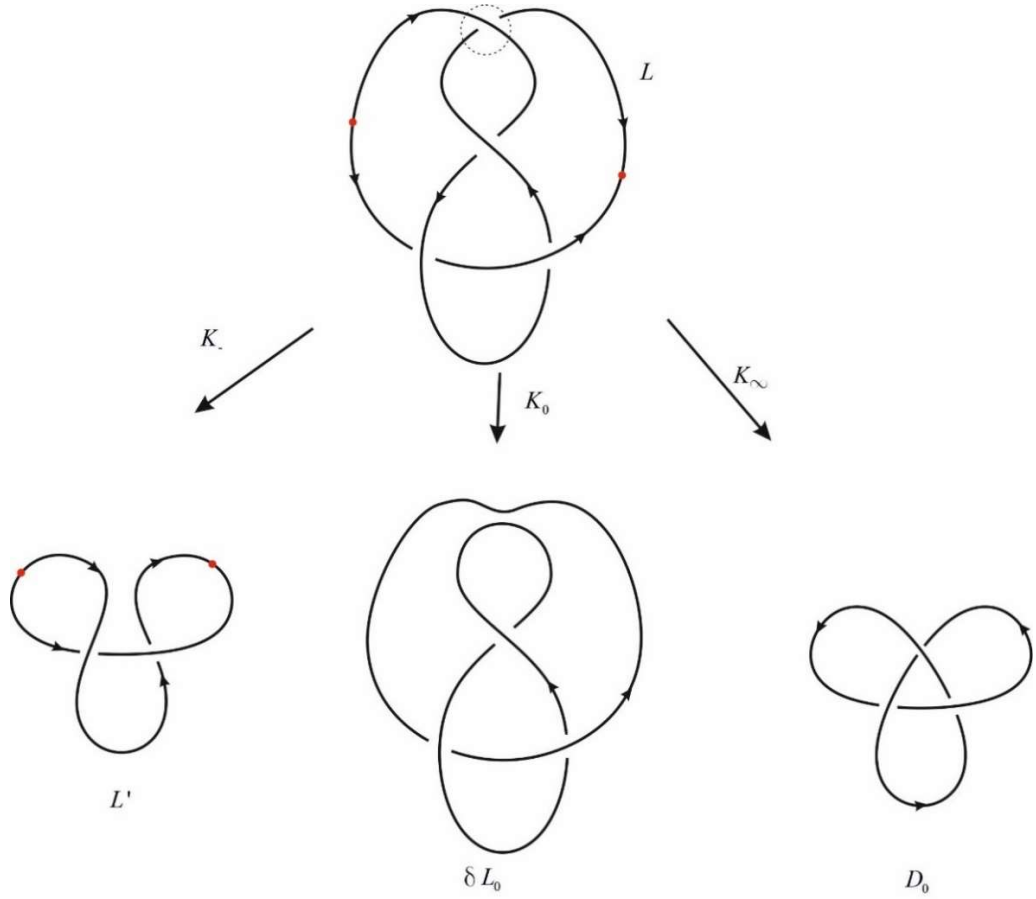
$$M_L + a^{-2} = z \left[ ((a + a^{-1})z^{-1} - 1)((a + a^{-1})(z - z^{-1}) + 1) + (-2a - a^{-1}) + (1 + a^{-2})z + (a + a^{-1})z^2 \right]$$

sağlanır ve sonuç olarak

$$M_L = (-a^2 - 1 - a^{-2}) + (-a - a^{-1})z + (a^2 + 2 + a^{-2})z^2 + (a + a^{-1})z^3$$

bulunur.  $cw(L) = \sum_o \varepsilon(o) - \sum_d \varepsilon(d) = 2 - 2 = 0$  olduğundan  $N_L = M_L$  şeklinde bir eşitlik elde edilir.





**Şekil 4.6.** İki disoriented kavşaklı sekiz şekilli düğümün bir ayrışımı.

**Uyarı 4.1.13.** Disoriented yonca yaprağı, Hopf halkası ve sekiz şekilli düğüm diyagramlarının ve ayna görüntülerinin  $M$  ve  $N$  polinomları için aşağıdaki durumlar geçerlidir:

**a)**  $K$  bir disoriented yonca yaprağı diyagramı ise ayna görüntüsü  $K^*$  için

$$M_{K^*} = (-2a^{-1} - a) + (1 + a^2)z + (a^{-1} + a)z^2,$$

$$N_{K^*} = (-2a^2 - a^4) + (a^3 + a^5)z + (a^2 + a^4)z^2$$

elde edilir.  $M_K \neq M_{K^*}$  ve  $N_K \neq N_{K^*}$  olduğuna dikkat edilmelidir.

**b)**  $L$  iki bileşenli Hopf halkasının herhangi bir disoriented diyagramı ise;

$$M_{L^*} = (a^{-1} + a)(z - z^{-1}) + 1 = M_L$$

$$N_{L^*} = (a + a^3)(z - z^{-1}) + a^2 \neq N_L$$

olur.

**c)**  $L$ , sekiz şekilli düğümün herhangi bir disoriented diyagramı ise

$$M_{L^*} = (-a^{-2} - 1 - a^2) + (-a^{-1} - a)z + (a^{-2} + 2 + a^2)z^2 + (a^{-1} + a)z^3 = M_L$$

$$N_{L^*} = N_L = M_{L^*} = M_L$$

olur.

**Tanım 4.1.14.**  $K$  bir disoriented düğüm diyagramı olsun. Eğer  $M_K = M_{K^*}$  ve  $N_K = N_{K^*}$  ise  $K$  düğümüne küresel düğüm denir.

**Örnek 4.1.15.** Yonca yaprağı düğümü küresel değildir. Sekiz şekilli düğüm küreseldir.

**Sonuç 4.1.16.**  $\bigcirc \sqcup \bigcirc = \bigcirc \bigcirc$  iki düğümlememiş düğümün ayrık birleşimini gösterebilir. Bu durumda  $M_{\bigcirc \sqcup \bigcirc} = M_{\bigcirc \bigcirc} = \delta M_{\bigcirc}$  ve  $N_{\bigcirc \sqcup \bigcirc} = \delta N_{\bigcirc}$  olduğundan  $K$  herhangi bir disoriented düğüm diyagramı ise  $M_{\bigcirc \sqcup K} = \delta M_K$  ve  $N_{\bigcirc \sqcup K} = \delta N_K$  yazılabilir. Hatta  $K = K_1 \sqcup K_2$  ise  $M_K = M_{K_1 \sqcup K_2} = \delta M_{K_1} M_{K_2}$  olduğu açıktır.

**Önerme 4.1.17.**  $K = K_1 \# K_2$  iki disoriented düğüm diyagramının bağlantılı toplamı olsun. Bu durumda

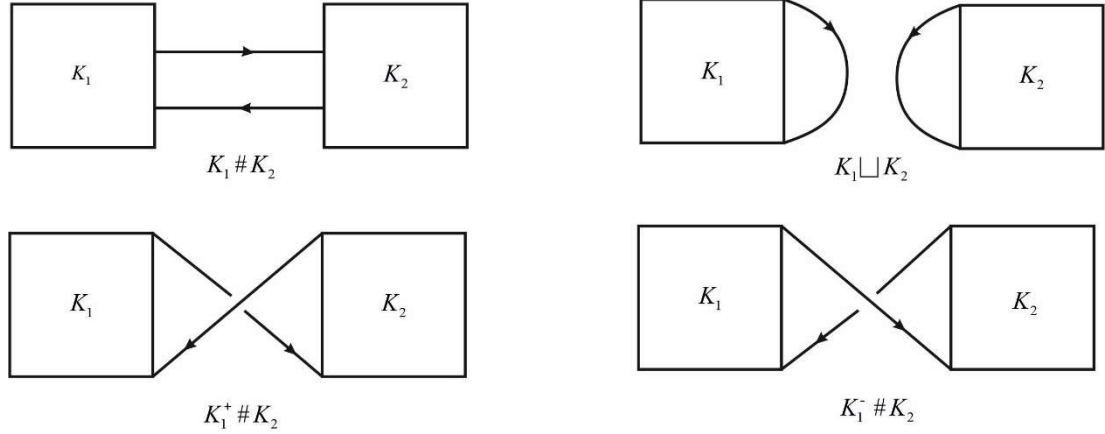
$$\begin{aligned} M_{K_1 \# K_2} &= M_{K_1} M_{K_2}, \\ N_{K_1 \# K_2} &= N_{K_1} N_{K_2} \end{aligned}$$

olur.

**İspat.** Yalnızca  $M_{K_1 \# K_2} = M_{K_1} M_{K_2}$  olduğunu göstermek yeterlidir.  $K = K_1 \# K_2$  olsun.  $K_2$  (veya  $K_1$ ) diyagramı sağ el yönlendirmesine göre tersine çevrilirse ( $180^\circ$  döndürülürse)  $K_1^+ \# K_2$  diyagramı elde edilir. Eğer  $K_2$  (veya  $K_1$ ) sol el yönlendirmesine göre tersine çevrilirse  $K_1^- \# K_2$  diyagramı elde edilir. Burada  $K_1^+$ ,  $K_1$  diyagramı ile bir pozitif kavşaklı aşikâr düğümün bağlantılı toplamı ve  $K_1^-$ ,  $K_1$  diyagramı ile bir negatif kavşaklı aşikâr düğümün bağlantılı toplamıdır. Eğer  $K_1$ ,  $n$ -kavşaklı ise  $K_1^+$  (veya  $K_1^-$ ) disoriented diyagramı  $(n+1)$ -kavşaklıdır. Ayrıca dikkat edilmelidir ki  $K = K_1 \# K_2$ ,  $K_1 \sqcup K_2$  den elde edilir (Şekil 4.7). Böylece  $M_{K_+} + M_{K_-} = z(M_{K_0} + M_{K_\infty})$  bağıntısından

$$\begin{aligned}
M_{K_1^+ \# K_2} + M_{K_1^- \# K_2} &= z(M_{K_1 \# K_2} + M_{K_1 \sqcup K_2}) \\
aM_{K_1 \# K_2} + a^{-1}M_{K_1^- \# K_2} &= zM_{K_1 \# K_2} + z\delta M_{K_1} M_{K_2} \\
(a + a^{-1} - z)M_{K_1 \# K_2} &= z[(a + a^{-1})z^{-1} - 1]M_{K_1} M_{K_2} \\
M_{K_1 \# K_2} &= M_{K_1} M_{K_2}
\end{aligned}$$

elde edilir.



Şekil 4.7. İki disoriented düğümün bağlantılı toplamı ve bazı diyagramlar.

#### 4.2. $M$ Polinomunun İyi Tanımlılığı ve Regüler İzotopi İnvaryantlığı

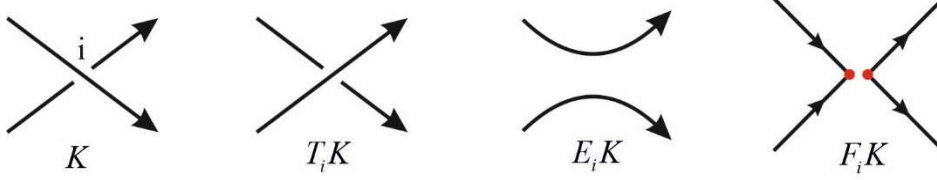
Bu kısımda, disoriented halka diyagramları için Tanım 4.1.1 olarak verilen  $M$  polinomunun iyi tanımlı bir polinom ve regüler izotopinin bir invaryantı olduğu ispatlanacaktır. Burada  $M$  polinomu, Kauffman [2] tarafından yönlendirilmemiş halka diyagramları için verilen tümevarımsal tanıma benzer şekilde yeniden düzenlenecektir. Bunun için disoriented kavşakları alt üst etme ve ayırma işlemlerine ihtiyaç vardır. Bir  $K$  disoriented halka diyagramının herhangi bir  $i$  kavşağının

- alt üst edilerek elde edilen disoriented halka diyagramı  $T_i K$ ,
- yönlendirilebilir yönde ayırma ile elde edilen disoriented halka diyagramı  $E_i K$ ,
- disoriented yönde ayırma ile elde edilen disoriented halka diyagramı  $F_i K$

ile gösterilsin (Şekil 4.8). Bu durumda Tanım 4.1.1'in 5. aksiyomuna benzer şekilde  $i$  kavşağı için

$$M_K + M_{T_i K} = z(M_{E_i K} + M_{F_i K})$$

eşitliği yazılabilir.  $M_K$  polinomunun ilgili aksiyomu bu eşitliğin bir sonucu olacak şekilde tümevarımsal olarak tanımlanacak ve  $M_K$  polinomu aşağıdaki uyarıların (tanım ve lemmaların) bir dizisi olarak verilecektir.  $M_K$  polinomunun iyi tanımlılığı ve regüler izotopi invaryantı olması (Teorem 4.1.2) bu uyarılardan elde edilecektir.



Şekil 4.8.  $i$ . kavşağın alt üst edilmesi ve ayırmalar.

**Tanım 4.2.1. (Tümevarımsal tanım)**  $K$ ,  $(n+1)$ -kavşaklı bir disoriented düğüm diyagramı olsun. Bu diyagramda her bir kavşak  $0, 1, \dots, n$  ile numaralansın. Bu durumda aşağıdaki denklem listesi yazılabilir.

$$\begin{aligned} M_K + M_{T_0 K} &= z(M_{E_0 K} + M_{F_0 K}) \\ M_{T_0 K} + M_{T_1 T_0 K} &= z(M_{E_1 T_0 K} + M_{F_1 T_0 K}) \\ &\vdots \\ M_{T_{n-1} \dots T_0 K} + M_{T_n \dots T_0 K} &= z(M_{E_n T_{n-1} \dots T_0 K} + M_{F_n T_{n-1} \dots T_0 K}). \end{aligned}$$

Bütün kavşakları alt üst etme işlemi sonucu  $\hat{K} = T_n \dots T_0 K$  ile ve ayırma işlemleri  $A_i K = E_i T_{i-1} \dots T_0 K$ ,  $B_i K = F_i T_{i-1} \dots T_0 K$  ile gösterilsin. Böylece taraf tarafa çıkarma-toplama operasyonları uygulanırsa

$$M_K = (-1)^{n+1} M_{\hat{K}} + z \left( \sum_{i=0}^n (-1)^i (M_{A_i K} + M_{B_i K}) \right) \quad (4.1)$$

elde edilir.

(4.1) formülü,  $K$  halkasının az kavşaklı disoriented diyagramları için  $M_K$  polinomunun  $M_{\hat{K}}$  cinsinden hesaplanmasında kullanılabilir.

$K$  bir disoriented düğüm iken,  $\hat{K}$  düğümlememiş düğüm ve  $K$  bir disoriented halka iken,  $\hat{K}$  halkalanmamış disoriented halka olacak şekilde  $K$  disoriented halkasına alt üst etme işlemi uygulansın.

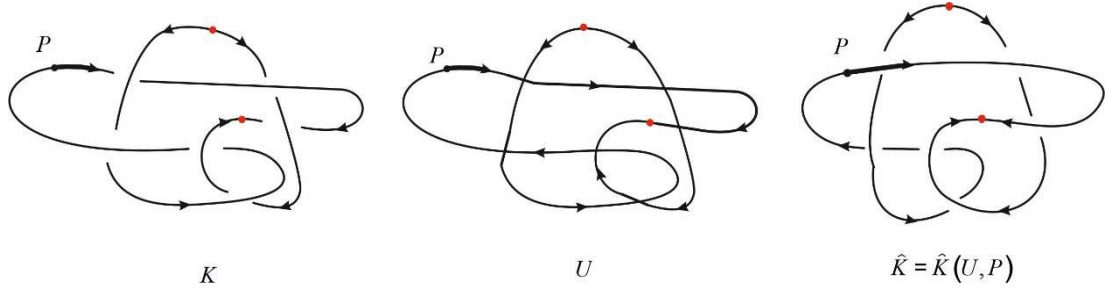
Disoriented halkalar için hesaplama yapılırken Kısım 4.1’de verilen  $\delta = (a + a^{-1})z^{-1} - 1$  ifadesini ve

$$M_{K_1 \sqcup K_2} = \delta M_{K_1} M_{K_2} \quad (4.2)$$

eşitliğini kullanmak gerekmektedir.

Bu tümevarımsal tanımı açıklamanın en iyi yolu yönü belirlenmiş bir taban noktasına sahip bir disoriented düğüm diyagramı ile ilişkilendirilmiş standart düğümlememiş düğüm diyagramı kullanmaktır. Standart düğümlememiş düğüm aşağıdaki gibi inşa edilir:

$K$  bir disoriented diyagram,  $U$  onun düzlemsel izdüşümü ve  $P$ ,  $U$  izdüşümünün herhangi bir yayının bir iç noktası olsun.  $U$  boyunca  $P$  yönünde ilerlerken her kavşakta birinci karşılaşmada alt geçidi üst geçit yaparak  $P$  noktasına tekrar ulaşmak suretiyle bir  $\hat{K} = \hat{K}(U, P)$  disoriented diyagramı elde edilir. Bu Şekil 4.9’deki gibi düğümlememiş disoriented diyagramını üretir.



**Şekil 4.9.** Standart düğümlememiş düğüm elde etme.

$\hat{K} = \hat{K}(U, P)$  standart düğümlememiş düğümü,  $K$  disoriented düğümü için özel bir düğümlememe dizisi üretmek amacıyla kullanılabilir.  $K$  üzerinde  $P$  taban noktasından hareket edilsin ve  $\hat{K}$  diyagramında karşılık gelen kavşaktan farklılaşan her bir kavşak numaralansın. Numaralanan kavşaklar  $n, n-1, \dots, 0$  şeklinde azalan bir dizi ile belirtilsin. Bu durumda  $\hat{K}$ ,  $K$  diyagramında bu kavşakları alt üst etme ile elde edilir ve  $\hat{K} = T_n T_{n-1} \dots T_0 K$  yazılır. Bu alt üst etme dizisi  $K$  üzerinde yönü belirlenmiş bir taban noktası seçimi ile belirlenir.

Böylece standart düğümlememiş düğüm için  $M$  polinomu

$$M_{\hat{K}(U, P)} = a^{cw(\hat{K}(U, P))} \quad (4.3)$$

formülü ile verilir. Burada  $cw(\hat{K})$ ,  $\hat{K}$  diyagramının tam burulmasıdır. (4.2) formülünün avantajından yararlanmak için, bileşenleri alt üst dizisi ile ayrıştırmak da gerekli olacaktır. Bu durumda (4.1) formülü disoriented düğümlenmemiş düğümden ziyade ayrık disoriented halka ile ilişkilendirilmiş olur. Böylece (4.1), (4.2) ve (4.3) formüllerinin kullanılmasıyla bir tekrarlı hesaplama metoduna sahip oluruz ve bu hesaplamalar sonucunda  $M$  değeri sadece  $\hat{K} = \hat{K}(U, P)$  standart düğümlenmemiş düğüme bağlı olur.

**Tanım 4.2.2.**  $K$ , bir disoriented halka diyagramı ve  $K$  diyagramının kavşakları  $\alpha = (\alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_0)$  olarak ifade edilsin.  $A_i^\alpha$  ve  $B_i^\alpha$  sırasıyla  $A_i^\alpha = E_i T_{\alpha_i} T_{\alpha_{i-1}} \dots T_{\alpha_0}$ ,  $B_i^\alpha = F_i T_{\alpha_i} T_{\alpha_{i-1}} \dots T_{\alpha_0}$  ile verilen operatörler olsun.  $|\alpha| = n$  olmak üzere

$$\begin{aligned}\hat{K} &= T_{\alpha_n} T_{\alpha_{n-1}} \dots T_{\alpha_0} K \\ \sum_K(\alpha) &= \sum_{i=0}^n (-1)^i (M_{A_i^\alpha K} + M_{B_i^\alpha K}) \\ \psi_K(\alpha) &= (-1)^{|\alpha|+1} M_{\hat{K}(\alpha)} + z \sum_K(\alpha)\end{aligned}$$

olarak tanımlıdır. Burada  $\psi_K(\alpha) = M_K$  olması istenmektedir.

**Tanım 4.2.3.**  $K = K_1 \sqcup K_2 \sqcup \dots \sqcup K_n$ ,  $n$ -bileşenli bir disoriented halka olsun.  $K$  halkasından  $i$ . bileşeni çıkarılarak elde edilen disoriented halkayı  $K - K_i$  ile gösterilsin. Böylece  $K_i$ ,  $K$  halkasından  $K_1, K_2, \dots, K_{i-1}, K_{i+1}, \dots, K_n$  bileşenlerinin silinmesiyle elde edilen düğüm olur. Böylece;

1.  $\hat{K} = \hat{K}(U, P)$  standart düğümlenmemiş düğüm ise, bu durumda  $M_{\hat{K}} = a^{cw(\hat{K})}$  eşitliği vardır. Burada  $cw(\hat{K})$ ,  $\hat{K}$  düğümlenmemiş düğümün tam burulmasıdır.
2.  $K_1$  disoriented düğüm diyagramı, bir disoriented  $K_2$  halkasının üzerinde bulunuyorsa,  $M_{K_1 \sqcup K_2} = \delta M_{K_1} M_{K_2}$  eşitliği vardır. Burada  $\delta = (a + a^{-1})z^{-1} - 1$  dir.
3.  $K = K_1 \sqcup K_2 \sqcup \dots \sqcup K_n$  bileşenleri  $K_1, K_2, \dots, K_n$  olan bir disoriented halka olsun.
  - a) Herhangi bir bileşen diğer bütün bileşenlerin üzerinde bulunuyorsa 2. madde uygulanır.

- b) Hiçbir  $K_i$  bileşeni diğer bütün bileşenlerin üzerinde bulunmasın.  $P_1, \dots, P_n$  sırasıyla  $K_1, \dots, K_n$  diyagramları üzerinde yönü belirlenmiş taban noktaları ve  $\bar{P}_1, \dots, \bar{P}_n$  ise zıt yönde verilmiş aynı taban noktaları olsun.  $\alpha(P_i)$ ,  $K_i$  ile  $K - K_i$  nin bileşenlerinin alt geçitlerinin bir dizisi olsun öyle ki  $K_i$  diğer bütün bileşenler ile üst geçit yaparsa  $\hat{K}(\alpha(P_i)) = K_i \sqcup (K - K_i)$  yazılsın.  $P_i$ ,  $\alpha(P_i)$  yi belirlediği için  $\sum_K(\alpha(P_i))$  sadece yönü belirlenmiş  $P_i$  taban noktasının seçimine bağlıdır. Bu durumda  $M_K$  polinomu

$$M_K = \frac{1}{2n} \left[ \sum_{i=1}^{|\alpha(P_i)|} (-1)^{|\alpha(P_i)|+1} \delta M_{K_i} M_{K-K_i} + z \sum_K \alpha(P_i) + \sum_{i=1}^{|\alpha(\bar{P}_i)|} (-1)^{|\alpha(\bar{P}_i)|+1} \delta M_{K_i} M_{K-K_i} + z \sum_K \alpha(\bar{P}_i) \right]$$

formülü ile verilir.

4. Bir  $K$  disoriented düğüm diyagramı verilsin.  $P$ ,  $K$  üzerinde yönü belirlenmiş bir taban noktası ve  $\bar{P}$ , zıt yönde verilmiş aynı taban noktası olsun.  $\alpha(P)$  ve  $\alpha(\bar{P})$  ise sırasıyla  $P$  ve  $\bar{P}$  tarafından belirlenen alt üst etme dizileri olsun. Bu durumda  $M_K$  polinomu

$$M_K = \frac{1}{2} \left[ (-1)^{|\alpha(P)|+1} M_{\hat{K}(\alpha(P))} + z \sum_K \alpha(P) + (-1)^{|\alpha(\bar{P})|+1} M_{\hat{K}(\alpha(\bar{P}))} + z \sum_K \alpha(\bar{P}) \right]$$

formülü ile verilir.

Böylece  $M_K$  polinomunun tümevarımsal tanımı tamamlanmış olur.

Her bir taban noktasına ilişkilendirilmiş yönlendirmelere bağlı toplamlar eklendiğinden, bu tanımların taban noktasının seçimine bağlı olmadığını tümevarımsal olarak ispatlamak gerekir. Tümevarım, disoriented halka diyagramlarındaki kavşak sayısı üzerine kurulur. Böylece her durumda  $M_K$  polinomunun  $n$  kavşaktan daha az kavşağa sahip diyagramlar için yukarıda verilen özelliklere sahip olduğu kabul edilecek ve Tanım 4.2.3'ün  $n$  kavşaklı disoriented halkalar için verilen özellikleri sağladığı ispatlanacaktır.

**Teorem 4.2.4. (Tümevarımsal hipotez)** Tanım 4.2.3'te tanımlanan  $M_K$  polinomunun tümevarımsal hipotezi aşağıdaki gibidir:

1.  $n$ 'den daha az kavşağa sahip disoriented halka diyagramları için  $M_K$  polinomu taban noktasının seçiminden bağımsızdır (yani  $M_K$  iyi tanımlıdır).
2.  $M_K$  aşağıdaki aksiyomları sağlar:

$$\begin{aligned} M_{I_+} &= aM_{I_0}, & M_{I_-} &= a^{-1}M_{I_0} \\ M_{I_+'} &= a^{-1}M_{I_0'}, & M_{I_-' } &= aM_{I_0'} \\ M_K + M_{T,K} &= z(M_{E,K} + M_{F,K}). \end{aligned}$$

Burada  $K$  halkasının ve  $I_+, I_-, I_+', I_-'$  diyagramlarının kavşak sayısı  $n$ 'den azdır.

3.  $M_K$ , disoriented diyagramlar için II. ve III. tip Reidemeister hareketleri (ki bu hareketler kavşak sayısını artırmaz) altında invaryanttır. Yani  $K$ ,  $n$ 'den daha az kavşağa sahip bir disoriented diyagram ve  $K'$ ,  $K$  diyagramından II. ve III. tip disoriented Reidemeister hareketleri ile elde edilmiş ise  $M_K = M_{K'}$  olur.

$M_K$  polinomunun iyi tanımlı olduğunu ispatlamak için Tanım 4.2.3 (3) ve (4)'teki taban noktasından bağımsız olduğunu göstermek gerekir.

**Lemma 4.2.5.**  $\alpha = (\alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_0)$ , bir  $K$  disoriented halkasındaki farklı kavşakların bir alt kümesi için numaralandırmaların herhangi bir seçimi ve  $\beta$  bir başka seçim olsun. Tanım 4.2.2'de tanımlanan  $\sum_K \alpha$  toplamını göz önüne alalım. Bu

durumda  $\sum_K \alpha = \sum_K \beta$  eşitliği mevcuttur. Yani  $\sum_K \alpha$ ,  $\alpha$ 'nın devirli permütasyonu altında invaryanttır.

**İspat.** İspat,  $K$  disoriented halka diyagramının kavşaklarının sayısı olan  $n+1$  üzerinden tümevarım ile yapılır.  $K$  diyagramından daha az kavşağa sahip tüm disoriented halka diyagramları için bu lemmanın ve Teorem 4.2.4'te verilen tümevarımsal hipotezin doğru olduğunu varsayalım.  $n+1$  için  $\alpha = (n, n-1, \dots, 1, 0)$  ve  $\beta = (0, n, n-1, \dots, 1)$  almak yeterlidir. Bu durumda

$$\sum_K (\alpha) = \sum_{i=0}^n (-1)^i (M_{A_i^\alpha K} + M_{B_i^\alpha K})$$



olur. Burada  $A_i^\alpha = E_i T_{i-1} \dots T_0$  ve  $B_i^\alpha = F_i T_{i-1} \dots T_0$  dir. Benzer şekilde

$$\sum_K (\beta) = \sum_{i=0}^n (-1)^i (M_{A_i^\beta K} + M_{B_i^\beta K}) \text{ yazılır. Burada}$$

$$\begin{aligned} A_0^\beta &= E_1 \\ A_1^\beta &= E_2 T_1 \\ A_2^\beta &= E_3 T_2 T_1 \\ &\vdots \\ A_{n-1}^\beta &= E_n T_{n-1} \dots T_1 \\ A_n^\beta &= E_0 T_n T_{n-1} \dots T_1 \end{aligned}$$

ve  $B_i^\beta$ ,  $A_i^\beta$  da  $E_i$  yerine  $F_i$  yazılarak elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} \sum_K (\alpha) - \sum_K (\beta) &= (M_{E_0 K} + M_{F_0 K}) - (M_{E_1 T_0 K} + M_{F_1 T_0 K}) + \dots \\ &\quad + (-1)^n (M_{E_n T_{n-1} \dots T_0 K} + M_{F_n T_{n-1} \dots T_0 K}) \\ &\quad - \left[ (M_{E_1 K} + M_{F_1 K}) - (M_{E_2 T_1 K} + M_{F_2 T_1 K}) + \dots \right. \\ &\quad \left. + (-1)^{n-1} (M_{E_n T_{n-1} \dots T_1 K} + M_{F_n T_{n-1} \dots T_1 K}) \right. \\ &\quad \left. + (-1)^n (M_{E_0 T_n \dots T_1 K} + M_{F_0 T_n \dots T_1 K}) \right] \\ &= (M_{E_0 K} + M_{F_0 K}) + (-1)^{n+1} (M_{E_0 T_n \dots T_1 K} + M_{F_0 T_n \dots T_1 K}) \\ &\quad - (M_{E_1 T_0 K} + M_{E_1 K} + M_{F_1 T_0 K} + M_{F_1 K}) \\ &\quad + (M_{E_2 T_1 T_0 K} + M_{E_2 T_1 K} + M_{F_2 T_1 T_0 K} + M_{F_2 T_1 K}) + \dots \\ &\quad + (-1)^{n-1} (M_{E_n T_{n-1} \dots T_0 K} + M_{E_n T_{n-1} \dots T_1 K} + M_{F_n T_{n-1} \dots T_0 K} + M_{F_n T_{n-1} \dots T_1 K}) \end{aligned}$$

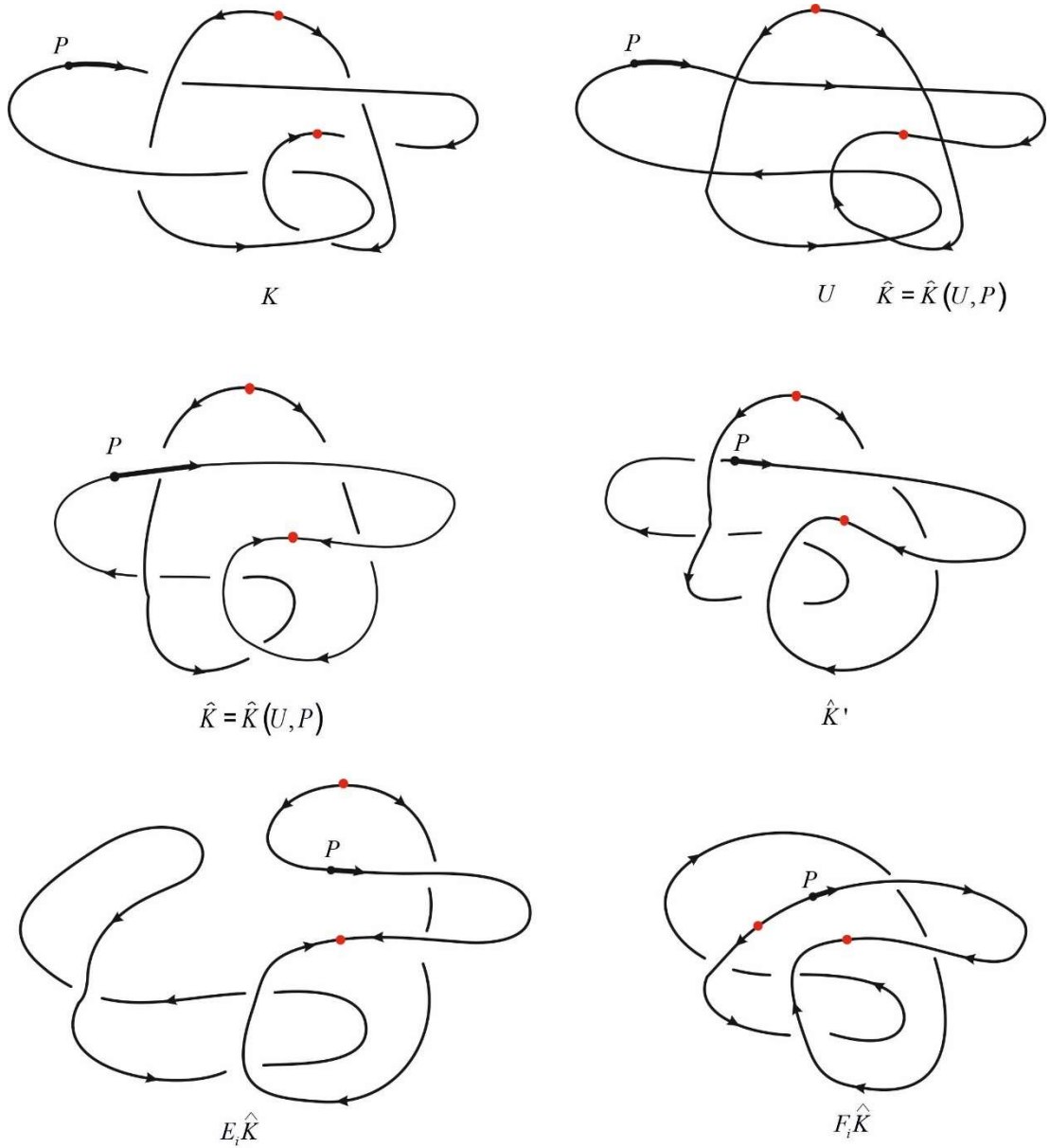
olur. Gerekli düzenlemeler yapılırsa  $\sum_K (\alpha) - \sum_K (\beta) = 0$  veya  $\sum_K (\alpha) = \sum_K (\beta)$  elde edilir ve ispat tamamlanır.

**Uyarı 4.2.6.** Lemma 4.2.5'ten açıkça görülmektedir ki Tanım 4.2.3 (3)'te verilen  $M_K$  polinomunun formülü taban noktasının seçiminden bağımsızdır. Böylece geriye Tanım 4.2.3. (4)'te verilen durumun taban noktasından bağımsız olduğunu göstermek kalır.

**Lemma 4.2.7.** Standart düğümlenmemiş düğümü yönü belirlenmiş bir taban noktasına göre ilk kavşakta yönlendirilmiş ve disoriented ayrımları göz önüne alınsın. Bu durumda disoriented ayırma yapıldığında bir düğümlenmemiş düğüm ve

yönlendirilmiş ayırma yapıldığında iki düğümlenmemiş düğümden oluşan bir disoriented halka oluşur ki bu düğümlenmemiş düğümlerden biri diğerinin üzerinde bulunur.

**İspat.** İspat standart düğümlenmemiş düğümün tanımından çıkar. Standart düğüm diyagramında taban noktası yönünde ilk kavşağı ayırdıktan sonra kavşağı alt üst ettiğimizde  $P$  taban noktasını ikinci kavşağın önüne hareket ettirelim. Bu şekilde devam edildiğinde herhangi bir  $i$  kavşağında yönlendirilmiş ve disoriented ayırmalardan biri disoriented halkalanmamış halka ve diğeri bu disoriented halkanın iki düğümlenmemiş bileşenin bağlantılı toplamı olur (Şekil 4.10).  $i$  kavşağının alt üst edilmesinden elde edilen disoriented düğüm diyagramı standart değildir. Şekil 4.10'da görüldüğü gibi  $i$  kavşağı  $\hat{K}$  standart düğümlenmemiş düğüm taban noktasından ilerlerken karşılaşılan ilk kavşaktır. Burada  $E_i\hat{K}$  ve  $F_i\hat{K}$  şeklinde iki ayırıştırma vardır.  $E_i\hat{K}$  iki standart düğümlenmemiş düğümden oluşan bir disoriented halkalanmamış halkadır ve  $F_i\hat{K}$  bir düğümlenmemiş disoriented diyagramdır.  $E_i\hat{K} = K_1 \sqcup K_2$  denilirse (burada  $K_1$  ve  $K_2$  halka diyagramındaki standart düğümlenmemiş düğümlerdir)  $F_i\hat{K} = K_1 \# K_2$  sağlanır.  $K_1^*$ ,  $K_1$  düğümünün ayna görüntüsünü belirtmek üzere  $F_i\hat{K}$  diyagramına karşılık gelen standart düğümlenmemiş düğüm  $K_1^* \# K_2$  olduğu kolayca görülür.  $F_i\hat{K}$  diyagramına genelleştirilen standart düğümlenmemiş düğüm diyagramları ya tamamen  $I_+, I_-, I_+$  ve  $I_-$  kırımlarından oluşur ya da II. ve III. tip disoriented Reidemeister hareketleri altında basitleştirilebilir. Sonuç olarak Tanım 4.2.3 (3) ve tam burulmanın regüler izotop invaryanlığı kullanılarak  $M_{F_i\hat{K}} = a^{cw(F_i\hat{K})}$  elde edilir.



**Şekil 4.10.** Bir düğümün standart düğümlenmemiş düğüm durumları ve ayırmaları.

**Lemma 4.2.8.**  $\hat{K} = \hat{K}(U, P)$  standart düğümlenmemiş disoriented düğüm olsun.  $i$ ,  $K$  düğümlenmemiş düğümünde taban noktasından ilerlerken karşılaşılan ilk kavşak ve  $Q$ ,  $i$  kavşağını geçtikten sonra  $P$  noktasının yönündeki yeni bir taban noktası olsun. Bu durumda

- (i)  $T_i \hat{K}(U, P) = \hat{K}(U, Q)$ ,
- (ii)  $M_{\hat{K}(U, P)} + M_{\hat{K}(U, Q)} = z \left( M_{E_i \hat{K}} + M_{F_i \hat{K}} \right)$

olur.

**İspat.** Lemmanın ispatı Şekil 4.10'da açıklanmaktadır.  $\hat{K} = \hat{K}(U, P)$  ve  $\hat{K}' = \hat{K}(U, Q)$  standart düğümlememiş disoriented düğümleri göz önüne alalım. Burada  $Q$ , lemmanın ifadesinde tanımlanan taban noktasıdır.  $\hat{K}' = T_i \hat{K}$  olduğu Şekil 4.10'da kolayca görülmektedir. Eğer disoriented ayırma ile elde edilen  $F_i \hat{K}$  diyagramının tam burulması  $cw(F_i \hat{K}) = cw$  ile gösterilirse  $\hat{K}$  düğümlememiş disoriented düğümünün tam burulması  $cw(\hat{K}) = cw + 1$  ve  $cw(\hat{K}') = cw - 1$  olur.  $E_i \hat{K}$  diyagramının bileşenlerinden birinin tam burulması  $cw_1$  ve diğerininki  $cw_2$  olsun. İki bileşen arasındaki kavşak işaretlerinin toplamı sıfır olabileceğinden aşikar disoriented halkanın tam burulmasına bir katkısı olmayabilir. (bir bileşen tamamen diğer bileşen üzerindedir). Böylece, Lemma 4.2.7'nin ispatındaki yorumdan

$$M_{\hat{K}} = a^{cw+1}, M_{T_i \hat{K}} = a^{cw-1}, M_{F_i \hat{K}} = a^{cw}, M_{E_i \hat{K}} = \delta a^{cw_1} a^{cw_2} = \delta a^{cw_1+cw_2} = \delta a^{cw}$$

bulunur.  $\delta$ 'nın tanımından  $a + a^{-1} = z(1 + \delta)$  olduğundan  $a^{cw+1} + a^{cw-1} = z(a^{cw} + \delta a^{cw})$  elde edilir ki buradan  $M_{\hat{K}} + M_{T_i \hat{K}} = z(M_{E_i \hat{K}} + M_{F_i \hat{K}})$  bulunur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

**Lemma 4.2.9.**  $K$  bir disoriented düğüm diyagramı olsun. Bu durumda Tanım 4.2.3'te tanımlanan  $M_K$  polinomunun değeri taban noktasının seçiminden bağımsızdır. Daha özel olarak  $P$ ,  $K$  düğüm diyagramında yönü belirlenmiş bir taban noktası olsun.  $\lambda(P)$ ,  $P$  noktasından ilerlerken karşılaşılan kavşakların alt üst etme dizisini gösterebilir. Bu durumda

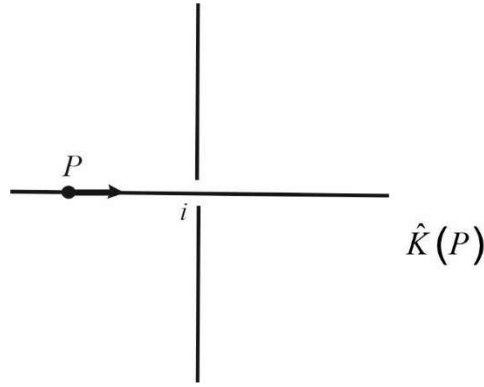
$$\Omega_K(P) = (-1)^{|\lambda(P)|+1} M_{\hat{K}(P)} + z \sum_K(P)$$

taban noktasının seçiminden bağımsızdır. Burada  $\hat{K}(P) = \hat{K}(\lambda(P))$ ,  $P$  ile ilişkilendirilmiş standart düğümlememiş disoriented düğümdür ve  $\sum_K(P) = \sum_K \lambda(P)$  Tanım 4.2.2'de tanımlanan toplamdır.

**İspat.**  $P$  noktasından ilerlerken belirlenen alt üst etme dizisinin  $\lambda = (n, n-1, \dots, 1, 0)$  ile numaralandırıldığını varsayalım. Böylece  $\Omega_K(P) = (-1)^{n+1} M_{\hat{K}(P)} + z \sum_K(P)$  olur.

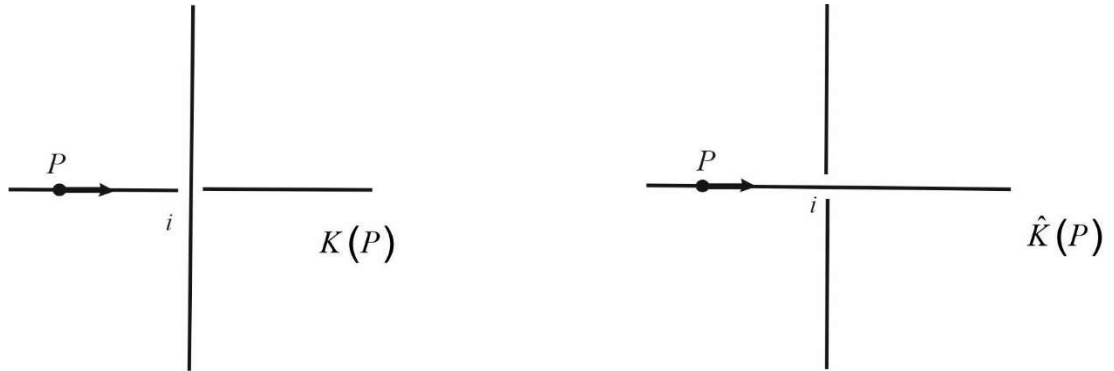
$M_K(P) = \frac{1}{2}(\Omega_K(P) + \Omega_K(\bar{P}))$  olduğundan  $\Omega_K(P)$  ifadesinin taban noktasının seçiminden bağımsız olduğunu göstermek yeterlidir. İspat, tümevarımsal tanıma ve tümevarımsal hipoteze bağlı olarak disoriented halka diyagramındaki kavşak sayısı üzerinden tümevarımla yapılır.

Kavşakların alt-üst edilmesi işleminde  $K$  da taban noktasından ilerleyerek ilk karşılaşılan  $i$  numaralı kavşağın alt geçidi,  $\hat{K}(P)$  de bir üst geçittir (Şekil 4.11).  $K(P)$  deki kavşağın geçiti, üst geçit veya alt geçit olabilir.



Şekil 4.11. Bir  $\hat{K}(P)$  standart düğümünün bir kavşağı.

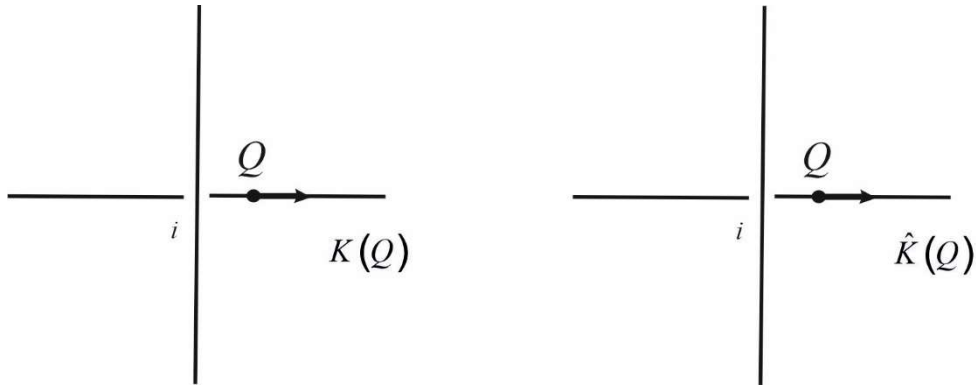
**1. Durum.**  $i$  kavşağının geçidinin  $K(P)$  de alt geçit olması durumu:



Şekil 4.12.  $K(P)$  düğümünün bir alt kavşağının  $\hat{K}(P)$  standart düğümünün bir kavşağına dönüşmesi.

Bu durumda  $i$ ,  $K$  ile ilgili olan  $\hat{K}$  için alt üst etme dizisinin parçasıdır. Gerçekten,  $i$  kavşağının,  $\hat{K}(P) = T_n T_{n-1} \cdots T_1 T_0 K$  alt üst etme dizisi için indeks numarası, en fazla  $n$  olur (Şekil 4.12).

Şimdi  $P$  taban noktasının kavşağın diğer tarafına geçip  $Q$  pozisyonuna getirildiğini düşünelim. Böylece Şekil 4.13 elde edilir.



Şekil 4.13.  $K(Q)$  diyagramının  $\hat{K}(Q)$  diyagramına dönüşmesi.

$i$  kavşağı  $\hat{K}(Q)$  da alt üst edilmiş değildir. Böylece  $K(Q)$  için alt üst etme dizisi  $(n-1, n-2, \dots, 1, 0)$  olur ve  $\hat{K}(Q) = T_{n-1}T_{n-2} \cdots T_1T_0K$  yazılır.

$\Omega_K(Q) = \Omega_K(P)$  olduğunu göstermek istiyoruz.  $\sum_K(P) = \sum_{i=0}^n (-1)^i (M_{A_iK} + M_{B_iK})$  ve

$\sum_K(Q) = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i (M_{A_iK} + M_{B_iK})$  olmak üzere

$$\Omega_K(P) = (-1)^{n+1} M_{\hat{K}(P)} + z \sum_K(P)$$

$$\Omega_K(Q) = (-1)^{(n-1)+1} M_{\hat{K}(Q)} + z \sum_K(Q)$$

eşitlikleri vardır.  $K(Q)$ 'nin alt üst etme dizisi  $K(P)$  nin alt üst etme dizisinin bir alt dizisidir. Böylece

$$\Omega_K(P) - \Omega_K(Q) = (-1)^{n+1} [M_{\hat{K}(P)} + M_{\hat{K}(Q)}] + z(-1)^n (M_{A_nK} + M_{B_nK})$$

elde edilir. Ayrıca

$$A_nK = E_n T_{n-1} \cdots T_1 T_0 K = E_n \hat{K}(Q)$$

$$B_nK = F_n T_{n-1} \cdots T_1 T_0 K = F_n \hat{K}(Q)$$

$$\hat{K}(P) = T_n \{ \hat{K}(Q) \}$$

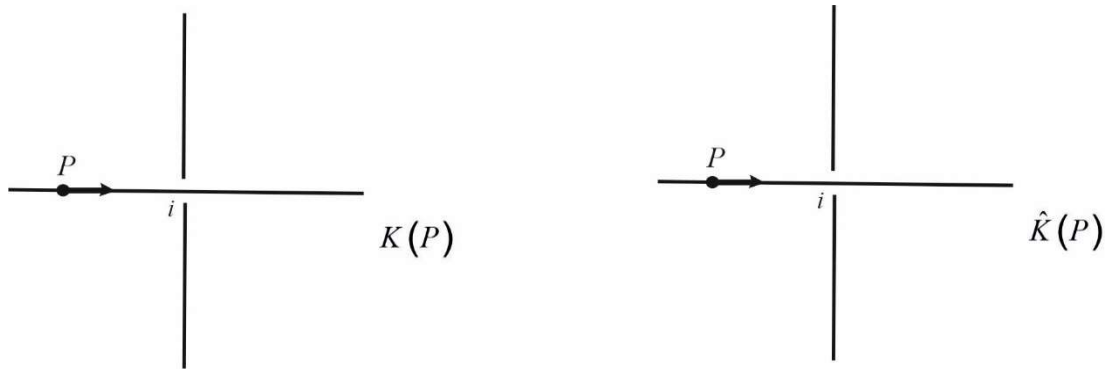
ve Lemma 4.2.8'den

$$M_{\hat{K}(P)} + M_{\hat{K}(Q)} = z \left( M_{E_n \hat{K}(Q)} + M_{F_n \hat{K}(Q)} \right)$$

olur. Böylece  $\Omega_K(P) = \Omega_K(Q)$  bulunur.

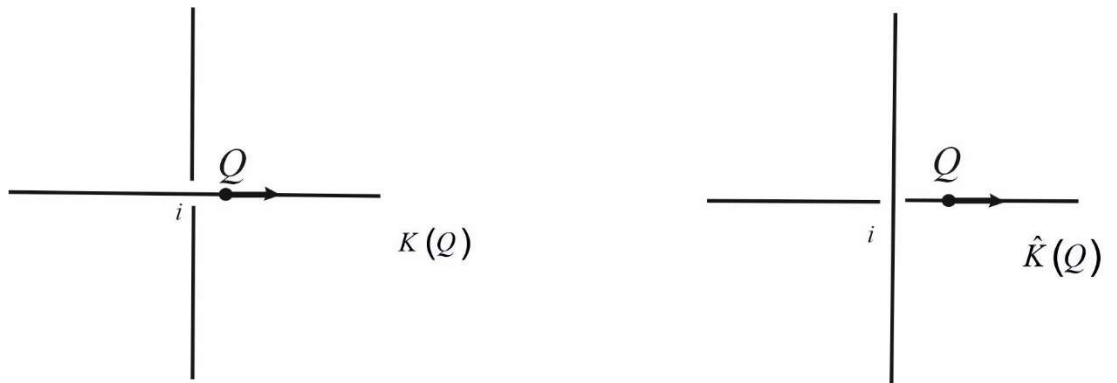
İlk durumda  $\Omega_K(P)$  değerinin, taban noktasını yönü doğrultusunda ilerleterek bu noktanın ilk kavşağın diğer tarafına geçmesiyle değişmediği görülür.

**2. Durum.**  $i$  kavşağının geçidinin  $K(P)$  de üst geçit olması durumu Şekil 4.14'te görülmektedir.



Şekil 4.14.  $K(P)$  diyagramının  $\hat{K}(P)$  diyagramına dönüşmesi.

Bu durumda  $i$ ,  $K(P)$  için alt üst etme dizisinin bir parçası değildir. Taban noktası  $i$  kavşağının diğer tarafına kaydırıldığında Şekil 4.15 elde edilir.



Şekil 4.15.  $K(Q)$  diyagramının  $\hat{K}(Q)$  diyagramına dönüşmesi.

Böylece  $i$ ,  $K(Q)$  için alt üst etme dizisinin bir parçası olur.  $i$  kavşağının, bu alt üst etme dizisinde yerini öyle belirleyelim ki

$$\hat{K}(Q) = T_n T_{n-1} \cdots T_{i+1} T_i T_{i-1} \cdots T_1 T_0 K$$

(yani  $\lambda(Q) = (n, n-1, \dots, i+1, i, i-1, \dots, 1, 0)$ ) olsun. Bu durumda da  $\lambda(P) = (n, n-1, \dots, i+1, i-1, \dots, 1, 0)$  ve  $\hat{K}(P) = T_n T_{n-1} \cdots T_{i+1} T_{i-1} \cdots T_0 K$  olur. Böylece  $T_i \hat{K}(P) = \hat{K}(Q)$  olduğuna ve Lemma 4.2.8,  $i$  numarasına göre  $\hat{K}(P)$ ,  $\hat{K}(Q)$  çiftine uygulandığına dikkat edilmelidir ve bu  $\hat{K}(Q)$  da taban noktasından hemen önceki ilk kavşaktır. Aynı argümanlar bütün kavşaklara uygulanabilir. Ayrıca Lemma 4.2.5 kullanılarak  $\sum_K(P)$  ve  $\sum_K(Q)$  için hesaplamalar basitleştirilebilir. Lemma 4.2.5'ten bu toplamlar devirli permütasyon altında invaryanttır. Böylece  $\lambda(P)$  ve  $\lambda(Q)$

$$\lambda'(P) = (i-1, \dots, 1, 0, n, n-1, \dots, i+1)$$

$$\lambda'(Q) = (i, i-1, \dots, 1, 0, n, n-1, \dots, i+1)$$

ile değiştirilebilir. Bu noktada argümanın yapısı 1. durumdakine özdeştir ve aynı hesaplama şekli ile  $\Omega_K(P) = \Omega_K(Q)$  olur.

Böylece  $\Omega_K(P)$  nin disoriented düğüm diyagramı boyunca yönü belirlenmiş taban noktasının seçiminden bağımsız olduğu sağlanmış olur ve ispat tamamlanır.

**Lemma 4.2.10.**  $i$ , bir  $K$  disoriented halka diyagramındaki herhangi bir kavşak olsun.  $M_K$  aşağıdaki aksiyomları sağlar.

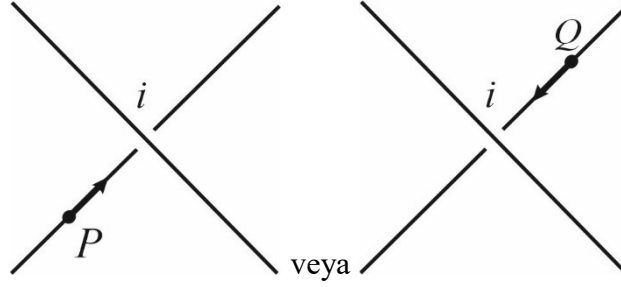
$$a. \quad M_K + M_{T_i K} = z(M_{E_i K} + M_{F_i K})$$

$$b. \quad \begin{aligned} M_{I_+} &= aM_{I_0}, & M_{I_-} &= a^{-1}M_{I_0} \\ M_{I'_+} &= a^{-1}M_{I'_0}, & M_{I'_-} &= aM_{I'_0} \end{aligned}$$

**İspat.** Diyagramdaki kavşak sayısı üzerinden tümevarım ile ispat yapılır. Tanım 4.2.4'te tanımlanan  $M_K$  polinomunun taban noktasının seçiminden bağımsız olacak şekilde Lemma 4.2.5 ve Lemma 4.2.9'da ispatlanan gerçekler kullanılacaktır. Lemma 4.2.9'da gösterildi ki tek bileşenli diyagram durumunda  $\Omega_K(P)$  ve  $\Omega_K(\bar{P})$  toplamları taban noktasından bağımsızdır.



1.  $K$  tek bileşenli olsun ve  $i$  kavşağı verilsin.  $T_i K$  bu kavşağın alt üst edilmesiyle elde edilen düğüm ve  $E_i K$ , bu kavşağı yönlendirilmiş ayırma ve  $F_i K$ , kavşağın disoriented ayırma yapılarak elde edilen iki disoriented diyagram olsun. Taban noktasının Şekil 4.16'daki gibi doğru bir seçimiyle  $K$  için alt üst etme dizisinde  $n$ . kavşağı  $i$  ile numaralandırabiliriz.



**Şekil 4.16.** Kavşakta taban noktasının durumu.

Tanım 4.2.3(4) ile karşılaştırmayla görülebilir ki  $\Omega_K(P)$  ve  $\Omega_{T_i K}(P)$ 'nin açılımlarının farkından direkt olarak  $M_K + M_{T_i K} = z(M_{E_i K} + M_{F_i K})$  eşitliği elde edilir.

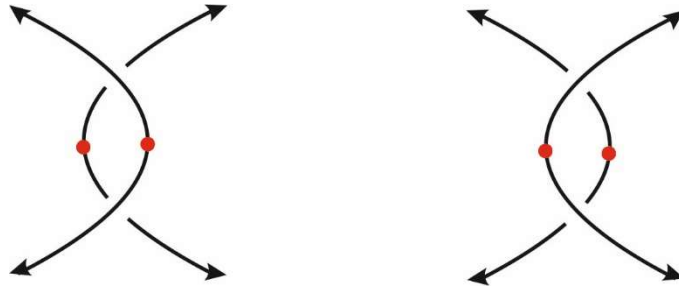
2.  $K$  diyagramının birden fazla bileşene sahip olduğu ve  $i$  kavşağının herhangi bir bileşene ait olan bir kavşak olduğu kabul edilsin (Yani  $i$ , iki bileşenin ortak kavşağı olmasın). Bu durumda bu kavşak başka hiçbir bileşen için alt üst etme dizisine dahil olmaz. Böylece Tanım 4.2.3(3) kullanılarak tümevarımla  $M_K + M_{T_i K} = z(M_{E_i K} + M_{F_i K})$  eşitliği elde edilir.
3.  $K$  birden fazla bileşene sahip olsun ve  $i$  kavşağı iki farklı bileşenlere ait olsun. Bu kavşakta işaretlerin toplamı sıfır olacağından disoriented halkanın alt üst dizilerine bir etkisi olmaz. Böylece  $M_K$  eşitliği her bir birleşen için disoriented halka için de sağlanır.

Bu ispatın (a) kısmını tamamlar. (b) kısmını ispatlamak için dikkat edilmelidir ki Tanım 4.2.3'teki kıvrımlar sonunda bir disoriented düğüm değerlendirmesinin bir parçası olacaktır ve taban noktasının yerinin seçimi bu kıvrımlara karşılık gelen standart düğümlememiş düğüm durumunda değişmez. Böylece Tanım 4.2.3 (4)'ün ikinci kısmının bütün terimleri bu kıvrımların birebir kopyalarını içerdiğinden (b) kısmının ispatı tümevarımdan çıkar.

**Lemma 4.2.11.**  $K$  herhangi bir disoriented halka diyagramı ve  $K'$ ,  $K$  diyagramına regüler izotop bir diğer disoriented halka diyagramı olsun. Bu durumda  $M_K$  ve  $M_{K'}$  polinomları eşittir. Bir başka deyişle  $M_K$  regüler izotopinin invariantıdır.

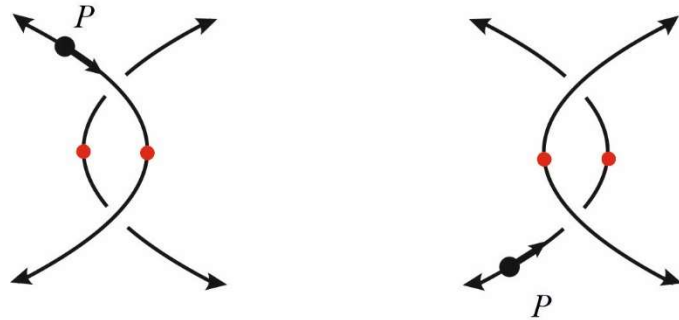
**İspat.**  $K$  bir disoriented düğüm ise Şekil 4.20 ve 4.21'deki II. ve III. tip Reidemeister hareketlerinin invariantlığı uygun bir taban noktası seçilerek tümevarım yöntemiyle gösterilebilir.

II. tip Reidemeister hareketi durumunda sadece Şekil 4.17'deki diyagramların  $M$  polinomlarının eşit olduğunu göstermek yeterlidir. (II. tip hareketin diğer durumları benzer şekilde gösterilebilir.)



**Şekil 4.17.** Bir disoriented II. tip Reidemeister hareketi.

İlk diyagramda taban noktası Şekil 4.18'deki gibi seçilir:

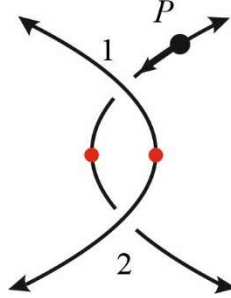


**Şekil 4.18.** Taban noktası belirlenmiş bir disoriented II. tip Reidemeister hareketi.

Böylece harekette içerilen iki kavşak da  $K$  düğümü için alt üst etme dizisi tarafından değiştirilmez. Tümevarımsal olarak Tanım 4.2.4 (3)'teki her terim II. tip basitleştirme hareketleri altında invariant olduğundan,  $M_K$  diğer II. tip hareketler altında da invarianttır.

Burada II. tip hareketleri altında invariantlığın  $K$ 'dan daha az kavşağa sahip bütün disoriented düğüm ve halka diyagramları için geçerli olduğu varsayılmaktadır.

$K$  birden fazla bileşene sahip ise II. tip hareketler, bileşenlerin birbiriyle halkalandığı durumda düşünülmelidir. O zaman taban noktasının bir seçimine karşılık gelen en mümkün durum Şekil 4.19'daki gibidir.



**Şekil 4.19.** Taban noktası belirlenmiş bir disoriented II. tip Reidemeister hareketi.

Burada taban noktası yukarıda açıklanan durumlara uyum sağlamak amacıyla alt geçit üzerinden alınmıştır. Lemma 4.2.10 aşağıdaki Şekil 4.20 ile birlikte ele alındığında

$$M_K + M_{T_1K} = z(M_{E_1K} + M_{F_1K})$$

$$M_{T_1K} + M_{T_2T_1K} = z(M_{E_2T_1K} + M_{F_2T_1K})$$

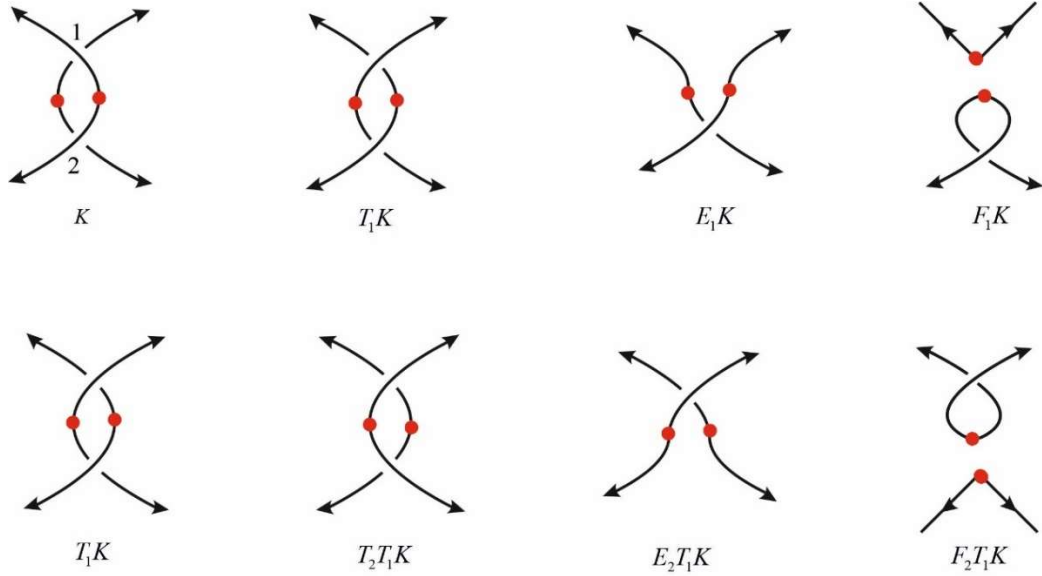
veya

$$M_K - M_{T_2T_1K} = z(M_{E_1K} + M_{F_1K} - M_{E_2T_1K} - M_{F_2T_1K})$$

olduğu görülür. Ayrıca  $M_{E_1K} = M_{E_2T_1K}$ ,  $M_{F_1K} = M_{F_2T_1K}$  olduğundan

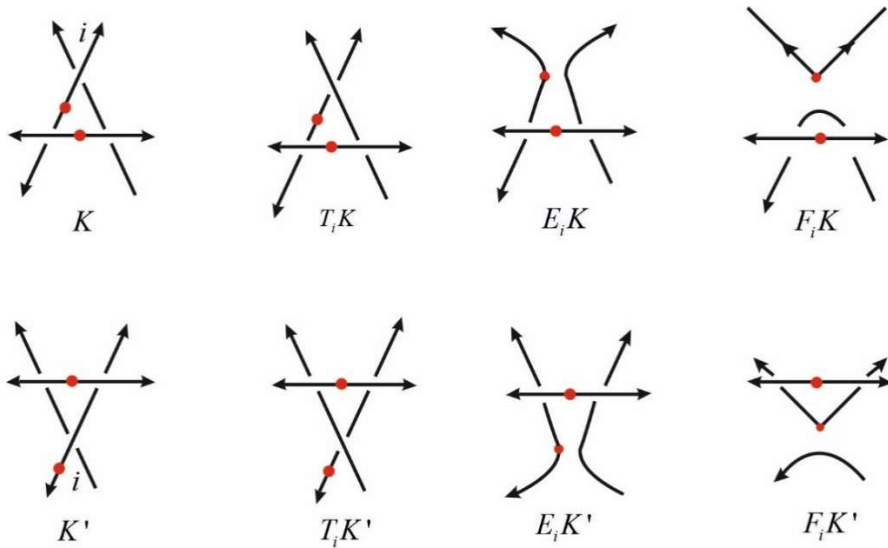
$$M_K = M_{T_2T_1K}$$

elde edilir.  $T_2T_1K$  disoriented halkası üzerinde benzer şekilde II. tip Reidemeister hareketi uygulanır ve bu şekilde devam edilirse invaryantlık tümevarım yönteminden kolaylıkla görülür.



**Şekil 4.20.** Bir disoriented II. tip Reidemeister hareketi ve ayrışımı.

Şimdi III. tip Reidemeister hareketler altındaki davranışı inceyelim. III. tip hareketler durumunda bir disoriented halkanın bir bileşeninin yalnızca Şekil 4.21’deki  $K$  ve  $K'$  diyagramlarının  $M$  polinomlarının eşit olduğunu göstermek yeterlidir. (Diğer III. tip hareket durumları benzer şekilde gösterilebilir.) Aynı durum disoriented halkanın her bileşeni için geçerlidir.  $K$  (ve  $K'$ ) diyagramında taban noktası seçilerek hareket edilirse üç kavşaktan ikisi alt üst etme dizisine dahil olmaz. II. tip Reidemeister hareketleri altında invariyantlık sağlandığından Şekil 4.21’den  $M_{F_1K} = M_{F_1K'}$  elde edilir. Böylece  $M_K = M_{K'}$  (ve  $M_{T_1K} = M_{T_1K'}$ ) elde edilir ve III. hareketler altındaki invariyantlık tümevarımdan görülmektedir. Böylece ispat tamamlanır.



**Şekil 4.21.** Bir disoriented III. tip Reidemeister hareketi ve ayrışımı.

## 5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde, ilk önce bir disoriented düğüm [1]'de verilen tanımın bir genellemesi olarak yeniden tanımlandı. Disoriented düğüm diyagramları çizildi. Yönlendirilmiş düğüm diyagramları için literatürde var olan Reidemeister hareketleri, disoriented düğümlere genişletilerek disoriented Reidemeister hareketlerinin tamamı ortaya çıkarıldı. Bu disoriented hareketlerin tamamını üreten ve daha az sayıda hareket içeren iki minimum üreteçler kümesi belirlendi. Böylece disoriented düğüm teorisindeki invaryantların ortaya çıkarılmasında temel bir yöntem olarak kullanılacak en önemli diyagramatik invariyanlar verildi. Diyagramatik çalışmalar kapsamında, disoriented düğümlerin bağlantılı toplamı, Gauss kodu, Gauss diyagramları ve minimum üreteçler kümesine karşılık gelen Gauss hareketleri tam olarak belirlendi. Gauss hareketleri, disoriented homoloji ve disoriented kohomoloji çalışmak isteyen araştırmacılar için önemli bir yöntem olarak kullanılabilir.

Sonra, disoriented düğüm ve halkaları sınıflandırmak için iki değişkenli bir polinom tanımlandı. Bu polinomun iyi tanımlı olduğu ve disoriented düğüm ve halkalar için regüler izotopinin bir invaryantı olduğu ispatlandı. Regüler izotopi invaryantı olan polinom, halkanın tam burulma sayısı ile normalleştirilerek kuşatan izotopinin bir invaryantı olan bir polinom elde edildi. Böylece disoriented düğümleri ve halkaları sınıflandıran önemli bir polinomial invaryant verildi.

Bu tezden üretilen ve ISI veri tabanında taranan dergilerde yayımlanan iki makale, disoriented düğüm teorisine giriş olan [1] çalışması ile birlikte disoriented düğüm teorisinin temelleri büyük ölçüde atılmış oldu.

Bu teoride incelenebilecek çok sayıda konu vardır. Örneğin klasik düğüm teorisindeki HOMFLY polinomunu disoriented düğüm teorisine genişleten polinom invaryantları ortaya çıkarılabilir. Disoriented örgü, disoriented dolaşık, disoriented homoloji ve kohomoloii teorileri kurulabilir. Disoriented düğüm teorisi ile graf teorisi arasındaki ilişkiler ortaya çıkarılabilir.



## KAYNAKLAR

- [1] Altıntaş, İ. (2018). Introduction to disoriented knot theory. *Open Mathematics*, 16 (1), 346-357. <https://doi.org/10.1515/math-2018-0032>
- [2] Kauffman, L. H. (1990). An invariant of regular isotopy. *Transactions of the American Mathematical Society*, 318, 417-471. <https://doi.org/10.1090/s0002-9947-1990-0958895-7>
- [3] Murasugi, K. (2008). *Knot theory and its applications*. Birkhäuser.
- [4] Rolfsen, D. (2003). *Knots and links*, AMS Chelsea Publishing.
- [5] Kawauchi, A. (1996). *A Survey of Knot Theory*. Birkhäuser.
- [6] Manturov, V. (2004). *Knot Theory*. CRC Press.
- [7] Alexander, J. W. (1928). Topological invariants of knots and links, *Transactions of the American Mathematical Society*, 30, 275-306. <https://doi.org/10.1090/s0002-9947-1928-1501429-1>
- [8] Conway, J. H. (1970). An enumeration of knots and links, and some of their algebraic properties. *Computational Problems in Abstract Algebra (Proc. Conf., Oxford, 1967)*, 329-358. <https://doi.org/10.1016/b978-0-08-012975-4.50034-5>
- [9] Jones, V. F. R. (1985). A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 12, 103-111. <https://doi.org/10.1090/s0273-0979-1985-15304-2>
- [10] Ho, C. F. (1985). A new polynomial for knots and links--Preliminary Report. *Abstracts of Papers Presented to the American Mathematical Society*, 6, 300.
- [11] Freyd, P., Yetter, D., Hoste, J., Lickorish, W. B. R., Millett, K. & Ocneau, A. (1985). A new polynomial invariant of knots and links. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 12, 239-246. <https://doi.org/10.1090/s0273-0979-1985-15361-3>
- [12] Kauffman, L. H. (1983). *Formal Knot Theory*. Princeton University Press.
- [13] Kauffman, L. H. (1987). *On Knots*. Princeton University Press.
- [14] Kauffman, L. H. (1987). State models and the Jones polynomial. *Topology*, 26 (3), 395-407. [https://doi.org/10.1016/0040-9383\(87\)90009-7](https://doi.org/10.1016/0040-9383(87)90009-7)
- [15] Kauffman, L. H. (1988). New invariants in the theory of knots. *American Mathematical Monthly*, 95 (3), 195-242. <https://doi.org/10.1080/00029890.1988.11971990>
- [16] Kauffman, L. H. (1994). *Knots and Physics* (2nd Edition). World Scientific Publishing Co. Inc.

- [17] Jones, V. F. R. (1987). Hecke algebra representations of braid groups and link polynomials. *Annals of Mathematics Second Series*, 126 (2), 335-388. <https://doi.org/10.2307/1971403>
- [18] Brandt, R. D., Lickorish, W. B. R. & Millett, K. C. (1986). A polynomial invariant for unoriented knots and links. *Inventiones Mathematicae*, 84 (3), 563-573. <https://doi.org/10.1007/bf01388747>
- [19] Altıntaş, İ. (2007). An oriented state model for the Jones polynomial and its applications alternating links. *Applied Mathematics and Computation*, 194 (1), 168-178. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2007.04.018>
- [20] Altıntaş, İ. (2013). Some properties of polynomials G and N and tables of knots and links. *Mathematical Sciences and Applications E-Notes*, 1 (2), 90-102.
- [21] Reshetikhin, N. and Turaev, V. G. (1991). Invariants of 3-manifolds via link polynomials and quantum groups. *Inventiones Mathematicae*, 103 (3), 547-597. <https://doi.org/10.1007/bf01239527>
- [22] Jin, X. and Zhang, F. (2012). The HOMFLY and dichromatic polynomials. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 140 (4), 1459-1472. <https://doi.org/10.1090/s0002-9939-2011-11050-5>
- [23] Taşkoprü, K. and Altıntaş, İ. (2015). HOMFLY polynomials of torus links as generalized Fibonacci polynomials. *Electronic Journal of Combinatorics*, 22 (4). <https://doi.org/10.37236/5324>
- [24] Altıntaş, İ. and Taşkoprü, K. (2018). A generalization of the Alexander polynomial as an application of the delta derivative, *Turkish Journal of Mathematics*, 42 (2), 515-527. <https://doi.org/10.3906/mat-1608-19>
- [25] Kauffman, L. H. (1999). Virtual knot theory. *European Journal of Combinatorics*, 20 (7), 663-691. <https://doi.org/10.1006/eujc.1999.0314>
- [26] Kauffman, L. H. (2000). A Survey of Virtual Knot Theory. *Knots in Hellas '98*. [https://doi.org/10.1142/9789812792679\\_0012](https://doi.org/10.1142/9789812792679_0012)
- [27] Kauffman, L. H. (2006). Virtual knot theory. arXiv:math/9811028 [math.GT].
- [28] Kauffman, L. H. (2012). Introduction to virtual knot theory. *Journal of Knot Theory and Ramifications*, 21 (13), 1240007, 37 pp. <https://doi.org/10.1142/s021821651240007x>
- [29] Silver, D.S. and Williams, S. G. (2000). Virtual knot groups. *Knots in Hellas '98*. [https://doi.org/10.1142/9789812792679\\_0027](https://doi.org/10.1142/9789812792679_0027)
- [30] Kamada, N. and Kamada, S. (2000). Abstract link diagrams and virtual knots. *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, 9 (1), 93-106. <https://doi.org/10.1142/s0218216500000049>
- [31] Kauffman, L. H. and Manturov, V. O. (2006). Virtual knots and links. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 252 (1), 104-121. <https://doi.org/10.1134/s0081543806010111>
- [32] Dye, H. A. and Kauffman L. H. (2009). Virtual crossing number and the arrow polynomial. *Journal of Knot Theory and Ramifications*, 18 (10), 1335-1357. <https://doi.org/10.1142/s0218216509007166>



- [33] Dye, H. A., Kauffman, L. H. and Manturov V. O. (2011). Banagl, M. and Vogel, D.(Ed.) *The Mathematics of Knots: Theory and Application* (pp:95-124), Springer.
- [34] Kauffman, L. H. and Lambropoulou, S. (2014). Virtual braids. *Fundamenta Mathematicae*, 184, 159-186. <https://doi.org/10.4064/fm184-0-11>
- [35] Manturov, V. O. (2018). *Knot Theory* (2nd Edition). CRC Press.
- [36] Clark, D., Morrison, S. & Walker, K. (2009). Fixing the functoriality of Khovanov homology, *Geometry and Topology*, 13, 1499-1582. <https://doi.org/10.2140/gt.2009.13.1499>
- [37] Burde G., Zieschen H. and Michael H. (2014). *Knots*. Walter de Gruyter.
- [38] Adams C. C., (2004). *The knot book : An elementary introduction to the mathematical theory of knot*. American Mathematical Society.
- [39] Kwun, Y. C. , Nizami, A. R., Nazeer, W., Munir, M. & Kang, S. M. (2019). On Gauss diagrams of Knots: A modern approach. *J. Computational Analysis and Applications*, 26 (6), 1101-1113.
- [40] Polyak M. (2010). Minimal generating sets of Reidemeister moves. *Quantum Topol.*, 1(4), 399-411. <https://doi.org/10.4171/qt/10>



## ÖZGEÇMİŞ

Ad-Soyad : Hatice PARLATIÇI

### ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans** : 2011, Balıkesir Üniversitesi, Necatibey Eğitim Fakültesi, Matematik Öğretmenliği
- **Yüksek lisans** : 2014, Sakarya Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı, Geometri Bilim Dalı

### MESLEKİ DENEYİM VE ÖDÜLLER:

- 2011-2014 yılları arasında Sakarya Üniversitesi'nde araştırma görevlisi olarak çalıştı.
- 2014'ten itibaren Sakarya Üniversitesi'nde bilgisayar işletmeni olarak görev yapmaktadır.

### TEZDEN TÜRETİLEN ESERLER:

- Altıntaş İ. ve Parlaticı H. (2020, 25-28, Ağustos). Redefining Disoriented Knots And Links. *9th International Eurasian Conference On Mathematical Sciences and Applications*, Üsküp, Kuzey Makedonya.
- Parlaticı H. ve Altıntaş İ. (2021, 25-27, Ağustos). Bivariate Polynomial Invariants For Disoriented Links. *10th International Eurasian Conference On Mathematical Sciences and Applications*, Sakarya, Turkey.
- Altıntaş, İ. and Parlaticı H. (2022). Redefining disoriented knots and diagrammatic methods. *Math Meth Appl Sci.* 45(18), 12222-12230.
- Altıntaş, İ. and Parlaticı H. (2023). An invariant of regular isotopy for disoriented links. *Turk. J. Math.* 47(1), 56-74. <https://doi.org/10.55730/1300-0098.3345>