T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FİZİKTE BAZI ÖZEL PROBLEMLERİN ELİPTİK BİKUATERNİYONLAR İLE TEMSİLİ

DOKTORA TEZİ

Zülal DERİN YAQUB

Matematik Anabilim Dalı

KASIM 2022

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FİZİKTE BAZI ÖZEL PROBLEMLERİN ELİPTİK BİKUATERNİYONLAR İLE TEMSİLİ

DOKTORA TEZİ

Zülal DERİN YAQUB

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mehmet Ali GÜNGÖR

KASIM 2022

Zülal DERİN YAQUB tarafından hazırlanan "Fizikte Bazı Özel Problemlerin Eliptik Bikuaterniyonlar İle Temsili" adlı tez çalışması 01.11.2022 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi

Jüri Başkanı :	**Prof. Dr. Murat TOSUN** Sakarya Üniversitesi	…………
Jüri Üyesi :	**Prof. Dr. Mehmet Ali GÜNGÖR** (Danışman) Sakarya Üniversitesi	…………
Jüri Üyesi :	**Prof. Dr. Adil BAŞOĞLU** Sakarya Üniversitesi	…………
Jüri Üyesi :	**Doç. Dr. Osman Zeki OKUYUCU** Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi	…………
Jüri Üyesi :	**Doç. Dr. Önder Gökmen YILDIZ** Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi	…………

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Eğitim-Öğretim Yönetmeliğine ve Yükseköğretim Kurumları Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Yönergesine uygun olarak hazırlamış olduğum "FİZİKTE BAZI ÖZEL PROBLEMLERİN ELİPTİK BİKUATERNİYONLAR İLE TEMSİLİ" başlıklı tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın tüm aşamalarında yukarıda belirtilen yönetmelik ve yönergeye uygun davrandığımı, tezin içerdiği yenilik ve sonuçları başka bir yerden almadığımı, tezde kullandığım eserleri usulüne göre kaynak olarak gösterdiğimi, bu tezi başka bir bilim kuruluna akademik amaç ve unvan almak amacıyla vermediğimi ve 20.04.2016 tarihli Resmi Gazete'de yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince Sakarya Üniversitesi'nin abonesi olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Enstitü tarafından belirlenmiş ölçütlere uygun rapor alındığını çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun ortaya çıkması halinde doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi beyan ederim. (01/11/2022)

(imza)

Zülal Derin Yaqub

Koşulsuz destekleri için tüm aileme ve bana yol gösteren hocalarıma ithafen

TEŞEKKÜR

Doktora eğitimim boyunca değerli bilgi ve deneyimlerinden yararlandığım, her konuda bilgi ve desteğini almaktan çekinmediğim, araştırmanın planlanmasından yazılmasına kadar her aşamasını titizlikle değerlendirip, yardımlarını esirgemeyen, önerileriyle yol gösteren değerli danışman hocam Prof. Dr. Mehmet Ali GÜNGÖR'e minnet ve şükranlarımı sunarım.

Çalışmalarımda tecrübelerinden yararlandığım, manevi olarak desteklerini esirgemeyen bizlere yol gösteren çok kıymetli hocamız H. Hilmi HACISALİHOĞLU'na en içten duygularımla çok teşekkür ederim.

Çalışmalarım esnasında bana vakit ayıran, bilgi ve deneyimlerinden yararlandığım sayın hocam Prof. Dr. Murat TOSUN'a ve bu çalışma esnasında desteklerini esirgemeyen Matematik Bölümü Öğretim Üyeleri Prof. Dr. Soley ERSOY'a, Doç. Dr. Mahmut AKYİĞİT'e, Doç Dr. Mahpeyker ÖZTÜRK'e ve Doç. Dr. Hidayet Hüda KÖKSAL'a katkılarından dolayı çok teşekkür ederim.

Çalışmalarım boyunca ve hayatımın her anında maddi ve manevi yardım gördüğüm, tahsilimi tamamlamamı sağlayan çok kıymetli aileme, gösterdiği sabır, anlayış ve desteğinden ötürü eşime, ayrıca manevi desteklerini esirgemeyen tüm dostlarıma ve bana yardımcı olan herkese sonsuz teşekkür ve sevgilerimi sunarım.

Yükseköğretim Kurulu tarafından desteklenen YÖK 100/2000 Öncelikli Alanlar Doktora Burs Programına ve TÜBİTAK Bilim İnsanı Destekleme Daire Başkanlığına, "2211-Yurt İçi Doktora Burs Programı" kapsamında doktora öğrenimim sırasında vermiş oldukları destekler için teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

Zülal Derin Yaqub

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER

$\mathbb{H}$	: Reel kuaterniyonlar cümlesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar cümlesi
$\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$	: Kompleks kuaterniyonlar cümlesi
$\mathbb{H}\mathbb{C}_p$	: Eliptik bikuaterniyonlar cümlesi
$M_2(\mathbb{C}_2)$	: 2×2 tipinde eliptik matrislerin cümlesi
I	: Eliptik imajiner birim
$\mathbb{C}_p$	: Genelleştirilmiş kompleks sayılar cümlesi
$\langle\ \rangle_Q$	: Kuaterniyonik iç çarpım
ϕ_p	: Eliptik sayı
θ_p	: Eliptik açı
$\boldsymbol{w}_{\mathbf{A}}$	: Pür eliptik bikuaterniyon
$\mathbf{A}$	: Eliptik bikuaterniyon
$\mathbb{H}^{+}(\mathbf{A})$	: Eliptik bikuaterniyonların sağ Hamilton matrisi
$\mathbb{H}^{-}(\mathbf{A})$	: Eliptik bikuaterniyonların sol Hamilton matrisi
$\mathbf{R}$	: Konum ve zamanı birleştiren eliptik bikuaterniyon
σ_i	: Pauli spin matrisleri
$\mathbf{L}$	: Eliptik bikuaterniyonik açısal momentum
$\boldsymbol{E}$	: Pür eliptik bikuaterniyonik elektrik alan
$\boldsymbol{H}$	: Pür eliptik bikuaterniyonik manyetik alan
$\mathbb{P}$	: Elektrik ve manyetik alanı birleştiren eliptik bikuaterniyon
$\tilde{\boldsymbol{E}}$	: Pür eliptik bikuaterniyonik gravitoelektrik alan
$\tilde{\boldsymbol{H}}$	: Pür eliptik bikuaterniyonik gravitomanyetik alan
$\tilde{\mathbf{J}}$	: Eliptik bikuaterniyonik gravitasyonel kaynak yoğunluğu
$\tilde{\mathbf{A}}$	: Eliptik bikuaterniyonik genelleştirilmiş gravitasyonel potansiyel
$\mathbf{D}$	: Eliptik bikuaterniyonik diferensiyel operatör
$\tilde{m}_g$	: Gravitonun Coulomb dalga boyunun tersi
$\Box$	: D’ Alembertian operatör

$\boldsymbol{\nabla}$	: Pür eliptik bikuaterniyonik diferensiyel operatör
$\tilde{\mathbf{D}}$	: Gravitoelektromanyetik eliptik bikuaterniyonik diferensiyel operatör
$\mathbb{A}$	: Skaler ve vektör potansiyeli birleştiren eliptik bikuaterniyon
$\mathbf{P}$	: Eliptik bikuaterniyonik toplam momentum
$\mathbf{V}$	: Eliptik bikuaterniyonik hız
m_0	: Bir parçacığın durgun kütlesi
γ	: Lorentz faktörü
c	: Işık hızı
v_1	: Parçacığın çarpışmadan sonraki hızı
$\mathbf{M}$	: Rölativistik eliptik bikuaterniyonik kütle
$\boldsymbol{\psi}$	: Eliptik bikuaterniyonik spinör dalga fonksiyonu

TABLO LİSTESİ

Sayfa

FİZİKTE BAZI ÖZEL PROBLEMLERİN ELİPTİK BİKUATERNİYONLAR İLE TEMSİLİ

ÖZET

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde; ilk alt başlıkta literatür özetine yer verilerek kompleks sayılar, $p-$ kompleks sayılar, kuaterniyonlar gibi matematikte çok önemli sayı sistemleri, fizikteki Lorentz dönüşümleri, açısal momentum ve Dirac denklemi, rölativistik elektromanyetizma ve Maxwell denklemleri, Proca-Maxwell denklemleri gibi bazı önemli çalışmaların genel bir değerlendirmesi yapılmıştır ve ikinci alt başlıkta bu tezin amacı verilmiştir.

İkinci bölümde, eliptik bikuaterniyonlar cebri tanıtılarak eliptik bikuaterniyonlar ile ilgili temel kavramlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde, özel görelilik ile uyum içerisinde olan Lorentz dönüşümleri ilk defa eliptik bikuaterniyonlar ile incelenmiştir. Eliptik bikuaterniyonlar açısından özel matrisler tanımlanarak bu özel matrisler yardımıyla 4×4 tipinde eliptik ve 8×8 tipinde reel matrisler verilmiştir. Ayrıca sol Hamilton operatörüne karşılık gelen matris temsilleri sayesinde eliptik bikuaterniyonların cebirsel yapısında olmayan değişme özelliği sorunu ortadan kalkmıştır. Daha sonra uzay-zamanı ilişkilendiren eliptik bikuaterniyon ifade edilmiştir. Ayrıca bu ifadenin eliptik matris temsili verilmiştir. Bu sayede rölativistik dönüşüm bağıntısının sonucunda elde edilen eliptik bikuaterniyonun uzay ve zaman bileşenleri kolaylıkla görülebilmektedir. Eliptik bikuaternionların cebirsel yapısının bir özelliği olarak $I^2 = p < 0$ olduğundan $p = -1$ alarak eliptik bikuaterniyonların kompleks yapıyı kapsadığı da gösterilmiştir. Daha sonra rölativistik dönüşüm bağıntısının yardımıyla elde edilen Lorentz dönüşümlerinin, eliptik bikuaterniyonlar ile de ifade edilebileceği görülmüştür. Ayrıca elde edilen bu matematiksel denklemlerin matris temsilleri verilmiştir. Daha sonra elektrik ve manyetik alanların rölativistik dönüşüm bağıntısı, eliptik bikuaterniyonlar vasıtasıyla incelenmiştir ve rölativistik elektromanyetizma bağıntıları elde edilmiştir. Bu bağıntıları elde etmek için iki farklı yöntem kullanılmıştır. Burada ilk yöntem eliptik Lorentz dönüşümleri altında elde edilen elektrik alan ve manyetik alandır. Diğer yöntem, eliptik bikuaterniyonik rölativistik dönüşüm bağıntısı yardımıyla elde edilen elektrik ve manyetik alanın rölativistik biçimleridir. Elde edilen bu sonuçlar karşılaştırılarak hangi yöntemin kullanışlı olduğu araştırılmıştır.

Dördüncü bölümde ise eliptik bikuaterniyonlar ile açısal momentum ve Dirac denklemi ve çözümleri araştırılmıştır. Bu düşünceyle eliptik bikuaterniyonların eliptik Pauli matrisleri ve eliptik taban matrisleri verilmiştir. Daha sonra eliptik bikuaterniyonik açısal momentum ifade edilmiştir. Ayrıca serbest parçacık için Dirac denkleminin eliptik bikuaterniyonik yeni formülasyonu ifade edilerek bu denklemin çözümleri ele alınmıştır. Daha sonra rotasyonel parçacık için eliptik bikuaterniyonik Dirac denklemi ifade edilmiştir.

Beşinci bölümde ise eliptik bikuaterniyonik rölativistik esnek çarpışma problemi ele alınmıştır. İlk olarak bir parçacığın eliptik bikuaterniyonik momentumu, hızı gibi nicelikleri tanımlanmıştır. Bu ifadelerin eliptik bikuaterniyonlar açısından matris temsilleri verilmiştir. Daha sonra Lorentz dönüşümleri için rölativistik dönüşüm bağıntısı verilmiştir. Ayrıca rölativistik dönüşüm denklemi ile eliptik bikuaterniyonik rölativistik esnek çarpışma problemi çözülerek gerekli sonuçlar verilmiştir.

Altıncı bölümde ise tezin sonuçlarının bir değerlendirmesi yapılarak bundan sonra yapılacak olan araştırmalara yönelik önerilerde bulunulmuştur.

REPRESENTATION IN TERMS OF ELLIPTIC BIQUATERNIONS OF SOME SPECIAL PROBLEMS IN PHYSICS

SUMMARY

This thesis consists of six chapters.

In the first subsection of the first chapter, a summary of the literature has been given, and a general evaluation of some important studies such as complex numbers, $p-$complex numbers, quaternions in mathematics, Lorentz transformations in physics, angular momentum, and Dirac equation, relativistic electromagnetism and Maxwell equations, Proca-Maxwell equations has been made. In the second subsection, the aim of this thesis has been given.

In the second chapter, the algebra of elliptic biquaternions has been introduced., definition of the elliptic biquaternions sentence related to this algebraic structure, quaternionic product, quaternionic inner product, conjugate definitions of quaternion, norm of an elliptic biquaternion, modulus of an elliptic biquaternion, modulus of elliptic biquaternion, inverse of an elliptic biquaternion expressions such as theorem that elliptic biquaternion can also be expressed with the help of hyperbolic functions are given. Given the concepts in this chapter form the basic for other chapters.

In the third chapter, Lorentz transformations, which are in accordance with special relativity, have been investigated for the first time with elliptic biquaternions. As it is known, Lorentz transformation relations form the basic of the theory of relativity. Lorentz transforms are important in that they explain how to observe the speed of light independent of the reference frame, how the measurements of space and time measured by two observers are related and are in harmony with special relativity. In addition, it is important to give matrix representations in order to make mathematical expressions more descriptive. In this respect, elliptic Pauli spin matrices were first defined. Then, 4×4 type matrix representations and right and left Hamiltonian matrix representations are expressed. In addition, elliptic biquaternionic special matrices are defined and the elliptic 4×4 and type real matrix 8×8 have been given with the help of these special matrices. In addition, thanks to the matrix representations corresponding to the left Hamilton operator, the problem of the nonexistence of the commutative property in the algebraic structure of elliptic biquaternions has been eliminated. Then, the elliptic biquaternion $\mathbf{R}=ct+I\boldsymbol{r}$, which relates space-time, has been expressed. The elliptic number "I" plays an important role in expressing physical quantities more clearly and in easily distinguishing quantities with different physical structures from each other. In addition, the elliptic matrix representation of this expression has been given. Many physical quantities can be expressed in up to eight dimensions with elliptic biquaternions. In this way, the space and time components of the elliptic biquaternion obtained as a result of the relativistic transformation relation can be easily seen. It has also been shown that elliptic biquaternions include complex structure by taking $p=-1$, since $I^2=p<0$ is a feature of the algebraic structure of elliptic biquaternions. Thus, it has been seen that the Lorentz transformations obtained with the help of the relativistic transformation equation can also be expressed with elliptic biquaternions. It was possible to describe

the electric field $\boldsymbol{E}$ and the magnetic field $\boldsymbol{H}$ with a single elliptic biquaternion. Here, the real component represents the magnetic field and the elliptic component represents the electric field. In addition, matrix representations of these mathematical equations have been given. Then, the relativistic transformation relation of electric and magnetic fields has been investigated by means of elliptic biquaternions, and relativistic electromagnetism relations have been obtained. Two different methods have been used to obtain these relations. Here, the first method, is the electric field and magnetic field obtained under elliptic Lorentz transformations. The other method is the relativistic forms of the electric and magnetic fields obtained with the help of the elliptic biquaternionic relativistic transformation relation. As a result of the relativistic transformation relation, the magnetic and electric field components are simply distinguishable. These results have been compared, and it has been investigated which method is more useful. Moreover, the elliptic biquaternionic differential operator $\mathbf{D}$ has been defined. Thanks to the effect of the conjugate of this operator on the elliptic biquaternion $\mathbb{P}$, which combines the electric and magnetic fields in the elliptic biquaternionic sense, it has been possible to combine all of Maxwell's equations into a single equation. From the point of view of special relativity in electrodynamics, it has been possible to summarize Maxwell's equations and write them in a relativistic way with elliptic biquaternions. Thanks to elliptic biquaternions, it is possible to obtain an elegant electrodynamic formulation in which Maxwell's equations are reduced to a single elliptic biquaternion equation. Then, generalized gravity, which includes the terms Proca-type and gravitomagnetic monopole, has been investigated through elliptic biquaternions, a new algebraic structure. In addition, the Proca-Maxwell equations, a more compact and useful formulation of the most general form of the Klein Gordon equation for the gravitational mass-bearing particle, have been discussed in terms of elliptic biquaternions. For the first time, elliptic biquaternions and Proca-Maxwell equations have been investigated and the results have been discussed. Compared to others, the mathematical structure of elliptic biquaternions provides more interesting, useful and elegant formulations for realizing many alternative representations in physics, such as gravity and electromagnetism. Moreover, it has been proposed to write the electromagnetic energy conservation by means of elliptic biquaternions together with the magnetic monopole. All field equations of gravity have been expressed as an elliptic biquaternionic equation. In addition, thanks to elliptic biquaternions, it has a different perspective and importance in terms of being an additional term to Maxwell-like equations. Proca-type generalized gravitational wave equation has been obtained in an elegant and compact manner. Moreover, the Klein-Gordon equation for the graviton has been developed with the help of elliptic biquaternions. An alternative formulation in terms of elliptic biquaternions has been proposed for gravitoelectromagnetic energy conservation. The imaginary part of the conservation of electromagnetic energy by means of elliptic biquaternions represents Poynting's theorem. The Poynting vector for the energy density together with the graviton mass is directly dependent on the scalar and vector potentials. On the other hand, physical interpretations have been made for the vector and elliptic vector parts of the Proca-Maxwell equations for the scalar part, and it was seen that the vector part has been related to the energy-momentum.

In the fourth chapter, elliptic biquaternions, angular momentum and Dirac equation and their solutions have been investigated. In these regards, elliptic Pauli matrices and elliptic base matrices of elliptic biquaternions have been given. We have defined new elliptic Dirac matrices with these matrices that we have defined for elliptic biquaternions. We have associated elliptic Dirac matrices with elliptic biquaternionic bases. We have obtained the solutions of the Dirac equation with these matrices. Then, the elliptic biquaternionic new formula of the known Dirac equation for the free particle, which gives the energy-momentum relations depending on the motion of the electron in space-time, has been described. In addition, an elliptic biquaternionic mass has been defined. Here, the scalar part corresponding to the unit bases of the elliptic biquaternion has been associated with the rest mass and the vector part as the moving mass. Moreover, the Dirac equation for the rotational particle has been written in a simpler and compact form that includes the elliptic biquaternionic rotational energy and angular momentum. Later, the elliptic biquaternionic spinor has been defined. Thanks to the elliptic biquaternionic definition of this wave function, elliptic biquaternionic energy and angular momentum solutions have been expressed. With these solutions, the elliptic behavior of the quantum wave spinor function associated with the interaction between elliptic biquaternionic spin and orbital angular momentum has been expressed. The obtained these expressions represent the positive and negative energy solution of the rotational particles. These expressions are very useful for fields such as quantum mechanics, general and special relativity.

In the fifth chapter, elliptic biquaternionic relativistic elastic collision problem has been discussed. First, quantities such as elliptic biquaternionic momentum and velocity of a particle have been defined. Matrix representations of these expressions in terms of elliptic biquaternions have been given. Then, the relativistic transformation relation has been given for Lorentz transformations. The main problem here is to find the total elliptic biquaternionic momentum in two different reference frames before and after the collision: First, it is to find the rest reference frame of the target S and then the rest reference frame of the bullet S'. Maintaining the relative velocity and then using a Lorentz transform then reduces the problem to solving a linear equation. As a result, the elliptic biquaternionic relativistic elastic collision problem has been solved by the relativistic transformation equation and the necessary results have been given. Afterwards, found expressions in a table have been analyzed and this table has been given in the results section.

Finally, in the sixth chapter, we have present some results of our study, to which the interested reader has been sincerely invited. We have given a table from which inferences have been made about the velocity v_1 obtained as a result of the relativistic elastic collision problem. Here, obtained results about the velocity v_1 for different real values of the real number $I^2 = p < 0$ such as -4, -1 ve $-0,25$, respectively have been given. An assesment of these results has been made. Moreover, an evaluation of the results of the thesis was made and suggestions has been advised for future research.

1. GİRİŞ

1.1. Literatür Özeti

$\mathbb{R}$ reel sayılar cümlesini göstermek üzere, her x ve y reel sayısı için $z=(x,y)$ ifadesi bir sıralı ikili olarak adlandırılmaktadır. Elemanları (x,y) biçiminde sıralanmış olan reel sayı çiftine kompleks sayılar denir. Kompleks sayılar cümlesi

$$\mathbb{C}=\left\{z=x+iy : x,y\in\mathbb{R},\ i^2=-1\right\}$$

biçiminde ifade edilir [1]. Kompleks sayılardan yararlanan ilk kişiler G. Carden ve R. Bombelli adlı İtalyan matematikçilerdir. Diğer taraftan Yaglom genelleştirilmiş kompleks sayıları doğal (ordinary), dual ve double sayılar olarak ifade etmiştir. Doğal kompleks sayılar $i^2=-1$ olması durumudur. İngiliz geometrici W. Clifford, $i^2=1$ olduğu "double" kompleks sayıları geliştirmiştir. Alman geometrici E. Study daha sonra kinematik ve çizgi geometrisi üzerinde çalışmalar yaparak farklı teoremler ortaya koymuş ve $i^2=0$ olan durumda dual sayılar ortaya çıkmıştır. Yaglom, ordinary, dual ve double sayıları kompleks sayı sisteminin iki parametreli ailesinin özel üyeleri olarak ifade etmiş ve genelleştirilmiş kompleks sayıları

$$z=x+iy\ \ (x,y\in\mathbb{R})\ ,\ i^2=iq+p\ \ (q,p\in\mathbb{R})$$

biçiminde tanımlamıştır [1]. Harkin ve arkadaşları $i^2=iq+p$ ifadesinde $q=0$ için $i^2=p$ durumunu alarak genelleştirilmiş kompleks sayıların

diğer sayı sistemlerine izomorf olduğunu göstermiş ve $p-$kompleks sayılar sistemini $\mathbb{C}_p$ ile temsil ederek,

$$\mathbb{C}_p=\left\{x+iy :\ x,y\in\mathbb{R},\ i^2=p\right\}$$

şeklinde tanımlamıştır. Ayrıca $p-$trigonometrik fonksiyonları

$$\cos_p \theta_p = \begin{cases} \cos\,(\theta_p \sqrt{|p|}) & , \quad p<0 \quad \text{ise} \\ 1 & , \quad p=0 \quad \text{ise} \\ \cosh(\theta_p \sqrt{p}) & , \quad p>0 \quad \text{ise} \end{cases} \tag{1.1}$$

ve

$$\sin_p \theta_p = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{|p|}} \sin\,(\theta_p \sqrt{|p|}) & , \quad p<0 \quad \text{ise} \\ 1 & , \quad p=0 \quad \text{ise} \\ \dfrac{1}{\sqrt{p}} \sin(\theta_p \sqrt{p}) & , \quad p>0 \quad \text{ise} \end{cases} \tag{1.2}$$

şeklinde tanımlamıştır [2].

Son zamanlarda $p-$kompleks sayılar ile ilgili, $p-$kompleks düzlemde genelleştirilmiş Steiner formülü ve Holditch teoremi adlı çalışma [3] kaynağı tarafından verilmiştir. Kuaterniyonlar 1843 yılında W. R. Hamilton tarafından keşfedilmiş olup reel kuaterniyonlar cümlesi;

$$\mathbb{H} = \{\mathbf{q} = q_0 + q_1 e_1 + q_2 e_2 + q_3 e_3 : q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}\}$$

biçiminde ifade edilmiştir. Burada e_1, e_2, e_3 birimlerinin çarpımı

$$\begin{aligned} &e_1 \otimes e_1 = e_2 \otimes e_2 = e_3 \otimes e_3 = -1, \quad && e_1 \otimes e_2 = -e_2 \otimes e_1 = e_3, \\ &e_2 \otimes e_3 = -e_3 \otimes e_2 = e_1, && e_3 \otimes e_1 = -e_1 \otimes e_3 = e_2 \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır [4].

1853 yılında W.R. Hamilton bikuaterniyonlar (kompleks kuaterniyonlar) cümlesini tanımlamıştır [5]. Diğer taraftan e_1, e_2, e_3 kuaterniyon birimleri, reel kuaterniyonlardaki birimlerle tamamen aynı olmak üzere bu cümle,

$$\mathbb{H}_{\mathbb{C}} = \{\mathbf{Q} = Q_0 + Q_1 e_1 + Q_2 e_2 + Q_3 e_3 : Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 \in \mathbb{C}\}$$

biçiminde ifade edilir ki burada e_1, e_2, e_3 üç boyutlu uzaydaki birim baz vektörleridir [6]. Dolayısıyla $\mathbf{Q}$ kuaterniyonu skaler ve uzaysal vektörün lineer birleşimi olarak yazılır [7].

Popüler bir matematiksel yapı olan kuaterniyonlar fizikte, rölativistik mekanik, elektromanyetizma, özel görelilik, kuantum mekaniği gibi pek çok alanda kullanılmaktadır. P. A. M. Dirac, E. Schrödinger, M. Born, W. Heisenberg gibi ünlü fizikçiler tarafından kuantum mekaniğinin 1927-1932 yıllarında, bulunuşundan ve gelişiminden sonra birçok araştırmacı tarafından kuaterniyonlar kullanılmış ve yaygın bir hale gelmiştir. Rölativistik incelemelerde kuaterniyonlar kullanılarak Lorentz dönüşümlerine ilişkin çalışmalar [8]-[11] kaynaklarından görülebilir. Elektromagnetizm ile ilgili [12] tarafından yapılan çalışma kuaterniyonlar açısından önem arz etmektedir. Kuaterniyonlar vektörlerin kullanıldığı birçok fiziksel nicelikleri temsil etmede önemli bir yere sahiptir. K. Özdaş tarafından 1989 yılında yapılan [13] çalışmasında skaler ve vektörel büyüklüklerin bir kuaterniyon olarak temsil edilebileceği gösterilmiştir. Fiziksel nicelikleri ifade etmek amacıyla [14] tarafından yapılan çalışma oldukça dikkat çekmektedir. Bu çalışmalar sayesinde iş ve tork gibi büyüklüklerin ifadesi, açısal yer değiştirme, hız, ivme ve momentum gibi klasik mekaniğe ilişkin vektörel büyüklükler kuaterniyonlarla ifade edilebilmektedir. Son zamanlarda, fizikte kuantum mekaniği alanında [15] tarafından yapılan çalışma Dirac denkleminin kuaterniyonlar ile ifade edilmesi açısından dikkat çekmektedir. Kuaterniyonların bilgisayar bilimleri, diferensiyel geometri, kinematik ve analiz gibi çeşitli araştırma alanlarında da birçok uygulaması vardır [16]-[18].

Kuaterniyonlar teorisinin zaman içinde reel kuaterniyonlar, kompleks kuaterniyonlar, dual kuaterniyonlar gibi çeşitleri ortaya çıkmıştır. Son zamanlarda, fiziksel sistemleri alternatif bir şekilde temsil etmek için kompleks sayı sistemlerinin 4, 8 ve 16 boyutlu yapılara genişletildiği oktonyon ve sedeniyon gibi matematiksel yapılar ortaya çıkmıştır. Kompleks kuaterniyonlar veya bikuaterniyonlar, kuaterniyonları da kapsayan cebirsel bir yapıdır. Bikuaterniyonlar matematik ve fizikte pek çok uygulama alanlarına sahiptir. Bikuaterniyonların fizikte daha çok genel ve özel rölativite, rölativistik mekanik ve elektromanyetizma ile kuantum mekaniği alanında uygulamaları olmuştur [19]-[25]. A.W. Conway rölativistik kuantum mekaniğinin dalga denklemi olan Dirac denklemini incelemiş ve kompleks kuaterniyonları kullanmıştır [26]. Dirac denklemi, kuantum alan teorisinin başlamasını sağlamıştır.

Dirac denkleminde görülen negatif enerjili parçacıkların gerçekte negatif olmadıkları aslında bunların pozitif enerjili anti parçacıklar olduğu kuantum alan kuramı ile belirtilmiştir.

Başka bir önemli çalışma, parçacık mekanik denklemlerinin, $4-$ momentum korunum formüllerinin ve elektromanyetizma denklemlerinin kompleks kuaterniyonlar aracılığı ile ifadesidir [27]. Rölativistik elektromanyetizmada kompleks kuaterniyon formülasyonu kullanılarak Maxwell denklemlerinin Lorentz dönüşümleri altındaki yeni formları [28]-[31] kaynaklarında ele alınmıştır. Daha sonra kompleks kuaterniyon cebri ile tüm 2×2 kompleks matris cebri $M_2(\mathbb{C})$ birbirine izomorf olduğu gösterilmiştir. Bu izomorfizma

$$\psi:\mathbb{H}_{\mathbb{C}}\to M_2(\mathbb{C})\ ,\ \psi(Q_0+Q_1e_1+Q_2e_2+Q_3e_3)=\begin{bmatrix} Q_0+Q_1e_1 & -Q_2-Q_3e_1 \\ Q_2-Q_3e_1 & Q_0-Q_1e_1 \end{bmatrix}$$

biçiminde tanımlanmıştır [32]-[37]. Bu izomorfizma sayesinde birçok araştırmacı çalışmalar yapmıştır. Bunlardan biri de Lorentz dönüşümlerinin kompleks kuaterniyonlar ile matrisel ifadeleridir [38]. Bir başka çalışma ise Negi ve arkadaşları tarafından kompleks kuateriyonların matris temsilleri verilerek kompleks kuaterniyonlar ile verilen Maxwell denklemlerinin kapalı ve açık formlarıdır [39]. Öte yandan, homojen olmayan ortamlarda Maxwell denklemlerinin yaklaşık çözümlerini elde etmek için yeni bir yaklaşım [40] kaynağında incelenmiştir. Benzer olarak başka bir çalışmada ise bikuaterniyonlar aracılığı ile elektrodinamik denklemlerinin analizindeki son gelişmelere genel bir bakış sunulmuştur [41].

Dirac [42] kaynağında ele alınan çalışmasında, elektrik yükünün Hamiltonian'ı kullanarak geliştirdiği bir kuantizasyonu için, tek bir manyetik kutup olması gerekliliğini ifade etmiştir. Varlığı hakkında hala tartışmalar olsa bile Dirac'ın manyetik monopol teorisi [43], klasik Maxwell denklemlerinin [44] uzantılarından biridir. Elektromanyetik alanlar ve kütleçekim alanlar arasında simetrik bir biçimin elde edilmesi manyetik monopol terimlerinin ifadesiyledir [45]. Dirac'ın manyetik monopol teorisinin bir sonucu ile yerçekimi için manyetik kütlenin varlığı, elektromanyetizmadaki manyetik yük ile benzerlik gösterir. Başka bir çalışmada ise Heavisidian monopoller ile lineer gravitasyonel (kütleçekimsel) alan denklemlerinin kuaterniyonik formu ifade edilmiştir [46]. O. P. S. Negi ve arkadaşları da bunun ile ilgili benzer çalışmalar için bikuaterniyonları kullanmıştır [47]-[48]. Bikuaterniyonlar ve kuaterniyonlar kullanılarak Maxwell denklemlerinin temsillerini gerçekleştirme girişimlerini açıklayan birçok makale vardır [49]-[50]. Majernik, bikuaterniyonik Maxwell denklemlerinin genişletilmiş biçimini kullanarak Maxwell-like gravitasyonel alan denklemlerini genelleştirmiştir [51]. Ayrıca Rajput, gravitomanyetik kütle ile manyetik monopol ifadeleri ile ilişkili olarak genelleştirilmiş kütleçekim alanı ve genelleştirilmiş elektromanyetik alan arasındaki simetrik yapıyı göstermiştir [52]. Fotonun kütlesinin sıfırdan farklı olduğu göz önüne alındığında Maxwell denklemlerinin elektrodinamiği genelleştirilmiş Proca denklemlerine genişletilebilir [53]. Benzer şekilde gravitonun kütlesinin sıfırdan farklı olduğu göz önüne alındığında Proca denklemleri elde edilebilir. Argyris ve Ciubotariu elektromanyetizma için, gravitonların sonlu kütlesini varsayarak buradan kaynaklanan terimlerin eklenmesi ile Proca-tip kütleçekim alan denklemlerini elde etmişlerdir [54]. Ayrıca son zamanlarda Clifford cebri kullanılarak kütleçekim ve elektromanyetik alanlar için lineer alan denklemleri incelenmiştir [55].

Enerji ve akış nesnelerin bir özelliğidir gerçek veya maddi bir şey değildir. Poynting vektörü enerji akışının yoğunluğu olarak yorumlanabilir. İçerisinde elektrik ve manyetik alanın olduğu bir korunum denklemi olarak poynting teoremi elde edilmiştir. Poynting teoremi literatürde iş-enerji teoremi olarak da bilinmektedir [56].

Öte yandan diğer kuaterniyon çeşitleri için fizikte pek çok çalışmalar yapılmıştır [57]-[60]. Diğer taraftan eliptik bikuaterniyonların 2×2 eliptik matris gösterimi için izomorfizma [61] kaynağında

$$\sigma : \mathbb{HC}_p \to M_2(\mathbb{C}_p),$$

$$\mathbf{A} = A_0 + A_1 e_1 + A_2 e_2 + A_3 e_3 \to \sigma(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} A_0 + \frac{1}{\sqrt{|p|}} I A_1 & -A_2 - \frac{1}{\sqrt{|p|}} I A_3 \\ A_2 - \frac{1}{\sqrt{|p|}} I A_3 & A_0 - \frac{1}{\sqrt{|p|}} I A_1 \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Burada σ fonksiyonu, 1-1, örten lineer izomorfizmadır. $\mathbb{HC}_p$ ve $M_2(\mathbb{C}_p)$ sırasıyla eliptik bikuaterniyonlar kümesini ve 2×2 tipinde eliptik matrislerin kümesini göstermektedir. Eliptik bikuaterniyonlar hakkında daha çok bilgiye [62]-[63] kaynaklarından ulaşılabilir. Eliptik bikuaterniyonlar açısından fizikte bazı çalışmalar [64]-[67] tarafından yapılmıştır.

1.2. Tezin Amacı

Bu çalışmada, farklı özellikteki birçok fiziksel niceliğin eliptik bikuaterniyon aracılığıyla birlikte ifade edebilmeyi ve hem matematiksel hem de fiziksel çalışmalar için farklı bir bakış açısı kazandırılarak eliptik bikuaterniyonların kullanım alanının genişletilebilmesi amaçlanmaktadır. Lorentz dönüşümleri fizikte, birbirine göre sabit hızlarda hareket eden iki koordinat çerçevesi altındaki koordinat dönüşümleridir. Einstein tarafından öne sürülen özel rölativite teorisinin temelinde Lorentz dönüşüm bağıntıları yatar. Bu dönüşümler adını Hollandalı fizikçi Hendrik Lorentz'den almıştır. Lorentz dönüşümleri özel görelilik ile uyum içerisindedir. Maxwell denklemleri Lorentz dönüşümlerini sağlar ve özel rölativite teorisi ile uyum içindedir. Maxwell denklemleri elektrik alanın ve manyetik alanın davranışlarını açıklaması açısından önemli fizik yasalarıdır. Bu bakımdan bu tür fiziksel denklemleri her açıdan ele almak literatürdeki boşluğu doldurmak açısından da önem arz etmektedir.

Tezde giriş kısmı, temel kavramlar ve eliptik bikuaterniyonların cebirsel yapısı ile birtakım özellikleri verildikten sonra eliptik bikuaterniyonlar açısından ele alınan fizikte bazı özel denklemler ve problemler üçüncü, dördüncü ve beşinci bölümlerde yer alıp bu bölümler tezin orijinal kısmını oluşturmaktadır.

Tezin orijinal kısmının ilk adımında eliptik bikuaterniyonlar ile Lorentz denklemleri ve rölativistik notasyonda elektromanyetizma konusu ele alınmıştır. Bu kısım tezin orijinal kısmının 3. Bölümünde yer almaktadır. Bu bağlamda elektrik ve manyetik alanların eliptik Lorentz dönüşümleri, elektrik ve manyetik alanların eliptik bikuaterniyonik dönüşümleri ifade edilmiştir. Daha sonra, Proca-Maxwell denklemleri ve Proca-tip genelleştirilmiş kütle çekimi ilk defa eliptik bikuaterniyonlar açısından araştırılarak önemli sonuçları elde edilmiştir. Ayrıca elektromanyetik enerji korunumu ifade edilmiştir.

İkinci adımda ise tezin orijinal bölümü olan 4. Bölümde eliptik bikuaterniyonlar ile açısal momentum ve Dirac denklemi eliptik bikuaterniyonlar açısından ilk defa ele alınmıştır.

Son adımda ise tezin orijinal bölümü olan 5. Bölümde rölativistik esnek çarpışma problemi incelenerek kapsamlı ve genel bir çözüm elde edilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde verilen bazı temel kavramlar diğer bölümler için temel oluşturmaktadır. Diğer bölümlerde bu kavramlardan yararlanılacaktır.

2.1. Eliptik Bikuaterniyonlar Cebri ve Temel Özellikleri

Tanım 2.1.1. Bir eliptik bikuaterniyonlar kümesi

$$\mathbb{HC}_p = \left\{ \mathbf{A} = \boldsymbol{a} + I\boldsymbol{a}' = A_0 e_0 + A_1 e_1 + A_2 e_2 + A_3 e_3 \, : A_0, A_1, A_2, A_3 \in \mathbb{C}_p \right\} \qquad (2.1)$$

olarak tanımlanır. Burada $I^2 = p < 0$ reel sayıyı ve $A_i = a_i + Ia_i'$, $a_i \in \mathbb{R},\ 0 \le i \le 3$, sayıları eliptik sayıları gösterir [62]. Dolayısıyla (2.1) denklemindeki tanımdan yararlanarak bir $\mathbf{A}$ eliptik bikuaterniyonu

$$\mathbf{A} = \left(a_0 + Ia_0'\right)e_0 + \left(a_1 + Ia_1'\right)e_1 + \left(a_2 + Ia_2'\right)e_2 + \left(a_3 + Ia_3'\right)e_3 = \boldsymbol{a} + I\boldsymbol{a}' \qquad (2.2)$$

şeklinde yazılabilir.

Kuaterniyon taban elemanları e_0, e_1, e_2, e_3 Tablo 2.1'de verilen çarpım kuralına uyarlar [7].

Tablo 2.1. Kuaterniyon taban elemanları çarpım tablosu.

$\otimes$	e_0	e_1	e_2	e_3
e_0	e_0	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	$-e_0$	e_3	$-e_2$
e_2	e_2	$-e_3$	$-e_0$	e_1
e_3	e_3	e_2	$-e_1$	$-e_0$

Tanım 2.1.2. Herhangi bir $\mathbf{A} \in \mathbb{HC}_p$ eliptik bikuaterniyonunun skaler kısmı sıfır ise $\mathbf{A}$ 'ya pür eliptik bikuaterniyon denir [62].

Tanım 2.1.3 Bir $\mathbf{A} = A_0e_0 + A_1e_1 + A_2e_2 + A_3e_3 \in \mathbb{HC}_p$ verilsin. Burada (A_0) eliptik sayısına $\mathbf{A}$ 'nın skaler kısmı, $(A_1e_1 + A_2e_2 + A_3e_3)$ ifadesine ise $\mathbf{A}$ 'nın vektörel kısmı denir. Buna göre $\mathbf{A}$ eliptik bikuaterniyonunun skaler ve vektörel kısımları sırasıyla $S(\mathbf{A}) = A_0e_0$, $V(\mathbf{A}) = A_1e_1 + A_2e_2 + A_3e_3$ biçiminde yazılabilir. Bu durumda $\mathbf{A}$ eliptik bikuaterniyonu skaler ve vektörel kısmının toplamı cinsinden

$$\mathbf{A} = S(\mathbf{A}) + V(\mathbf{A}) = A_0 + \boldsymbol{A} \tag{2.3}$$

şeklinde ifade edilebilir [62]. Gösterimin basitliği açısından tez boyunca $V(\mathbf{A}) = \boldsymbol{A}$ ile gösterilmiştir.

Tanım 2.1.4. $\mathbf{A} = A_0e_0 + A_1e_1 + A_2e_2 + A_3e_3$ ve $\mathbf{B} = B_0e_0 + B_1e_1 + B_2e_2 + B_3e_3$ gibi iki eliptik bikuaterniyonun toplamı ve kuaterniyonik çarpımı sırasıyla

$$\begin{aligned}\mathbf{A}+\mathbf{B} &= \left(A_0e_0 + A_1e_1 + A_2e_2 + A_3e_3\right) + \left(B_0e_0 + B_1e_1 + B_2e_2 + B_3e_3\right)\\ \mathbf{A}+\mathbf{B} &= (A_0 + B_0) + (A_1 + B_1)e_1 + (A_2 + B_2)e_2 + (A_3 + B_3)e_3\end{aligned}$$

$$\mathbf{A}\otimes\mathbf{B} = (A_0e_0 + A_1e_1 + A_2e_2 + A_3e_3)\otimes(B_0e_0 + B_1e_1 + B_2e_2 + B_3e_3)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\otimes\mathbf{B} &= \left(A_0B_0 - A_1B_1 - A_2B_2 - A_3B_3\right) + \left(A_0B_1 + A_1B_0 + A_2B_3 - A_3B_2\right)e_1 \\ &+ \left(A_0B_2 - A_1B_3 + A_2B_0 + A_3B_1\right)e_2 + \left(A_0B_3 + A_1B_2 - A_2B_1 + A_3B_0\right)e_3\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır [62]. Burada "$\otimes$" sembolü kuaterniyonik çarpımı gösterir.

Tanım 2.1.5. Herhangi $\mathbf{A} = A_0e_0 + A_1e_1 + A_2e_2 + A_3e_3$ ve $\mathbf{B} = B_0e_0 + B_1e_1 + B_2e_2 + B_3e_3$ eliptik bikuaterniyonunun karşılıklı bileşenleri eşit yani, $A_0 = B_0$, $A_1 = B_1$, $A_2 = B_2$, $A_3 = B_3$ ise $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ eliptik bikuaterniyonları eşittir denir.

Ayrıca herhangi iki eliptik bikuaterniyonunun kuaterniyonik çarpımı diğer bir ifadeyle,

$$\mathbf{A}\otimes\mathbf{B} = (A_0 + \boldsymbol{A})\otimes(B_0 + \boldsymbol{B}) = A_0\mathrm{B}_0 + \boldsymbol{A}\mathrm{B}_0 + \boldsymbol{B}A_0 - \langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}\rangle + \boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{B} \tag{2.4}$$

biçiminde verilir [78]. Burada "$\langle , \rangle$" ve "$\wedge$" sembolleri üç boyutlu uzaydaki iç çarpım ve vektörel çarpımı göstermektedir.

Tanım 2.1.6. Bir $\mathbf{A} = A_0e_0 + A_1e_1 + A_2e_2 + A_3e_3 = S(\mathbf{A}) + V(\mathbf{A})$ eliptik bikuaterniyonu için kuaterniyonik eşlenik, kompleks eşlenik ve total eşlenik olmak üzere üç ayrı eşlenik sırasıyla;

$$\bar{\mathbf{A}} = A_0e_0 - A_1e_1 - A_2e_2 - A_3e_3 = S\left(\mathbf{A}\right) - V\left(\mathbf{A}\right) \tag{2.5}$$

$$\mathbf{A}^* = (A_0)^*e_0 + (A_1)^*e_1 + (A_2)^*e_2 + (A_3)^*e_3 = (S(\mathbf{A}))^* + (V(\mathbf{A}))^* \tag{2.6}$$

$$\mathbf{A}^\dagger = \left(\bar{\mathbf{A}}\right)^* = \overline{\left(\mathbf{A}^*\right)} = (A_0)^*e_0 - (A_1)^*e_1 - (A_2)^*e_2 - (A_3)^*e_3 = \left(S\left(\mathbf{A}\right)\right)^* - \left(V\left(\mathbf{A}\right)\right)^* \tag{2.7}$$

şeklinde tanımlanır [63].

Tanım 2.1.7. Herhangi iki $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ eliptik bikuaterniyonlarının iç çarpımı

$$\langle \mathbf{A},\mathbf{B}\rangle_Q = \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{A}}\otimes\mathbf{B}+\bar{\mathbf{B}}\otimes\mathbf{A}) = \frac{1}{2}(\mathbf{A}\otimes\bar{\mathbf{B}}+\mathbf{B}\otimes\bar{\mathbf{A}}) \tag{2.8}$$

şeklinde tanımlanır. Burada "$\langle , \rangle_Q$" sembolü kuaterniyonik iç çarpımı temsil eder [63].

Tanım 2.1.8. Herhangi bir $\mathbf{A}$ eliptik bikuaterniyonunun normu

$$N_{\mathbf{A}} = \langle \mathbf{A},\mathbf{A}\rangle_Q = \bar{\mathbf{A}}\otimes\mathbf{A} = \mathbf{A}\otimes\bar{\mathbf{A}} = A_0^2 + A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 \tag{2.9}$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca yukarıdaki eşitlikte $A_i = q_i + Iq_i' \in \mathbb{C}_p$, $0 \le i \le 3$ olduğundan $N_{\mathbf{A}}$' nın $\mathbf{A} \neq 0$ iken de sıfıra eşit olabileceği yukardaki eşitlikten görülmektedir. Dolayısıyla $H\mathbb{C}_p$ eliptik bikuaterniyonlar cebirinde $\mathbf{A} \neq 0$ iken $\bar{\mathbf{A}}\otimes\mathbf{A} = \mathbf{A}\otimes\bar{\mathbf{A}}$ eşitliğini sağlayan $\mathbf{A}$ eliptik bikuaterniyonları mevcuttur ve $\mathbb{HC}_p$ eliptik bikuaterniyonlar cebiri sıfır bölenler içerir. Bundan dolayı, genel literatüre uygunluk açısından $\mathbb{HC}_p$ eliptik bikuaterniyonlar uzayında norm terimi yerine semi-norm terimi kullanılır [78].

Semi-normu sıfırdan farklı olmak şartı ile bir $\mathbf{A}$ eliptik bikuaterniyonunun tersi ise, $\mathbf{A}^{-1} = \dfrac{\bar{\mathbf{A}}}{N_{\mathbf{A}}}$ şeklinde verilir. Bir $\mathbf{A}$ eliptik bikuaterniyonunun modülü ise $N_{\mathbf{A}} = \bar{\mathbf{A}}\otimes\mathbf{A} = \mathbf{A}\otimes\bar{\mathbf{A}} = |\mathbf{A}|^2$ dir ve $|\mathbf{A}|$ ile gösterilir. Ayrıca bir $\mathbf{A}$ eliptik bikuaterniyonunun normu 1' e eşit yani

$$N_{\mathbf{A}} = \langle \mathbf{A},\mathbf{A}\rangle_Q = \bar{\mathbf{A}}\otimes\mathbf{A} = \mathbf{A}\otimes\bar{\mathbf{A}} = A_0^2 + A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 = 1 \tag{2.10}$$

ise $\mathbf{A}$' ya birim eliptik bikuaterniyon denir [61].

2.2. Eliptik Bikuaterniyonların p - Trigonometrik Formu

Diğer önemli bir konu ise eliptik bikuaterniyonların $p-$trigonometrik formudur. Tüm birim eliptik bikuaterniyonların oluşturduğu küme $\eta = \{\mathbf{A} \in \mathbb{HC}_p : N(\mathbf{A}) = 1\}$ ve semi-normu p 'nin mutlak değerine eşit olan eliptik bikuaterniyonların oluşturduğu küme:

$$\zeta = \left\{ \boldsymbol{w} = A_1 e_1 + A_2 e_2 + A_3 e_3 : \; N_{\boldsymbol{w}} = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 = |p|, \; \boldsymbol{w}^* = -\boldsymbol{w}, \; \boldsymbol{w}^2 = p \right\} \tag{2.11}$$

biçiminde gösterilsin. Burada $\boldsymbol{w}^2 = p$ ifadesi $\boldsymbol{w} \otimes \boldsymbol{w} = p$ olarak düşünülmelidir. Böylece $\mathbf{A} = A_0 + A_1 e_1 + A_2 e_2 + A_3 e_3$ eliptik bikuaterniyonu ile onun vektörel kısmının modülü sıfırdan farklı olan herhangi bir eliptik bikuaterniyon göz önüne alındığında

$$N_{\mathbf{A}} = \left(\sqrt{A_0^2 + A_1^2 + A_2^2 + A_3^2} \right)_{\mathbb{C}_p},$$

$$\cos_p \theta_p = \frac{A_0}{N_{\mathbf{A}}}, \qquad \sin_p \theta_p = \frac{\left(\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2} \right)_{\mathbb{C}_p}}{\sqrt{|p|} N_{\mathbf{A}}} \tag{2.12}$$

bağıntıları geçerlidir [63]. Dolayısıyla aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 2.2.1. Herhangi bir $\boldsymbol{w} \in \zeta$ pür eliptik bikuaterniyonu ve $\theta_p \in \mathbb{C}_p$ eliptik kompleks açısı verilsin. Bu durumda

$$\cos_p \theta_p + \boldsymbol{w} \sin_p \theta_p$$

eliptik bikuaterniyonu bir birim eliptik bikuaterniyondur [63].

Teorem 2.2.2. $\mathbf{A} = A_0 + A_1 e_1 + A_2 e_2 + A_3 e_3$ vektörel kısmının modülü sıfırdan farklı olan herhangi bir eliptik bikuaterniyon olsun. Bu durumda, $\mathbf{A}$ 'nın vektörel kısmından türetilen

$$\boldsymbol{w}_{\mathbf{A}} = \sqrt{|p|} \, \frac{A_1 e_1 + A_2 e_2 + A_3 e_3}{\left(\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2} \right)_{\mathbb{C}_p}}$$

pür eliptik bikuaterniyonu ζ kümesinin bir elemanıdır. Yani, $\left(\boldsymbol{w}_{\mathbf{A}} \right)^2 = p$ dir [63].

Teorem 2.2.1 ve Teorem 2.2.2'ye bağlı olarak $\mathbf{A} = A_0 + A_1e_1 + A_2e_2 + A_3e_3$ eliptik bikuaterniyonu $p-$ trigonometrik formda

$$\mathbf{A} = \sqrt{N_{\mathbf{A}}}(\cos_p \theta_p + \boldsymbol{w}_{\mathbf{A}} \sin_p \theta_p) \tag{2.13}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\theta_p \in \mathbb{C}_p$ açısı $\theta_p = x + Iy$ formunda bir eliptik kompleks açıdır [63].

Teorem 2.2.3. Eğer bir $\mathbf{A}$ eliptik bikuaterniyonu, $(\boldsymbol{w}_{\mathbf{A}})^2 = p$ olmak üzere $\mathbf{A} = \cosh(\frac{p\theta_p}{2}) + \frac{1}{I}\boldsymbol{w}_{\mathbf{A}} \sinh(\frac{p\theta_p}{2})$ biçiminde tanımlanırsa bu durumda $\mathbf{A}$ birim eliptik bikuaterniyondur [64].

İspat. Lorentz dönüşümleri, $x-$ekseni yönünde iki farklı koordinat sisteminin göreceli hareketine dayanır. Genelde aynı yönde olmayan bir $\boldsymbol{v} = v_1e_1 + v_2e_2 + v_3e_3$ hız vektöründen bahsedilir. Bu $\boldsymbol{v}$ hızı dikkate alınarak, $\boldsymbol{w}_{\mathbf{A}} = \sqrt{|p|}\dfrac{v_1e_1 + v_2e_2 + v_3e_3}{\sqrt{<\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}>}}$ pür eliptik bikuaterniyonu yazılabilir. Diğer taraftan eğer $\mathbf{A} = A_0 + \boldsymbol{A}$ eliptik bikuaterniyonu için $d = \frac{\theta_p}{2}$ olarak seçilirse, $\mathbf{A} = \cosh(pd) + \frac{1}{I}\boldsymbol{w}_{\mathbf{A}} \sinh(pd)$ eliptik bikuaterniyonu yazılabilir. Buradan $\mathbf{A}$ eliptik bikuaterniyonunun kuaterniyonik eşleniği, $\overline{\mathbf{A}} = \cosh(pd) - \frac{1}{I}\boldsymbol{w}_{\mathbf{A}} \sinh(pd)$ şeklindedir. Bu durumda $\mathbf{A} \otimes \overline{\mathbf{A}} = N(\mathbf{A}) = \cosh^2(\frac{p\theta_p}{2}) - \sinh^2(\frac{p\theta_p}{2}) = 1$ elde edilir. Böylece $\mathbf{A} = \cosh(\frac{p\theta_p}{2}) + \frac{1}{I}\boldsymbol{w}_{\mathbf{A}} \sinh(\frac{p\theta_p}{2})$ ifadesinin bir birim eliptik bikuaterniyon olduğu görülür.

3. ELİPTİK BİKUATERNİYONLAR ARACILIĞIYLA LORENTZ DÖNÜŞÜMLERİ VE RÖLATİVİSTİK NOTASYONDA ELEKTROMANYETİZMA

3.1. Eliptik Biquaterniyonların Matris Temsilleri

Matematiksel ifadelerin daha açıklayıcı olması açısından matris temsillerinin verilmesi tercih edilen bir yöntemdir. Bu bölümde matrisler ile çalışılacaktır. Eliptik bikuaterniyonların 2×2 matris temsili için (1.3) denklemindeki izomorfizma göz önünde bulundurarak eliptik Pauli spin matrislerini aşağıdaki gibi tanımlıyoruz [65]:

$$\sigma(e_0)=\sigma_0=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\quad \sigma(e_1)=\sigma_1=\begin{bmatrix}\dfrac{p}{\sqrt{|p|}} & 0\\ 0 & -\dfrac{p}{\sqrt{|p|}}\end{bmatrix},$$

$$\sigma(e_2)=\sigma_2=\begin{bmatrix}0 & -I\\ I & 0\end{bmatrix},\quad \sigma(e_3)=\sigma_3=\begin{bmatrix}0 & -\dfrac{p}{\sqrt{|p|}}\\ \dfrac{-p}{\sqrt{|p|}} & 0\end{bmatrix}$$

burada $I^2 = p < 0$ olup yukarıda tanımlanan matrisler yardımıyla elde edilen eliptik bikuaterniyonunun birim tabanları

$$e_0 \simeq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad e_1 \simeq \begin{bmatrix} \frac{I}{\sqrt{|p|}} & 0 \\ 0 & -\frac{I}{\sqrt{|p|}} \end{bmatrix},$$

$$e_2 \simeq \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad e_3 \simeq \begin{bmatrix} 0 & -\frac{I}{\sqrt{|p|}} \\ -\frac{I}{\sqrt{|p|}} & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlıdır. Bir $\mathbf{A} = A_0 + A_1e_1 + A_2e_2 + A_3e_3$ eliptik bikuaterniyonu 2×2 tipinde

$$\mathbf{A} \cong \begin{bmatrix} A_0 + \frac{I}{\sqrt{|p|}}A_1 & -A_2 - \frac{I}{\sqrt{|p|}}A_3 \\ A_2 - \frac{I}{\sqrt{|p|}}A_3 & A_0 - \frac{I}{\sqrt{|p|}}A_1 \end{bmatrix}$$

olarak temsil edilebilir. Burada verilen $\mathbf{A}$ eliptik bikuaterniyonunun determinantı

$$\det\mathbf{A} \cong \begin{vmatrix} A_0 + \frac{I}{\sqrt{|p|}}A_1 & -A_2 - \frac{I}{\sqrt{|p|}}A_3 \\ A_2 - \frac{I}{\sqrt{|p|}}A_3 & A_0 - \frac{I}{\sqrt{|p|}}A_1 \end{vmatrix} = (A_0)^2 + (A_1)^2 + (A_2)^2 + (A_3)^2$$

olup buradan $\det\mathbf{A} = N_{\mathbf{A}}$ bulunur [78].

3.1.1. Eliptik Bikuaterniyonların 4×4 Tipinde Matris Temsilleri

Reel kuaterniyonlardaki e_0, e_1, e_2, e_3 taban elemanlarına karşılık gelen matrisler,

$$\Gamma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

$$\Gamma_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

$$\Gamma_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

$$\Gamma_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

biçiminde tanımlanır. Bu matrisler kuaterniyon baz elemanlarının,

$$\Gamma_0^{\ 2} = \Gamma_0 = I_4,\ \Gamma_1^{\ 2} = \Gamma_2^{\ 2} = \Gamma_3^{\ 2} = -I_4,\ \Gamma_j \Gamma_k = \delta_{jk}\Gamma_0 - \varepsilon_{jkl}\Gamma_l \tag{3.5}$$

çarpım bağıntılarını sağlarlar. Burada $j,k,l = 1,2,3$ olmak üzere δ_{jk} ve ε_{jkl} ifadeleri sırasıyla Kronecker delta ve Levi-civita sembollerini göstermektedir. Literatürde reel kuaternionlar için çok sayıda matris eşitliği verilmiştir [14], [38]. Böylece bir $\mathbf{A} \cong A_0\Gamma_0 + A_1\Gamma_1 + A_2\Gamma_2 + A_3\Gamma_3$ eliptik bikuaterniyonu için (3.5) denkleminde verilen baz elemanları kullanılarak bilinen sol Hamilton matrisi

$$\mathbb{H}^{-}(\mathbf{A})=\begin{bmatrix} A_0 & -A_1 & -A_2 & -A_3 \\ A_1 & A_0 & A_3 & -A_2 \\ A_2 & -A_3 & A_0 & A_1 \\ A_3 & A_2 & -A_1 & A_0 \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

şeklinde verilir. Diğer taraftan bilinen sağ Hamilton matrisi ise,

$$\mathbb{H}^{+}(\mathbf{A})=\begin{bmatrix} A_0 & -A_1 & -A_2 & -A_3 \\ A_1 & A_0 & -A_3 & +A_2 \\ A_2 & +A_3 & A_0 & -A_1 \\ A_3 & -A_2 & +A_1 & A_0 \end{bmatrix} \tag{3.7}$$

dir. Buradaki $\mathbf{A}$ eliptik bikuaterniyon sayısını aynı zamanda; $\mathbf{A}=\left[A_0, \boldsymbol{A}\right]^T=\left[A_0 \quad A_1 \quad A_2 \quad A_3\right]^T$ şeklinde 4×1 matris ile de temsil etmek mümkündür.

Hamilton matrisleri için aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.1.1. $\mathbf{A}=A_0\Gamma_0+A_1\Gamma_1+A_2\Gamma_2+A_3\Gamma_3$ ve $\mathbf{B}=B_0\Gamma_0+B_1\Gamma_1+B_2\Gamma_2+B_3\Gamma_3$, $\mathbb{HC}_p$ uzayında iki eliptik bikuaterniyon olsun. Herhangi bir eliptik sayı λ olmak üzere,

(1) $\mathbf{A}=\mathbf{B}\Leftrightarrow \mathbb{H}^{+}(\mathbf{A})=\mathbb{H}^{+}(\mathbf{B})\Leftrightarrow \mathbb{H}^{-}(\mathbf{A})=\mathbb{H}^{-}(\mathbf{B}),$

(2) $\mathbb{H}^{+}(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\mathbb{H}^{+}(\mathbf{A})+\mathbb{H}^{+}(\mathbf{B}),\quad \mathbb{H}^{-}(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\mathbb{H}^{-}(\mathbf{A})+\mathbb{H}^{-}(\mathbf{B})$

(3) $\mathbb{H}^{+}(\lambda\mathbf{A})=\lambda\mathbb{H}^{+}(\mathbf{A}),\quad \mathbb{H}^{-}(\lambda\mathbf{A})=\lambda\mathbb{H}^{-}(\mathbf{A})$

(4) $\mathbb{H}^{+}(\mathbf{AB})=\mathbb{H}^{+}(\mathbf{A})\mathbb{H}^{+}(\mathbf{B}),\quad \mathbb{H}^{-}(\mathbf{AB})=\mathbb{H}^{-}(\mathbf{B})\mathbb{H}^{-}(\mathbf{A})$

(5) $\mathbb{H}^{+}(\overline{\mathbf{A}})=\left(\mathbb{H}^{+}(\mathbf{A})\right)^T,\quad \mathbb{H}^{-}(\overline{\mathbf{A}})=\left(\mathbb{H}^{-}(\mathbf{A})\right)^T$

(6) $\mathbb{H}^{+}(\mathbf{A}^{*})=\overline{\mathbb{H}^{+}(\mathbf{A})},\quad \mathbb{H}^{-}(\mathbf{A}^{*})=\overline{\mathbb{H}^{-}(\mathbf{A})}$

(7) $\mathbb{H}^{+}(\mathbf{A}^{\dagger})=\left(\mathbb{H}^{+}(\mathbf{A})\right)^{*},\quad \mathbb{H}^{-}(\mathbf{A}^{\dagger})=\left(\mathbb{H}^{-}(\mathbf{A})\right)^{*}$

yukarıdaki özellikler sağlanır [78].

Diğer taraftan yukarıdaki özelliklerden yararlanarak (2.4) eşitliğinde tanımlanan $\mathbf{A}\otimes\mathbf{B}$ eliptik bikuaterniyon çarpımının matrisel formunu

$$\mathbb{H}^{-}(\mathbf{A})\mathrm{B}=\begin{bmatrix} A_0 & -A_1 & -A_2 & -A_3 \\ A_1 & A_0 & A_3 & -A_2 \\ A_2 & -A_3 & A_0 & A_1 \\ A_3 & A_2 & -A_1 & A_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

şeklinde tanımlamak mümkündür. Burada

$$\tilde{\boldsymbol{A}}=\begin{bmatrix} 0 & A_3 & -A_2 \\ -A_3 & 0 & A_1 \\ A_2 & -A_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

ve

$$\tilde{\boldsymbol{B}}=\begin{bmatrix} 0 & B_3 & -B_2 \\ -B_3 & 0 & B_1 \\ B_2 & -B_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.10}$$

ters simetrik matrisleri tanımlanırsa, (3.9) denkleminde tanımlanan matris yardımıyla (3.8) ifadesi

$$\mathbb{H}^{-}(\mathbf{A})\mathrm{B}\cong\begin{bmatrix} A_0 & -\boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{A}^T & A_0 I_3+\tilde{\boldsymbol{A}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_0 \\ \boldsymbol{B} \end{bmatrix} \tag{3.11}$$

şeklinde verilebilir.

Benzer şekilde, $\mathbf{A}\otimes\mathbf{B}$ çarpımının matris temsili, $\mathbf{B}$ eliptik bikuaterniyonunun sağ Hamilton matrisini göz önünde bulundurulursa

$$\mathbb{H}^{+}(\mathbf{B})\mathrm{A}=\begin{bmatrix} B_0 & -B_1 & -B_2 & -B_3 \\ B_1 & B_0 & -B_3 & B_2 \\ B_2 & B_3 & B_0 & -B_1 \\ B_3 & -B_2 & B_1 & B_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} \tag{3.12}$$

şeklindedir. Diğer taraftan (3.10) denklemindeki matrisi göz önüne alarak iki eliptik bikuaterniyonik çarpım matrisini

$$\mathbb{H}^{+}(\mathbf{B})\mathrm{A} \cong \begin{bmatrix} B_0 & -\boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B}^T & B_0 I_3 - \tilde{\boldsymbol{B}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 \\ \boldsymbol{A} \end{bmatrix} \tag{3.13}$$

şeklinde 2×2 boyutunda eliptik matris olarak ifade edebiliriz.

Bilindiği gibi iki eliptik bikuaterniyon çarpımı değişme özelliğine sahip değildir. Fakat (3.8) ve (3.12) eşitlikleri için

$$\breve{\mathrm{A}} = \begin{bmatrix} A_0 & -\boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{A}^T & A_0 I_3 + \tilde{\boldsymbol{A}} \end{bmatrix}$$

ve

$$\breve{\mathrm{B}} = \begin{bmatrix} B_0 & -\boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B}^T & B_0 I_3 - \tilde{\boldsymbol{B}} \end{bmatrix}$$

matrisleri tanımladığımız taktirde iki eliptik bikuaterniyonun çarpımı,

$$\mathbb{H}^{-}(\mathbf{A})\mathrm{B} \cong \breve{\mathrm{A}}\mathrm{B} \tag{3.14}$$

ve

$$\mathbb{H}^{+}(\mathbf{B})\mathrm{A} \cong \breve{\mathrm{B}}\mathrm{A} \tag{3.15}$$

biçiminde ifade edilebildiğinden (3.14) ve (3.15) eşitliklerinden

$$\breve{\mathrm{A}}\mathrm{B} = \breve{\mathrm{B}}\mathrm{A} \tag{3.16}$$

yazabiliriz. Böylece eliptik bikuaterniyonlar için tanımlı olmayan değişme özelliği matrisler yardımıyla kolaylıkla elde edilebilir. Bu eşitlik rölativistik dönüşüm bağıntısı matris temsillerinde kolaylık sağlayacaktır.

Bir eliptik bikuaterniyonunun taban elemanları ve "I" $p-$kompleks sayısı aşağıdaki gibi 4×4 matris formunda

$$e_0=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},\qquad e_1=\begin{bmatrix}\frac{-I}{\sqrt{|p|}}&0&0&0\\0&\frac{I}{\sqrt{|p|}}&0&0\\0&0&\frac{-I}{\sqrt{|p|}}&0\\0&0&0&\frac{I}{\sqrt{|p|}}\end{bmatrix},$$

$$e_2=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0\end{bmatrix},\quad e_3=\begin{bmatrix}0&\frac{-I}{\sqrt{|p|}}&0&0\\\frac{-I}{\sqrt{|p|}}&0&0&0\\0&0&0&\frac{-I}{\sqrt{|p|}}\\0&0&\frac{-I}{\sqrt{|p|}}&0\end{bmatrix}, \tag{3.17}$$

$$I=\begin{bmatrix}0&0&I&0\\0&0&0&I\\I&0&0&0\\0&I&0&0\end{bmatrix}$$

yazılabilir. Bu matrisler yardımıyla (2.2) denkleminde verilen **A** eliptik bikuaterniyonunu 4×4 matris tipinde

$$
\mathrm{A}=\begin{bmatrix}
a_0-\frac{I}{\sqrt{|p|}}a_1 & a_2-\frac{I}{\sqrt{|p|}}a_3 & I(a_0'-\frac{I}{\sqrt{|p|}}a_1') & I(a_2'-\frac{I}{\sqrt{|p|}}a_3') \\
-a_2-\frac{I}{\sqrt{|p|}}a_3 & a_0+\frac{I}{\sqrt{|p|}}a_1 & -I(a_2+\frac{I}{\sqrt{|p|}}a_3) & I(a_0'+\frac{I}{\sqrt{|p|}}a_1') \\
I(a_0'-\frac{I}{\sqrt{|p|}}a_1') & I(a_2'-\frac{I}{\sqrt{|p|}}a_3') & a_0-\frac{I}{\sqrt{|p|}}a_1 & a_2-\frac{I}{\sqrt{|p|}}a_3 \\
-I(a_2+\frac{I}{\sqrt{|p|}}a_3) & I(a_0'+\frac{I}{\sqrt{|p|}}a_1') & -a_2-\frac{I}{\sqrt{|p|}}a_3 & a_0+\frac{I}{\sqrt{|p|}}a_1
\end{bmatrix}
$$

şeklinde ifade ederiz [65].

3.1.2. Eliptik Bikuaterniyonların 8×8 Matris Temsilleri

A sekiz reel bileşenden oluşan bir eliptik bikuaterniyon olmak üzere reel kuaterniyonların taban elemanları için tanımladığımız (3.1)-(3.4) denklem numaralarıyla verilen matrislerden yararlanarak, bu eliptik bikuaterniyonu 8×8 reel matris ile de ifade etmek mümkündür. Bunun için aşağıdaki toerem verilebilir.

Teorem 3.1.2.1. **A** bir eliptik bikuaterniyon olmak üzere,

$$
\mathbb{H}^{-}(\mathbf{A})\cong(a_0+Ta_0')\xi_0+(a_1+Ta_1')\xi_1+(a_2+Ta_2')\xi_2+(a_3+Ta_3')\xi_3 \tag{3.18}
$$

ifadesi açıkça

$$
\mathbb{H}^{-}(\mathbf{A})\cong\begin{bmatrix}
a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \sqrt{|p|}a_0' & -\sqrt{|p|}a_1' & -\sqrt{|p|}a_2' & -\sqrt{|p|}a_3' \\
a_1 & a_0 & a_3 & -a_2 & \sqrt{|p|}a_1' & \sqrt{|p|}a_0' & \sqrt{|p|}a_3' & -\sqrt{|p|}a_2' \\
a_2 & -a_3 & a_0 & a_1 & \sqrt{|p|}a_2' & -\sqrt{|p|}a_3' & \sqrt{|p|}a_0' & \sqrt{|p|}a_1' \\
a_3 & a_2 & -a_1 & a_0 & \sqrt{|p|}a_3' & \sqrt{|p|}a_2' & -\sqrt{|p|}a_1' & \sqrt{|p|}a_0' \\
-\sqrt{|p|}a_0' & \sqrt{|p|}a_1' & \sqrt{|p|}a_2' & \sqrt{|p|}a_3' & a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \\
-\sqrt{|p|}a_1' & -\sqrt{|p|}a_0' & -\sqrt{|p|}a_3' & \sqrt{|p|}a_2' & a_1 & a_0 & a_3 & -a_2 \\
-\sqrt{|p|}a_2' & \sqrt{|p|}a_3' & -\sqrt{|p|}a_0' & -\sqrt{|p|}a_1' & a_2 & -a_3 & a_0 & a_1 \\
-\sqrt{|p|}a_3' & -\sqrt{|p|}a_2' & \sqrt{|p|}a_1' & -\sqrt{|p|}a_0' & a_3 & a_2 & -a_1 & a_0
\end{bmatrix}
$$

biçiminde yazılır. Bu matrisin 2×2 eliptik matris gösterimi

$$\mathbb{H}^{-}(\mathbf{A}) \cong \begin{bmatrix} \mathbb{H}^{-}(\mathbf{A}) & \sqrt{|p|}\mathbb{H}^{-}(\mathbf{A}') \\ -\sqrt{|p|}\mathbb{H}^{-}(\mathbf{A}') & \mathbb{H}^{-}(\mathbf{A}) \end{bmatrix}$$

dir.

İspat. $\mathbf{A}$ eliptik bikuaterniyonunun (3.18) denklemindeki matrisi temsili için ilk olarak bir T matrisi $T=\mu\times\Gamma_0$ biçiminde olmak üzere 2×2 tipinde açıkça

$$T=\mu\times\Gamma_0=\begin{bmatrix} 0 & \Gamma_0\sqrt{|p|} \\ -\Gamma_0\sqrt{|p|} & 0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Bu matrisin 8×8 tipindeki matris temsili

$$T=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{|p|} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{|p|} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{|p|} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{|p|} \\ -\sqrt{|p|} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{|p|} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{|p|} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{|p|} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dir. Kuaterniyon taban elemanları gibi aşağıdaki çarpım kurallarına uyan

$$\xi_0{}^2=-\xi_j{}^2=I_8=\xi_0, \quad \xi_1\xi_2=-\xi_3, \quad \xi_2\xi_3=-\xi_1, \quad \xi_3\xi_1=-\xi_2,$$

$$\xi_2\xi_1=\xi_3, \quad \xi_3\xi_2=\xi_1, \quad \xi_1\xi_3=\xi_2$$

ξ_j, matrislerini $j=0,1,2,3$ için,

$$\xi_j = \sigma_0 \times \Gamma_j = \begin{bmatrix} \Gamma_j & 0 \\ 0 & \Gamma_j \end{bmatrix}$$

şeklinde ve μ, eliptik matrisini ise

$$\mu = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{|p|} \\ -\sqrt{|p|} & 0 \end{bmatrix}$$

biçiminde tanımlayalım. Burada "$\times$" kronecker çarpımı göstermektedir. Şimdi yukarıdaki tanımlardan sonra teoremde verilen 8×8 reel matris temsilini hesaplamak için ilk terim

$$a_0\xi_0 = \begin{bmatrix} a_0\Gamma_0 & 0 \\ 0 & a_0\Gamma_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_0 \end{bmatrix}$$

olup yukarıdaki matris ve T matrisi göz önünde bulundurulursa

$$(Ta_0')\xi_0 = \begin{bmatrix} 0 & \Gamma_0^{\,2}\sqrt{|p|}a_0' \\ \Gamma_0^{\,2}\sqrt{|p|}a_0' & 0 \end{bmatrix}$$

dır. Yani son matris 8×8 tipinde açıkça,

$$
(Ta_0{}')\xi_0 = \begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & a_0{}'\sqrt{|p|} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_0{}'\sqrt{|p|} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_0{}'\sqrt{|p|} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_0{}'\sqrt{|p|} \\
-a_0{}'\sqrt{|p|} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -a_0{}'\sqrt{|p|} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -a_0{}'\sqrt{|p|} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -a_0{}'\sqrt{|p|} & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

şeklinde yazılabilir. Buradan (3.18) denklemindeki ilk iki terimin matris toplamı

$$
a_0\xi_0 + (Ta_0{}')\xi_0 = \begin{bmatrix}
q_0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{|p|}a_0{}' & 0 & 0 & 0 \\
0 & q_0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{|p|}a_0{}' & 0 & 0 \\
0 & 0 & q_0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{|p|}a_0{}' & 0 \\
0 & 0 & 0 & q_0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{|p|}a_0{}' \\
-\sqrt{|p|}a_0{}' & 0 & 0 & 0 & q_0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\sqrt{|p|}a_0{}' & 0 & 0 & 0 & q_0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\sqrt{|p|}a_0{}' & 0 & 0 & 0 & q_0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -\sqrt{|p|}a_0{}' & 0 & 0 & 0 & q_0
\end{bmatrix}
$$

dir. Benzer şekilde diğer baz elemanlarına göre toplam matrisleri hesaplanabilir. Bu durumda (3.18) eşitliğinin 8×8 matris temsili

$$
\mathbb{H}^{-}(\mathbf{A}) \cong \begin{bmatrix}
a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \sqrt{|p|}a_0' & -\sqrt{|p|}a_1' & -\sqrt{|p|}a_2' & -\sqrt{|p|}a_3' \\
a_1 & a_0 & a_3 & -a_2 & \sqrt{|p|}a_1' & \sqrt{|p|}a_0' & \sqrt{|p|}a_3' & -\sqrt{|p|}a_2' \\
a_2 & -a_3 & a_0 & a_1 & \sqrt{|p|}a_2' & -\sqrt{|p|}a_3' & \sqrt{|p|}a_0' & \sqrt{|p|}a_1' \\
a_3 & a_2 & -a_1 & a_0 & \sqrt{|p|}a_3' & \sqrt{|p|}a_2' & -\sqrt{|p|}a_1' & \sqrt{|p|}a_0' \\
-\sqrt{|p|}a_0' & \sqrt{|p|}a_1' & \sqrt{|p|}a_2' & \sqrt{|p|}a_3' & a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \\
-\sqrt{|p|}a_1' & -\sqrt{|p|}a_0' & -\sqrt{|p|}a_3' & \sqrt{|p|}a_2' & a_1 & a_0 & a_3 & -a_2 \\
-\sqrt{|p|}a_2' & \sqrt{|p|}a_3' & -\sqrt{|p|}a_0' & -\sqrt{|p|}a_1' & a_2 & -a_3 & a_0 & a_1 \\
-\sqrt{|p|}a_3' & -\sqrt{|p|}a_2' & \sqrt{|p|}a_1' & -\sqrt{|p|}a_0' & a_3 & a_2 & -a_1 & a_0
\end{bmatrix}
$$

olarak elde edilir. Bu matris 2×2 boyutunda

$$
\mathbb{H}^{-}(\mathbf{A}) \cong \begin{bmatrix}
\mathbb{H}^{-}(\mathbf{A}) & \sqrt{|p|}\mathbb{H}^{-}(\mathbf{A}') \\
-\sqrt{|p|}\mathbb{H}^{-}(\mathbf{A}') & \mathbb{H}^{-}(\mathbf{A})
\end{bmatrix}
$$

şeklinde yazılabilir. Açıkça görülmektedir ki yukarıdaki matris 2×2 boyutunda ters simetrik bir matristir.

3.2. Eliptik Lorentz Dönüşüm Denklemleri

Fizikte Lorentz dönüşümleri Hollandalı bir fizikçi olan Hendrik Lorentz tarafından bulunmuştur. Dönüşümler, ışık hızının referans çerçevesinden bağımsız bir şekilde nasıl gözlemleneceğini, iki gözlemci tarafından ölçülen uzay ve zaman değerlerinin nasıl ilişkili olduğunu açıklar. Lorentz dönüşümleri bir lineer dönüşümdür ve özel görelilik ile uyum içindedir.

Dört boyutlu uzayda c ışık hızı, $\boldsymbol{r}$ pür reel kuaterniyon olmak üzere t zamanı ile $\boldsymbol{r} = r_1e_1 + r_2e_2 + r_3e_3$ kartezyen konum vektörünü birleştiren her $\mathbf{R}$ eliptik bikuaterniyonu

$$
\mathbf{R} = ct + I\boldsymbol{r} = cte_0 + I(r_1e_1 + r_2e_2 + r_3e_3) = R_0e_0 + R_1e_1 + R_2e_2 + R_3e_3 \tag{3.19}
$$

şeklinde yazılabilir.

$\mathbf{R} = ct + \boldsymbol{Ir}$ eliptik bikuaterniyonu için sol Hamilton matrisi ve Teorem 3.1.2.1 göz önüne alındığında aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.2.1. Dört boyutlu uzayda c ışık hızı, konum ve zamanı birleştiren eliptik bikuaterniyon $\mathbf{R} = ct + \boldsymbol{Ir}$ olmak üzere $\mathbb{H}^{-}(\mathbf{R})$ eliptik bikuaterniyonik matris temsili

$$\mathbb{H}^{-}(\mathbf{R}) \cong \begin{bmatrix} ct\varphi_0 & \sqrt{|p|}\mathrm{H}^{-}(\boldsymbol{R}) \\ -\sqrt{|p|}\mathrm{H}^{-}(\boldsymbol{R}) & ct\varphi_0 \end{bmatrix}$$

dir.

İspat. $\boldsymbol{R}$ pür eliptik bikuaterniyonunun taban elemanlarına karşılık gelen matrisler,

$$\Gamma_1 = \begin{bmatrix} \sigma_2 & 0 \\ 0 & -\sigma_2 \end{bmatrix}, \qquad \Gamma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -\sigma_0 \\ \sigma_0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \Gamma_3 = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{bmatrix}$$

göz önüne alınırsa $\boldsymbol{R} = r_1e_1 + r_2e_2 + r_3e_3$ eliptik bikuaterniyonunun matris temsili

$$\mathbb{H}^{-}(\boldsymbol{R}) = \begin{bmatrix} 0 & -r_1 & 0 & 0 \\ r_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_1 \\ 0 & 0 & -r_1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -r_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r_2 \\ r_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -r_3 \\ 0 & 0 & r_3 & 0 \\ 0 & -r_3 & 0 & 0 \\ r_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & -r_1 & -r_2 & -r_3 \\ r_1 & 0 & r_3 & -r_2 \\ r_2 & -r_3 & 0 & r_1 \\ r_3 & r_2 & -r_1 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. Ayrıca Teorem 3.1.2.1 göz önünde bulundurulursa $\mathbb{H}^{-}(\mathbf{R}) \cong ct\xi_0 + (Tr_1)\xi_1 + (Tr_2)\xi_2 + (Tr_3)\xi_3$ eliptik bikuaterniyonunun 8×8 tipindeki matris temsili

$$\mathbb{H}^{-}(\mathbf{R}) \cong \begin{bmatrix} ct & 0 & 0 & 0 & 0 & -r_1\sqrt{|p|} & -r_2\sqrt{|p|} & -r_3\sqrt{|p|} \\ 0 & ct & 0 & 0 & r_1\sqrt{|p|} & 0 & r_3\sqrt{|p|} & -r_2\sqrt{|p|} \\ 0 & 0 & ct & 0 & r_2\sqrt{|p|} & -r_3\sqrt{|p|} & 0 & r_1\sqrt{|p|} \\ 0 & 0 & 0 & ct & r_3\sqrt{|p|} & r_2\sqrt{|p|} & -r_1\sqrt{|p|} & 0 \\ 0 & r_1\sqrt{|p|} & r_2\sqrt{|p|} & r_3\sqrt{|p|} & ct & 0 & 0 & r_3\sqrt{|p|} \\ -r_1\sqrt{|p|} & 0 & -r_3\sqrt{|p|} & r_2\sqrt{|p|} & 0 & ct & -r_3\sqrt{|p|} & 0 \\ -r_2\sqrt{|p|} & r_3\sqrt{|p|} & 0 & -r_1\sqrt{|p|} & 0 & r_3\sqrt{|p|} & ct & 0 \\ -r_3\sqrt{|p|} & -r_2\sqrt{|p|} & r_1\sqrt{|p|} & 0 & -r_3\sqrt{|p|} & 0 & 0 & ct \end{bmatrix}$$

dir ve 2×2 eliptik matris temsili

$$\mathbb{H}^{-}(\mathbf{R}) \cong \begin{bmatrix} ct\Gamma_0 & \sqrt{|p|}\mathrm{H}^{-}(\mathbf{R}) \\ -\sqrt{|p|}\mathrm{H}^{-}(\mathbf{R}) & ct\Gamma_0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

3.2.1. Rölativistik Dönüşüm Bağıntısı ile Eliptik Lorentz Dönüşümleri

Teorem 3.2.1.1. $\mathbf{R} = ct + I\mathbf{r}$ eliptik bikuaterniyonun rölativistik dönüşüm bağıntısı; $\mathbf{R}' = \mathbf{A} \otimes \mathbf{R} \otimes \overline{\mathbf{A}}^{*}$ olmak üzere bu dönüşüm sonucunda x ekseni boyunca negatif yönde bir v hızıyla giden gözlem çerçevesi için elde edilen eliptik anlamdaki Lorentz dönüşüm denklemleri

$$\begin{aligned} x' &= \gamma\left(x - \frac{\sqrt{|p|}}{|p|} vt \right) \\ t' &= \gamma\left(t - \left(|p|\sqrt{|p|} \right) xv \right) \\ y' &= y \\ z' &= z. \end{aligned}$$

biçimindedir. Burada $\mathbf{A}$ birim eliptik bikuaterniyondur [64].

İspat. **A** birim eliptik bikuaterniyonu

$$\mathbf{A} = a_0 + I\boldsymbol{a}' = A_0 e_0 + A_1 e_1 + A_2 e_2 + A_3 e_3 = A_0 + \boldsymbol{A} \tag{3.20}$$

biçiminde tanımlansın. Buna göre Teorem 2.1.3 gereğince **A** birim eliptik bikuaterniyonunu,

$$\mathbf{A} = \cosh(\frac{p\theta_p}{2}) + \frac{1}{I}\boldsymbol{w}_{\mathbf{A}} \sinh(\frac{p\theta_p}{2}) = \cosh(\frac{p\theta_p}{2}) + \frac{\sqrt{|p|}}{I}\frac{\boldsymbol{v}}{\sqrt{<\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}>}}\sinh(\frac{p\theta_p}{2}) \tag{3.21}$$

olarak ifade ediyoruz. Burada, zıt yönde olan bir $\boldsymbol{v} = v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3$ hızı ele alacağız. Böylece (3.20), (3.21) denklemleri ve Lorentz koordinat dönüşümlerinden

$$\begin{aligned}
& a_0 = A_0 = \cosh(\frac{p\theta_p}{2}), \qquad \boldsymbol{a}' = \frac{\sqrt{|p|}}{I^2}\frac{\boldsymbol{v}}{v}\sinh(\frac{p\theta_p}{2}) = \frac{1}{p}\boldsymbol{w}_{\mathbf{A}}\sinh(\frac{p\theta_p}{2}), \\
& \boldsymbol{A} = \frac{\sqrt{|p|}}{I}\frac{\boldsymbol{v}}{\sqrt{<\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}>}}\sinh(\frac{p\theta_p}{2}), \\
& \cosh(p\theta_p) = \frac{|c|}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{|c|}{|c|\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-|p|v^2}} = \beta\ , \\
& \sinh(p\theta_p) = \frac{|\boldsymbol{v}|}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{|\boldsymbol{v}|}{|c|\sqrt{1-|p|v^2}} = \mp\frac{\boldsymbol{v}}{c\sqrt{1-pv^2}} = \mp\frac{\beta}{c}\boldsymbol{v}
\end{aligned} \tag{3.22}$$

yazılabilir [64]. Burada $|p| = \dfrac{1}{c^2}$ dir. Ayrıca (3.20) ve $\mathbf{R} = ct + I\boldsymbol{r}$ eşitliğinden,

$$\begin{aligned}
& a_0 = A_0, \qquad \boldsymbol{A} = I\boldsymbol{a}', \qquad A_1 = Ia_1', \qquad A_2 = Ia_2', \qquad A_3 = Ia_3', \\
& a_0'e_0 + a_1'e_1 + a_2'e_2 + a_3'e_3 = \boldsymbol{a}', \quad R_0 = ct, \qquad \boldsymbol{R} = I\boldsymbol{r}
\end{aligned} \tag{3.23}$$

dir. **R** eliptik bikuaterniyonun rölativistik dönüşüm bağıntısı sonucunda elde edilen eliptik bikuaterniyon (3.19) denkleminden $\mathbf{R}' = ct + I\mathbf{r}'$ şeklinde yazılabilir. **R** eliptik bikuaterniyonunun rölativistik dönüşüm bağıntısı [27], [38] kaynaklarından bilindiği gibi

$$\mathbf{R}' = \mathbf{A} \otimes \mathbf{R} \otimes \bar{\mathbf{A}}^{*} \tag{3.24}$$

şeklinde ifade edilir. Bu eşitlik Teorem 3.2.1 ve (3.18) denklemi kullanılarak

$$\begin{aligned}
\mathbb{H}^{-}(\mathbf{R}') &= \mathbb{H}^{-}(\mathbf{A})\mathbb{H}^{-}(\mathbf{R})\mathbb{H}^{-}(\bar{\mathbf{A}})^{*} \\
\mathbb{H}^{-}(\mathbf{R}') &= \left(a_0\xi_0 + (Ta_1)\xi_1 + (Ta_2)\xi_2 + (Ta_3)\xi_3\right)\left(t\xi_0 + (Tr_1)\xi_1\right. \\
&\quad \left. + (Tr_2)\xi_2 + (Tr_3)\xi_3\right)\left(a_0\xi_0 + (Ta_1)\xi_1 + (Ta_2)\xi_2 + (Ta_3)\xi_3\right)
\end{aligned}$$

biçiminde ya da bir diğer ifadeyle,

$$\mathbb{H}^{-}(\mathbf{R}') \cong \begin{bmatrix} \mathbb{H}^{-}(\mathbf{A}) & \sqrt{|p|}\mathbb{H}^{-}(\mathbf{A}') \\ -\sqrt{|p|}\mathbb{H}^{-}(\mathbf{A}') & \mathbb{H}^{-}(\mathbf{A}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct\Gamma_0 & \sqrt{|p|}\boldsymbol{R} \\ -\sqrt{|p|}\boldsymbol{R} & ct\Gamma_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{H}^{-}(\mathbf{A}) & \sqrt{|p|}\mathbb{H}^{-}(\mathbf{A}') \\ -\sqrt{|p|}\mathbb{H}^{-}(\mathbf{A}') & \mathbb{H}^{-}(\mathbf{A}) \end{bmatrix}$$

şeklinde temsil edilir. Ayrıca (3.24) bağıntısı,

$$\mathbf{R}' = (A_0 + \boldsymbol{A}) \otimes \left(A_0R_0 + R_0\boldsymbol{A} + A_0\boldsymbol{R} - \langle \boldsymbol{R}, \boldsymbol{A}\rangle + (\boldsymbol{R} \wedge \boldsymbol{A})\right)$$

şeklinde yazılabilir ve daha açık olarak

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}' = {} & A_0^2R_0 + A_0R_0\mathbf{A} + A_0^2\mathbf{R} - A_0 < \boldsymbol{R}, \boldsymbol{A} >_Q + A_0(\boldsymbol{R} \wedge \boldsymbol{A}) + A_0R_0\mathbf{A} - R_0 < \boldsymbol{A}, \boldsymbol{A} >_Q \\
& - A_0\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{R}\rangle + A_0(\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{R}) - \boldsymbol{A}\langle \boldsymbol{R}, \boldsymbol{A}\rangle - \langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{R} \wedge \boldsymbol{A}\rangle + \boldsymbol{A} \wedge (\boldsymbol{R} \wedge \boldsymbol{A})
\end{aligned}$$

dir. Burada $\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{R} \wedge \boldsymbol{A}\rangle_Q = 0$ olduğundan ve vektörel çarpımın özelliği gereği

$$\boldsymbol{A} \wedge (\boldsymbol{R} \wedge \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{R}\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}\rangle - \boldsymbol{A}\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{R}\rangle = \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{R} - \boldsymbol{A}\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{R}\rangle \tag{3.25}$$

şeklinde yazılabileceğinden $\mathbf{R}'$ için

$$\mathbf{R}' = A_0^2R_0 + 2A_0R_0\boldsymbol{A} + A_0^2\boldsymbol{R} - 2A_0\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{R}\rangle - R_0\boldsymbol{A}^2 - 2\boldsymbol{A}\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{R}\rangle + \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{R}$$

denklemi elde edilir. Bu eşitlikte (3.23) bağıntılarını yazarak

$$\mathbf{R}' = \left(A_0^2 - p(\boldsymbol{a}')^2\right)ct - 2A_0 p\left\langle \boldsymbol{r}, \boldsymbol{a}' \right\rangle + I\boldsymbol{r}\left(A_0^2 + p(\boldsymbol{a}')^2\right) + 2IctA_0\boldsymbol{a}'$$
$$- 2Ip\boldsymbol{a}'\left\langle \boldsymbol{a}', \boldsymbol{r} \right\rangle$$

ifadesine ulaşırız. Bu ifadede eşitliğin her iki tarafının birbirine eşit olabilmesi için I ($I^2 = p < 0$) içeren ve içermeyen terimler eşleştirilmelidir. Böylece uzay ve zamanın rölativistik dönüşümleri için, $\mathbf{R}' = ct' + I\boldsymbol{r}'$ şeklinde yazılabileceğinden,

$$ct' = \left(A_0^2 - p(\boldsymbol{a}')^2\right)ct - 2A_0 p\left\langle \boldsymbol{r}, \boldsymbol{a}' \right\rangle$$

dir. Yani t' zamanı için

$$t' = \left(A_0^2 - p(\boldsymbol{a}')^2\right)t - 2A_0 \frac{p}{c}\left\langle \boldsymbol{r}, \boldsymbol{a}' \right\rangle \tag{3.26}$$

elde edilir. Benzer olarak

$$I\boldsymbol{r}' = I\boldsymbol{r}\left(A_0^2 + p\left(\boldsymbol{a}'\right)^2\right) + 2IctA_0\boldsymbol{a}' - 2Ip\boldsymbol{a}'\left\langle \boldsymbol{a}', \boldsymbol{r} \right\rangle$$

olup

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r}\left(A_0^2 + p(\boldsymbol{a}')^2\right) + 2ctA_0\boldsymbol{a}' - 2p\boldsymbol{a}'\left\langle \boldsymbol{a}', \boldsymbol{r} \right\rangle \tag{3.27}$$

bağıntılarını elde ederiz. O halde $\mathbf{A}$ eliptik bikuaterniyonu için (3.20)-(3.23) ifadesinde verilen tanımları (3.26) denkleminde yerine yazarak

$$t' = \left(\cosh^2\left(p\frac{\theta_p}{2}\right) + \sinh^2\left(p\frac{\theta_p}{2}\right)\right)t - 2\cosh\left(p\frac{\theta_p}{2}\right)\frac{p}{c}\frac{1}{p} < \left\langle \boldsymbol{r}, \boldsymbol{w}_{\mathbf{A}} \right\rangle > \sinh\left(p\frac{\theta_p}{2}\right) \tag{3.28}$$

ifadesini elde ederiz. Burada

$$\boldsymbol{w}_{\mathbf{A}} = \sqrt{|p|}\,\frac{\boldsymbol{v}}{\sqrt{\left\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \right\rangle}} \tag{3.29}$$

dir. Ayrıca (3.22) denkleminden ve bilinen hiperbolik trigonometrik fonksiyon eşitliklerinden yararlanarak, (3.28) ifadesini

$$t' = t\cosh\left(p\theta_p\right) - \frac{\sqrt{|p|}}{c}\sinh\left(p\theta_p\right)\frac{\langle \boldsymbol{r},\boldsymbol{v}\rangle}{\sqrt{\langle \boldsymbol{v},\boldsymbol{v}\rangle}} \tag{3.30}$$

biçiminde elde ederiz. Böylece (3.22), (3.29) ve (3.30) denklemleri göz önünde bulundurularak, $\mathbf{R}'$ eliptik bikuaterniyonunun reel bileşeni

$$t' = t\beta - \sqrt{|p|}\,\frac{\beta}{c}\frac{|\boldsymbol{v}|}{c}\frac{\langle \boldsymbol{r},\boldsymbol{v}\rangle}{\sqrt{\langle \boldsymbol{v},\boldsymbol{v}\rangle}} = \beta\left(t - \frac{\sqrt{|p|}}{c^2}\langle \boldsymbol{r},\boldsymbol{v}\rangle\right)$$

dir. Son denklemde eğer $\frac{1}{c^2} = |p|$ alınırsa bu durumda yukarıdaki denklem

$$t' = t\beta - \sqrt{|p|}\,\frac{\beta|\boldsymbol{v}|}{c^2}\frac{\langle \boldsymbol{r},\boldsymbol{v}\rangle}{\sqrt{\langle \boldsymbol{v},\boldsymbol{v}\rangle}} = \beta\left(t - |p|\sqrt{|p|}\langle \boldsymbol{r},\boldsymbol{v}\rangle\right)$$

şeklinde ifade edilebilir.

Diğer taraftan, (3.27) denkleminde verilen $\mathbf{R}'$ eliptik bikuaterniyonik dönüşümün imajiner bileşeni için,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r}&\left(\cosh^2\left(p\frac{\theta_p}{2}\right) + \frac{1}{p}\langle \boldsymbol{w}_{\mathbf{A}},\boldsymbol{w}_{\mathbf{A}}\rangle\sinh^2\left(p\frac{\theta_p}{2}\right)\right) + 2ct\frac{1}{p}\cosh\left(p\frac{\theta_p}{2}\right)\sinh\left(p\frac{\theta_p}{2}\right)\boldsymbol{w}_{\mathbf{A}}\\ &-2p\frac{1}{p^2}\sinh\left(p\frac{\theta_p}{2}\right)\sinh\left(p\frac{\theta_p}{2}\right)\langle \boldsymbol{w}_{\mathbf{A}},\boldsymbol{r}\rangle\boldsymbol{w}_{\mathbf{A}}\end{aligned} \tag{3.31}$$

elde edilir. Son eşitlikte (3.22), (3.29) ifadeleri yazılarak

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} + ct\frac{\sqrt{|p|}}{p}\frac{\boldsymbol{v}}{\sqrt{<\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}>}}2\cosh\left(p\frac{\theta_p}{2}\right)\sinh\left(p\frac{\theta_p}{2}\right) - 2\frac{|p|}{p}\sinh^2\left(p\frac{\theta_p}{2}\right)\frac{\langle \boldsymbol{v},\boldsymbol{r}\rangle}{\sqrt{\langle \boldsymbol{v},\boldsymbol{v}\rangle}\sqrt{\langle \boldsymbol{v},\boldsymbol{v}\rangle}}\\ -2\sinh^2(p\frac{\theta_p}{2})\frac{|p|}{p}\frac{1}{\sqrt{<\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}>}\sqrt{<\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}>}}\boldsymbol{v}<\boldsymbol{v},\boldsymbol{r}>\end{aligned}$$

bulunur ve trigonometrik hiperbolik fonksiyon özdeşlikleri yardımıyla

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} + \frac{\sqrt{|p|}}{p}\frac{1}{\sqrt{1-pv^2}}\boldsymbol{v}t - \frac{1}{\sqrt{1-pv^2}}\frac{\boldsymbol{v}<\boldsymbol{v},\boldsymbol{r}>}{v^2} + \frac{\boldsymbol{v}<\boldsymbol{v},\boldsymbol{r}>}{v^2} \tag{3.32}$$

elde edilir. Böylece $+x$ ekseni yönünde bir hareket düşünülürse (3.32) denklemi

$$\boldsymbol{r}' = x + \frac{\sqrt{|p|}}{p}\frac{1}{\sqrt{1-pv^2}}vt \pm \frac{x}{\sqrt{1-pv^2}} \mp x = \frac{\sqrt{|p|}}{p}\frac{1}{\sqrt{1-pv^2}}vt + \frac{x}{\sqrt{1-pv^2}}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan konumun eliptik anlamdaki Lorentz dönüşüm denklemi

$$\boldsymbol{r}' = \frac{\sqrt{|p|}}{p}\frac{vt}{\sqrt{1-pv^2}} + \frac{x}{\sqrt{1-pv^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-pv^2}}\left(x - \frac{\sqrt{|p|}}{|p|}vt\right) = \beta\left(x - \frac{\sqrt{|p|}}{|p|}vt\right)$$

biçiminde elde edilir [64]. Burada $\boldsymbol{r} = +x$, $\boldsymbol{v} = -x$, $<\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}> = \mp v^2$ ve $|p| = \frac{1}{c^2}$ dir. Böylece t' ve $\boldsymbol{r}'$ için bulduğumuz bu denklemler, [69] kaynağında alışılagelen Lorentz dönüşüm denklemleriyle ile uyum içerisindedir.

3.2.2. Eliptik Lorentz Dönüşümlerinin Matris Temsilleri

Rölativistik dönüşümü tanımlayan (3.24) denkleminin matris eşitliğini 4-boyutlu matris ifadeleri ile de gerçekleştirmek mümkündür. Bu amaçla (3.24) denkleminde verilen dönüşümün matris temsilini, (3.8) ve (3.12) matris çarpım bağıntılarını kullanarak aşağıdaki teorem ile vereceğiz.

Teorem 3.2.2.1. $\mathbf{R}'$ eliptik bikuaterniyonunun eliptik bikuaterniyonlar açısından matris temsili

$$\mathbb{H}^{-}(\mathbf{R}')=\begin{bmatrix} \beta ct\pm\sqrt{|p|}\dfrac{\beta}{c}v_1r_1\pm\sqrt{|p|}\dfrac{\beta}{c}v_2r_2\pm\sqrt{|p|}\dfrac{\beta}{c}v_3r_3 \\ \pm\beta v_1t+\left(1-(\beta-1)\dfrac{v_1^{2}}{v^2}\right)\sqrt{|p|}r_1+\left(-(\beta-1)\dfrac{v_1v_2}{v^2}\right)\sqrt{|p|}r_2+\left(-(\beta-1)\dfrac{v_1v_3}{v^2}\right)\sqrt{|p|}r_3 \\ \pm\beta v_2t+\left(-(\beta-1)\dfrac{v_1v_2}{v^2}\right)\sqrt{|p|}r_1+\left(1-(\beta-1)\dfrac{v_2^{2}}{v^2}\right)\sqrt{|p|}r_2+\left(-(\beta-1)\dfrac{v_2v_3}{v^2}\right)\sqrt{|p|}r_3 \\ \beta v_3t+\left(-(\beta-1)\dfrac{v_1v_3}{v^2}\right)\sqrt{|p|}r_1+\left(-(\beta-1)\dfrac{v_2v_3}{v^2}\right)\sqrt{|p|}r_2+\left(1-(\beta-1)\dfrac{v_3^{2}}{v^2}\right)\sqrt{|p|}r_3 \end{bmatrix}_{4\times1}$$

dir.

İspat. $\mathbf{A}=A_0+\boldsymbol{A}=a_0+I\boldsymbol{a}'$ $(a_1=a_2=a_3=a_0'=0)$ birim eliptik bikuaterniyon ve $I^2=p<0$ olmak üzere,

$$\mathbb{H}^{-}(\mathbf{R}')=\mathbb{H}^{-}(\mathbf{A})\ \mathrm{R}\ \mathbb{H}^{-}(\bar{\mathbf{A}}^{*})=\mathbb{H}^{-}(\mathbf{A})\mathbb{H}^{-}(\breve{\bar{\mathbf{A}}}^{*})\ \mathrm{R} \tag{3.33}$$

$$\begin{bmatrix} R_0' \\ \mathbf{R}' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_0 & -\boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{A}^T & A_0I_3+\tilde{\boldsymbol{A}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} R_0 & 0 \\ 0 & R_0I_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_0 \\ \boldsymbol{A} \end{bmatrix}$$

şeklinde yazmak mümkündür. Bu ifade 4×4 tipinde daha açık bir biçimde yazılırsa,

$$\begin{bmatrix} R_0' \\ R_1' \\ R_2' \\ R_3' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_0 & -A_1 & -A_2 & -A_3 \\ A_1 & A_0 & A_3 & -A_2 \\ A_2 & -A_3 & A_0 & A_1 \\ A_3 & A_2 & -A_1 & A_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_0 & -A_1 & -A_2 & -A_3 \\ A_1 & A_0 & -A_3 & A_2 \\ A_2 & A_3 & A_0 & -A_1 \\ A_3 & -A_2 & A_1 & A_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} R_0 \\ R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} R_0' \\ R_1' \\ R_2' \\ R_3' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_0^{2}-A_1^{2}-A_2^{2}-A_3^{2} & -2A_0A_1 & -2A_0A_2 & -2A_0A_3 \\ 2A_0A_1 & A_0^{2}-A_1^{2}+A_2^{2}+A_3^{2} & -2A_1A_2 & -2A_1A_3 \\ 2A_0A_2 & -2A_1A_2 & A_0^{2}+A_1^{2}-A_2^{2}+A_3^{2} & -2A_2A_3 \\ 2A_0A_3 & -2A_1A_3 & -2A_2A_3 & A_0^{2}+A_1^{2}+A_2^{2}-A_3^{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} R_0 \\ R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix}$$

ifadesine ulaşılır. Kabulden $\mathbf{A}$ eliptik bikuaterniyonu birim eliptik bikuaterniyon olduğundan yukarıdaki matris bağıntısı,

$$\begin{bmatrix} R_0' \\ R_1' \\ R_2' \\ R_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2A_0^{\ 2}-1 & -2A_0A_1 & -2A_0A_2 & -2A_0A_3 \\ 2A_0A_1 & 1-2A_1^{\ 2} & -2A_1A_2 & -2A_1A_3 \\ 2A_0A_2 & -2A_1A_2 & 1-2A_2^{\ 2} & -2A_2A_3 \\ 2A_0A_3 & -2A_1A_3 & -2A_2A_3 & 1-2A_3^{\ 2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_0 \\ Ir_1 \\ Ir_2 \\ Ir_3 \end{bmatrix} \tag{3.34}$$

şeklinde daha basit bir formda yazılabilir. Bu eşitlikte

$$\mathsf{U} = \begin{bmatrix} 2A_0^{\ 2}-1 & -2A_0A_1 & -2A_0A_2 & -2A_0A_3 \\ 2A_0A_1 & 1-2A_1^{\ 2} & -2A_1A_2 & -2A_1A_3 \\ 2A_0A_2 & -2A_1A_2 & 1-2A_2^{\ 2} & -2A_2A_3 \\ 2A_0A_3 & -2A_1A_3 & -2A_2A_3 & 1-2A_3^{\ 2} \end{bmatrix}$$

dönüşüm matrisi tanımlandığında (3.22) tanımları kullanılarak bu dönüşüm matrisi

$$\mathsf{U} = \begin{bmatrix} \beta & \pm\frac{\sqrt{|p|}}{I}\frac{\beta}{c}v_1 & \pm\frac{\sqrt{|p|}}{I}\frac{\beta}{c}v_2 & \pm\frac{\sqrt{|p|}}{I}\frac{\beta}{c}v_3 \\ \mp\frac{\beta}{c}v_1 & \left(1-(\beta-1)\right)\frac{\sqrt{|p|}}{I}\frac{v_1^{\ 2}}{\mp v^2} & -(\beta-1)\frac{\sqrt{|p|}}{I}\frac{v_1v_2}{\mp v^2} & -(\beta-1)\frac{\sqrt{|p|}}{I}\frac{v_1v_3}{\mp v^2} \\ \mp\frac{\beta}{c}v_2 & -(\beta-1)\frac{\sqrt{|p|}}{I}\frac{v_1v_2}{\pm v^2} & \left(1-(\beta-1)\right)\frac{\sqrt{|p|}}{I}\frac{v_2^{\ 2}}{\mp v^2} & -(\beta-1)\frac{\sqrt{|p|}}{I}\frac{v_2v_3}{\mp v^2} \\ \mp\frac{\beta}{c}v_3 & -(\beta-1)\frac{\sqrt{|p|}}{I}\frac{v_1v_3}{\pm v^2} & -(\beta-1)\frac{\sqrt{|p|}}{I}\frac{v_2v_3}{\mp v^2} & \left(1-(\beta-1)\right)\frac{\sqrt{|p|}}{I}\frac{v_3^{\ 2}}{\mp v^2} \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. Böylece (3.33) eşitliğini

$$\mathbb{H}^{-}(\mathbf{R}') = \mathsf{U}\,\mathsf{R}$$

şeklinde temsil etmek mümkündür. Dolayısıyla son eşitlikten ispat tamamlanır.

Ayrıca (3.33)'de tanımlanan eşitliği sekiz boyutlu reel matrisler ile de ifade etmek mümkündür.

Teorem 3.2.2.2. $\mathbf{R}'$ eliptik bikuaterniyonunun U dönüşüm matrisinin 8×8 tipinde temsili

$$
U \cong \begin{bmatrix}
\frac{(\beta+1)(p-1)+2}{2p} & 0 & 0 & 0 & 0 & \pm\frac{1}{I}\frac{\beta}{c}v_1 & \pm\frac{1}{I}\frac{\beta}{c}v_2 & \pm\frac{1}{I}\frac{\beta}{c}v_3 \\
0 & \frac{(\beta+1)(p+1)+2(\beta-1)\frac{v_1^2}{\mp v^2}-2}{2p} & \frac{(\beta-1)v_1v_2}{\mp pv^2} & \frac{-(\beta-1)v_1v_3}{\mp pv^2} & \mp\frac{1}{I}\frac{\beta}{c}v_1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{(\beta-1)v_1v_2}{\mp pv^2} & \frac{(\beta+1)(p+1)+2(\beta-1)\frac{v_2^2}{\mp v^2}-2}{2p} & \frac{(\beta-1)v_2v_3}{\mp pv^2} & \mp\frac{1}{I}\frac{\beta}{c}v_2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{(\beta-1)v_1v_3}{\mp pv^2} & \frac{(\beta-1)+v_2v_3}{\mp pv^2} & \frac{(\beta+1)(p+1)+2(\beta-1)\frac{v_3^2}{\mp v^2}-2}{2p} & \mp\frac{1}{I}\frac{\beta}{c}v_3 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \mp\frac{1}{I}\frac{\beta}{c}v_1 & \mp\frac{1}{I}\frac{\beta}{c}v_2 & \mp\frac{1}{I}\frac{\beta}{c}v_3 & \frac{(p-1)(\beta+1)+2}{2p} & 0 & 0 & 0 \\
\pm\frac{1}{I}\frac{\beta}{c}v_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(\beta+1)(p+1)+2(\beta-1)\frac{v_1^2}{\mp v^2}-2}{2p} & \frac{(\beta-1)v_1v_2}{\mp pv^2} & \frac{(\beta-1)v_1v_3}{\mp pv^2} \\
\pm\frac{1}{I}\frac{\beta}{c}v_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(\beta-1)v_1v_2}{\mp pv^2} & \frac{(\beta+1)(p+1)+2(\beta-1)\frac{v_2^2}{v^2}-2}{2p} & \frac{(\beta-1)v_2v_3}{\mp pv^2} \\
\pm\frac{1}{I}\frac{\beta}{c}v_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(\beta-1)v_1v_3}{\mp pv^2} & \frac{(\beta-1)v_2v_3}{\mp pv^2} & \frac{(\beta+1)(p+1)+2(\beta-1)\frac{v_3^2}{\mp v^2}-2}{2p}
\end{bmatrix}
$$

dir.

İspat $\mathbf{A} = A_0 + \boldsymbol{A} = a_0 + \boldsymbol{I a'}$ $(a_1 = a_2 = a_3 = a_0' = 0)$ birim eliptik bikuaterniyon ve

$\mathbb{H}^-(\mathbf{R}') = \mathbb{H}^-(\mathbf{A})\ \mathrm{R}\ \mathbb{H}^-(\bar{\mathbf{A}}^*) = \mathbb{H}^-(\mathbf{A})\mathbb{H}^-(\breve{\bar{\mathbf{A}}}^*)\ \mathrm{R}$ olmak üzere bu ifadeyi açıkça

$$\mathbb{H}^-(\mathbf{R}') = \begin{bmatrix} a_0 & 0 & a_0' & -\boldsymbol{a}' \\ 0 & a_0 I_3 & \boldsymbol{a}'^T & a_0' I_3 + \tilde{\boldsymbol{a}}' \\ -a_0' & \boldsymbol{a}' & a_0 & 0 \\ -\boldsymbol{a}'^T & -a_0' I_3 - \tilde{\boldsymbol{a}}' & 0 & a_0 I_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 & 0 & a_0' & -\boldsymbol{a}' \\ 0 & a_0 I_3 & \boldsymbol{a}'^T & a_0' I_3 - \tilde{\boldsymbol{a}}' \\ -a_0' & \boldsymbol{a}' & a_0 & 0 \\ -\boldsymbol{a}'^T & -a_0' I_3 + \tilde{\boldsymbol{a}}' & 0 & a_0 I_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_0 \\ 0 \\ 0 \\ R \end{bmatrix}$$

şeklinde yazabiliriz. Son denklem 8×8 tipinde

$$\mathbb{H}^-(\mathbf{R}') \cong \begin{bmatrix} a_0 & 0 & 0 & 0 & a_0' & -a_1' & -a_2' & -a_3' \\ 0 & a_0 & 0 & 0 & a_1' & a_0' & a_3' & -a_2' \\ 0 & 0 & a_0 & 0 & a_2' & -a_3' & a_0' & a_1' \\ 0 & 0 & 0 & a_0 & a_3' & a_2' & -a_1' & a_0' \\ -a_0' & a_1' & a_2' & a_3' & a_0 & 0 & 0 & 0 \\ -a_1' & a_0' & -a_3' & a_2' & 0 & a_0 & 0 & 0 \\ -a_2' & a_3' & a_0' & -a_1' & 0 & 0 & a_0 & 0 \\ -a_3' & -a_2' & a_1' & -a_0' & 0 & 0 & 0 & a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 & 0 & 0 & 0 & a_0' & -a_1' & -a_2' & -a_3' \\ 0 & a_0 & 0 & 0 & a_1' & a_0' & -a_3' & a_2' \\ 0 & 0 & a_0 & 0 & a_2' & a_3' & a_0' & -a_1' \\ 0 & 0 & 0 & a_0 & a_3' & -a_2' & a_1' & a_0' \\ -a_0' & a_1' & a_2' & a_3' & a_0 & 0 & 0 & 0 \\ -a_1' & -a_0' & a_3' & -a_2' & 0 & a_0 & 0 & 0 \\ -a_2' & -a_3' & -a_0' & a_1' & 0 & 0 & a_0 & 0 \\ -a_3' & a_2' & -a_1' & -a_0' & 0 & 0 & 0 & a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}$$

yazılabilir. Buradan öncelikle ilk iki matris çarpımından,

$$\mathbb{H}^{-}(\mathbf{A})\mathbb{H}^{-}(\breve{\mathbf{A}}) \cong \begin{bmatrix} a_0^{\,2}+a_1'^2+a_2'^2+a_3'^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2a_0a_1' & -2a_0a_2' & -2a_0a_3' \\ 0 & a_0^{\,2}+a_1'^2-a_2'^2-a_3'^2 & 2a_1'a_2' & 2a_1'a_3' & 2a_0a_1' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2a_1'a_2' & a_0^{\,2}-a_1'^2+a_2'^2-a_3'^2 & 2a_2'a_3' & 2a_0a_2' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2a_1'a_3' & 2a_2'a_3' & a_0^{\,2}-a_1'^2-a_2'^2+a_3'^2 & 2a_0a_3' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2a_0a_1' & 2a_0a_2' & 2a_0a_3' & a_0^{\,2}+a_1'^2+a_2'^2+a_3'^2 & 0 & 0 & 0 \\ -2a_1'a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_0^{\,2}+a_1'^2-a_2'^2-a_3'^2 & 2a_1'a_2' & 2a_1'a_3' \\ -2a_2'a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2a_1'a_2' & a_0^{\,2}-a_1'^2+a_2'^2-a_3'^2 & 2a_2'a_3' \\ -2a_3'a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2a_1'a_3' & 2a_2'a_3' & a_0^{\,2}-a_1'^2-a_2'^2+a_3'^2 \end{bmatrix} \tag{3.35}$$

dir.

Böylece kabulden $\mathbf{A} = a_0 + I\boldsymbol{a}'$ eliptik bikuaterniyonu birim eliptik bikuaterniyon ve $a_1 = a_2 = a_3 = a_0' = 0$ olduğundan $a_0{}^2 + p\left(a_1'^2 + a_2'^2 + a_3'^2\right) = 1$ yazılabilir. Buradan $a_0{}^2 + a_1'^2 + a_2'^2 + a_3'^2 = \dfrac{a_0{}^2\left(p-1\right)+1}{p}$ olur. Benzer olarak,

$$a_0{}^2 + a_1'^2 - a_2'^2 - a_3'^2 = \frac{a_0{}^2\left(p+1\right) + 2a_1'^2 p - 1}{p},$$

$$a_0{}^2 - a_1'^2 + a_2'^2 - a_3'^2 = \frac{a_0{}^2\left(p+1\right) + 2a_2'^2 p - 1}{p},$$

$$a_0{}^2 - a_1'^2 - a_2'^2 + a_3'^2 = \frac{a_0{}^2\left(p+1\right) + 2a_3'^2 p - 1}{p}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitlikler (3.35) denklem numarası ile verilen matriste yerine yazılırsa,

$$\mathbb{H}^{-}\left(\mathbf{A}\right)\mathbb{H}^{-}\left(\breve{\mathbf{A}}\right)\cong\begin{bmatrix}
\frac{(p-1)a_0{}^2+1}{p} & 0 & 0 & 0 & 0 & -2a_0a_1' & -2a_0a_2' & -2a_0a_3' \\
0 & \frac{a_0{}^2(p+1)+2pa_1'^2-1}{p} & 2a_1'a_2' & 2a_1'a_3' & 2a_0a_1' & 0 & 0 & 0 \\
0 & 2a_1'a_2' & \frac{a_0{}^2(p+1)+2pa_2'^2-1}{p} & 2a_2'a_3' & 2a_0a_2' & 0 & 0 & 0 \\
0 & 2a_1'a_3' & 2a_2'a_3' & \frac{a_0{}^2(p+1)+2pa_3'^2-1}{p} & 2a_0a_3' & 0 & 0 & 0 \\
0 & 2a_0a_1' & 2a_0a_2' & 2a_3'a_0 & \frac{(p-1)a_0{}^2+1}{p} & 0 & 0 & 0 \\
-2a_0a_1' & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{a_0{}^2(p+1)+2pa_1'^2-1}{p} & 2a_1'a_2' & 2a_1'a_3' \\
-2a_0a_2' & 0 & 0 & 0 & 0 & 2a_1'a_2' & \frac{a_0{}^2(p+1)+2pa_2'^2-1}{p} & 2a_2'a_3' \\
-2a_0a_3' & 0 & 0 & 0 & 0 & 2a_1'a_3' & 2a_2'a_3' & \frac{a_0{}^2(p+1)+2pa_3'^2-1}{p}
\end{bmatrix}$$

elde edilir. Ayrıca son matris ifadesini gerçekleştiren dönüşüm matrisi, (3.20)-(3.22) denklemlerinden görülebileceği gibi **A** eliptik bikuaterniyonun reel bileşenleri için;

$$a_0 = \cosh(\frac{p\theta_p}{2}) , \qquad a_1' = \frac{\sqrt{|p|}}{I^2}\frac{v_1}{\sqrt{<\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}>}}\sinh(\frac{p\theta_p}{2}) , \qquad a_2' = \frac{\sqrt{|p|}}{I^2}\frac{v_2}{\sqrt{<\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}>}}\sinh(\frac{p\theta_p}{2}) ,$$

$$a_3' = \frac{\sqrt{|p|}}{I^2}\frac{v_3}{\sqrt{<\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}>}}\sinh(\frac{p\theta_p}{2})$$

eşitlikleri ile birlikte (3.23) denklem numarası ile verilen ifadeler kullanılarak

$$
\mathbb{H}^{-}(\mathbf{R}') \cong \begin{bmatrix}
\frac{(\beta+1)(p-1)+2}{2p} & 0 & 0 & 0 & 0 & \pm\frac{\sqrt{|p|}}{p}\frac{\beta}{c}v_1 & \pm\frac{\sqrt{|p|}}{p}\frac{\beta}{c}v_2 & \pm\frac{\sqrt{|p|}}{p}\frac{\beta}{c}v_3 \\
0 & \frac{(\beta+1)(p+1)-2(\beta-1)\frac{v_1^{\ 2}}{\mp v^2}-2}{2p} & -\frac{(\beta-1)v_1v_2}{\mp pv^2} & \frac{-(\beta-1)v_1v_3}{\mp pv^2} & \mp\frac{\sqrt{|p|}}{p}\frac{\beta}{c}v_1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\frac{(\beta-1)v_1v_2}{\mp pv^2} & \frac{(\beta+1)(p+1)-2(\beta-1)\frac{v_2^{\ 2}}{\mp v^2}-2}{2p} & -\frac{(\beta-1)v_2v_3}{\mp pv^2} & \mp\frac{\sqrt{|p|}}{p}\frac{\beta}{c}v_2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\frac{(\beta-1)v_1v_3}{\mp pv^2} & -\frac{(\beta-1)v_2v_3}{\mp pv^2} & \frac{(\beta+1)(p+1)-2(\beta-1)\frac{v_3^{\ 2}}{\mp v^2}-2}{2p} & \mp\frac{\sqrt{|p|}}{p}\frac{\beta}{c}v_3 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \mp\frac{\sqrt{|p|}}{p}\frac{\beta}{c}v_1 & \mp\frac{\sqrt{|p|}}{I^2}\frac{\beta}{c}v_2 & \mp\frac{\sqrt{|p|}}{p}\frac{\beta}{c}v_3 & \frac{(p-1)(\beta+1)+2}{2p} & 0 & 0 & 0 \\
\pm\frac{\sqrt{|p|}}{p}\frac{\beta}{c}v_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(\beta+1)(p+1)-2(\beta-1)\frac{v_1^{\ 2}}{\mp v^2}-2}{2p} & -\frac{(\beta-1)v_1v_2}{\mp pv^2} & -\frac{(\beta-1)v_1v_3}{\mp pv^2} \\
\pm\frac{\sqrt{|p|}}{p}\frac{\beta}{c}v_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{(\beta-1)v_1v_2}{\mp pv^2} & \frac{(\beta+1)(p+1)-2(\beta-1)\frac{v_2^{\ 2}}{v^2}-2}{2p} & -\frac{(\beta-1)v_2v_3}{\mp pv^2} \\
\pm\frac{\sqrt{|p|}}{p}\frac{\beta}{c}v_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{(\beta-1)v_1v_3}{\mp pv^2} & -\frac{(\beta-1)v_2v_3}{\mp pv^2} & \frac{(\beta+1)(p+1)-2(\beta-1)\frac{v_3^{\ 2}}{\mp v^2}-2}{2p}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} \tag{3.36}
$$

şeklindeki dönüşüm matrisi elde edilir. Dolayısıyla Lorentz dönüşümlerinin cebirsel ifadesinin istenilen matris temsili elde edilir ve ispat tamamlanır.

Ayrıca yukarıda elde ettiğimiz U dönüşüm matrisinde $p = I^2 = -1$ için;

$$
\mathrm{U}=\begin{bmatrix}
\beta & 0 & 0 & 0 & 0 & \mp\beta v_1 & \mp\beta v_2 & \mp\beta_3 v_3 \\
0 & \frac{(\beta-1)v_1^{\ 2}}{\mp\nu^2}+1 & \frac{(\beta-1)v_1v_2}{\mp\nu^2} & \frac{(\beta-1)v_1v_3}{\mp\nu^2} & \pm\beta v_1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{(\beta-1)v_1v_2}{\mp\nu^2} & \frac{(\beta-1)v_2^{\ 2}}{\mp\nu^2}+1 & \frac{(\beta-1)v_2v_3}{\mp p\nu^2} & \pm\beta v_2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{(\beta-1)v_1v_3}{\mp\nu^2} & \frac{(\beta-1)v_2v_3}{\mp\nu^2} & \frac{(\beta-1)v_3^{\ 2}}{\mp\nu^2}+1 & \pm\beta v_3 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \pm\beta v_1 & \pm\beta v_2 & \pm\beta v_3 & \beta & 0 & 0 & 0 \\
\mp\beta v_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(\beta-1)v_1^{\ 2}}{\mp\nu^2}+1 & \frac{(\beta-1)v_1v_2}{\mp\nu^2} & \frac{(\beta-1)v_1v_3}{\mp\nu^2} \\
\mp\beta v_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(\beta-1)v_1v_2}{\mp\nu^2} & \frac{(\beta-1)v_2^{\ 2}}{\mp\nu^2}+1 & \frac{(\beta-1)v_2v_3}{\nu^2} \\
\mp\beta v_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(\beta-1)v_1v_3}{\mp\nu^2} & \frac{(\beta-1)v_2v_3}{\mp\nu^2} & \frac{(\beta-1)v_3^{\ 2}}{\mp\nu^2}+1
\end{bmatrix} \tag{3.37}
$$

elde ederiz. Eliptik anlamda bulduğumuz bu özel matris eliptik bikuaterniyonların özel durumu olan [38] kaynağındaki kompleks kuaterniyonlar ile benzerlik gösterir.

3.3. Maxwell Denklemleri ve Eliptik Bikuaterniyonlar

Bu bölümde vektörlerden yararlanarak eliptik bikuaterniyonlar yardımı ile elde edilen eliptik Lorentz dönüşümleri altındaki elektromagnetik denklemler ve Maxwell denklemleri incelenecektir. Ayrıca eliptik bikuaterniyonlar aracılığıyla elektrik ve manyetik alanın bir uygulaması verilecektir. Eliptik bikuaterniyonlar aracılığı ile rölativistik elektromanyetizmadaki uygulamalar incelenecektir.

Eylemsiz gözlem çerçeveleri arasında göreceli dönüşümü ifade eden eliptik Lorentz dönüşümleri Teorem 3.2.1.1 de verildiği gibidir.

Diğer taraftan $\boldsymbol{v}$, x-ekseni yönündeki hız vektörü bir başka deyişle pür eliptik bikuaterniyon olmak üzere, $\boldsymbol{r}$ konum vektörü (pür eliptik bikuaterniyon), $\boldsymbol{v}$ hız vektörüne dik diğer bileşen ile $\boldsymbol{v}$ yönündeki bileşenin toplamı olarak yazılabilir. Bu takdirde, $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r} - \frac{\langle \boldsymbol{r},\boldsymbol{v}\rangle \boldsymbol{v}}{\langle \boldsymbol{v},\boldsymbol{v}\rangle} + \frac{\langle \boldsymbol{r},\boldsymbol{v}\rangle \boldsymbol{v}}{\langle \boldsymbol{v},\boldsymbol{v}\rangle}$ şeklinde ifade edilir. Dolayısıyla $\boldsymbol{r}$ den $\boldsymbol{r}'$ ne tanımlanan bir Lorentz dönüşümünde $\boldsymbol{v}$ yönündeki bileşen dönüşümden etkilenir ve diğer bileşen değişmez [25],[68]. Bu durumda,

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} + (\gamma - 1)\frac{\langle \boldsymbol{r},\boldsymbol{v}\rangle \boldsymbol{v}}{\langle \boldsymbol{v},\boldsymbol{v}\rangle} - \frac{\sqrt{|p|}}{|p|}\boldsymbol{v}t \tag{3.38}$$

ve

$$t' = \gamma\left(t - |p|\sqrt{|p|}\langle \boldsymbol{r},\boldsymbol{v}\rangle\right) \tag{3.39}$$

şeklinde eliptik formdaki denklemler elde edilir. Dolayısıyla elektromanyetik denklemler eliptik anlamdaki Lorentz dönüşümleri ile ifade edilebilir.

Eğer $\mathbf{A}$ birim eliptik bikuaterniyonu,

$$\mathbf{A}=\cosh(p\frac{\theta_p}{2})-\frac{1}{I}\boldsymbol{w}_{\mathbf{A}}\sinh(p\frac{\theta_p}{2})=\cosh(p\frac{\theta_p}{2})-\frac{\sqrt{|p|}}{I}\frac{\boldsymbol{v}}{\sqrt{<\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}>}}\sinh(p\frac{\theta_p}{2}) \qquad (3.40)$$

biçiminde tanımlanırsa

$$a_0=A_0=\cosh(p\frac{\theta_p}{2}),\ \ \boldsymbol{a}'=-\frac{1}{I^2}\boldsymbol{w}_{\mathbf{A}}\sinh(p\frac{\theta_p}{2})=-\frac{\sqrt{|p|}}{p}\frac{\boldsymbol{v}}{\langle\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}\rangle}\sinh(p\frac{\theta_p}{2}),$$

$$\boldsymbol{A}=-\frac{\sqrt{|p|}}{I}\frac{\boldsymbol{v}}{\sqrt{<\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}>}}\sinh(p\frac{\theta_p}{2}) \qquad (3.41)$$

eşitlikleri yazılabilir. O halde uzay-zamanı tanımlayan $\mathbf{R}=ct+I\boldsymbol{r}$ eliptik bikuaterniyonunun Lorentz dönüşümü olan $\mathbf{R}'=ct'+I\boldsymbol{r}'$ eliptik bikuaterniyonunu, (3.38)-(3.41) denklemlerini göz önünde bulundurarak

$$\mathbf{R}'=\gamma\frac{1}{\sqrt{|p|}}\Big(t-|p|\sqrt{|p|}\langle\boldsymbol{r},\boldsymbol{v}\rangle\Big)+I\left(\boldsymbol{r}+(\gamma-1)\frac{\langle\boldsymbol{r},\boldsymbol{v}\rangle\boldsymbol{v}}{\langle\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}\rangle}-\frac{\sqrt{|p|}}{|p|}\boldsymbol{v}t\right) \qquad (3.42)$$

şeklinde ifade ederiz. Burada $\frac{1}{c^2}=|p|$ olup $\frac{1}{c}=\sqrt{|p|}$ alınmıştır. Ayrıca ters yönde sabit bir hız düşünülürse, eliptik bikuaterniyonik diferensiyel operatör,

$$\mathbf{D}=\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}+I\left(\frac{\partial}{\partial x}e_1+\frac{\partial}{\partial y}e_2+\frac{\partial}{\partial z}e_3\right)=\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}+I\boldsymbol{\nabla} \qquad (3.43)$$

biçiminde ifade edilir. $\mathbf{D}$ eliptik bikuaterniyonik diferensiyel operatörünün Lorentz dönüşümü altındaki ifadesi

$$\mathbf{D}'=\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t'}+I\boldsymbol{\nabla}' \qquad (3.44)$$

şeklindedir. $\mathbf{D}'$ eliptik bikuaterniyonik diferensiyel operatörünün skaler ve vektörel bileşenleri, (3.38) ve (3.39) denklemlerinden

$$Sc\{\mathbf{D}'\} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t'} = \gamma\left(\sqrt{|p|}\frac{\partial}{\partial t} + |p|\sqrt{|p|}\langle \boldsymbol{\nabla}, \boldsymbol{v}\rangle\right) \tag{3.45}$$

ve

$$Vec\{\mathbf{D}'\} = \boldsymbol{\nabla}' = \boldsymbol{\nabla} + (\gamma - 1)\frac{\langle \boldsymbol{\nabla}, \boldsymbol{v}\rangle \boldsymbol{v}}{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle} - \gamma\frac{\sqrt{|p|}}{|p|}\boldsymbol{v}t \tag{3.46}$$

olur. Bu durumda (3.45) ve (3.46) denklemlerinden, (3.42) denklemine benzer olarak $\mathbf{D}'$ eliptik bikuaterniyonik diferensiyel operatörü

$$\mathbf{D}' = \gamma\sqrt{|p|}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\sqrt{|p|}}{c}\langle \boldsymbol{\nabla}, \boldsymbol{v}\rangle\right) + I\left(\boldsymbol{\nabla} + (\gamma - 1)\frac{\langle \boldsymbol{\nabla}, \boldsymbol{v}\rangle \boldsymbol{v}}{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle} - \gamma\frac{\sqrt{|p|}}{|p|}\boldsymbol{v}t\right) \tag{3.47}$$

biçiminde ifade edilir.

Özel durum 1. Eğer yukarıdaki denklemde özel olarak $I^2 = p = -1$ alınırsa, bu durum kompleks sayılardaki $i^2 = -1$ olması durumunu belirtir. Böylece (3.47) denkleminde verilen $\mathbf{D}'$ eliptik bikuaterniyonik diferensiyel operatörü

$$\mathbf{D}' = \beta\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\langle \boldsymbol{\nabla}, \boldsymbol{v}\rangle}{c}\right) + i\left(\boldsymbol{\nabla} + (\beta - 1)\frac{\langle \boldsymbol{\nabla}, \boldsymbol{v}\rangle \boldsymbol{v}}{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle} - \beta\boldsymbol{v}t\right)$$

şeklinde elde edilir. Burada $\beta = \dfrac{1}{\sqrt{1-v^2}}$ dir [38]. Dolayısıyla (3.47) denkleminde bulduğumuz eliptik bikuaterniyonik denklem, yukarıda bahsettiğimiz $I^2 = p = -1$ özel durumunda kompleks kuaterniyonlar ile yapılmış olan çalışmaları da içeren daha genel bir ifadedir.

$\mathbf{D}$ eliptik bikuaterniyonik diferensiyel operatörü elektromanyetik alanları tanımlamada kullanılır. Klasik elektromanyetizmada bilinen Maxwell denklemlerine bakalım. $\boldsymbol{E}$ elektrik alanı ve $\boldsymbol{H}$ manyetik alanın özelliklerini tanımlayan, bilinen Maxwell denklemleri

$$\langle \nabla, E \rangle = \frac{\rho_v}{\varepsilon_0}$$

$$\langle \nabla, H \rangle = 0$$

$$\nabla \wedge E = -\frac{\partial H}{\partial t}$$

$$\nabla \wedge H = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E}{\partial t} + \mu_0 J$$

şeklinde verilir [69]. Burada ilk denklem, elektrikte Gauss yasasını, ikinci denklem manyetizmada Gauss yasasını, üçüncü denklem Faraday indüksiyon yasasını ve son denklem ise ampere yasasını ifade eder. Bir sonraki (3.4) alt bölüme kadar bu kısımdan sonra $\mu_0 = \varepsilon_0 = c = 1$ alınacaktır.

$\boldsymbol{E}$ pür eliptik bikuaterniyonik elektrik alanı ve $\boldsymbol{H}$ pür eliptik bikuaterniyonik manyetik alanınını birleştiren, $\mathbb{P}$ eliptik bikuaterniyonu

$$\mathbb{P} = \boldsymbol{H} + I\boldsymbol{E} \tag{3.48}$$

şeklinde tanımlanır. Benzer olarak yük yoğunluğu ve akım yoğunluğunu birleştiren $\mathbf{J}$ eliptik bikuaterniyonu,

$$\mathbf{J} = \rho_v + I\boldsymbol{J}$$

şeklinde tanımlanır. Öte yandan skaler potansiyel ve vektör potansiyeli

$$\mathbb{A} = \mathrm{A} + I\boldsymbol{A} \tag{3.49}$$

ile tanımlanan $\mathbb{A}$ eliptik bikuaterniyonu ile birleştirmek mümkündür.

$\mathbf{D}$ eliptik bikuaterniyonik diferensiyel operatörünün eşleniğinin (3.48) denklemindeki $\mathbb{P}$ eliptik bikuaterniyonu üzerine etkisi;

$$\mathbf{D}^* \otimes \mathbb{P} = \left(\frac{\partial}{\partial t} - I\boldsymbol{\nabla} \right) \otimes \left(\boldsymbol{H} + I\boldsymbol{E} \right)$$

$$\mathbf{D}^* \otimes \mathbb{P} = \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} + I\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} - I\left(-\langle \boldsymbol{\nabla}, \boldsymbol{H} \rangle + \boldsymbol{\nabla} \wedge \boldsymbol{H} \right) - \left(-I^2 \langle \boldsymbol{\nabla}, \boldsymbol{E} \rangle + I^2 \left(\boldsymbol{\nabla} \wedge \boldsymbol{E} \right) \right)$$

dir. Son denklemde Maxwell denklemleri kullanılarak

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^* \otimes \mathbb{P} &= \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} + I^2 \rho_v + I^2 \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} + I\left(-\boldsymbol{J} - \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \right) \\ \mathbf{D}^* \otimes \mathbb{P} &= \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}\left(1 + I^2 \right) + I^2 \rho_v - I\boldsymbol{J} \end{aligned} \tag{3.50}$$

elde edilir.

Özel durum 2. Eğer özel olarak $I^2 = p = -1$ alınırsa bu durumda kompleks kuaterniyonlar ile ele alınan [70] kaynağındaki

$$\mathbf{D}^* \otimes \mathbb{P} = -\left(\rho_v + I\boldsymbol{J} \right)$$

denklem elde edilir. Bu denklem ile Maxwell denklemlerinin tümü bir tek denklem ile birleştirilmiştir. Eliptik bikuaterniyonlar kullanarak bulduğumuz (3.50) denklemi yukarıdaki özel durumu da kapsamaktadır.

Diğer taraftan $\mathbf{D}$ operatörü, (3.49) denkleminde ifade edilen eliptik bikuaterniyonik potansiyel üzerine uygulanırsa,

$$\mathbf{D} \otimes \mathbb{A} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + I\boldsymbol{\nabla} \right) \otimes \left(\mathrm{A} + I\boldsymbol{A} \right) \tag{3.51}$$

$$\mathbf{D} \otimes \mathbb{A} = \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial t} + I\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} + I\boldsymbol{\nabla}\mathrm{A} - I^2 \langle \boldsymbol{\nabla}, \boldsymbol{A} \rangle + I^2 \left(\boldsymbol{\nabla} \wedge \boldsymbol{A} \right)$$

$$\mathbf{D} \otimes \mathbb{A} = \left(1 + I^2 \right) \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial t} + I^2 \boldsymbol{H} - I\boldsymbol{E} \tag{3.52}$$

elde edilir. (3.52) denklemi sayesinde, skaler ve vektör potansiyel verildiğinde eliptik bikuaterniyonlar yardımıyla elektrik alan ve manyetik alanın bulunabileceğini söylemek mümkündür. Aşağıda verilen örnek ile bu sonuç daha iyi anlaşılabilir.

Örnek 1: $\varepsilon_R = \mu_R = 1$ bölgesinde $\sigma = 0$ ve vektör potansiyel $\boldsymbol{A} = 10^2 y \cos\left(4.10^5 t\right) \cos z e_3$ Wb/m ve skaler potansiyel $\mathrm{A} = 4.10^7 y \sin\left(4.10^5 t\right) \sin z$ volt ve $I^2 = p = -0,5$ olmak üzere, $\boldsymbol{E}$ elektrik alanını ve $\boldsymbol{H}$ manyetik alanını bulmaya çalışalım.

İlk olarak (3.52) denkleminden yararlanarak

$$\mathbf{D} \otimes \mathbb{A} - \left(1 + I^2\right) \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial t} = p\boldsymbol{H} - I\boldsymbol{E}$$

elektrik alan ve manyetik alan cinsinden yukarıdaki denklem yazılabilir. Burada (3.43) ve (3.49) denklemleri göz önüne alındığında son denklemden

$$\begin{aligned}
\mathbf{D} \otimes \mathbb{A} &= \left(\frac{\partial}{\partial t} + I\boldsymbol{\nabla}\right) \otimes \left(\mathrm{A} + I\boldsymbol{A}\right) \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial t} + I\left(\frac{\partial}{\partial x} e_1 + \frac{\partial}{\partial y} e_2 + \frac{\partial}{\partial z} e_3\right)\right) \otimes \left(\left(4.10^7 y \sin\left(4.10^5 t\right) \sin z\right) + I\left(10^2 y \cos\left(4.10^5 t\right) \cos z e_3\right)\right) \\
&= 16.10^{12} y \cos\left(4.10^5 t\right) \sin z + I\left(4.10^7 \sin\left(4.10^5 t\right) \sin z e_2\right) \\
&\quad + I^2\left(10^2 \cos\left(4.10^5 t\right) \cos z \; e_1\right) + I^2\left(10^2 y \cos\left(4.10^5 t\right) \sin z\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca $\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial t} = 16.10^{12} y \cos\left(4.10^5 t\right) \sin z$ olduğundan,

$$\begin{aligned}
\mathbf{D} \otimes \mathbb{A} - \left(1 + I^2\right) \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial t} &= I\left(4.10^7 \sin\left(4.10^5 t\right) \sin z e_2\right) + I^2\left(10^2 \cos\left(4.10^5 t\right) \cos z \, e_1\right. \\
&\quad \left. + 10^2 y \cos\left(4.10^5 t\right) \sin z - 16.10^{12} y \cos\left(4.10^5 t\right) \sin z\right)
\end{aligned}$$

bulunur. Diğer taraftan son denklem ve yukarıda bahsedilen elektrik alan ve manyetik alan cinsinden elde edilen denklem karşılaştırılırsa $\boldsymbol{H}$ manyetik alan,

$$\boldsymbol{H} = 10^2 \cos\left(4.10^5 t\right) \cos z \; e_1 + 10^2 y \cos\left(4.10^5 t\right) \sin z - 16.10^{12} y \cos\left(4.10^5 t\right) \sin z$$

ve $\boldsymbol{E}$ elektrik alan,

$$\boldsymbol{E} = -4.10^{7}\sin\left(4.10^{5}t\right)\sin z e_2$$

biçiminde bulunur. Böylelikle eliptik bikuaterniyonlar yardımıyla verilen eliptik bikuaterniyonik potansiyel ve eliptik diferensiyel operatörü kullanılarak $\boldsymbol{E}$ elektrik alan ve $\boldsymbol{H}$ manyetik alanın kolaylıkla elde edilebileceği gösterilmiş olur.

3.3.1. Elektrik ve Manyetik Alanların Eliptik Lorentz Dönüşümleri

$\boldsymbol{E}$ elektrik alan ve $\boldsymbol{H}$ manyetik alanın eliptik Lorentz dönüşümleri altındaki değişimini inceleyeceğiz. Genel olarak bilinen $\vec{E}$ elektrik alanı bilindiği gibi; skaler ve vektör potansiyel cinsinden

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\mathrm{V} - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \tag{3.53}$$

şeklinde ifade edilir ve $\vec{H}$ manyetik alanı ise $\vec{A}$ vektör potansiyeli cinsinden

$$\vec{H} = \vec{\nabla}\wedge\vec{A}$$

biçiminde ifade edilir [69].

$\boldsymbol{E}$ eliptik bikuaterniyonik elektrik alanı, (3.53) denkleminden $\boldsymbol{E}$ 'nin bileşenleri cinsinden

$$\boldsymbol{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial t}\right)e_1 - \left(\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial A_y}{\partial t}\right)e_2 - \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial A_z}{\partial t}\right)e_3$$

$$\boldsymbol{E} = E_x e_1 + E_y e_2 + E_z e_3$$

şeklinde yazılabilir. $\boldsymbol{H}$ eliptik bikuaterniyonik manyetik alanı ise benzer olarak

$$\boldsymbol{H} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)e_1 + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)e_2 + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)e_3 = H_x e_1 + H_y e_2 + H_z e_3$$

şeklinde bileşenlerine ayrılabilir. Ayrıca hız vektörü $\boldsymbol{v}=\mathrm{v}e_1$ reel vektör kuaterniyonu ile tanımlanırsa $\boldsymbol{A}$ ve V ' nin eliptik Lorentz dönüşümleri,

$$A'_x = \gamma\left(A_x - \frac{\sqrt{|p|}}{|p|}\lambda V \right)$$
$$A'_y = A_y$$
$$A'_z = A_z$$
$$V' = \gamma\left(V - \sqrt{|p|}\lambda A_x\right)$$

şeklinde olup (3.44) denklemindeki $\mathbf{D}'$ diferensiyel operatörünün bileşenleri de,

$$\frac{\partial}{\partial t'} = \gamma\left(\frac{\partial}{\partial t} + \sqrt{|p|}\lambda \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x'} = \gamma\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\sqrt{|p|}}{|p|}\lambda \frac{\partial}{\partial t} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial y'} = \frac{\partial}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial z'} = \frac{\partial}{\partial z}$$

biçimindedir. Bu tanımları kullanarak $\boldsymbol{E}$ elektrik alanının Lorentz dönüşümü olan $\boldsymbol{E}'$ için aşağıdaki ifadeler elde edilir:

$$E_x{}' = -\left(\frac{\partial V'}{\partial x'} + \frac{\partial A_x{}'}{\partial t'} \right) = -\gamma^2 \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\sqrt{|p|}}{p}\lambda \frac{\partial}{\partial t} \right)\left(V - \sqrt{|p|}\lambda A_x\right) - \gamma^2 \left(\frac{\partial}{\partial t} + \sqrt{|p|}\lambda \frac{\partial}{\partial x} \right)\left(A_x + \frac{\sqrt{|p|}}{p}\lambda V \right)$$

$$E_x{}' = -\gamma^2\left(1-\lambda^2\right)\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t} \right) = E_x$$

$$E_y{}' = -\left(\frac{\partial V'}{\partial y'} + \frac{\partial A_y{}'}{\partial t'} \right) = -\gamma \frac{\partial}{\partial y}\left(V - \sqrt{|p|}\lambda A_x\right) - \gamma\left(\frac{\partial}{\partial t} + \sqrt{|p|}\lambda \frac{\partial}{\partial x} \right) A_y$$

$$E_y{}' = -\gamma\left(\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial A_y}{\partial t} \right) - \gamma\sqrt{|p|}\lambda\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) = \gamma\left(E_y - \sqrt{|p|}\lambda H_z\right)$$

ve

$$E_z{}' = -\left(\frac{\partial V'}{\partial z'} + \frac{\partial A_z{}'}{\partial t'}\right) = -\gamma\frac{\partial}{\partial z}\left(V - \sqrt{|p|}\lambda A_x\right) - \gamma\left(\frac{\partial}{\partial t} + \sqrt{|p|}\lambda\frac{\partial}{\partial x}\right)A_z$$

$$E_z{}' = -\gamma\left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial A_z}{\partial t}\right) + \sqrt{|p|}\lambda\gamma\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) = \gamma\left(E_z + \sqrt{|p|}\lambda H_y\right)$$

biçimindeki ifadelere dönüşür. Böylece

$$\boldsymbol{E}' = E_x e_1 + \gamma\left(E_y - \sqrt{|p|}\lambda H_z\right)e_2 + \gamma\left(E_z + \sqrt{|p|}\lambda H_y\right)e_3$$

elde edilir. Benzer şekilde $\boldsymbol{H}$ manyetik alan eliptik Lorentz dönüşümlerine tabi tutulduğunda

$$H_x{}' = \left(\frac{\partial A_z{}'}{\partial y'} - \frac{\partial A_y{}'}{\partial z'}\right) = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) = H_x$$

$$H_y{}' = \frac{\partial A_x{}'}{\partial z'} - \frac{\partial A_z{}'}{\partial x'} = \gamma\frac{\partial}{\partial z}\left(A_x + \frac{\sqrt{|p|}}{p}\lambda V\right) - \gamma\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\sqrt{|p|}}{p}\lambda\frac{\partial}{\partial t}\right)A_z = \gamma\left(H_y + \frac{\sqrt{|p|}}{|p|}\lambda E_z\right)$$

$$H_z{}' = \gamma\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) - \gamma\frac{\sqrt{|p|}}{p}\lambda\left(\frac{\partial A_y}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial y}\right) = \gamma\left(H_z - \frac{\sqrt{|p|}}{|p|}\lambda E_y\right)$$

denklemleri elde edilir. Böylelikle, $\boldsymbol{H}' = H_x{}'e_1 + H_y{}'e_2 + H_z{}'e_3$ olduğundan

$$\boldsymbol{H}' = H_x e_1 + \gamma\left(H_y + \frac{\sqrt{|p|}}{|p|}\lambda E_z\right)e_2 + \gamma\left(H_z - \frac{\sqrt{|p|}}{|p|}\lambda E_y\right)e_3$$

elde edilir. Eğer $\boldsymbol{v}$ hızının x eksenine paralel olmadığı göz önüne alınırsa,

$$\boldsymbol{E}' = \gamma\boldsymbol{E} + (1-\gamma)\frac{\mathrm{v}\langle\boldsymbol{E},\mathrm{v}\rangle}{\langle\mathrm{v},\mathrm{v}\rangle} + \frac{\sqrt{|p|}}{|p|}\gamma(\mathrm{v}\wedge\boldsymbol{H}) \tag{3.54}$$

ve

$$\boldsymbol{H}' = \gamma\boldsymbol{H} + (1-\gamma)\frac{\mathrm{v}\langle\boldsymbol{H},\mathrm{v}\rangle}{\langle\mathrm{v},\mathrm{v}\rangle} - |p|\sqrt{|p|}\gamma(\boldsymbol{E}\wedge\mathrm{v}) \tag{3.55}$$

biçiminde ifade edilir.

3.3.2. Elektrik ve Manyetik Alanların Eliptik Bikuaterniyonik Dönüşümleri

Eliptik Lorentz dönüşümleri ile elde edilen elektrik ve manyetik alan denklemleri eliptik bikuaterniyonik dönüşüm formülleri ile de elde edilebilir.

(3.48) denkleminde tanımlanan $\mathbb{P}$ eliptik bikuaterniyonunu göz önüne alalım. Rölativistik dönüşüm bağıntısı sonucunda $\mathbb{P}' = \boldsymbol{H}' + I\boldsymbol{E}'$ olması beklenir. Diğer taraftan Teorem 2.1.3 ifadesinde verilen $\mathbf{A}$ birim eliptik bikuaterniyonu ile birlikte eliptik bikuaterniyonik dönüşüm bağıntısı

$$\mathbb{P}' = \mathbf{A}\otimes\mathbb{P}\otimes\mathbf{A}^* \tag{3.56}$$

şeklinde tanımlanır. Bu ifade açıkça (2.2), (2.4) ve (3.48) denklemleri göz önüne alındığında,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}' &= (a_0 + I\boldsymbol{a}')\otimes(\boldsymbol{H} + I\boldsymbol{E})\otimes(a_0 - I\boldsymbol{a}')\\ &= (a_0 + I\boldsymbol{a}')\Big(\boldsymbol{H}a_0 + I\langle\boldsymbol{H},\boldsymbol{a}'\rangle - I(\boldsymbol{H}\wedge\boldsymbol{a}') + I\boldsymbol{E}a_0 + I^2\langle\boldsymbol{E},\boldsymbol{a}'\rangle - I^2(\boldsymbol{E}\wedge\boldsymbol{a}')\Big)\end{aligned}$$

olup buradan $\mathbb{P}'$ eliptik bikuaterniyonu açıkça

$$\mathbb{P}' = (\boldsymbol{H}a_0{}^2 + I\langle \boldsymbol{H},\boldsymbol{a}'\rangle a_0 - I(\boldsymbol{H}\wedge\boldsymbol{a}')a_0 + I\boldsymbol{E}a_0{}^2 + I^2\langle \boldsymbol{E},\boldsymbol{a}'\rangle a_0 - I^2 a_0(\boldsymbol{E}\wedge\boldsymbol{a}')$$

$$- Ia_0\langle \boldsymbol{H},\boldsymbol{a}'\rangle + Ia_0(\boldsymbol{a}'\wedge\boldsymbol{H}) + I^2\boldsymbol{a}'\langle \boldsymbol{H},\boldsymbol{a}'\rangle + I^2\langle \boldsymbol{a}',(\boldsymbol{H}\wedge\boldsymbol{a}')\rangle - I^2(\boldsymbol{a}'\wedge(\boldsymbol{H}\wedge\boldsymbol{a}'))$$

$$- I^2\langle \boldsymbol{a}',\boldsymbol{E}\rangle a_0 + I^2(\boldsymbol{a}'\wedge\boldsymbol{E})a_0 + I^3\boldsymbol{a}'\langle \boldsymbol{a}',\boldsymbol{E}\rangle + I^3\langle \boldsymbol{a}',(\boldsymbol{E}\wedge\boldsymbol{a}')\rangle - I^3(\boldsymbol{a}'\wedge(\boldsymbol{E}\wedge\boldsymbol{a}'))$$

biçiminde yazılabilir. Vektörel işlemin özelliklerinden,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}' &= \boldsymbol{H}a_0{}^2 - 2pa_0(\boldsymbol{E}\wedge\boldsymbol{a}') + 2p\boldsymbol{a}'\langle \boldsymbol{H},\boldsymbol{a}'\rangle - p\boldsymbol{H}\langle \boldsymbol{a}',\boldsymbol{a}'\rangle - p\langle \boldsymbol{a}',\boldsymbol{E}\rangle \\ &+ I(2a_0(\boldsymbol{a}'\wedge\boldsymbol{H}) + \boldsymbol{E}a_0{}^2 + a_0(\boldsymbol{E}\wedge\boldsymbol{a}') + 2p\boldsymbol{a}'\langle \boldsymbol{a}',\boldsymbol{E}\rangle - p\boldsymbol{E}\langle \boldsymbol{a}',\boldsymbol{a}'\rangle\end{aligned}$$

olur. $\mathbb{P}' = \boldsymbol{H}' + I\boldsymbol{E}'$ olduğundan,

$$\boldsymbol{H}' = \left(a_0{}^2 - p\langle \boldsymbol{a}',\boldsymbol{a}'\rangle\right)\boldsymbol{H} - 2pa_0(\boldsymbol{E}\wedge\boldsymbol{a}') + 2p\boldsymbol{a}'\langle \boldsymbol{H},\boldsymbol{a}'\rangle$$

ve

$$\boldsymbol{E}' = \left(a_0{}^2 - p\langle \boldsymbol{a}',\boldsymbol{a}'\rangle\right)\boldsymbol{E} + 2a_0(\boldsymbol{a}'\wedge\boldsymbol{H}) + 2p\boldsymbol{a}'\langle \boldsymbol{E},\boldsymbol{a}'\rangle$$

bulunur. Dolayısıyla son iki denklemden

$$\boldsymbol{H}' = \gamma\boldsymbol{H} + \gamma\frac{\langle \boldsymbol{E}\wedge \mathrm{v}\rangle}{c} + (1-\gamma)\frac{\mathrm{v}\langle \boldsymbol{H},\mathrm{v}\rangle}{v^2}$$

ve

$$\boldsymbol{E}' = \gamma\boldsymbol{E} - \frac{\sqrt{|p|}}{p}\gamma\frac{\langle \mathrm{v}\wedge\boldsymbol{H}\rangle}{c} + (1-\gamma)\frac{\mathrm{v}\langle \boldsymbol{E},\mathrm{v}\rangle}{v^2}$$

elde edilir, burada $|\langle \mathrm{v},\mathrm{v}\rangle| = v^2$ alınmıştır. Böylece manyetik alan ve elektrik alanın dönüşüm bağıntısı sonucundaki son iki denklem elde edilmiştir.

3.4. Eliptik Bikuaterniyonlar ile Proca-Maxwell Denklemleri

Bu bölümde manyetik monopol ve manyetik akım temsillerinin varlığında bilinen Maxwell denklemleri verilmiştir. Daha sonra bu denklemlerin eliptik bikuaterniyonlar açısından ifadeleri elde edilmiştir.

3.4.1. Manyetik monopoller ile genelleştirilmiş Proca-Maxwell denklemlerinin eliptik bikuaterniyonik temsili

Manyetik monopol ve manyetik akım temsillerinin varlığında, Dirac tarafından öne sürülen manyetik yük ρ_m ve manyetik akım yoğunluğu $\boldsymbol{J}_m$ dahil edilerek elde edilen simetrik Maxwell denklemleri ([55],[68]) Gauss biriminde, vektör cebri formülasyonunda

$$\begin{aligned}
&\langle \nabla, \boldsymbol{E} \rangle = 4\pi\rho_e, \\
&\langle \nabla, \boldsymbol{E} \rangle = 4\pi\rho_m, \\
&\nabla \wedge \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c} 4\pi\rho_m \boldsymbol{J}_m - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}, \\
&\nabla \wedge \boldsymbol{H} = -\frac{1}{c} 4\pi\rho_m \boldsymbol{J}_e + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}
\end{aligned}$$

şeklindedir. Burada ρ_e ve ρ_m elektrik ve manyetik kütle yoğunluğu, $\boldsymbol{J}_e$ ve $\boldsymbol{J}_m$ elektrik ve manyetik akı yoğunluğudur. Skaler potansiyel ϕ_e ve vektör potansiyel $\boldsymbol{A}_e$ ile birlikte manyetik kaynaklar ϕ_m ve $\boldsymbol{A}_m$ dahil edilerek elektrik alan

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\phi_e - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}_e}{\partial t} - \nabla \wedge \boldsymbol{A}_m$$

şeklinde ifade edilir. Benzer olarak manyetik alan ise

$$\boldsymbol{H} = -\nabla\phi_m - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}_m}{\partial t} - \nabla \wedge \boldsymbol{A}_e$$

dir. Ayrıca yük korunumu yasasına göre Maxwell denklemleri için bilinen süreklilik denklemleri;

$$\frac{1}{c}\left\langle \nabla, \boldsymbol{J}_e \right\rangle + \frac{\partial \rho_e}{\partial t} = 0,$$
$$\frac{1}{c}\left\langle \nabla, \boldsymbol{J}_m \right\rangle + \frac{\partial \rho_m}{\partial t} = 0$$

dir. Ayrıca simetrik Maxwell denklemleri için Lorentz gauge koşulları bilindiği gibi

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \phi_e}{\partial t} + \left\langle \nabla, \boldsymbol{A}_e \right\rangle = 0$$
$$\frac{1}{c}\frac{\partial \phi_m}{\partial t} + \left\langle \nabla, \boldsymbol{A}_m \right\rangle = 0$$

biçimindedir. Fotonun kütlesinin sıfırdan farklı olması durumunda ise daha genel Proca-Maxwell denklemleri

$$\left\langle \nabla, \boldsymbol{E} \right\rangle = 4\pi\rho_e - m_\gamma^{\ 2}\phi_e$$
$$\left\langle \nabla, \boldsymbol{H} \right\rangle = 4\pi\rho_m$$
$$\nabla \wedge \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}4\pi \boldsymbol{J}_m - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}$$
$$\nabla \wedge \boldsymbol{H} = -\frac{1}{c}4\pi \boldsymbol{J}_e - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} - m_\gamma^{\ 2}\boldsymbol{A}_e$$

biçiminde ifade edilir [55].

3.4.2. Yerçekiminin genelleştirilmiş Proca-Maxwell denklemlerinin eliptik biquaterniyonik temsilleri

Gravitoelektromanyetizm (kütleçekimsel elektromanyetizma) terimi Newton'un yerçekimi kanunu ve Coulomb'un elektrik yasası arasındaki analojiden kaynaklanır. Gravitoelektrik (kütleçekimsel elektrik) alan $\tilde{\boldsymbol{E}}$ ve gravitomanyetik (kütleçekimsel manyetik) alan $\tilde{\boldsymbol{H}}$ ile birlikte kaynaklar, graviton terimleri dahil edilerek gravitonun kütlesi sıfırdan farklı yani $m_g \neq 0$ iken gravitoelektromanyetizm için monopol varlığındaki Maxwell-benzeri denklemler bilindiği gibi

$$\left\langle \nabla,\ \tilde{\boldsymbol{E}} \right\rangle = -4\pi\rho_e - \tilde{m}_g{}^2\varphi_e$$
$$\left\langle \nabla, \tilde{\boldsymbol{H}} \right\rangle = -4\pi\rho_m$$
$$\nabla \wedge\ \tilde{\boldsymbol{E}} = \frac{1}{c}4\pi\tilde{\boldsymbol{J}}_m - \frac{1}{c}\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{H}}}{\partial t}$$
$$\nabla \wedge\ \tilde{\boldsymbol{H}} = -\frac{1}{c}4\pi\tilde{\boldsymbol{J}}_e + \frac{1}{c}\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{E}}}{\partial t} - \tilde{m}_g{}^2\tilde{\mathbf{A}}_e$$

dir [54]. Burada ρ_e, $\tilde{\boldsymbol{J}}_e$ ve $\tilde{\boldsymbol{J}}_m$ sırasıyla gravitoelektrik kütle yoğunluğu, gravitoelektrik kütle akım yoğunluğu ve gravitomanyetik kütle akım yoğunluğudur. Ayrıca, $\tilde{m}_g = \dfrac{m_g c}{\hbar}$ terimi gravitonun Coulomb dalga boyunun tersidir. Bu ifadeler gravitoelektromanyetizm için Maxwell-benzeri denklemlerinin en genelleştirilmiş formülasyonlarıdır.

Eliptik bikuaterniyonik Proca-tip gravitoelektromanyetizm denklemleri için ilk olarak eliptik bikuaterniyonik diferensiyel operatör

$$\tilde{\mathbf{D}} = \left(\frac{I}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \right)$$

şeklinde tanımlanır. Şimdi de gravitoelektromagnetizm için eliptik bikuaterniyonik anlamda gravitoelektrik ve gravitomanyetik alanların birleşimi tek bir eliptik bikuaterniyon olarak

$$\tilde{\mathbb{P}} = \tilde{\boldsymbol{H}} + I\tilde{\boldsymbol{E}} = \left(H_1 + IE_1\right)e_1 + \left(H_2 + IE_2\right)e_2 + \left(H_3 + IE_3\right)e_3$$

biçiminde tanımlanır. Bu tanımlar ile birlikte $\tilde{\mathbf{D}}$'nin $\tilde{\mathbf{A}}$ üzerine denkleminde verilen kuaterniyonik çarpım işlemi ile;

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{D}} \otimes \tilde{\mathbf{A}} &= \left(\frac{I}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \right) \otimes \left(\tilde{\boldsymbol{H}} + I\tilde{\boldsymbol{E}} \right) \\
&= \frac{I}{c}\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{H}}}{\partial t} + \frac{I^2}{c}\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{E}}}{\partial t} - \left\langle \boldsymbol{\nabla}, \tilde{\boldsymbol{H}} \right\rangle + \boldsymbol{\nabla} \wedge \tilde{\boldsymbol{H}} - I\left\langle \boldsymbol{\nabla},\ \tilde{\boldsymbol{E}} \right\rangle + I\boldsymbol{\nabla} \wedge \tilde{\boldsymbol{E}} \\
&= \frac{I^2}{c}\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{E}}}{\partial t} - \left\langle \boldsymbol{\nabla}, \tilde{\boldsymbol{H}} \right\rangle + \boldsymbol{\nabla} \wedge \tilde{\boldsymbol{H}} + I\left(\frac{I}{c}\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{H}}}{\partial t} - \left\langle \boldsymbol{\nabla},\ \tilde{\boldsymbol{E}} \right\rangle + \boldsymbol{\nabla} \wedge \tilde{\boldsymbol{E}} \right)
\end{aligned}$$

denklemi elde edilir. Manyetik monopolün varlığı göz önüne alınarak, skaler potansiyeller φ_e, φ_m ve vektör potansiyeller $\boldsymbol{A}_e$, $\boldsymbol{A}_m$ olmak üzere genelleştirilmiş gravitasyonel kaynak yoğunluğunun eliptik bikuaterniyonik ifadesi ise

$$\tilde{\mathbf{J}} = \rho + \frac{1}{c}\tilde{\boldsymbol{J}} = 4\pi\left(\rho_m + I\rho_e\right)e_0 + \frac{4\pi}{c}\left(-\tilde{\boldsymbol{J}}_e + I\tilde{\boldsymbol{J}}_m\right) + \frac{1}{c}\left(1+p\right)\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{E}}}{\partial t} \tag{3.57}$$

biçiminde tanımlanır. Burada son terim incelendiğinde $I^2 = p = -1$ olması durumunda bu son terimin yok olacağı aşikardır. Ancak genelleştirilmiş gravitasyonel kaynak yoğunluğunun kompleks yapılardaki denklemleri incelendiğinde $\frac{1}{c}\left(1+p\right)\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{E}}}{\partial t}$ biçimindeki ek terim ifadesinin yok olduğu yani sıfıra eşit olduğu görülmektedir. Fakat genelleştirilmiş gravitasyonel kaynak yoğunluğu denklemi eliptik bikuaterniyonlar ile incelendiğinde yukarıda bahsedilen ek terimin kaybolmadığı, bunun sebebinin ise eliptik bikuaterniyonların daha geniş bir yapı olmasından yani kompleks yapıyı da kapsayan bir cebirsel yapıya sahip olmasından kaynaklandığı ortaya çıkmaktadır. Diğer taraftan eliptik bikuaterniyonik genelleştirilmiş gravitasyonel potansiyel;

$$\tilde{\mathbf{A}}_g = \varphi + \tilde{\boldsymbol{A}} = -\left(\varphi_m + I\varphi_e\right) + \left(\tilde{\boldsymbol{A}}_e - I\tilde{\boldsymbol{A}}_m\right)$$

biçiminde tanımlanır. Burada gravitasyonel potansiyel ise;

$$\tilde{\mathbf{A}}_e = -I\varphi_e + \tilde{\boldsymbol{A}}_e$$

biçiminde tanımlanır. Gravitoelektromanyetizm için eliptik bikuaterniyonik Maxwell-like denklemleri tek bir denklem ile

$$\tilde{\mathbf{D}} \otimes \tilde{\mathbf{A}}_g + \tilde{m}_g^2\tilde{\mathbf{A}}_e = \tilde{\mathbf{J}} \tag{3.58}$$

şeklinde verilebilir. Burada $\tilde{\mathbf{D}} \otimes \tilde{\mathbf{A}}_g$, $\tilde{\mathbf{A}}_e$ ve $\tilde{\mathbf{J}}$ eliptik bikuaterniyon anlamındadır. Böylece genelleştirilmiş gravitasyonel potansiyel tanımı ve (3.57) denklemi göz önünde bulundurulursa, (3.58) denklemi açıkça

$$\frac{I^2}{c}\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{E}}}{\partial t}-\left\langle \nabla,\tilde{\boldsymbol{H}}\right\rangle+\nabla\wedge\tilde{\boldsymbol{H}}+I\left(\frac{1}{c}\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{H}}}{\partial t}-\left\langle \nabla,\tilde{\boldsymbol{E}}\right\rangle+\nabla\wedge\tilde{\boldsymbol{E}}\right)+\tilde{m}_g^2\tilde{\mathbf{A}}_e=4\pi\rho_m$$

$$+I4\pi\rho_e+\frac{4\pi}{c}\left(-\tilde{\boldsymbol{J}}_e+I\tilde{\boldsymbol{J}}_m\right)+\frac{1}{c}(1+p)\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{E}}}{\partial t} \quad .$$

şeklinde yazılabilir. Burada son terim Maxwell -benzeri denklemlere ilave ek terim olması açısından bir farklı bakış açısı ve önem arz etmektedir. Ayrıca son denklemde, skaler ve vektörel kısımlar tekrar eşitlendiğinde

$$\begin{aligned}
-I\left\langle \boldsymbol{\nabla},\ \tilde{\boldsymbol{E}}\right\rangle &= I4\pi\rho_e+I\tilde{m}_g^2\varphi_e,\\
-\left\langle \boldsymbol{\nabla},\ \tilde{\boldsymbol{H}}\right\rangle &= 4\pi\rho_m,\\
I\boldsymbol{\nabla}\wedge\ \tilde{\boldsymbol{E}} &= -\frac{I}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}+\frac{I}{c}4\pi\tilde{\boldsymbol{J}}_m,\\
\boldsymbol{\nabla}\wedge\ \tilde{\boldsymbol{H}} &= -\frac{p}{c}\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{E}}}{\partial t}+\frac{(1+p)}{c}\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{E}}}{\partial t}-\frac{4\pi}{c}\tilde{\boldsymbol{J}}_e-\tilde{m}_g^2\tilde{\boldsymbol{A}}_e
\end{aligned} \quad . \tag{3.59}$$

biçiminde eliptik bikuaterniyonik genelleştirilmiş gravitasyonel Maxwell-benzeri denklemler elde edilir. (2.8) denkleminde verilen eliptik bikuaterniyonik iç çarpım yardımıyla (3.59) denkleminin son iki denklemleri dikkate alınarak

$$\left\langle \boldsymbol{\nabla},\left(\boldsymbol{\nabla}\wedge\ \tilde{\boldsymbol{E}}\right)\right\rangle_Q=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\nabla}\overline{\left(\boldsymbol{\nabla}\wedge\tilde{\boldsymbol{E}}\right)}+\left(\boldsymbol{\nabla}\wedge\tilde{\boldsymbol{E}}\right)\overline{\boldsymbol{\nabla}}\right)=-\frac{1}{c}\frac{\partial\left\langle \boldsymbol{\nabla},\tilde{\boldsymbol{H}}\right\rangle}{\partial t}+I4\pi\rho_m\left\langle \boldsymbol{\nabla},\tilde{\boldsymbol{J}}_m\right\rangle$$

$$\left\langle \boldsymbol{\nabla},\left(\boldsymbol{\nabla}\times\ \tilde{\boldsymbol{H}}\right)\right\rangle_Q=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\nabla}\overline{\left(\boldsymbol{\nabla}\times\tilde{\boldsymbol{H}}\right)}+\left(\boldsymbol{\nabla}\times\tilde{\boldsymbol{H}}\right)\overline{\boldsymbol{\nabla}}\right)=-\frac{p}{c}\frac{\partial\left\langle \boldsymbol{\nabla},\tilde{\boldsymbol{E}}\right\rangle}{\partial t}+\frac{(1+p)}{c}\frac{\partial\left\langle \boldsymbol{\nabla},\tilde{\boldsymbol{E}}\right\rangle}{\partial t}$$

$$-\frac{4\pi}{c}\rho_m\left\langle \boldsymbol{\nabla},\tilde{\boldsymbol{J}}_e\right\rangle-\tilde{m}_g^2\left\langle \boldsymbol{\nabla},\tilde{\boldsymbol{A}}_e\right\rangle$$

bağıntıları yazılabilir. Ayrıca (3.59) denklemindeki eşitliklerden yararlanarak,

$$\begin{aligned}
&-\frac{4\pi}{c}\frac{\partial\rho_m}{\partial t}+\frac{4\pi}{c}\ \left\langle \boldsymbol{\nabla},\tilde{\boldsymbol{J}}_m\right\rangle=0,\\
&-\frac{p}{c}\frac{\partial\left(4\pi\rho_e+m_g^2\varphi_e\right)}{\partial t}+\frac{1}{c}\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{E}}}{\partial t}-\frac{4\pi}{c}\ \left\langle \boldsymbol{\nabla},\tilde{\boldsymbol{J}}\right\rangle_e-\tilde{m}_g^2\tilde{\boldsymbol{A}}_e=0
\end{aligned}$$

biçiminde eliptik anlamda süreklilik denklemleri elde edilir.

Vektör potansiyel ve skaler potansiyeller sırasıyla $\tilde{\boldsymbol{A}}_m$ ve φ_m olmak üzere gravity göz önünde bulundurularak Maxwell-benzeri denklemleri simetrik hale getirmek için eklenir. Sonuç olarak $\tilde{\boldsymbol{E}}$ ve $\tilde{\boldsymbol{H}}$ alanları

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{E}} &= -\boldsymbol{\nabla}\varphi_e - \frac{1}{c}\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{A}}_e}{\partial t} - \left(\boldsymbol{\nabla} \wedge \tilde{\boldsymbol{A}}_m\right)\\ \tilde{\boldsymbol{H}} &= -\boldsymbol{\nabla}\varphi_m + \frac{I^2}{c}\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{A}}_m}{\partial t} + \left(\boldsymbol{\nabla} \wedge \tilde{\boldsymbol{A}}_e\right)\end{aligned}$$

şeklinde bir yaklaşım ile ifade edilmelidir. Ayrıca yeni potansiyeller ile ilişkili olarak eliptik anlamda Lorentz koşulları

$$\begin{aligned}&\frac{I}{c}\frac{\partial \varphi_m}{\partial t} + I\left\langle \boldsymbol{\nabla}, \tilde{\boldsymbol{A}}_m\right\rangle = 0\\ &\frac{I^2}{c}\frac{\partial \varphi_e}{\partial t} - \left\langle \boldsymbol{\nabla}, \tilde{\boldsymbol{A}}_e\right\rangle = 0\end{aligned} \tag{3.60}$$

dir. Gravitasyonel genelleştirilmiş eliptik bikuaterniyonik potansiyel üzerine eliptik bikuaterniyonik diferensiyel operatörünün etkisi

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{D}}^{*} \otimes \tilde{\mathbf{A}}_g &= \left(-\frac{I}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\right) \otimes \left(-\varphi_m - I\varphi_e + \tilde{\boldsymbol{A}}_e - I\tilde{\boldsymbol{A}}_m\right)\\ &= \frac{I}{c}\frac{\partial \varphi_m}{\partial t} + \frac{p}{c}\frac{\partial \varphi_e}{\partial t} - \frac{I}{c}\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{A}}_e}{\partial t} + \frac{p}{c}\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{A}}_m}{\partial t} - \boldsymbol{\nabla}\varphi_m - I\boldsymbol{\nabla}\varphi_e - \left\langle \boldsymbol{\nabla}, \tilde{\boldsymbol{A}}_e\right\rangle + \boldsymbol{\nabla} \wedge \tilde{\boldsymbol{A}}_e\\ &\quad + I\left\langle \boldsymbol{\nabla}, \tilde{\boldsymbol{A}}_m\right\rangle - I\boldsymbol{\nabla} \wedge \tilde{\boldsymbol{A}}_m\end{aligned}$$

biçimindedir. Bu durumda (3.60) denkleminden hemen önce verilen gravitoelektrik alan ve gravitomanyetik alan denklemleri kullanılarak,

$$\tilde{\mathbf{D}}^{*} \otimes \tilde{\mathbf{A}}_g = \tilde{\boldsymbol{H}} + I\tilde{\boldsymbol{E}}$$

elde edilir. Eliptik bikuaterniyonik diferensiyel operatörünün son denklem üzerine tekrar uygulanması ile;

$$\tilde{\mathbf{D}} \otimes \tilde{\mathbf{D}}^{*} \otimes \tilde{\mathbf{A}}_g = \tilde{\mathbf{D}} \otimes \tilde{\mathbf{A}}$$

yazılabilir. $\tilde{\mathbf{D}} \otimes \tilde{\mathbf{D}}^{*}$ operatörü

$$\tilde{\mathbf{D}} \otimes \tilde{\mathbf{D}}^* = \tilde{\mathbf{D}}^* \otimes \tilde{\mathbf{D}} = \square = \left(\frac{I}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \right) \otimes \left(-\frac{I}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \right) = \frac{|p|}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \boldsymbol{\nabla}^2$$

özelliğini sağlar. Buradan $\square$, d' Alembertian operatörü ile

$$\square \otimes \tilde{\mathbf{A}}_g = \tilde{\mathbf{J}} - \tilde{m}_g^2 \tilde{\mathbf{A}}_e \qquad (3.61)$$

denklemi elde edilir. Burada $\tilde{\mathbf{A}}$, $\tilde{\mathrm{J}}$ ve $\tilde{\mathbf{A}}_e$ nicelikleri eliptik sayılardır. Daha sonra (3.61) denkleminden

$$\square \otimes \tilde{\mathbf{A}}_g + \tilde{m}_g^2 \tilde{\mathbf{A}}_e = \tilde{\mathbf{J}} \qquad (3.62)$$

şeklindeki gravitasyonel dalga denklemine ulaşılır. Bu dalga denklemi genelleştirilmiş eliptik Proca-tip denklemdir. (3.62) denkleminin sol tarafı daha açık olarak;

$$\left(\frac{|p|}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \otimes \left(\left(-\varphi_m - I\varphi_e \right) + \left(\tilde{\boldsymbol{A}}_e - I\tilde{\boldsymbol{A}}_m \right) \right) + \tilde{m}_g^2 \left(-I\varphi_e + \tilde{\boldsymbol{A}}_e \right)$$

şeklindedir. Son ifade (3.62) denkleminde yerine yazılırsa

$$-\frac{|p|}{c^2}\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial t^2} - I\frac{|p|}{c^2}\frac{\partial^2\varphi_e}{\partial t^2} + \frac{|p|}{c^2}\frac{\partial^2\tilde{\boldsymbol{A}}_e}{\partial t^2} - \frac{|p|}{c^2} I \frac{\partial^2\tilde{\boldsymbol{A}}_m}{\partial t^2} + \nabla^2\varphi_m + I\nabla^2\varphi_e - \nabla^2\tilde{\boldsymbol{A}}_e$$
$$+ I\nabla^2\tilde{\boldsymbol{A}}_m + m_g^2\left(-I\varphi_e + \tilde{\boldsymbol{A}}_e \right) = 4\pi\left(\rho_m + I\rho_e \right) + \frac{4\pi}{c}\left(-\tilde{\boldsymbol{J}}_e + I\tilde{\boldsymbol{J}}_m \right) + \frac{(1+p)}{c}\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{E}}}{\partial t}.$$

denklemi elde edilir. Buradan aynı cinsten skaler ve vektörel ifadeler eşleştirildiğinde;

$$I\frac{|p|}{c^2}\frac{\partial^2\varphi_e}{\partial t^2} + I\nabla^2\varphi_e - I\tilde{m}_g^2\varphi_e = I4\pi\rho_e,$$
$$-\frac{|p|}{c^2}\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial t^2} + \nabla^2\varphi_m = 4\pi\rho_m,$$
$$-\frac{|p|}{c^2} I \frac{\partial^2\tilde{\boldsymbol{A}}_m}{\partial t^2} + I\nabla^2\tilde{\boldsymbol{A}}_m = I\frac{4\pi}{c}\tilde{\boldsymbol{J}}_m,$$
$$\frac{|p|}{c^2}\frac{\partial^2\tilde{\boldsymbol{A}}_e}{\partial t^2} - \nabla^2\tilde{\boldsymbol{A}}_e + \tilde{m}_g^2\tilde{\boldsymbol{A}}_e = -\frac{4\pi}{c}\tilde{\boldsymbol{J}}_e + \frac{(1+p)}{c}\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{E}}}{\partial t}$$

denklemleri elde edilir. Eğer $\rho_m, \varphi_m, \tilde{\boldsymbol{J}}_m, \tilde{\boldsymbol{A}}_m$ terimleri yoksa (monopol tek kutup olmadığında) bu durumda $\tilde{\mathbf{J}}_e$ gravitoelektrik yoğunluğu,

$$\tilde{\mathbf{J}}_e = I4\pi\rho_e - \frac{4\pi}{c}\tilde{\boldsymbol{J}}_e + \frac{(1+p)}{c}\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{E}}}{\partial t}$$

olur. O halde (3.62) denklemi

$$\square\otimes\tilde{\mathbf{A}} + \tilde{m}_g^2\tilde{\mathbf{A}}_e = \tilde{\mathbf{J}}_e$$

şeklinde ifade edilir. Kaynak yok ise $\tilde{\mathbf{J}}_e = 0$ olacağından, yukarıdaki denklem

$$\square\otimes\tilde{\mathbf{A}} + \tilde{m}_g^2\tilde{\mathbf{A}}_e = 0$$

olup eliptik anlamda Klein-Gordon denklemini ifade eder. Böylece bu denklem alan değişkenleri için

$$\begin{aligned} -I\left|p\right| + \frac{\partial^2\varphi_e}{\partial t^2} + I\nabla^2\varphi_e - I\tilde{m}_g^2\varphi_e &= 0 \\ \left|p\right|\frac{\partial^2\tilde{\boldsymbol{A}}_e}{\partial t^2} - \nabla^2\tilde{\boldsymbol{A}}_e + \tilde{m}_g^2\tilde{\boldsymbol{A}}_e &= 0 \end{aligned} \tag{3.63}$$

şeklinde ifade edilir. Sonuç olarak elde edilen bu denklemler graviton için eliptik bikuaterniyonik Klein-Gordon denkleminin eliptik ifadeleridir. Dolayısıyla burada eliptik bikuaterniyonlar aracılığıyla gravitoelektromanyetizmin genelleştirilmiş tüm denklemleri ifade edilmiştir. Bu sayede bikuaterniyonlar ile yapılan çalışmaları da kapsayan başarılı sonuçlar elde edilmiştir.

Sonuç: Özel olarak, $I^2 = p = -1$ olması durumunda ise;

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2\varphi_e}{\partial t^2} + \nabla^2\varphi_e - \tilde{m}_g^2\varphi_e &= 0 \\ \frac{\partial^2\tilde{\boldsymbol{A}}_e}{\partial t^2} - \nabla^2\tilde{\boldsymbol{A}}_e + \tilde{m}_g^2\tilde{\boldsymbol{A}}_e &= 0. \end{aligned} \tag{3.64}$$

şeklindeki graviton için bikuaterniyonik Klein-Gordon denklemlerine indirgenir [55]. Eliptik bikuaterniyonlar ile önerilen bu formülasyon daha genel eliptik çözüm sunar ve (3.64) denklemini de kapsayan kullanışlı bir yöntemdir.

3.5. Eliptik Bikuaterniyonlar ile Gravitoelektromanyetik Alanda Enerji Korunumu

Elektromanyetik alanlar, uzayda enerji ve bilgiyi taşıyan kompleks olaylardır. Onlar maddeden ve uzaydan enerji aktarırlar. Enerji manyetik bir alanda depolanır. Elektromanyetik dalgalar şu amaçlarla kullanılabilir: bilgi iletmek, bir ortamdan bilgi edinme veya enerji iletir. Enerjinin uzun mesafelerde bilgileri taşımak için elektromanyetik alanlar ile ifade edilmesi gerekir. Herhangi bir ortamın yokluğunda da bu gerçekleşebilir [71]. Proca-tip gravitoelektromanyetik denklemler vasıtasıyla hareket eden elektromanyetik dalga ile ilişkili elektrik ve manyetik alan yoğunlukları arasında $\mathbb{P}^* = \tilde{\boldsymbol{H}} - I\tilde{\boldsymbol{E}}$ şeklinde tanımlanmak üzere aşağıdaki denklem önerilir:

$$-\tilde{\mathbb{P}}^* \otimes \left(\square \otimes \tilde{\mathbb{P}} + \tilde{m}_g^2 \tilde{\boldsymbol{A}}_e \right) = -\tilde{\mathbb{P}}^* \otimes \tilde{\mathbf{J}} \tag{3.65}$$

Bu denklem daha açık olarak yazılırsa eşitliğin sol tarafı

$$\left(-\tilde{\boldsymbol{H}} + I\tilde{\boldsymbol{E}} \right) \otimes \left(\frac{I^2}{c} \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{E}}}{\partial t} - \left\langle \boldsymbol{\nabla}, \tilde{\boldsymbol{H}} \right\rangle + \boldsymbol{\nabla} \wedge \tilde{\boldsymbol{H}} + I \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{H}}}{\partial t} - \left\langle \boldsymbol{\nabla}, \tilde{\boldsymbol{E}} \right\rangle + \boldsymbol{\nabla} \wedge \tilde{\boldsymbol{E}} \right) + \tilde{m}_g^2 \tilde{\boldsymbol{A}}_e \right)$$

şeklindedir. Buradan yukarıdaki denklemi açıkça

$$
\begin{aligned}
&\frac{I^2}{c}\left\langle \tilde{\boldsymbol{H}},\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{E}}}{\partial t}\right\rangle-\frac{I^2}{c}\tilde{\boldsymbol{H}}\wedge\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{E}}}{\partial t}+\tilde{\boldsymbol{H}}\left\langle \boldsymbol{\nabla},\tilde{\boldsymbol{H}}\right\rangle+\left\langle \tilde{\boldsymbol{H}},\left(\boldsymbol{\nabla}\wedge\tilde{\boldsymbol{H}}\right)\right\rangle-\tilde{\boldsymbol{H}}\wedge\left(\boldsymbol{\nabla}\wedge\tilde{\boldsymbol{H}}\right)\\
&+\frac{I}{c}\left\langle \tilde{\boldsymbol{H}},\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{H}}}{\partial t}\right\rangle-\frac{I}{c}\tilde{\boldsymbol{H}}\wedge\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{H}}}{\partial t}+I\tilde{\boldsymbol{H}}\left\langle \boldsymbol{\nabla},\tilde{\boldsymbol{E}}\right\rangle+I\left\langle \tilde{\boldsymbol{H}},\left(\boldsymbol{\nabla}\wedge\tilde{\boldsymbol{E}}\right)\right\rangle-I\tilde{\boldsymbol{H}}\wedge\left(\boldsymbol{\nabla}\wedge\tilde{\boldsymbol{E}}\right)\\
&-I\tilde{\boldsymbol{H}}\wedge\left(\boldsymbol{\nabla}\wedge\tilde{\boldsymbol{E}}\right)+\tilde{m}_g^2\left\langle \tilde{\boldsymbol{H}},\tilde{\boldsymbol{A}}_e\right\rangle-\tilde{m}_g^2\left(\tilde{\boldsymbol{H}}\wedge\tilde{\boldsymbol{A}}_e\right)-\frac{I^3}{c}\left\langle \tilde{\boldsymbol{E}},\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{E}}}{\partial t}\right\rangle+\frac{I^3}{c}\tilde{\boldsymbol{E}}\wedge\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{E}}}{\partial t}\\
&-I\tilde{\boldsymbol{E}}\left\langle \boldsymbol{\nabla},\tilde{\boldsymbol{H}}\right\rangle-\left\langle \tilde{\boldsymbol{E}},\left(\boldsymbol{\nabla}\wedge\tilde{\boldsymbol{H}}\right)\right\rangle+I\tilde{\boldsymbol{E}}\wedge\left(\boldsymbol{\nabla}\wedge\tilde{\boldsymbol{H}}\right)+I^2\left(\frac{-1}{c}\left\langle \tilde{\boldsymbol{E}},\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{H}}}{\partial t}\right\rangle+\frac{1}{c}\tilde{\boldsymbol{E}}\wedge\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{H}}}{\partial t}\right.\\
&\left.-\tilde{\boldsymbol{E}}\left\langle \boldsymbol{\nabla},\tilde{\boldsymbol{E}}\right\rangle-\left\langle \tilde{\boldsymbol{E}},\left(\boldsymbol{\nabla}\wedge\tilde{\boldsymbol{E}}\right)\right\rangle+\tilde{\boldsymbol{E}}\wedge\left(\boldsymbol{\nabla}\wedge\tilde{\boldsymbol{E}}\right)\right)-I\tilde{m}_g^2\left\langle \tilde{\boldsymbol{E}},\tilde{\boldsymbol{A}}_e\right\rangle+I\tilde{m}_g^2\tilde{\boldsymbol{E}}\wedge\tilde{\boldsymbol{A}}_e=-\tilde{\mathbb{P}}^*\otimes\tilde{\mathbf{J}}
\end{aligned}
\tag{3.66}
$$

şeklindedir. (3.65) denkleminin sağ tarafı ise,

$$
-\tilde{\mathbb{P}}^*\otimes\tilde{\mathbf{J}}=\left(-\tilde{\boldsymbol{H}}+I\tilde{\boldsymbol{E}}\right)\otimes\left(4\pi\left(\rho_e+I\rho_m\right)+\frac{4\pi}{c}\left(-\tilde{\boldsymbol{J}}_e+I\tilde{\boldsymbol{J}}_m\right)+\frac{(1+p)}{c}\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{E}}}{\partial t}\right)
\tag{3.67}
$$

biçiminde olduğundan (3.67) denkleminin sağ tarafı kuaterniyonik çarpım yapılarak daha açık bir biçimde

$$
\begin{aligned}
&-4\pi\left(\rho_e+I\rho_m\right)\tilde{\boldsymbol{H}}-\frac{4\pi}{c}\left\langle \tilde{\boldsymbol{H}},\tilde{\boldsymbol{J}}_e\right\rangle+\frac{4\pi}{c}\left(\tilde{\boldsymbol{H}}\wedge\tilde{\boldsymbol{J}}_e\right)+\frac{I4\pi}{c}\left\langle \tilde{\boldsymbol{H}},\tilde{\boldsymbol{J}}_m\right\rangle-\frac{I4\pi}{c}\left(\tilde{\boldsymbol{H}}\wedge\tilde{\boldsymbol{J}}_m\right)+\frac{(1+p)}{c}\left\langle \tilde{\boldsymbol{H}},\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{E}}}{\partial t}\right\rangle\\
&-\frac{(1+p)}{c}\tilde{\boldsymbol{H}}\wedge\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{E}}}{\partial t}+I4\pi\rho_e\tilde{\boldsymbol{E}}+I^2 4\pi\rho_m\tilde{\boldsymbol{E}}+\frac{4\pi}{c}I\left\langle \tilde{\boldsymbol{E}},\tilde{\boldsymbol{J}}_e\right\rangle-\frac{4\pi}{c}I\tilde{\boldsymbol{E}}\wedge\tilde{\boldsymbol{J}}_e-I^2\frac{4\pi}{c}\left\langle \tilde{\boldsymbol{E}},\tilde{\boldsymbol{J}}_m\right\rangle+I^2\frac{4\pi}{c}\tilde{\boldsymbol{E}}\wedge\tilde{\boldsymbol{J}}_m\\
&-I\frac{(1+p)}{c}\left\langle \tilde{\boldsymbol{E}},\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{E}}}{\partial t}\right\rangle+I\frac{(1+p)}{c}\tilde{\boldsymbol{E}}\wedge\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{E}}}{\partial t}
\end{aligned}
\tag{3.68}
$$

şeklinde yazılabilir. Skaler ve vektörel kısımlar kendi arasında skaler ve imajiner bileşenlerine ayrılır ve gerekli eşleştirmeler yapılarak (3.66) ve (3.67) denklemlerinden

$$
a)\quad \frac{I^2}{c}\left\langle \tilde{\boldsymbol{H}},\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{E}}}{\partial t}\right\rangle+\left\langle \tilde{\boldsymbol{H}},\left(\boldsymbol{\nabla}\wedge\tilde{\boldsymbol{H}}\right)\right\rangle+\tilde{m}_g^2\left\langle \tilde{\boldsymbol{H}},\tilde{\boldsymbol{A}}_e\right\rangle-\frac{I^2}{c}\left\langle \tilde{\boldsymbol{E}},\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{H}}}{\partial t}\right\rangle-I^2\left\langle \tilde{\boldsymbol{E}},\left(\boldsymbol{\nabla}\wedge\tilde{\boldsymbol{E}}\right)\right\rangle
$$

$$
b)\quad \frac{I}{c}\left\langle \tilde{\boldsymbol{H}},\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{H}}}{\partial t}\right\rangle+I\left\langle \tilde{\boldsymbol{H}},\left(\boldsymbol{\nabla}\wedge\tilde{\boldsymbol{E}}\right)\right\rangle-\frac{I^3}{c}\left\langle \tilde{\boldsymbol{E}},\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{E}}}{\partial t}\right\rangle-I\left\langle \tilde{\boldsymbol{E}},\left(\boldsymbol{\nabla}\wedge\tilde{\boldsymbol{H}}\right)\right\rangle-I\tilde{m}_g^2\left\langle \tilde{\boldsymbol{E}},\tilde{\boldsymbol{A}}_e\right\rangle
$$

ifadeleri yazılabilir. Benzer şekilde (3.66) denkleminin vektörel kısmı için;

$$c)\ \frac{-I^2}{c}\tilde{\boldsymbol{H}}\wedge\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{E}}}{\partial t}+\tilde{\boldsymbol{H}}\left\langle\boldsymbol{\nabla},\tilde{\boldsymbol{H}}\right\rangle-\tilde{\boldsymbol{H}}\wedge\left(\boldsymbol{\nabla}\wedge\tilde{\boldsymbol{H}}\right)-\tilde{m}_g^2\left(\tilde{\boldsymbol{H}}\wedge\tilde{\boldsymbol{A}}_e\right)+\frac{I^2}{c}\tilde{\boldsymbol{E}}\wedge\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{H}}}{\partial t}$$
$$-I^2\tilde{\boldsymbol{E}}\left\langle\boldsymbol{\nabla},\tilde{\boldsymbol{E}}\right\rangle+I^2\tilde{\boldsymbol{E}}\wedge\left(\boldsymbol{\nabla}\wedge\tilde{\boldsymbol{E}}\right)$$

$$d)\ \frac{-I}{c}\tilde{\boldsymbol{H}}\wedge\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{H}}}{\partial t}+I\tilde{\boldsymbol{H}}\left\langle\boldsymbol{\nabla},\tilde{\boldsymbol{E}}\right\rangle-I\tilde{\boldsymbol{H}}\wedge\left(\boldsymbol{\nabla}\wedge\tilde{\boldsymbol{E}}\right)+I^3\tilde{\boldsymbol{E}}\wedge\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{E}}}{\partial t}-I\tilde{\boldsymbol{E}}\left\langle\boldsymbol{\nabla},\tilde{\boldsymbol{H}}\right\rangle$$
$$+I\tilde{\boldsymbol{E}}\wedge\left(\boldsymbol{\nabla}\wedge\tilde{\boldsymbol{H}}\right)+I\tilde{m}_g^2\left(\tilde{\boldsymbol{E}}\wedge\tilde{\boldsymbol{A}}_e\right)$$

yazılabilir. Diğer taraftan (3.68) denklemi için skaler ve vektörel bileşenler imajiner bileşenlerine ayrılarak,

$$e)\ -\frac{4\pi}{c}\left\langle\tilde{\boldsymbol{H}},\tilde{\boldsymbol{J}}_e\right\rangle+\frac{(1+p)}{c}\left\langle\tilde{\boldsymbol{H}},\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{E}}}{\partial t}\right\rangle-I^2\frac{4\pi}{c}\left\langle\tilde{\boldsymbol{E}},\tilde{\boldsymbol{J}}_m\right\rangle$$

$$f)\ I\frac{4\pi}{c}\left\langle\tilde{\boldsymbol{H}},\tilde{\boldsymbol{J}}_m\right\rangle+I\frac{4\pi}{c}\left\langle\tilde{\boldsymbol{E}},\tilde{\boldsymbol{J}}_e\right\rangle-\frac{(1+p)}{c}I\left\langle\tilde{\boldsymbol{E}},\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{E}}}{\partial t}\right\rangle$$

ve vektör kısmı için ise;

$$g)\ -4\pi\rho_e\tilde{\boldsymbol{H}}+\frac{4\pi}{c}\tilde{\boldsymbol{H}}\wedge\tilde{\boldsymbol{J}}_e-\frac{(1+p)}{c}\tilde{\boldsymbol{H}}\wedge\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{E}}}{\partial t}+I^2\tilde{\boldsymbol{E}}\wedge\tilde{\boldsymbol{J}}_m+I^2 4\pi\rho_m\tilde{\boldsymbol{E}}$$

$$h)\ -I4\pi\rho_m\tilde{\boldsymbol{H}}-I\frac{4\pi}{c}\tilde{\boldsymbol{H}}\wedge\tilde{\boldsymbol{J}}_m+I4\pi\rho_e\tilde{\boldsymbol{E}}-I\frac{4\pi}{c}\tilde{\boldsymbol{E}}\wedge\tilde{\boldsymbol{J}}_e+\frac{(1+p)}{c}I\tilde{\boldsymbol{E}}\wedge\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{E}}}{\partial t}$$

denklemleri yazılabilir. Dolayısıyla (3.66) ve (3.68) denklemlerinin ilgili kısımları eşleştirilirse $a)$ ve $e)$ den;

$$\frac{I^2}{c}\left\langle\tilde{\boldsymbol{H}},\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{E}}}{\partial t}\right\rangle+\left\langle\tilde{\boldsymbol{H}},\left(\nabla\wedge\tilde{\boldsymbol{H}}\right)\right\rangle+\tilde{m}_g^2\left\langle\tilde{\boldsymbol{H}},\tilde{\boldsymbol{A}}_e\right\rangle-\frac{I^2}{c}\left\langle\tilde{\boldsymbol{E}},\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{H}}}{\partial t}\right\rangle-I^2\left\langle\tilde{\boldsymbol{E}},\left(\nabla\wedge\tilde{\boldsymbol{E}}\right)\right\rangle=\frac{-4\pi}{c}\left\langle\tilde{\boldsymbol{H}},\tilde{\boldsymbol{J}}_e\right\rangle$$
$$+\frac{(1+p)}{c}\left\langle\tilde{\boldsymbol{H}},\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{E}}}{\partial t}\right\rangle-I^2\frac{4\pi}{c}\left\langle\tilde{\boldsymbol{E}},\tilde{\boldsymbol{J}}_m\right\rangle$$

elde edilir. Yani;

$$\frac{I^2}{c}\left(\left\langle \tilde{\boldsymbol{H}},\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{E}}}{\partial t}\right\rangle-\left\langle \tilde{\boldsymbol{E}},\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{H}}}{\partial t}\right\rangle\right)+\left\langle \boldsymbol{H},\left(\nabla\wedge\tilde{\boldsymbol{H}}\right)\right\rangle-I^2\left\langle \tilde{\boldsymbol{E}},\left(\nabla\times\tilde{\boldsymbol{E}}\right)\right\rangle+\tilde{m}_g^2\left\langle \tilde{\boldsymbol{H}},\tilde{\boldsymbol{A}}_e\right\rangle=\frac{-4\pi}{c}\left\langle \tilde{\boldsymbol{H}},\tilde{\boldsymbol{J}}_e\right\rangle$$
$$+\frac{(1+p)}{c}\left\langle \tilde{\boldsymbol{H}},\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{E}}}{\partial t}\right\rangle-I^2\frac{4\pi}{c}\left\langle \tilde{\boldsymbol{E}},\tilde{\boldsymbol{J}}_m\right\rangle \tag{3.69}$$

dir. Yine $b)$ ve $f)$ denklemlerinin eşitliğinden;

$$\frac{I}{c}\left\langle \tilde{\boldsymbol{H}},\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{H}}}{\partial t}\right\rangle+I\left\langle \tilde{\boldsymbol{H}},\left(\boldsymbol{\nabla}\wedge\tilde{\boldsymbol{E}}\right)\right\rangle-p\frac{I}{c}\left\langle \tilde{\boldsymbol{E}},\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{E}}}{\partial t}\right\rangle-I\left\langle \tilde{\boldsymbol{E}},\left(\boldsymbol{\nabla}\wedge\tilde{\boldsymbol{H}}\right)\right\rangle$$
$$-I\tilde{m}_g^2\left\langle \tilde{\boldsymbol{E}},\tilde{\boldsymbol{A}}_e\right\rangle=I\frac{4\pi}{c}\left\langle \tilde{\boldsymbol{H}},\tilde{\boldsymbol{J}}_m\right\rangle+I\frac{4\pi}{c}\left\langle \tilde{\boldsymbol{E}},\tilde{\boldsymbol{J}}_e\right\rangle-I\frac{(1+p)}{c}\left\langle \tilde{\boldsymbol{E}},\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{E}}}{\partial t}\right\rangle$$

elde edilir. Son denklem

$$\frac{1}{c}\left(\left\langle \tilde{\boldsymbol{H}},\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{H}}}{\partial t}\right\rangle+\left\langle \tilde{\boldsymbol{E}},\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{E}}}{\partial t}\right\rangle\right)+\left\langle \tilde{\boldsymbol{H}},\left(\boldsymbol{\nabla}\wedge\tilde{\boldsymbol{E}}\right)\right\rangle-\left\langle \tilde{\boldsymbol{E}},\left(\boldsymbol{\nabla}\wedge\tilde{\boldsymbol{H}}\right)\right\rangle-\tilde{m}_g^2\left\langle \tilde{\boldsymbol{E}},\tilde{\boldsymbol{A}}_e\right\rangle=\frac{4\pi}{c}\left\langle \tilde{\boldsymbol{H}},\tilde{\boldsymbol{J}}_m\right\rangle$$
$$+\frac{4\pi}{c}\left\langle \tilde{\boldsymbol{E}},\tilde{\boldsymbol{J}}_e\right\rangle \tag{3.70}$$

ifadesine eşittir. Benzer olarak $c)$ ve $g)$ denklemlerinin eşitliğinden;

$$\frac{-I^2}{c}\tilde{\boldsymbol{H}}\wedge\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{E}}}{\partial t}+\tilde{\boldsymbol{H}}\left\langle \boldsymbol{\nabla},\tilde{\boldsymbol{H}}\right\rangle-\tilde{\boldsymbol{H}}\wedge\left(\boldsymbol{\nabla}\wedge\tilde{\boldsymbol{H}}\right)-\tilde{m}_g^2\left(\tilde{\boldsymbol{H}}\wedge\tilde{\boldsymbol{A}}_e\right)+\frac{I^2}{c}\left(\tilde{\boldsymbol{E}}\wedge\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{H}}}{\partial t}\right)$$
$$-I^2\tilde{\boldsymbol{E}}\left\langle \boldsymbol{\nabla},\tilde{\boldsymbol{E}}\right\rangle+I^2\tilde{\boldsymbol{E}}\wedge\left(\boldsymbol{\nabla}\wedge\tilde{\boldsymbol{E}}\right)=-4\pi\rho_e\tilde{\boldsymbol{H}}+\frac{4\pi}{c}\tilde{\boldsymbol{H}}\wedge\tilde{\boldsymbol{J}}_e-\frac{(1+p)}{c}\tilde{\boldsymbol{H}}\wedge\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{E}}}{\partial t} \tag{3.71}$$
$$+I^2\frac{4\pi}{c}\left(\tilde{\boldsymbol{E}}\wedge\tilde{\boldsymbol{J}}_m\right)+I^2 4\pi\rho_m\tilde{\boldsymbol{E}}$$

ve $d)$ ile $h)$ denklemlerinin eşitliğinden;

$$
\begin{aligned}
&\frac{-I}{c}\tilde{\boldsymbol{H}}\wedge\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{H}}}{\partial t}+I\tilde{\boldsymbol{H}}\left\langle\boldsymbol{\nabla},\tilde{\boldsymbol{E}}\right\rangle-I\tilde{\boldsymbol{H}}\wedge\left(\boldsymbol{\nabla}\wedge\tilde{\boldsymbol{E}}\right)+p\frac{I}{c}\tilde{\boldsymbol{E}}\wedge\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{E}}}{\partial t}-I\tilde{\boldsymbol{E}}\left\langle\boldsymbol{\nabla},\tilde{\boldsymbol{H}}\right\rangle\\
&+I\tilde{\boldsymbol{E}}\wedge\left(\boldsymbol{\nabla}\wedge\tilde{\boldsymbol{H}}\right)+I\tilde{m}_g^2\left(\tilde{\boldsymbol{E}}\wedge\tilde{\boldsymbol{A}}_e\right)=-I4\pi\rho_m\tilde{\boldsymbol{H}}-I\frac{4\pi}{c}\tilde{\boldsymbol{H}}\wedge\tilde{\boldsymbol{J}}_m+I4\pi\rho_e\tilde{\boldsymbol{E}}\\
&-I\frac{4\pi}{c}\tilde{\boldsymbol{E}}\wedge\tilde{\boldsymbol{J}}_e+I\frac{(1+p)}{c}\tilde{\boldsymbol{E}}\wedge\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{E}}}{\partial t}.
\end{aligned}
\tag{3.72}
$$

elde edilir. Ayrıca

$$
\begin{aligned}
&\left\langle\tilde{\boldsymbol{H}},\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{H}}}{\partial t}\right\rangle=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\tilde{\boldsymbol{H}}^2\right)\\
&\left\langle\tilde{\boldsymbol{E}},\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{E}}}{\partial t}\right\rangle=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\tilde{\boldsymbol{E}}^2\right)\\
&\left\langle\nabla,\left(\tilde{\boldsymbol{E}}\wedge\tilde{\boldsymbol{H}}\right)\right\rangle=-\left\langle\tilde{\boldsymbol{E}},\left(\boldsymbol{\nabla}\wedge\tilde{\boldsymbol{H}}\right)\right\rangle+\left\langle\tilde{\boldsymbol{H}},\left(\boldsymbol{\nabla}\wedge\tilde{\boldsymbol{E}}\right)\right\rangle.
\end{aligned}
$$

şeklindeki özdeşlikler kullanılarak (3.70) denklemi

$$
\frac{1}{2c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\tilde{\boldsymbol{H}}^2+\tilde{\boldsymbol{E}}^2\right)+\left\langle\boldsymbol{\nabla},\left(\tilde{\boldsymbol{E}}\wedge\tilde{\boldsymbol{H}}\right)\right\rangle-\tilde{m}_g^2\left\langle\tilde{\boldsymbol{E}},\tilde{\boldsymbol{A}}_e\right\rangle=\frac{4\pi}{c}\left(\left\langle\tilde{\boldsymbol{H}},\tilde{\boldsymbol{J}}_m\right\rangle+\left\langle\tilde{\boldsymbol{E}},\tilde{\boldsymbol{J}}_e\right\rangle\right)
$$

biçiminde yazılabilir. Burada eşitliğin her iki tarafı $\frac{-c}{4\pi}$ ile çarpılırsa;

$$
\frac{\partial}{\partial t}\frac{\left(-\tilde{\boldsymbol{H}}^2-\tilde{\boldsymbol{E}}^2\right)}{8\pi}-\frac{c}{4\pi}\left\langle\boldsymbol{\nabla},\left(\tilde{\boldsymbol{E}}\wedge\tilde{\boldsymbol{H}}\right)\right\rangle+\frac{c}{4\pi}\tilde{m}_g^2\left\langle\tilde{\boldsymbol{E}},\tilde{\boldsymbol{A}}_e\right\rangle=-\left\langle\tilde{\boldsymbol{E}},\tilde{\boldsymbol{J}}_e\right\rangle-\left\langle\tilde{\boldsymbol{H}},\tilde{\boldsymbol{J}}_m\right\rangle
$$

denklemi elde edilir. Ayrıca $\frac{-c}{4\pi}$ ile çarpılırsa;

$$
\begin{aligned}
\left\langle\tilde{\boldsymbol{E}},\tilde{\boldsymbol{A}}_e\right\rangle&=\left\langle\left(-\boldsymbol{\nabla}\varphi_e-\frac{1}{c}\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{A}}_e}{\partial t}-\left(\boldsymbol{\nabla}\wedge\tilde{\boldsymbol{A}}_m\right)\right),\tilde{\boldsymbol{A}}_e\right\rangle\\
&=-\left\langle\boldsymbol{\nabla}\varphi_e,\tilde{\boldsymbol{A}}_e\right\rangle-\frac{1}{c}\left\langle\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{A}}_e}{\partial t},\tilde{\boldsymbol{A}}_e\right\rangle-\left\langle\left(\boldsymbol{\nabla}\wedge\tilde{\boldsymbol{A}}_m\right),\tilde{\boldsymbol{A}}_e\right\rangle\\
&=-\left\langle\boldsymbol{\nabla}\varphi_e,\tilde{\boldsymbol{A}}_e\right\rangle-\frac{1}{2c}\frac{\partial\left\langle\tilde{\boldsymbol{A}}_e,\tilde{\boldsymbol{A}}_e\right\rangle}{\partial t}.
\end{aligned}
$$

eşitliği yazılabilir. O halde son denklemde $\left\langle \left(\boldsymbol{\nabla} \wedge \tilde{\boldsymbol{A}}_m\right), \tilde{\boldsymbol{A}}_e \right\rangle$ ifadesi sıfıra eşit ve ayrıca (3.60) denkleminden;

$$\left\langle \boldsymbol{\nabla}\varphi_e, \tilde{\boldsymbol{A}}_e \right\rangle = \left\langle \boldsymbol{\nabla}, \varphi_e \tilde{\boldsymbol{A}}_e \right\rangle - \varphi_e \left\langle \boldsymbol{\nabla}, \tilde{\boldsymbol{A}}_e \right\rangle = \left\langle \boldsymbol{\nabla}, \varphi_e \tilde{\boldsymbol{A}}_e \right\rangle - \frac{p}{c}\varphi_e \frac{\partial \varphi_e}{\partial t}$$

eşitliği yazılabildiğinden,

$$\left\langle \tilde{\boldsymbol{E}}, \tilde{\boldsymbol{A}}_e \right\rangle = -\left\langle \boldsymbol{\nabla}, \varphi_e \tilde{\boldsymbol{A}}_e \right\rangle + \frac{p}{c}\varphi_e \frac{\partial \varphi_e}{\partial t} - \frac{1}{2c}\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{A}}_e^2}{\partial t}$$

denklemi elde edilir. Bu durumda yukarıdaki ifade (3.70) denkleminde yerine yazılırsa

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\left(-\tilde{\boldsymbol{H}}^2 - \tilde{\boldsymbol{E}}\right)}{8\pi} - \frac{c}{4\pi}\left\langle \boldsymbol{\nabla}, \left(\tilde{\boldsymbol{E}} \wedge \tilde{\boldsymbol{H}}\right)\right\rangle + \frac{c}{4\pi}\tilde{m}_g^2 \left\langle \tilde{\boldsymbol{E}}, \tilde{\boldsymbol{A}}_e \right\rangle = -\left\langle \tilde{\boldsymbol{E}}, \tilde{\boldsymbol{J}}_e \right\rangle - \left\langle \tilde{\boldsymbol{H}}, \tilde{\boldsymbol{J}}_m \right\rangle$$

denklemi elde edilir. Böylece son denklem düzenlenerek

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\left(-\tilde{\boldsymbol{H}}^2 - \tilde{\boldsymbol{E}}^2 - \mathrm{I}\,\tilde{m}_g^2 \tilde{\boldsymbol{A}}_e^2 + p\tilde{m}_g^2 \varphi_e^2\right)}{8\pi} - \frac{c}{4\pi}\left\langle \boldsymbol{\nabla}, \left(\tilde{\boldsymbol{E}} \wedge \tilde{\boldsymbol{H}} + \tilde{m}_g^2 \varphi_e \tilde{\boldsymbol{A}}_e\right)\right\rangle = -\left\langle \tilde{\boldsymbol{E}}, \tilde{\boldsymbol{J}}_e \right\rangle$$
$$-\left\langle \tilde{\boldsymbol{H}}, \tilde{\boldsymbol{J}}_m \right\rangle$$

elde edilir. Bu son denklemi $u = \dfrac{-\tilde{\boldsymbol{H}}^2 - \tilde{\boldsymbol{E}}^2 - I\tilde{m}_g^2 \tilde{\boldsymbol{A}}_e^2 + p\tilde{m}_g^2 \varphi_e^2}{8\pi}$ enerji yoğunluğu ve $S = \dfrac{-c\left(\tilde{\boldsymbol{E}} \wedge \tilde{\boldsymbol{H}} + \tilde{m}_g^2 \varphi_e \tilde{\boldsymbol{A}}_e\right)}{4\pi}$ ise Poynting vektör olmak üzere

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \left\langle \boldsymbol{\nabla}, S \right\rangle = -\left\langle \tilde{\boldsymbol{E}}, \tilde{\boldsymbol{J}}_e \right\rangle - \left\langle \tilde{\boldsymbol{H}}, \tilde{\boldsymbol{J}}_m \right\rangle$$

biçiminde ifade edebiliriz. Ayrıca [72]-[74] kaynaklarından bilindiği gibi Poynting vektör ve enerji yoğunluğu (graviton kütlesi ile birlikte) skaler ve vektör potansiyeller ile doğrudan ilişkilidir.

Diğer taraftan (3.59) denklemindeki son iki denklemler sırasıyla $-I\tilde{\boldsymbol{E}}$ ve $\tilde{\boldsymbol{H}}$ ile iç çarpım yapılırsa

$$-I\left\langle \tilde{\boldsymbol{E}},\left(I\tilde{\boldsymbol{E}}\wedge\tilde{\boldsymbol{H}}\right)\right\rangle = \frac{I^2}{c}\left\langle \tilde{\boldsymbol{E}},\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{H}}}{\partial t}\right\rangle-\frac{I^2}{c}4\pi\left\langle \tilde{\boldsymbol{E}},\tilde{\boldsymbol{J}}_m\right\rangle$$

$$\left\langle \tilde{\boldsymbol{H}},\left(\boldsymbol{\nabla}\wedge\tilde{\boldsymbol{H}}\right)\right\rangle = \frac{-I^2}{c}\left\langle \tilde{\boldsymbol{H}},\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{E}}}{\partial t}\right\rangle+\frac{(1+p)}{c}\left\langle \tilde{\boldsymbol{H}},\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{E}}}{\partial t}\right\rangle-\frac{4\pi}{c}\left\langle \tilde{\boldsymbol{H}},\tilde{\boldsymbol{J}}_e\right\rangle-\tilde{m}_g^2\left\langle \tilde{\boldsymbol{H}},\tilde{\boldsymbol{A}}_e\right\rangle$$

yazılabilir. Son denklemlerin toplamından,

$$\left\langle \tilde{\boldsymbol{H}},\left(\boldsymbol{\nabla}\wedge\tilde{\boldsymbol{H}}\right)\right\rangle-I^2\left\langle \tilde{\boldsymbol{E}},\left(\boldsymbol{\nabla}\wedge\tilde{\boldsymbol{E}}\right)\right\rangle=\frac{-I^2}{c}\left\langle \tilde{\boldsymbol{H}},\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{E}}}{\partial t}\right\rangle+\frac{(1+p)}{c}\left\langle \tilde{\boldsymbol{H}},\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{E}}}{\partial t}\right\rangle-\frac{1}{c}4\pi\left\langle \tilde{\boldsymbol{H}},\tilde{\boldsymbol{J}}_e\right\rangle$$
$$-\tilde{m}_g^2\left\langle \tilde{\boldsymbol{H}},\tilde{\boldsymbol{A}}_e\right\rangle+\frac{I^2}{c}\left\langle \tilde{\boldsymbol{E}},\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{H}}}{\partial t}\right\rangle-\frac{I^2}{c}4\pi\left\langle \tilde{\boldsymbol{E}},\tilde{\boldsymbol{J}}_m\right\rangle$$

elde edilir. Son ifade düzenlenirse,

$$\left\langle \tilde{\boldsymbol{H}},\left(\boldsymbol{\nabla}\wedge\tilde{\boldsymbol{H}}\right)\right\rangle-I^2\left\langle \tilde{\boldsymbol{E}},\left(\boldsymbol{\nabla}\wedge\tilde{\boldsymbol{E}}\right)\right\rangle-\frac{I^2}{c}\left\langle \tilde{\boldsymbol{H}},\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{E}}}{\partial t}\right\rangle+\tilde{m}_g^2\left\langle \tilde{\boldsymbol{H}},\tilde{\boldsymbol{A}}_e\right\rangle-\frac{I^2}{c}\left\langle \tilde{\boldsymbol{E}},\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{H}}}{\partial t}\right\rangle=-\frac{4\pi}{c}\left\langle \tilde{\boldsymbol{H}},\tilde{\boldsymbol{J}}_e\right\rangle$$
$$-\frac{I^2}{c}4\pi\left\langle \tilde{\boldsymbol{E}},\tilde{\boldsymbol{J}}_m\right\rangle$$

olur. Görülür ki bu toplam (3.69) denklemine eşittir. (3.71) denklemindeki vektörel kısmının eşitliği için,

$$-\frac{I^2}{c}\tilde{\boldsymbol{H}}\wedge\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{E}}}{\partial t}+\tilde{\boldsymbol{H}}\left\langle \tilde{\boldsymbol{H}},\boldsymbol{\nabla}\right\rangle-\tilde{\boldsymbol{H}}\wedge\left(\boldsymbol{\nabla}\wedge\tilde{\boldsymbol{H}}\right)-\tilde{m}_g^2\left(\tilde{\boldsymbol{H}}\wedge\tilde{\boldsymbol{A}}_e\right)+\frac{I^2}{c}\left(\tilde{\boldsymbol{E}}\wedge\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{H}}}{\partial t}\right)$$
$$-I^2\tilde{\boldsymbol{E}}\left\langle \boldsymbol{\nabla},\tilde{\boldsymbol{E}}\right\rangle+I^2\tilde{\boldsymbol{E}}\wedge\left(\boldsymbol{\nabla}\wedge\tilde{\boldsymbol{E}}\right)=-4\pi\rho_e\tilde{\boldsymbol{H}}+\frac{4\pi}{c}\tilde{\boldsymbol{H}}\wedge\tilde{\boldsymbol{J}}_e-\frac{(1+p)}{c}\tilde{\boldsymbol{H}}\wedge\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{E}}}{\partial t}$$
$$+I^2\left(\tilde{\boldsymbol{E}}\wedge\tilde{\boldsymbol{J}}_m\right)+I^2 4\pi\rho_m\tilde{\boldsymbol{E}}\ .$$

denklemi yazılabilir. Yani bu denklem düzenlenirse,

$$-\frac{I^2}{c}\tilde{\boldsymbol{H}}\wedge\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{E}}}{\partial t}+\frac{I^2}{c}\left(\tilde{\boldsymbol{E}}\wedge\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{H}}}{\partial t}\right)+\tilde{\boldsymbol{H}}\left\langle\nabla,\tilde{\boldsymbol{H}}\right\rangle-\nabla\left\langle\tilde{\boldsymbol{H}},\tilde{\boldsymbol{H}}\right\rangle+\tilde{\boldsymbol{H}}\left\langle\tilde{\boldsymbol{H}},\nabla\right\rangle$$
$$-I^2\tilde{\boldsymbol{E}}\left\langle\nabla,\tilde{\boldsymbol{E}}\right\rangle+I^2\nabla\left\langle\tilde{\boldsymbol{E}},\tilde{\boldsymbol{E}}\right\rangle-I^2\tilde{\boldsymbol{E}}\left\langle\nabla,\tilde{\boldsymbol{E}}\right\rangle=-4\pi\rho_e\tilde{\boldsymbol{H}}+\frac{4\pi}{c}\tilde{\boldsymbol{H}}\wedge\tilde{\boldsymbol{J}}_e-\frac{(1+p)}{c}\tilde{\boldsymbol{H}}\wedge\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{E}}}{\partial t}$$
$$+I^2\left(\tilde{\boldsymbol{E}}\wedge\tilde{\boldsymbol{J}}_m\right)+I^2 4\pi\rho_m\tilde{\boldsymbol{E}}$$

elde edilir. Buradan,

$$-\frac{I^2}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\tilde{\boldsymbol{E}}\wedge\tilde{\boldsymbol{H}}\right)-I^2\left(\tilde{\boldsymbol{E}}\left\langle\nabla,\tilde{\boldsymbol{E}}\right\rangle+\tilde{\boldsymbol{E}}\left\langle\nabla,\tilde{\boldsymbol{E}}\right\rangle-\frac{1}{I^2}\tilde{\boldsymbol{H}}\left\langle\tilde{\boldsymbol{H}},\nabla\right\rangle-\frac{1}{I^2}\tilde{\boldsymbol{H}}\left\langle\tilde{\boldsymbol{H}},\nabla\right\rangle\right)$$
$$+\nabla\left(I^2\tilde{\boldsymbol{E}}^2-\tilde{\boldsymbol{H}}^2\right)-\tilde{m}_g^2\left(\tilde{\boldsymbol{H}}\wedge\tilde{\boldsymbol{A}}_e\right)=-4\pi\rho_e\tilde{\boldsymbol{H}}+\frac{4\pi}{c}\tilde{\boldsymbol{H}}\wedge\tilde{\boldsymbol{J}}_e-\frac{(1+p)}{c}\tilde{\boldsymbol{H}}\wedge\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{E}}}{\partial t}$$
$$+I^2\left(\tilde{\boldsymbol{E}}\wedge\tilde{\boldsymbol{J}}_m\right)+I^2 4\pi\rho_m\tilde{\boldsymbol{E}}$$

olup eşitliğin her iki tarafı 4π ile bölünerek,

$$\frac{-I^2}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\tilde{\boldsymbol{E}}\wedge\tilde{\boldsymbol{H}}\right)+\frac{1}{4\pi}\nabla\left(I^2\tilde{\boldsymbol{E}}^2-\tilde{\boldsymbol{H}}^2\right)+\rho_e\tilde{\boldsymbol{H}}-\frac{1}{c}\tilde{\boldsymbol{H}}\wedge\tilde{\boldsymbol{J}}_e$$
$$+\frac{(1+p)}{4\pi c}\tilde{\boldsymbol{H}}\wedge\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{E}}}{\partial t}-\frac{I^2}{4\pi}\left(\tilde{\boldsymbol{E}}\wedge\tilde{\boldsymbol{J}}_m\right)-I^2\rho_m\tilde{\boldsymbol{E}}-\frac{\tilde{m}_g^2}{4\pi}\left(\tilde{\boldsymbol{H}}\wedge\tilde{\boldsymbol{A}}_e\right)$$
$$=\frac{I^2}{4\pi}\left(\tilde{\boldsymbol{E}}\left\langle\nabla,\tilde{\boldsymbol{E}}\right\rangle+\tilde{\boldsymbol{E}}\left\langle\tilde{\boldsymbol{E}},\nabla\right\rangle-\frac{1}{I^2}\tilde{\boldsymbol{H}}\left\langle\nabla,\tilde{\boldsymbol{H}}\right\rangle-\frac{1}{I^2}\tilde{\boldsymbol{H}}\left\langle\nabla,\tilde{\boldsymbol{H}}\right\rangle\right)$$

elde edilir. Bu ifade graviton ve manyetik monopol için elektromanyetik alanlarda enerji-momentum ilişkisini temsil eder. Diğer taraftan (3.72) denkleminden

$$-\frac{1}{c}\tilde{\boldsymbol{H}}\wedge\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{H}}}{\partial t}+p\tilde{\boldsymbol{E}}\wedge\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{E}}}{\partial t}+\tilde{\boldsymbol{H}}\left\langle\nabla,\tilde{\boldsymbol{E}}\right\rangle-\tilde{\boldsymbol{H}}\wedge\left(\nabla\wedge\tilde{\boldsymbol{E}}\right)-\tilde{\boldsymbol{E}}\left\langle\nabla,\tilde{\boldsymbol{H}}\right\rangle+\tilde{\boldsymbol{E}}\wedge\left(\nabla\wedge\tilde{\boldsymbol{H}}\right)$$
$$+\tilde{m}_g^2\left(\tilde{\boldsymbol{E}}\wedge\tilde{\boldsymbol{A}}_e\right)=-4\pi\rho_m\tilde{\boldsymbol{H}}-\tilde{\boldsymbol{H}}\wedge\tilde{\boldsymbol{J}}_m+4\pi\rho_e\tilde{\boldsymbol{E}}-\frac{4\pi}{c}\left(\tilde{\boldsymbol{E}}\wedge\tilde{\boldsymbol{J}}_e\right)+\frac{(1+p)}{c}\tilde{\boldsymbol{E}}\wedge\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{E}}}{\partial t}$$

dir. Böylece vektörel çarpım özdeşlikleri yardımıyla

$$\frac{-1}{2c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\tilde{\boldsymbol{H}}^2+\tilde{\boldsymbol{E}}^2\right)+\tilde{m}_g^2\left(\tilde{\boldsymbol{E}}\wedge\tilde{\boldsymbol{A}}_e\right)=-4\pi\rho_m\tilde{\boldsymbol{H}}+4\pi\rho_e\tilde{\boldsymbol{E}}-\frac{4\pi}{c}\tilde{\boldsymbol{E}}\wedge\tilde{\boldsymbol{J}}_e-\tilde{\boldsymbol{H}}\wedge\tilde{\boldsymbol{J}}_m$$

denklemi elde edilir.

4. ELİPTİK BİKUATERNİYONLAR ARACILIĞIYLA DİRAC DENKLEMİ VE ALAN DENKLEMLERİ

Hem kuantum mekaniği hem de özel rölativite teorisinin ilkeleriyle uyumlu olan Dirac denklemi, kütleli $\frac{1}{2}$ spinli parçacıkların hareketini ifade etmek için kullanılır. Bu bölümde açısal momentum, Dirac denklemi ve Dirac benzeri yeni denklemin çözümleri eliptik bikuaterniyonlar açısından ele alınmıştır. Daha sonra eliptik bikuaterniyonik uzay-zamanda rotasyonel parçacık için eliptik bikuaterniyonik Dirac denklemi ifade edilmiştir.

4.1. Açısal Momentumun Eliptik Bikuaterniyonik Temsili

Açısal momentum fizikte önemli bir yere sahiptir. Açısal momentum hem klasik hem de kuantum mekaniğinde gözlenebilir önemli bir merkezi rol oynayan unsurdur. Çünkü korunmuş bir niceliktir. Kapalı bir sistemin açısal momentumu sabittir. Parçacıklar orbital açısal momentumu ve içsel açısal momentumu içerebilir. Gezegenlerin yörüngelerinin hesaplanması, katı cisimlerin dönüşü ve daha pek çok şey için gerekli bir niceliktir.

Açısal momentum bilindiği gibi vektörel bir nicelik olup

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{P} \tag{4.1}$$

şeklinde ifade edilir. Burada $\vec{r}$ ve $\vec{P}$ sırasıyla konum ve momentum vektörleridir. Eğer $\vec{r}$ ve $\vec{P}$ vektörleri sırasıyla, eliptik bikuaterniyonik notasyonda yazılırsa aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$\mathbf{R} = r_0 e_0 + I r_1 e_1 + I r_2 e_2 + I r_3 e_3 = r_0 + I\boldsymbol{r},$$
$$\mathbf{P} = P_0 e_0 + I P_1 e_1 + I P_2 e_2 + I P_3 e_3 = P_0 + I\boldsymbol{P} \tag{4.2}$$

Diğer taraftan $\mathbf{M}$; rölativistik eliptik bikuaterniyonik kütle olup

$$\mathbf{M} = \frac{\varepsilon_0}{c^2} e_0 + I\left|\frac{P_1}{v_1}\right| e_1 + I\left|\frac{P_2}{v_2}\right| e_2 + I\left|\frac{P_3}{v_3}\right| e_3 \simeq m_0 e_0 + I m_1 e_1 + I m_2 e_2 + I m_3 e_3 \tag{4.3}$$

biçiminde ifade edilir. Burada $m_0 \simeq \frac{\varepsilon_0}{c^2}$ durgun kütleyi, c ışık hızını ve m_1, m_2 ve m_3 ise hareketli parçacığın kütlesini temsil eder. Ayrıca v_1, v_2 ve v_3 hızına sahip eliptik bikuaterniyonunun birim tabanları e_1, e_2 ve e_3 tür.

Bir başka önemli kavram olan eylemsizlik momenti $\mathbf{I}$ ile gösterilmek üzere eliptik bikuaterniyonik anlamda

$$\mathbf{I} = I_{P_0} e_0 + I\left(I_{P_1} e_1 + I_{P_2} e_2 + I_{P_3} e_3\right) \tag{4.4}$$

biçiminde ifade edilir. Ayrıca

$$\mathbf{I} = \mathbf{M}\, N_{\mathbf{R}} = \mathbf{M}\left(\mathbf{R} \otimes \overline{\mathbf{R}}\right) = \mathbf{M}\left(R_0^{\,2} + R_1^{\,2} + R_2^{\,2} + R_3^{\,2}\right) = \mathbf{M}R^2 \tag{4.5}$$

denklemi sağlanır. Son iki denklem ve (4.3) denklemi göz önünde bulundurularak eliptik bikuaterniyonik eylemsizlik momentinin eliptik bileşenleri $I_{P_0} = m_0 R^2$, $I_{P_1} = m_1 R^2$, $I_{P_2} = m_2 R^2$ ve $I_{P_3} = m_3 R^2$ şeklinde yazılabilir.

Diğer taraftan (4.1) ve (4.2) denklemlerini kullanarak eliptik bikuaterniyonik açısal momentumu;

$$\mathbf{L} = \mathbf{R} \otimes \overline{\mathbf{P}},\ \mathbf{L} = \frac{1}{2}\left(\overline{\mathbf{R}} \otimes \overline{\mathbf{P}} - \mathbf{P} \otimes \mathbf{R}\right) \tag{4.6}$$

şeklinde ifade ederiz. Burada "**R**" konumun eliptik bikuaterniyonik gösterimini temsil ederken, "**P**" momentumun eliptik bikuaterniyonik temsilidir. Böylece (4.6) denkleminden,

$$\begin{aligned}\mathbf{L} = &\left[r_0P_0 + I^2(r_1P_1 + r_2P_2 + r_3P_3)\right]e_0 + I\left[-r_0P_1 + P_0r_1 - Ir_2P_3 + Ir_3P_2\right]e_1 \\ &+ I\left[-r_0P_2 + P_0r_2 - Ir_3P_1 + Ir_1P_3\right]e_2 + I\left[-r_0P_3 + P_0r_3 - Ir_1P_2 + Ir_2P_1\right]e_3\end{aligned}$$

elde edilir. Burada (4.2) tanımı ve (4.6) denklemi göz önünde bulundurularak momentum değerleri yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}\mathbf{L} = &\left[r_0m_0c + I^2(r_1m_1v_1 + r_2m_2v_2 + r_3m_3v_3)\right]e_0 + I\left[-r_0m_1v_1 + m_0cr_1 - Ir_2m_3v_3 - r_3m_2v_2\right]e_1 \\ &+ I\left[-r_0m_2v_2 + m_0cr_2 - Ir_3m_1v_1 + Ir_1m_3v_3\right]e_2 + I\left[-r_0m_3v_3 + m_0cr_3 - Ir_1m_2v_2 + Ir_2m_1v_1\right]e_3\end{aligned}$$

elde edilir. Son denklemi yalın bir şekilde ifade etmek gerekirse eliptik bikuaterniyonik açısal momentum

$$\mathbf{L} = L_0e_0 + IL_1e_1 + IL_2e_2 + IL_3e_3 = L_0 + I\boldsymbol{L} \tag{4.7}$$

şeklinde ifade edilebilir. Ayrıca $L_0 \sim E_0$ eliptik bikuaterniyonik enerji olmak üzere (4.7) denkleminin skaler kısmı

$$E_0 \sim L_0 = r_0P_0 + I^2\langle \boldsymbol{r}, \boldsymbol{P}\rangle \tag{4.8}$$

olup burada t_0P_0 bir parçacığın durgun kütle enerjisini gösterir ve $I^2\langle \boldsymbol{r}, \boldsymbol{P}\rangle$ hareket eden izdüşümsel enerjiyi temsil eder. Diğer taraftan $\boldsymbol{L}$ pür eliptik bikuaterniyonik açısal momentum;

$$\boldsymbol{L} = (r_0\boldsymbol{P} + P_0\boldsymbol{r}) - I\langle \boldsymbol{r}, \boldsymbol{P}\rangle \tag{4.9}$$

şeklinde yazılabilir. Burada ilk terim boylamsal bileşen, ikinci terim ise eliptik bikuaterniyonik momentumun enine bileşenidir. O halde eliptik bikuaterniyonik açısal momentum şu şekilde yazılabilir:

$$\mathbf{L} = E_0 e_0 + I\boldsymbol{L} \tag{4.10}$$

Matematiksel ve fiziksel olarak birkaç yorum yapmak gerekirse;

Eğer $r_0 P_0 = 0$ ise $L_0 = I^2 \langle \boldsymbol{r}, \boldsymbol{P} \rangle$ olup enerjinin üç boyutlu durumu ele alınır. Eğer (4.8) denklemindeki $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{P} = 0$ alınırsa, $E_0 \simeq r_0 P_0$ ve $L_0 \simeq 0$ olacağından bu durumda sadece durgun kütle enerjisine sahip, rotasyon hareketine sahip olmayan bir parçacıktan söz edilebilir. Ayrıca eğer $\boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{P} = 0$ ise bu durum pür enerji olarak ifade edilebilir. Fakat eğer $\langle \boldsymbol{r}, \boldsymbol{P} \rangle = 0$ ise o halde pür açısal momentum ifadesi geçerlidir.

Eliptik bikuaterniyonik açısal momentum; skaler kısmı eliptik bikuaterniyonik enerjiyi ve vektörel kısmı pür açısal momentumu ifade ettiğinden yukarıdaki durumlara bağlı olarak verilen ifadelerin sıfıra eşit olmaması durumunda rotasyonel enerjiye ve açısal momentuma sahip eliptik davranış gösteren bir parçacık veya anti-parçacıktan söz etmek mümkündür.

4.2. Eliptik Bikuaterniyonik Dirac Denklemi

Dalga mekaniğinin klasik mekaniğe göre fazla olayı açıklayabildiği öngörülmüştür. Fakat dalga denklemi Schrödinger'in verdiği elektron spinini kapsamaz. Ayrıca dalga denklemi Lorentz dönüşümlerine göre invaryant (değişmez) değildir. Bunun bir sonucu olarak Schrödinger denklemi hızı, ışık hızına göre çok küçük olan yani düşük enerjili sistemler için geçerlidir.

Dalga mekaniğinin içerisine spini dahil etmek ve Schrödinger denklemi vasıtasıyla taneciklere spin atfedebilmek için ilk kez W. Pauli $\psi_{(\vec{r})}$ dalga fonksiyonunu skaler bir fonksiyon gibi değil, onu her bir bileşeni spinin mümkün yönelmelerinden birine tekabül eden iki bileşenli bir vektör olarak düşünmüştür. Bu yeni dalga fonksiyonu kavramı her ne kadar ilerleme teşkil etse de yeni dalga denklemi için Lorentz dönüşümüne göre invaryant değildir yani rölativist değildir.

1928 yılında P.M.A. Dirac, Schrödinger dalga denklemini hem spini kapsayacak hem de Lorentz dönüşümlerine göre invaryant kalacak şekilde genelleştirmiştir.

Dirac’ın bu kuramından elektronun anti parçacığı olan pozitronun varlığını ortaya koymuş olması kavramsal fizik için en büyük başarılardan biri olduğu bilinmektedir. Enerjinin rölativitedeki ifadesi;

$$E^2 = m_0^{\,2} c^4 + p^2 c^2 \tag{4.11}$$

olarak bilinir. Buradan hareketle serbest bir parçacık için Dirac denklemini yazmak mümkün olmuştur. Bu durumda Hamiltoniyen, $\vec{r}$ ve t den bağımsız, enerji ve momentumun lineer bir ifadesi olarak bilindiği gibi

$$H = c\vec{\alpha}.\vec{P} + \beta mc^2$$

şeklinde yazılabilir. Burada karşılığı bulunma ilkesine göre $\vec{P} = -i\hbar \dfrac{\partial}{\partial t}$ dir. Ayrıca β ve $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$; $\vec{r}, t, \vec{P}$ ve E den bağımsızdır. Bilinen Dirac denklemi

$$\left(E - c\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{P} \rangle - \beta mc^2\right)\psi = 0 \tag{4.12}$$

ya da $E = H = i\hbar \dfrac{\partial}{\partial t}$ olduğundan kuantum operatörler cinsinden

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + i\hbar c\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\nabla} \rangle - \beta mc^2\right)\psi = 0 \tag{4.13}$$

biçiminde ifade edilir. Burada $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ve β , 4×4 matris biçimindedir ve ψ , parçacığın spin dalga fonksiyonudur. E, P ve m sırasıyla enerji, momentum ve kütleyi temsil eder. Şimdi Dirac denkleminin yeni eliptik bikuaterniyonik tanımı serbest elektron için araştırılacaktır. İlk olarak enerjinin rölativitedeki eliptik anlamdaki ifadesini elde etmek amacıyla $\boldsymbol{\alpha}$ ve $\boldsymbol{P}$ pür eliptik bikuaterniyonları

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha} &= \frac{1}{I}\alpha_1 e_1 + \frac{1}{I}\alpha_2 e_2 + \frac{1}{I}\alpha_3 e_3, \\ \boldsymbol{P} &= IP_1 + IP_2 + IP_3 \end{aligned} \tag{4.14}$$

şeklinde tanımlanır. Bu ifadeler ile birlikte enerjinin rölativitedeki eliptik ifadesi

$$\left(E^2 - |p|c^2\left(P_x^{\ 2} + P_y^{\ 2} + P_z^{\ 2}\right) - m^2c^4\right)\psi = 0 \qquad (4.15)$$

elde edilir. Burada aşağıdaki özellikler geçerlidir:

$$\begin{aligned} \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_1 &= 0 \\ \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_2 &= 0 \\ \alpha_3\alpha_1 + \alpha_1\alpha_3 &= 0 \end{aligned} \qquad (4.16)$$

ve

$$\begin{aligned} \alpha_1\beta + \beta\alpha_1 &= 0 \\ \alpha_2\beta + \beta\alpha_2 &= 0 \\ \alpha_3\beta + \beta\alpha_3 &= 0 \end{aligned} \qquad (4.17)$$

dir. Burada $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ve β , 4×4 eliptik Dirac matrisleridir ve bu matrisler

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{p}{\sqrt{|p|}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-p}{\sqrt{|p|}} \\ \frac{p}{\sqrt{|p|}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-p}{\sqrt{|p|}} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -I \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & -I & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\alpha_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{-p}{\sqrt{|p|}} \\ 0 & 0 & \frac{-p}{\sqrt{|p|}} & 0 \\ 0 & \frac{-p}{\sqrt{|p|}} & 0 & 0 \\ \frac{-p}{\sqrt{|p|}} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \tag{4.18}$$

$$\mathrm{I}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dir. Ayrıca bu matrisler için,

$$\alpha_1^{\ 2} = \alpha_2^{\ 2} = \alpha_3^{\ 2} = -p = |p|, \ \ \beta^2 = I_4, \ \ \mathrm{I}_4^{\ 2} = pI_4$$

özellikleri sağlanır. Ayrıca α matrisleri eliptik bikuaterniyonik taban elemanları ile

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -\mathrm{I}_4 e_1, \\ \alpha_2 &= -\mathrm{I}_4 e_2, \\ \alpha_3 &= \mathrm{I}_4 e_3 \end{aligned} \tag{4.19}$$

biçiminde tanımlanabilir. Burada serbest parçacık için eliptik Dirac matrisleri kuaterniyonik taban ile ilişkilendirilmiştir. Serbest parçacık için yeni eliptik bikuaterniyonik Dirac benzeri denklem

$$\left(E - c\left\langle \boldsymbol{P}, \boldsymbol{\alpha} \right\rangle - \mathrm{b}mc^2\right) \otimes e_0 \otimes \boldsymbol{\psi} = 0 \tag{4.20}$$

dir. Burada $\left\langle \boldsymbol{P}, \boldsymbol{\alpha} \right\rangle = P_1\alpha_1 + P_2\alpha_2 + P_3\alpha_3$, $\boldsymbol{\psi} = \psi_0 e_0 + I\psi_1 e_1 + I\psi_2 e_2 + I\psi_3 e_3$ ve $\mathrm{b} = \pm 1$ olup elektron ve pozitron arasındaki çözümü ifade eder. Ayrıca $\boldsymbol{P}$ ile $\boldsymbol{\alpha}$ ifadeleri (4.14) denklemindeki gibi eliptik ifadeler olmak üzere bu ifadeler (4.20) denkleminde yerine yazılırsa;

$$\left(E - cP_1\alpha_1 - cP_2\alpha_2 - cP_3\alpha_3 - mc^2\mathrm{b}\right) \otimes e_0 \otimes \boldsymbol{\psi} = 0 \tag{4.21}$$

dir. Eğer $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ eliptik bikuaterniyonun birim taban elemanları olarak tanımlanırsa

$$\left(\left(E - \mathrm{b}mc^2\right)e_0 + IcP_1e_1 + IcP_2e_2 - IcP_3e_3\right) \otimes e_0 \otimes \boldsymbol{\psi} = 0$$

olarak yazılabilir. Daha sonra (4.21), (4.14) ve $\boldsymbol{\psi}$ eliptik bikuaterniyonik spinör ifadeleri göz önünde bulundurularak son denklemin matris temsili

$$E\begin{bmatrix} \psi_1 \\ I\psi_2 \\ I\psi_3 \\ I\psi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} mc^2 & 0 & \frac{p}{\sqrt{|p|}}cP_1 & -IcP_2 - \frac{p}{\sqrt{|p|}}cP_3 \\ 0 & mc^2 & \frac{-p}{\sqrt{|p|}}cP_3 + IcP_2 & \frac{-p}{\sqrt{|p|}}cP_1 \\ \frac{p}{\sqrt{|p|}}cP_1 & -IcP_2 - \frac{p}{\sqrt{|p|}}cP_3 & -mc^2 & 0 \\ IcP_2 - \frac{p}{\sqrt{|p|}}cP_3 & -\frac{p}{\sqrt{|p|}}cP_1 & 0 & -mc^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ I\psi_2 \\ I\psi_3 \\ I\psi_4 \end{bmatrix}$$

dir. Böylece son ifadede verilen matris yardımıyla

$$\left(E-mc^2\right)\psi_1-\frac{p}{\sqrt{|p|}}IcP_1\psi_3+\left(IcP_2+\frac{p}{\sqrt{|p|}}cP_3\right)I\psi_4=0,$$

$$\left(E-mc^2\right)I\psi_2-\left(\frac{-p}{\sqrt{|p|}}cP_3+IcP_2\right)\psi_3+\frac{p}{\sqrt{|p|}}cP_1I\psi_4=0,$$

$$\left(E+mc^2\right)I\psi_3-\frac{p}{\sqrt{|p|}}cP_1\psi_1+\left(IcP_2+\frac{p}{\sqrt{|p|}}cP_3\right)I\psi_2=0,$$

$$\left(E+mc^2\right)I\psi_4+\frac{p}{\sqrt{|p|}}cP_1\psi_2-\left(IcP_2-\frac{p}{\sqrt{|p|}}cP_3\right)\psi_1=0 \tag{4.22}$$

şeklindeki eliptik Dirac benzeri yeni denklemlerin çözümünü elde ederiz.

Serbest parçacık için (4.20) denklemindeki bilinen Dirac denkleminin uzay-zamandaki elektronun hareketine bağlı olarak enerji momentum ilişkilerini veren eliptik bikuaterniyonik yeni formülü;

$$E\otimes\boldsymbol{\psi}=\left(\alpha\otimes\mathbf{L}+\beta\,\mathbf{I}\,\nu^2\right)\otimes\boldsymbol{\psi} \tag{4.23}$$

şeklinde genişletilebilir. Buradaki α, $\mathbf{L}$, β, $\mathbf{I}$ ve $\boldsymbol{\psi}$ eliptik bikuaterniyonik değişkenlerdir. Ayrıca rotasyonel parçacıklar için $\nu=c\sqrt{\frac{\mathbf{M}}{\mathbf{I}}}$ hızı, c ışık hızına yakın olarak maksimum hız düşünülebilir [75].

Diğer taraftan α eliptik Dirac matrisleri 2×2 tipinde

$$\alpha_0=\begin{bmatrix}\sigma_0 & 0\\ 0 & \sigma_0\end{bmatrix},\quad \alpha_j=\begin{bmatrix}\sigma_j & 0\\ 0 & \sigma_j\end{bmatrix},\quad \left(\forall j=1,2,3\right)$$

$$\beta=\begin{bmatrix}I_2 & 0\\ 0 & -I_2\end{bmatrix},\quad I=\begin{bmatrix}0 & I_2\\ I_2 & 0\end{bmatrix},\quad I^2=p<0 \tag{4.24}$$

biçiminde tanımlanır. Şimdi (4.23) ifadesindeki ilk terim olan $\alpha\otimes\mathbf{L}$, kuaterniyonik çarpım kullanılarak (4.7) ve (4.14)'deki denklemler ile birlikte

$$\boldsymbol{\alpha}\otimes\mathbf{L}=\left(\alpha_0e_0+\frac{1}{I}\alpha_1e_1+\frac{1}{I}\alpha_2e_2+\frac{1}{I}\alpha_3e_3\right)\otimes\left(L_0e_0+IL_1e_1+IL_2e_2+IL_3e_3\right)$$

$$\boldsymbol{\alpha}\otimes\mathbf{L}=\left(\alpha_0L_0-\alpha_1L_1-\alpha_2L_2-\alpha_3L_3\right)e_0+\left(I\alpha_0L_1+\frac{1}{I}L_0\alpha_1+\frac{1}{I^2}\alpha_2L_3\right.$$
$$\left.-\frac{1}{I^2}\alpha_3L_2\right)e_1+\left(I\alpha_0L_2+\frac{1}{I}L_0\alpha_2+\frac{1}{I^2}\alpha_3L_1-\frac{1}{I^2}\alpha_1L_3\right)e_2$$
$$+\left(I\alpha_0L_3+\frac{1}{I}L_0\alpha_3+\frac{1}{I^2}\alpha_1L_2-\frac{1}{I^2}\alpha_2L_1\right)e_3$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu ifade $\forall j=1,2,3$ için daha yalın halde;

$$\boldsymbol{\alpha}\otimes\mathbf{L}=\left[\alpha_0E_0-\frac{1}{I^2}\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{L}\rangle\right]e_0+\left[I\alpha_0L_j+\frac{1}{I}L_0\alpha_j+\frac{1}{I^2}\left(\alpha_j\wedge L_j\right)\right]e_j \tag{4.25}$$

şeklinde yazılabilir. Diğer taraftan (4.23) ifadesindeki $\beta\mathbf{I}\nu^2$ terimi

$$\beta\mathbf{I}\nu^2=\beta\,\mathbf{I}_{P_0}\nu^2e_0+I\beta\,\mathbf{I}_{P_1}\nu^2e_1+I\beta\,\mathbf{I}_{P_2}\nu^2e_2+I\beta\,\mathbf{I}_{P_3}\nu^2e_3 \tag{4.26}$$

olarak ifade edilebilir. Bu durumda (4.25) ve (4.26) eşitlikleri (4.23) denklemindeki rotasyonel eliptik bikuaterniyonik denkleminde yerine yazılırsa, her $j=1,2,3$ için

$$\begin{aligned}&\left(\alpha_0E_0-\frac{1}{I^2}\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{L}\rangle\right)e_0+\left(I\alpha_0L_j+\frac{1}{I}L_0\alpha_j+\frac{1}{I^2}\left(\alpha_j\wedge L_j\right)\right)e_j+\beta\,\mathbf{I}_{P_0}\nu^2e_0\\&+I\beta\,\mathbf{I}_{P_1}\nu^2e_1+I\beta\,\mathbf{I}_{P_2}\nu^2e_2+I\beta\,\mathbf{I}_{P_3}\nu^2e_3=0\end{aligned} \tag{4.27}$$

denklemi elde edilir. Bu durumda (4.27) denklemi hem bikuaterniyonik enerjiyi hem de elektronların açısal momentumunu veren hem skaler hem de vektörel bileşenler içerir. Ayrıca e_0 ’a karşılık gelen reel kısım eliptik Dirac rotasyonel enerjiyi ve e_j ’ye karşılık gelen kısım eliptik rotasyonel momentumu verir. Eliptik bikuaterniyonik spinör

$$\boldsymbol{\psi}=\psi_0e_0+I\psi_1e_1+I\psi_2e_2+I\psi_3e_3=\left(\psi_0+I\psi_1e_1\right)+\left(I\psi_2+I\psi_3e_1\right)e_2=\psi_a+I\psi_be_2 \tag{4.28}$$

biçiminde tanımlanır. Bu spin dalga fonksiyonu iki bileşenli ve dört bileşenli olarak sırasıyla,

$$\Psi = \begin{bmatrix} \psi_a \\ I\psi_b \end{bmatrix}, \ \Psi = \begin{bmatrix} \psi_0 \\ I\psi_1 \\ I\psi_2 \\ I\psi_3 \end{bmatrix}$$

biçiminde yazılabilir. Bu matrisleri eliptik bikuaterniyonik enerji ve açısal momentum çözümlerini tanımlamak için kullanabiliriz. Eliptik bikuaterniyonik rotasyonel Dirac denkleminin enerji çözümleri için (4.27) denklemindeki skaler kısmını

$$\left(\alpha_0 E_0 - \frac{1}{I^2}\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{L} \rangle + \beta \, \mathbf{I}_{P_0} \nu^2 e_0 \right) = 0 \tag{4.29}$$

biçiminde ifade edebiliriz ve (4.24) denklemindeki matrisler yardımıyla matrisel biçimde

$$\begin{bmatrix} \left(E_0 + \mathbf{I}_{P_0}\nu^2\right) & \frac{1}{I}\langle \vec{e}_i, \boldsymbol{L} \rangle \\ \frac{1}{I}\langle \vec{e}_i, \boldsymbol{L} \rangle & \left(E_0 - \mathbf{I}_{P_0}\nu^2\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_a \\ I\psi_b \end{bmatrix} = 0 \tag{4.30}$$

şeklinde yazabiliriz. Burada,

$$\sigma_i = \begin{cases} -Ie_i & , \quad i = 1 \text{ and } i = 2 \\ Ie_i & , \quad\quad\quad\quad\; i = 3 \end{cases} \tag{4.31}$$

ve $\vec{\alpha} = (-e_1, -e_2, e_3)$, $\vec{e}_i$ $\left(\forall i = 1,2,3\right)$, $\vec{e} = (e_1, e_2, -e_3)$ biçiminde tanımlıdır. Bu durumda (4.26) eşitliği

$$\left(E_0 + \mathbf{I}_{P_0}\nu^2\right)\psi_a + \langle \vec{e}_i, \boldsymbol{L} \rangle \psi_b = 0 \tag{4.32}$$

$$I\left(E_0 - \mathbf{I}_{P_0}\nu^2\right)\psi_b + \frac{1}{I}\langle \vec{e}_i, \boldsymbol{L} \rangle \psi_a = 0 \tag{4.33}$$

biçiminde yazılabilir. Elde edilen (4.32) ve (4.33) denklemleri, parçacıkların pozitif ve negatif enerji çözümlerini ifade eder. Bu denklemlerde ψ_a ve ψ_b değerleri enerji ve momentumun bir fonksiyonu olarak alınırsa;

$$\begin{aligned}
&\left(E_0+\mathbf{I}_{P_0}\nu^2\right)\psi_1\left(E_0,\boldsymbol{L}\right)+\left\langle \vec{e}_i,\boldsymbol{L}\right\rangle\psi_3\left(E_0,\boldsymbol{L}\right)=0,\\
&I\left(E_0+\mathbf{I}_{P_0}\nu^2\right)\psi_2\left(E_0,\boldsymbol{L}\right)+\left\langle \vec{e}_i,\boldsymbol{L}\right\rangle\psi_4\left(E_0,\boldsymbol{L}\right)=0,\\
&I\left(E_0-\mathbf{I}_{P_0}\nu^2\right)\psi_3\left(E_0,\boldsymbol{L}\right)+\frac{1}{I}\left\langle \vec{e}_i,\boldsymbol{L}\right\rangle\psi_1\left(E_0,\boldsymbol{L}\right)=0,\\
&I\left(E_0-\mathbf{I}_{P_0}\nu^2\right)\psi_4\left(E_0,\boldsymbol{L}\right)+\left\langle \vec{e}_i,\boldsymbol{L}\right\rangle\psi_2\left(E_0,\boldsymbol{L}\right)=0
\end{aligned} \tag{4.34}$$

ifadeleri elde edilir. Elde edilen bu ifadeler dönen parçacıkların pozitif ve negatif enerji çözümünü temsil eder. Burada elde edilen eliptik çözümler tüm pozitif ve negatif enerji spinörleri parçacık ve anti parçacığa karşılık gelen eliptik bikuaterniyonik tabanlar ile ilişkilendirilmiştir. Bu çözümler eliptik bikuaterniyonik spin ve orbital açısal momentum arasındaki etkileşim ile ilişkilendirilmiş eliptik bikuaterniyonik kuantum dalga spinör fonksiyonunun eliptik davranışını gösterir.

5. ELİPTİK BİKUATERNİYONİK RÖLATİVİSTİK ESNEK ÇARPIŞMA PROBLEMİ

Fiziksel bir olayın nerede gerçekleştiğini üç boyutlu uzayda konum ile ifade ederiz. Ancak bu fiziksel olayın ne zaman gerçekleştiğini açıklamak için bir zaman koordinatı eklenerek dört boyutlu uzay ele alınır. Dört boyutlu uzayda eliptik bikuaterniyonik konum vektörü (3.24) denklemindeki gibi tanımlıdır. Bu durumda $\mathbf{R}$ 'nin sol Hamilton matris temsili

$$\mathbf{H}^{-}\left(\mathbf{R}\right)=R_0\Gamma_0+R_x\Gamma_1+R_y\Gamma_2+R_z\Gamma_3=\begin{bmatrix} R_0 & -R_x & -R_y & -R_z \\ R_x & R_0 & R_z & -R_y \\ R_y & -R_z & R_0 & R_x \\ R_z & R_y & -R_x & R_0 \end{bmatrix} \tag{5.1}$$

şeklinde verilir. $\mathbf{R}$ eliptik bikuaterniyonunun semi-normu

$$\begin{aligned} N_{\mathbf{R}} &= \mathbf{R}\otimes\overline{\mathbf{R}} = \left(ct+I\boldsymbol{r}\right)\otimes\left(ct-I\boldsymbol{r}\right) \\ &= c^2t^2+I^2\left(x^2+y^2+z^2\right) \end{aligned}$$

dir. Ayrıca, I_4 , 4×4 tipinde birim matris olmak üzere $\mathbf{R}$ eliptik bikuaterniyonunun semi-normu matrisel olarak

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^{-}\left(\mathbf{R}\right)\mathbf{H}^{-}\left(\overline{\mathbf{R}}\right)=\mathbf{H}^{-}\left(\overline{\mathbf{R}}\right)\mathbf{H}^{-}\left(\mathbf{R}\right) &= \left(ct\right)^2-|p|\left(x^2+y^2+z^2\right)I_4 \\ &= \tau^2-|p|\left(x^2+y^2+z^2\right)I_4 \end{aligned}$$

şeklindedir. Parçacığın eliptik bikuaterniyonik hızı, τ özel-zamanına göre

$$\mathbf{V}=\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial\tau}=\frac{\partial\left(ct+I\boldsymbol{r}\right)}{\partial\tau}=c\frac{\partial t}{\partial\tau}+I\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\tau} \tag{5.2}$$

şeklinde tanımlanır ki burada $\dfrac{\partial t}{\partial\tau}:=\gamma$ ve $\boldsymbol{v}$ pür eliptik bikuaterniyonik hız olmak üzere (5.2) denklemindeki eliptik bikuaterniyonik hız

$$\mathbf{V}=c\frac{\partial t}{\partial \tau}+I\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \tau}=\gamma\left(c+\boldsymbol{I}\boldsymbol{v}\right)=V_0e_0+V_xe_1+V_ye_2+V_ze_3 \tag{5.3}$$

dir. Ayrıca $\mathbf{V}$ eliptik bikuaterniyonik hızı, matrisel formda ifade etmek gerekirse (3.6) denkleminden

$$\boldsymbol{H}^-\left(\mathbf{V}\right)=V_0\Gamma_0+V_x\Gamma_1+V_y\Gamma_2+V_z\Gamma_3=\begin{bmatrix} V_0 & -V_x & -V_y & -V_z \\ V_x & V_0 & V_z & -V_y \\ V_y & -V_z & V_0 & V_x \\ V_z & V_y & -V_x & V_0 \end{bmatrix}$$

yazılabilir. Bir parçacığın eliptik bikuaterniyonik momentumu ise skaler ve vektörel kısımları açısından şeklinde tanımlanır. Ayrıca (4.2) denkleminde ifade edilen $\mathbf{P}$ eliptik bikuaterniyonik momentumunun sol Hamilton matrisi (3.5)-(3.8) denklemindeki özel gama matrisleri göz önünde bulundurularak

$$\boldsymbol{H}^-\left(\mathbf{P}\right)=P_0\Gamma_0+P_x\Gamma_1+P_y\Gamma_2+P_z\Gamma_3=\begin{bmatrix} P_0 & -P_x & -P_y & -P_z \\ P_x & P_0 & P_z & -P_y \\ P_y & -P_z & P_0 & P_x \\ P_z & P_y & -P_x & P_0 \end{bmatrix} \tag{5.4}$$

biçiminde yazılabilir. Diğer taraftan, bilindiği gibi parçacığın momentumunu hesaplamak için hızı ile kütlesi çarpılır. Bu düşünceden hareketle (5.3) denklemindeki $\mathbf{V}$ eliptik bikuaterniyonik hız ile parçacığın m_0 durgun kütlesini çarparız. Bu durumda eliptik bikuaterniyonik momentum

$$\mathbf{P}=m_0\mathbf{V}=m_0\gamma\left(c+\boldsymbol{I}\boldsymbol{v}\right) \tag{5.5}$$

biçiminde ifade edilir. Diğer taraftan (4.2) ifadesinde verilen $\mathbf{P}$ momentumunun tanımında verilen $\boldsymbol{v}$ pür eliptik bikuaterniyonunun matris temsili

$$\boldsymbol{H}^-\left(\boldsymbol{v}\right)=v_x\Gamma_1+v_y\Gamma_2+v_z\Gamma_3=\begin{bmatrix} 0 & -v_x & -v_y & -v_z \\ v_x & 0 & v_z & -v_y \\ v_y & -v_z & 0 & v_x \\ v_z & v_y & -v_x & 0 \end{bmatrix}$$

dir. Bu durumda (5.4) ifadesi göz önünde bulundurularak (5.5) denkleminin matris temsili

$$\boldsymbol{H}^{-}\left(\mathbf{P}\right)=m_0\gamma I_4\left(cI_4+I\boldsymbol{H}^{-}\left(\mathbf{v}\right)\right)=\begin{bmatrix} m_0\gamma c & -v_x & -v_y & -v_z \\ v_x & m_0\gamma c & v_z & -v_y \\ v_y & -v_z & m_0\gamma c & v_x \\ v_z & v_y & -v_x & m_0\gamma c \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılabilir. Diğer taraftan, (5.5) denkleminde verilen $\mathbf{P}$ momentumundaki $m_0\gamma$ ifadesi $\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$ olmak üzere $m_0\gamma:=m=\dfrac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$ biçiminde tanımlayarak (5.5) denklemini

$$\mathbf{P}=m\left(c+I\mathbf{v}\right)=mc+Im\boldsymbol{v} \tag{5.6}$$

şeklinde ifade edebiliriz. Bu durumda, (4.2) ve (5.6) denklemini göz önünde bulundurarak

$$\mathbf{P}=mc+Im\boldsymbol{v}=P_0+IP_xe_1+IP_ye_2+IP_ze_3=P_0+I\boldsymbol{P} \tag{5.7}$$

ifadesini yazabiliriz. Ayrıca (5.7) denklemini enerji ile de ilişkilendirebiliriz. Bilindiği gibi $E=mc^2$ olduğundan (5.7) denklemi için $\mathbf{P}=\dfrac{E}{c}+I\boldsymbol{P}$ eşitliği yazılabilir.

Diğer taraftan zaman ve konumu birleştiren $\mathbf{R}$ eliptik bikuaterniyonunun kutupsal formda verilen (2.13) denkleminden

$$\mathbf{R}=\sqrt{N_{\mathbf{R}}}\left(\cos\varphi+\boldsymbol{w}_r\sin\varphi\right) \tag{5.8}$$

ifadesi yazılabilir burada

$$\sqrt{N_{\mathbf{R}}}=R,\ \cos\varphi=\frac{\tau}{R},\ \sin\varphi=\frac{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)_{\mathbb{C}_p}}}{\sqrt{|p|}R}=\frac{\sqrt{\langle\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}\rangle_{\mathbb{C}_p}}}{\sqrt{|p|}R} \tag{5.9}$$

ve

$$\boldsymbol{w}_r = \sqrt{|p|}\frac{xe_1 + ye_2 + ze_3}{\sqrt{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)_{\mathbb{C}_p}}} = \sqrt{|p|}\frac{\boldsymbol{r}}{\sqrt{\left(\langle \boldsymbol{r}, \boldsymbol{r} \rangle\right)_{\mathbb{C}_p}}} \tag{5.10}$$

dir. Eliptik anlamdaki Lorentz dönüşümlerini ifade eden Teorem 3.2.1.1 göz önüne alındığında Lorentz dönüşümleri altında $\mathbf{P}$ momentumunun bileşenleri

$$P_0' = \gamma_v \left(P_t - \frac{\sqrt{|p|}}{c^2} P_x v \right) \tag{5.11}$$

$$P_x^{'} = \gamma_v \left(P_x - \frac{\sqrt{|p|}}{|p|} v P_t \right) \tag{5.12}$$

$$P_y' = P_y,\ P_z' = P_z \tag{5.13}$$

şeklinde yazılabilir. Genel olarak esnek çarpışma problemlerinde toplam enerji korunduğundan toplam eliptik bikuaterniyonik momentum korunumunun sabitliği için

$$\mathbf{P} = \sum \mathbf{P}_i = \sum P_{0i} + I \sum \boldsymbol{P}_i = \text{sabit} \tag{5.14}$$

denklemi yazılabilir. Burada vektör kısmının sabitliği, Newtonian üç-momentum korunumunun genellemesi, skaler kısmın sabitliği ise enerji korunumunun göreli genellemesidir [76].

Öyleyse çarpışmadan önce m_1 ve m_2 gibi iki parçacığımız olduğunu varsayalım. Bu parçacıkların eliptik bikuaterniyonik momentumları sırasıyla

$$\mathbf{P}_{m_1} = m_{01}\gamma_u \left(c + I\frac{\sqrt{|p|}}{|p|}\boldsymbol{u} \right) = m_{01}\gamma_u c + I\frac{\sqrt{|p|}}{|p|} m_{01}\gamma_u \boldsymbol{u} = P_{0m_1} + I\boldsymbol{P}_{m_1} = \text{sabit} \tag{5.15}$$

ve

$$\mathbf{P}_{m_2} = m_{02}\gamma_w \left(c + I\frac{\sqrt{|p|}}{|p|}\boldsymbol{w} \right) = m_{02}\gamma_w c + I\frac{\sqrt{|p|}}{|p|} m_{02}\gamma_w \boldsymbol{w} = P_{0m_2} + I\boldsymbol{P}_{m_2} = \text{sabit.} \qquad (5.16)$$

biçiminde tanımlanır. Bu parçacıkların elastik bir çarpışmasından sonra, tanım gereği, parçacıkların sayısı ve durgun kütleleri değişmez. Çarpışmadan önce ve sonra toplam $\mathbf{P}$ eliptik bikuaterniyonik momentumun korunumundan dolayı

$$\mathbf{P}_{m_1} + \mathbf{P}_{m_2} = \mathbf{P}'_{m_1} + \mathbf{P}'_{m_2} \qquad (5.17)$$

denklemi yazılabilir. Bu durumda (5.17) denklemi (5.15) ve (5.16) denklemleri yardımıyla açıkça

$$\begin{aligned} & m_{01}\gamma_u \left(c + I\frac{\sqrt{|p|}}{|p|}\boldsymbol{u} \right) + m_{02}\gamma_w \left(c + I\frac{\sqrt{|p|}}{|p|}\boldsymbol{w} \right) = m_{01}\gamma_{u'} \left(c + I\frac{\sqrt{|p|}}{|p|}\boldsymbol{u}' \right) \\ & + m_{02}\gamma_{w'} \left(c + I\frac{\sqrt{|p|}}{|p|}\boldsymbol{w}' \right) \end{aligned} \qquad (5.18)$$

şeklinde yazılabilir. Çarpışmadan önce ve sonra $\mathbf{P}_{m_1}$ eliptik bikuaterniyonik momentumunun semi-normları sırasıyla

$$\begin{aligned} N_{\mathbf{P}_{m_1}} = \mathbf{P}_{m_1} \otimes \overline{\mathbf{P}}_{m_1} &= m_{01}\gamma_u \left(c + I\frac{\sqrt{|p|}}{|p|}\boldsymbol{u} \right) \otimes m_{01}\gamma_u \left(c - I\frac{\sqrt{|p|}}{|p|}\boldsymbol{u} \right) \\ &= m_{01}{}^2\gamma_u{}^2 \left(c^2 + I^2 \left(\frac{\sqrt{|p|}}{|p|} \right)^2 u^2 \right) \\ &= m_{01}{}^2 c^2 \end{aligned} .$$

$$N_{\mathbf{P}'_{m_1}} = \mathbf{P}'_{m_1} \otimes \overline{\mathbf{P}}'_{m_2} = m_{01}\gamma_{u'} \left(c + I\frac{\sqrt{|p|}}{|p|}\boldsymbol{u}' \right) \otimes m_{01}\gamma_{u'} \left(c - I\frac{\sqrt{|p|}}{|p|}\boldsymbol{u}' \right) = m_{01}{}^2 c^2$$

dir. Diğer taraftan $\mathbf{P}_{m_2}$ için de benzer olarak

$$N_{\mathbf{P}_{m_2}} = \mathbf{P}_{m_2} \otimes \overline{\mathbf{P}}_{m_2} = m_{02}\gamma_w \left(c + I\frac{\sqrt{|p|}}{|p|}\boldsymbol{w} \right) \otimes m_{02}\gamma_w \left(c - I\frac{\sqrt{|p|}}{|p|}\boldsymbol{w} \right) = m_{02}{}^2 c^2$$

ve

$$N_{\mathbf{P}'_{m_2}} = \mathbf{P}'_{m_2} \otimes \overline{\mathbf{P}}'_{m_2} = m_{01}\gamma_{u'} \left(c + I\frac{\sqrt{|p|}}{|p|}\boldsymbol{w}' \right) \otimes m_{01}\gamma_{u'} \left(c - I\frac{\sqrt{|p|}}{|p|}\boldsymbol{w}' \right) = m_{02}{}^2 c^2$$

dir. Çarpışmadan önce ve sonra eliptik bikuaterniyonik $\mathbf{P}_{m_1}$ ve $\mathbf{P}_{m_2}$ momentumlarının semi-normları korunur. Dolayısıyla çarpışmadan önce ve sonra toplam eliptik bikuaterniyonik momentum aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_{m_1} + \mathbf{P}_{m_2} = m_{01}\gamma_u \left(c + I\frac{\sqrt{|p|}}{|p|}\boldsymbol{u} \right) + m_{02}\gamma_w \left(c + I\frac{\sqrt{|p|}}{|p|}\boldsymbol{w} \right)$$

Böylece $\mathbf{P}$ toplam eliptik bikuaterniyonik momentumun semi-normu için de benzer işlemler yapılarak

$$\begin{aligned} N_{\mathbf{P}} &= \mathbf{P} \otimes \overline{\mathbf{P}} \\ &= \left(\mathbf{P}_{m_1} + \mathbf{P}_{m_2}\right) \otimes \left(\overline{\mathbf{P}}_{m_1} + \overline{\mathbf{P}}_{m_2}\right) \\ &= \mathbf{P}_{m_1} \otimes \overline{\mathbf{P}}_{m_1} + \mathbf{P}_{m_1} \otimes \overline{\mathbf{P}}_{m_2} + \mathbf{P}_{m_2} \otimes \overline{\mathbf{P}}_{m_1} + \mathbf{P}_{m_2} \otimes \overline{\mathbf{P}}_{m_2} \end{aligned}$$

denklemi yazılabilir. O halde son denklemden

$$N_{\mathbf{P}} = N_{\mathbf{P}_{m_1}} + N_{\mathbf{P}_{m_2}} + \mathbf{P}_{m_1} \otimes \overline{\mathbf{P}}_{m_2} + \mathbf{P}_{m_2} \otimes \overline{\mathbf{P}}_{m_1}$$

elde edilir. Çarpışmadan sonraki $\mathbf{P}'$ toplam eliptik bikuaterniyonik momentumunun semi-normu için de benzer işlemler yapılarak

$$N_{\mathbf{P}'} = N_{\mathbf{P}'_{m_1}} + N_{\mathbf{P}'_{m_2}} + \mathbf{P}'_{m_1} \otimes \overline{\mathbf{P}}'_{m_2} + \mathbf{P}'_{m_2} \otimes \overline{\mathbf{P}}'_{m_1}$$

denklemi elde edilir. Çarpışmadan önce ve sonra toplam momentum değişmediğinden,

$$N_{\mathbf{P}} = N_{\mathbf{P}'} \tag{5.19}$$

dir. Bu durumda son denklemi açıkça

$$N_{\mathbf{P}_{m_1}} + N_{\mathbf{P}_{m_2}} + \mathbf{P}_{m_1} \otimes \overline{\mathbf{P}}_{m_2} + \mathbf{P}_{m_2} \otimes \overline{\mathbf{P}}_{m_1} = N_{\mathbf{P}'_{m_1}} + N_{\mathbf{P}'_{m_2}} + \mathbf{P}'_{m_1} \otimes \overline{\mathbf{P}}'_{m_2} + \mathbf{P}'_{m_2} \otimes \overline{\mathbf{P}}'_{m_1}$$

şeklinde yazabiliriz. Böylece yukarıdaki denklem, çarpışmadan önce ve sonra momentum korunduğundan (5.19) denklemi gereği

$$\mathbf{P}_{m_1} \otimes \overline{\mathbf{P}}_{m_2} + \mathbf{P}_{m_2} \otimes \overline{\mathbf{P}}_{m_1} = \mathbf{P}'_{m_1} \otimes \overline{\mathbf{P}}'_{m_2} + \mathbf{P}'_{m_2} \otimes \overline{\mathbf{P}}'_{m_1} \tag{5.20}$$

şeklindedir. Eğer buradaki son denklemi açıkça ifade edecek olursak (5.7) denklemindeki tanımdan

$$\begin{aligned}&\left(P_{0m_1} + I\boldsymbol{P}_{m_1}\right)\otimes\left(P_{0m_2} - I\boldsymbol{P}_{m_2}\right) + \left(P_{0m_2} + I\boldsymbol{P}_{m_2}\right)\otimes\left(P_{0m_1} - I\boldsymbol{P}_{m_1}\right) = P_{0m_1}P_{0m_2} \\ &+ I^2\left\langle \boldsymbol{P}_{m_1}, \boldsymbol{P}_{m_2}\right\rangle + P_{0m_2}P_{0m_1} + I^2\left\langle \boldsymbol{P}_{m_2}, \boldsymbol{P}_{m_1}\right\rangle\end{aligned} \tag{5.21}$$

dir. Ayrıca m_1 ve m_2 sırasıyla kurşun ve hedef parçacığı olarak düşünebiliriz. Bu durumda hedefin dinlenme çerçevesinde $\boldsymbol{w} = 0$ olduğundan (5.21) denklemi:

$$P_{0m_1}P_{0m_2} + I^2\left\langle \boldsymbol{P}_{m_1}, \boldsymbol{P}_{m_2}\right\rangle + P_{0m_2}P_{0m_1} + I^2\left\langle \boldsymbol{P}_{m_2}, \boldsymbol{P}_{m_1}\right\rangle = m_{01}m_{02}\gamma_u c^2 \tag{5.22}$$

olur. Bu durumda (5.20) denklemi için

$$\mathbf{P}_{m_1} \otimes \overline{\mathbf{P}}_{m_2} + \mathbf{P}_{m_2} \otimes \overline{\mathbf{P}}_{m_1} = \mathbf{P}'_{m_1} \otimes \overline{\mathbf{P}}'_{m_2} + \mathbf{P}'_{m_2} \otimes \overline{\mathbf{P}}'_{m_1} = m_{01}m_{02}\gamma_u c^2 \tag{5.23}$$

elde edilir. Ayrıca (5.23) denklemine göre çarpışmadan sonraki değer aynıdır böylece elastik çarpışmanın $\boldsymbol{u} = u\boldsymbol{e}_1$ göreli hızı değişmeden kalır [76].

(5.23) denklemini göz önüne alarak m_1 parçacığının $\boldsymbol{u}$ hızına sahip olduğu düşünülürse S durgun çerçevedeki sistemdeki m_1 in toplam eliptik bikuaterniyonik momentumu

$$\begin{aligned}\mathbf{P} = \mathbf{P}_{m_1} + \mathbf{P}_{m_2} &= m_{01}\gamma_u\left(c + I\frac{\sqrt{|p|}}{|p|}\boldsymbol{u}\right) + m_{02}c \\ &= \left(m_{01}\gamma_u + m_{02}\right)c + I\frac{\sqrt{|p|}}{|p|}m_{01}\gamma_u\boldsymbol{u}\ .\end{aligned} \tag{5.24}$$

dir. Şimdi çarpışmayı başka bir S' referans çerçevesinde düşünelim. Çarpışmadan sonra u bağıl hızı değişmez. S' deki m_1 parçacığı hareketsizdir ve bir diğeri olan m_2 parçacığı sabit bir hız ile hareket eder. Benzer şekilde toplam eliptik bikuaterniyonik momentumu S' çerçevesinde

$$\begin{aligned}\mathbf{P}' = \mathbf{P}'_{m_1} + \mathbf{P}'_{m_2} &= m_{01}c + m_{02}\gamma_u\left(c + I\frac{\sqrt{|p|}}{|p|}\boldsymbol{u}\right) \\ &= \left(m_{02}\gamma_u + m_{01}\right)c + I\frac{\sqrt{|p|}}{|p|}m_{02}\gamma_u\boldsymbol{u}\end{aligned}$$

şeklindedir. S' nün S'ye göre bağıl hızı v , çarpışmadan sonraki m_1 parçacığının hızıdır. $\mathbf{P}$ ve $\mathbf{P}'$ nün toplam eliptik bikuaterniyonik momentumu farklı referans çerçevelerine göre alındığından eşit değildir. Ancak eliptik bikuaterniyonik Lorentz dönüşümlerini kullanarak $\mathbf{P}$ ve $\mathbf{P}'$ arasındaki ilişkiyi kolayca yazabiliriz. Eliptik bikuaterniyonik dönüşüm denklemi aşağıdaki gibidir:

$$\mathbf{P}' = \mathbf{A} \otimes \mathbf{P} \otimes \overline{\mathbf{A}}^* \tag{5.25}$$

Bu alternatif temsili formüle göre (5.24) denklemine göre toplam eliptik bikuaterniyonik $\mathbf{P}$ momentumu kutupsal formda (2.13) denkleminden

$$\mathbf{P} = \sqrt{N_{\mathbf{P}}}\left(\cos_p \varphi_p + w_p \sin_p \varphi_p\right) \tag{5.26}$$

şeklinde yazılabilir. Burada (2.12) denklemi göz önünde bulundurularak

$$\cos_p \varphi_p = \frac{\left(m_{01}\gamma_u + m_{02}\right)c}{\sqrt{N_P}}, \quad \sin_p\varphi_p = \frac{I\sqrt{P_x^{\;2} + P_y^{\;2} + P_z^{\;2}}}{\sqrt{|p|}\sqrt{N_P}}$$

$$\boldsymbol{w}_P = \sqrt{|p|}\frac{P_x e_1 + P_y e_1 + P_z e_1}{\sqrt{P_x^{\;2} + P_y^{\;2} + P_z^{\;2}}}, \quad \boldsymbol{w}_A = \sqrt{|p|}\frac{A_x e_1 + A_y e_1 + A_z e_1}{\sqrt{A_x^{\;2} + A_y^{\;2} + A_z^{\;2}}} \tag{5.27}$$

ve

$$\boldsymbol{P} = I\,\frac{\sqrt{|p|}}{|p|}\,m_{01}\gamma_u \boldsymbol{u} \tag{5.28}$$

dir. Bu durumda (5.25) denklemi, (3.21) ve (3.22) denklemlerindeki hiperbolik fonksiyonlar yardımıyla

$$\begin{aligned}\mathbf{P}' = \sqrt{N_{\mathbf{P}}}&\left(\cosh\left(\frac{p\theta p}{2}\right) + \frac{1}{I}\boldsymbol{w}_{\mathbf{A}}\sinh\left(\frac{p\theta p}{2}\right)\right)\otimes\left(\cos_p\varphi_p + \boldsymbol{w}_{\mathbf{P}}\sin_p\varphi_p\right)\\ &\otimes\left(\cosh\left(\frac{p\theta p}{2}\right) + \frac{1}{I}\boldsymbol{w}_{\mathbf{A}}\sinh\left(\frac{p\theta p}{2}\right)\right)\end{aligned} \tag{5.29}$$

şeklinde yazılabilir. Eşitliğin sağ tarafındaki ifadeler kuaterniyonik çarpım kuralları göz önünde bulundurularak

$$\begin{aligned}\mathbf{P}' = \sqrt{N_{\mathbf{P}}}&\left(\cos_p\varphi_p\cosh\left(\frac{p\theta_p}{2}\right) + \frac{1}{I}\boldsymbol{w}_{\mathbf{A}}\cos_p\varphi_p\sinh\left(\frac{p\theta_p}{2}\right) + \boldsymbol{w}_{\mathbf{P}}\sin_p\varphi_p\right.\\ &\left.-\frac{1}{I}\left\langle\boldsymbol{w}_{\mathbf{P}},\boldsymbol{w}_{\mathbf{A}}\right\rangle\sin_p\varphi_p\sinh\left(\frac{p\theta_p}{2}\right) - \frac{2}{I^2}\boldsymbol{w}_{\mathbf{A}}\left\langle\boldsymbol{w}_{\mathbf{P}},\boldsymbol{w}_{\mathbf{A}}\right\rangle\sin_p\varphi_p\sinh^2\left(\frac{p\theta_p}{2}\right)\right)\end{aligned} \tag{5.30}$$

biçiminde yazılabilir. Buradan gerekli işlemler yapılarak

$$\begin{aligned}\mathbf{P}' = \sqrt{N_{\mathbf{P}}}&\left(\cos_p\varphi_p\cosh\left(p\theta_p\right) + \frac{1}{I}\boldsymbol{w}_{\mathbf{A}}\cos_p\varphi_p\sinh\left(p\theta_p\right) + \boldsymbol{w}_{\mathbf{P}}\sin_p\varphi_p\right.\\ &-\frac{1}{I}\left\langle\boldsymbol{w}_{\mathbf{P}},\boldsymbol{w}_{\mathbf{A}}\right\rangle\sin_p\varphi_p\sinh\left(p\theta_p\right) - \frac{1}{I^2}\boldsymbol{w}_{\mathbf{A}}\left\langle\boldsymbol{w}_{\mathbf{P}},\boldsymbol{w}_{\mathbf{A}}\right\rangle\sin_p\varphi_p\cosh\left(p\theta_p\right)\\ &+\frac{1}{I^2}\boldsymbol{w}_{\mathbf{A}}\left\langle\boldsymbol{w}_{\mathbf{P}},\boldsymbol{w}_{\mathbf{A}}\right\rangle\sin_p\varphi_p\end{aligned}$$

denklemi elde edilir. Son denklemde (5.26)-(5.28) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}\mathbf{P}' = \sqrt{N_{\mathbf{P}}}\Bigg(& \frac{(m_{01}\gamma_u + m_{02})}{\sqrt{N_{\mathbf{P}}}} c\cosh\left(p\theta_p\right) + \frac{1}{I}\boldsymbol{w}_{\mathbf{A}} \frac{(m_{01}\gamma_u + m_{02})}{\sqrt{N_{\mathbf{P}}}} c\sinh\left(p\theta_p\right) \\ & + \boldsymbol{w}_{\mathbf{P}} \frac{I}{\sqrt{|p|}} \frac{\sqrt{\langle \boldsymbol{P}, \boldsymbol{P}\rangle}}{\sqrt{N_{\mathbf{P}}}} - \frac{1}{I}\langle \boldsymbol{w}_{\mathbf{P}}, \boldsymbol{w}_{\mathbf{A}}\rangle \frac{I}{\sqrt{|p|}} \frac{\sqrt{\langle \boldsymbol{P}, \boldsymbol{P}\rangle}}{\sqrt{N_{\mathbf{P}}}} \sinh\left(p\theta_p\right) \\ & - \frac{1}{I^2}\boldsymbol{w}_{\mathbf{A}} \langle \boldsymbol{w}_{\mathbf{P}}, \boldsymbol{w}_{\mathbf{A}}\rangle \frac{I}{\sqrt{|p|}} \frac{\sqrt{\langle \boldsymbol{P}, \boldsymbol{P}\rangle}}{\sqrt{N_{\mathbf{P}}}} \cosh\left(p\theta_p\right) \\ & + \frac{1}{I^2}\boldsymbol{w}_{\mathbf{A}} \langle \boldsymbol{w}_{\mathbf{P}}, \boldsymbol{w}_{\mathbf{A}}\rangle \frac{I}{\sqrt{|p|}} \frac{\sqrt{\langle \boldsymbol{P}, \boldsymbol{P}\rangle}}{\sqrt{N_{\mathbf{P}}}} \Bigg)\end{aligned} \tag{5.31}$$

yazılabilir. Buradan daha açık bir biçimde

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}' = \sqrt{N_{\mathbf{P}}}\Bigg(& \cosh\left(\frac{p\theta_p}{2}\right)\cos_p \varphi_p \cosh\left(\frac{p\theta_p}{2}\right) + \frac{1}{I}\boldsymbol{w}_{\mathbf{A}} \sinh\left(\frac{p\theta_p}{2}\right)\cosh\left(\frac{p\theta_p}{2}\right) \\
& + \boldsymbol{w}_{\mathbf{P}} \sin_p \varphi_p \cosh\left(\frac{p\theta_p}{2}\right)\cosh\left(\frac{p\theta_p}{2}\right) \\
& - \frac{1}{I}\left\langle \boldsymbol{w}_{\mathbf{P}}, \boldsymbol{w}_{\mathbf{A}} \right\rangle \sin_p \varphi_p \sinh\left(\frac{p\theta_p}{2}\right)\cosh\left(\frac{p\theta_p}{2}\right) \\
& + \frac{1}{I}\left(\boldsymbol{w}_{\mathbf{P}} \wedge \boldsymbol{w}_{\mathbf{A}} \right) \sin_p \varphi_p \sinh\left(\frac{p\theta_p}{2}\right)\cosh\left(\frac{p\theta_p}{2}\right) \\
& + \frac{1}{I}\boldsymbol{w}_{\mathbf{A}} \sinh\left(\frac{p\theta_p}{2}\right)\cos_p \varphi_p \cosh\left(\frac{p\theta_p}{2}\right) \\
& - \frac{1}{I^2}\left\langle \boldsymbol{w}_{\mathbf{A}}, \boldsymbol{w}_{\mathbf{A}} \right\rangle \sinh^2\left(\frac{p\theta_p}{2}\right) + \frac{1}{I^2}\left(\boldsymbol{w}_{\mathbf{A}} \wedge \boldsymbol{w}_{\mathbf{A}} \right)\sinh^2\left(\frac{p\theta_p}{2}\right) \\
& - \frac{1}{I}\left\langle \boldsymbol{w}_{\mathbf{P}}, \boldsymbol{w}_{\mathbf{A}} \right\rangle \sinh\left(\frac{p\theta_p}{2}\right)\sin_p \varphi_p \cosh\left(\frac{p\theta_p}{2}\right) \\
& + \frac{1}{I}\left(\boldsymbol{w}_{\mathbf{A}} \wedge \boldsymbol{w}_{\mathbf{P}} \right)\sinh\left(\frac{p\theta_p}{2}\right)\sin_p \varphi_p \cosh\left(\frac{p\theta_p}{2}\right) \\
& - \frac{1}{I^2}\boldsymbol{w}_{\mathbf{A}}\left\langle \boldsymbol{w}_{\mathbf{P}}, \boldsymbol{w}_{\mathbf{A}} \right\rangle \sin_p \varphi_p \sinh^2\left(\frac{p\theta_p}{2}\right) \\
& - \frac{1}{I^2}\left\langle \boldsymbol{w}_{\mathbf{A}}, \left(\boldsymbol{w}_{\mathbf{P}} \wedge \boldsymbol{w}_{\mathbf{A}} \right) \right\rangle \sin_p \varphi_p \sinh^2\left(\frac{p\theta_p}{2}\right) \\
& + \frac{1}{I^2}\boldsymbol{w}_{\mathbf{A}} \wedge \left(\boldsymbol{w}_{\mathbf{P}} \wedge \boldsymbol{w}_{\mathbf{A}} \right)\sin_p \varphi_p \sinh^2\left(\frac{p\theta_p}{2}\right)\Bigg)
\end{aligned}
\tag{5.32}
$$

şeklindedir. Daha sonra (5.31) denklemi $\mathbf{P}'$ nün tanımından dolayı reel ve imajiner bileşenlerine ayrılarak

$$
\begin{aligned}
& \left(m_{01}\gamma_u + m_{02} \right) c = \left(m_{01}\gamma_u + m_{02} \right) c\beta_v - m_{01}\gamma_u \frac{\left\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \right\rangle}{c}\beta_v \\
& \frac{\sqrt{|p|}}{|p|} m_{02}\gamma_u \boldsymbol{u} = m_{01}\gamma_u \boldsymbol{u} - \frac{\sqrt{|p|}}{|p|}\beta_v \left(m_{01}\gamma_u + m_{02} \right)\boldsymbol{v} + \frac{1}{|p|\sqrt{|p|}}\left(\beta_v - 1 \right) m_{01}\gamma_u \frac{\boldsymbol{v}\left\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \right\rangle}{\left| v^2 \right|}.
\end{aligned}
\tag{5.33}
$$

denklemi elde edilir. Elde ettiğimiz bu denklemler, Lorentz dönüşümleri altında momentum korunum ilkesinin uygulanması ile elde ettiğimiz en genel eliptik bikuaterniyonik denklemlerdir.

Şimdiye kadar elastik rölativistik çarpışmanın en genel formülleri türetildi. Tüm hızların x ekseni boyunca olduğunu varsayabiliriz. Bu durumda m_2 kütleli parçacığın durgun çerçevesindeki sistemin toplam eliptik bikuaterniyonik momentumu

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_{m_1} + \mathbf{P}_{m_2} = \left(m_{01}\gamma_u + m_{02}\right)c + I\,\frac{\sqrt{|p|}}{|p|}\,m_{01}\gamma_u u_1 e_1$$

haline gelir ve kutupsal biçimde ise

$$\mathbf{P} = \sqrt{N_{\mathbf{P}}}\left(\cos_p \theta_p + w_p \sin_p \theta_p\right)$$

şeklinde ifade edilir. Burada

$$\cos_p \theta_p = \frac{\left(m_{01}\gamma_u + m_{02}\right)c}{\sqrt{N_{\mathbf{P}}}}, \quad \sin_p \theta_p = \frac{I\sqrt{\langle \boldsymbol{P}, \boldsymbol{P}\rangle}}{\sqrt{|p|}\sqrt{N_{\mathbf{P}}}}$$

$$\boldsymbol{w}_P = \sqrt{|p|}\,\frac{P_x e_1 + P_y e_1 + P_z e_1}{\sqrt{P_x^{\,2} + P_y^{\,2} + P_z^{\,2}}} = \sqrt{|p|}e_1$$

ve

$$\boldsymbol{P} = I\,\frac{\sqrt{|p|}}{|p|}\,m_{01}\gamma_u u_1 e_1$$

dir. Çarpışmadan sonra S' referans çerçevesinde toplam eliptik bikuaterniyonik momentum

$$\mathbf{P}' = \left(m_{02}\gamma_u + m_{01}\right)c + I\,\frac{\sqrt{|p|}}{|p|}\,m_{02}\gamma_u u_1 e_1$$

şeklinde yazılabilir. Daha sonra eliptik bikuaterniyonik Lorentz dönüşüm bağıntısını kullanarak onların arasındaki ilişkiyi düşünebiliriz. Benzer şekilde (3.20)-(3.23) denklemleri

$$\cosh\left(p\theta p\right) = \beta_v, \; \sinh\left(p\theta p\right) = \frac{\beta_v}{c}|v_1|, \; \boldsymbol{w}_{\mathbf{A}} = \sqrt{|p|}\,\frac{v_1 e_1}{\sqrt{\langle v_1, v_1\rangle}} = \sqrt{|p|}e_1$$

indirgenir. Bu formüller kullanılarak $\mathbf{P}$ ’nin reel kısmı:

$$\left(m_{02}\gamma_u + m_{01}\right)c = \left(m_{01}\gamma_u + m_{02}\right)c\beta_v - m_{01}\gamma_u u_1 \frac{v_1}{c}\beta_v$$

olup imajiner kısmı ise,

$$m_{02}\gamma_u u_1 = -\frac{\sqrt{|p|}}{|p|}\left(m_{01}\gamma_u + m_{02}\right)\beta_v v_1 + m_{01}\gamma_u u_1$$

olur. Şimdi çarpışmadan sonra m_1 'in v_1 hızını bulalım. İlk olarak β_v yok edilir ve

$$\frac{\sqrt{|p|}}{|p|} m_{02}\gamma_u u_1 \left(\left(m_{01}\gamma_u + m_{02}\right)c - m_{01}\gamma_u u_1 \frac{v_1}{c}\right) = \left(m_{02}\gamma_u + m_{01}\right)c$$
$$\left(-\frac{\sqrt{|p|}}{|p|}\left(m_{01}\gamma_u + m_{02}\right)v_1 + m_{01}\gamma_u u_1\right)$$

şeklinde lineer denklem elde edilir. Daha sonra son denklem çözülürse v_1 hızı

$$v_1 = \frac{m_{02}m_{01}\gamma_u u_1\left(1 - \frac{\sqrt{|p|}}{|p|}\right) + \left(m_{01}{}^2 - \frac{\sqrt{|p|}}{|p|} m_{02}{}^2\right)u_1}{\frac{\sqrt{|p|}}{|p|}\left(m_{01}{}^2 + m_{02}{}^2\right) + 2\frac{m_{01}m_{02}}{\gamma_u}} \tag{5.34}$$

olarak bulunur. Eğer (5.34) denkleminde özel olarak $I^2 = p = -1$ alınırsa [76],[77] kaynaklarında ifade edilen

$$v_1 = \frac{\left(m_{01}{}^2 - m_{02}{}^2\right)u_1}{\left(m_{01}{}^2 + m_{02}{}^2\right) + 2\frac{m_{01}m_{02}}{\gamma_u}} \tag{5.35}$$

denklemi elde edilir Görüldüğü gibi eliptik bikuaterniyonların cebirsel yapısından kaynaklı, (5.34) denkleminde elde ettiğimiz ifade (5.35) denklemini de kapsayan daha genel bir sonuçtur.

6. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada ilk olarak literatürde iyi bilinen Lorentz dönüşümleri eliptik bikuaterniyonlar ile incelenmiştir. Uzay ve zamanı birleştiren $\mathbf{R} = ct + I\boldsymbol{r}$ eliptik bikuaterniyonunun ifadesi ile birlikte eliptik bileşenlerden oluşan 4×4 tipinde matris ve reel bileşenlerden oluşan 8×8 tipinde dönüşüm matrisleri tanımlanmıştır. Rölativistik dönüşümü tanımlayan (3.24) denkleminin 4×1 matris temsili Teorem 3.2.2.1 de verilmiştir. Ayrıca tanımladığımız eliptik bikuaterniyonik U dönüşüm matrisi aracılığıyla dönüşümün daha kolay ve oldukça yararlı ifadesini verdik. Eliptik bileşenler içeren U matrisini ayrıca 8×8 boyutunda da ifade ederek rölativistik dönüşüm bağıntısının 8×8 matris temsilinde dönüşümün daha yalın bir şekilde ifadesini mümkün kılarak matematiksel ifadelerin daha az işlemle elde edildiğini gösterdik. Önerilen yöntem anlaşılır ve basit olması açısından okuyucu tercihine bağlı olarak işlem türüne göre tercih edilebilir.

$\mathbf{R} = ct + I\boldsymbol{r}$ ifade biçimi ve Teorem 3.2.2.1 yardımıyla elde edilen fiziksel sonuçların birbiriyle kolaylıkla ilişkilendirilebilmesi sağlanmaktadır. Bu çalışmada elde edilen eşitlikler ve matrisler aracılığıyla birbiri ile çok yakından ilişkili olan elektrik ve manyetik alan, enerji ve momentum nicelikleri, elektriksel akım ve yük yoğunluğu, skaler ile vektör potansiyeli gibi farklı özellikteki birçok fiziksel niceliğin eliptik bikuaterniyon aracılığıyla birlikte ifade edilebilmesi mümkün olmaktadır.

Daha sonra, eliptik bikuaterniyonik anlamda Dirac denklemi ve açısal momentumun bir çalışmasını sunduk. Eliptik bikuaterniyon eliptik bileşenlerden oluşan hem bikuaterniyonları hem de kuaterniyonları da içine alan cebirsel bir yapıdır.

Dirac denklemleri bilindiği gibi rölativistik sistemleri açıklar ve fizikte önemli bir yere sahiptir Fizikte ifade edilebilen denklemler yeni bir bakış açısıyla eliptik bikuaterniyonlar ile tanımlanabilir. Bu yüzden eliptik bikuaterniyonlar kuantum mekaniği, genel ve özel relativite gibi birçok fiziksel alandaki önemli denklemleri tanımlamak için kullanılabilir.

Çalışmamızda 2×2, 4×4 ve 8×8 tipindeki eliptik matrisleri tanımladık. Tanımladığımız bu matrisleri ile eliptik bikuaterniyonik ifadelerin matrisel gösterimini sunduk. Elde edilen bu matrisler Dirac denklemi için yararlı matrislerdir.

Eliptik bikuaterniyonlar için tanımladığımız bu matrisler ile yeni eliptik Dirac matrislerini tanımladık. Eliptik Dirac matrislerini eliptik bikuaterniyonik tabanlar ile ilişkilendirdik. Bu matrisler ile (4.22) deki Dirac denkleminin çözümlerini elde ettik. Daha sonra serbest parçacık için bilinen Dirac denkleminin uzay-zamandaki elektronun hareketine bağlı olarak enerji momentum ilişkilerini veren eliptik bikuaterniyonik yeni formülünü (4.23) denkleminde verdik. Ayrıca (4.3) denkleminde eliptik bikuaterniyonik kütle tanımlanmıştır. Buradaki kütle, eliptik bikuaterniyonunun birim tabanlarına karşılık gelen skaler kısmı durgun kütle ve vektörel kısmı hareketli kütle olarak ilişkilendirilmiştir. Dahası rotasyonel parçacık için Dirac denklemi eliptik bikuaterniyonik rotasyonel enerji ve açısal momentumu içeren (4.7) denklemi ile daha basit ve kompakt bir formda yazılmıştır.

Daha sonra eliptik bikuaterniyonik spinör tanımlanmıştır. Bu dalga fonksiyonunun eliptik bikuaterniyonik tanımı sayesinde eliptik bikuaterniyonik enerji ve açısal momentum çözümleri ifade edilmiştir. Bu çözümler ile eliptik bikuaterniyonik spin ve orbital açısal momentum arasındaki etkileşim ile ilişkilendirilmiş kuantum dalga spinör fonksiyonunun eliptik davranışı ifade edilmiştir. Bu ifadeler kuantum mekaniği genel ve özel rölativite gibi alanlar için oldukça yararlıdır.

Rölativite teorisinin temelini Lorentz dönüşüm bağıntıları oluşturmaktadır. Eliptik bikuaterniyonlar rölativistik elektromanyetizmada önemli bir yere sahiptir. Bunun yanında “I” eliptik sayısı fiziksel niceliklerin daha açık bir şekilde ifade edilmesi ve farklı fiziksel yapıya sahip niceliklerin kolay bir şekilde birbirinden ayırt edilebilmesi açısından önemli derecede rol oynamaktadır. Uzay ve zamanı birleştiren $\mathbf{R} = ct + I\boldsymbol{r}$ eliptik bikuaterniyonuna benzer olarak (3.48) denkleminde tanımlanan $\mathbb{P}$ eliptik bikuaterniyonu ile $\boldsymbol{E}$ elektrik alan ve $\boldsymbol{H}$ manyetik alan bileşenleri rahatlıkla ayırt edilebilmektedir. $\mathbb{P}$ eliptik bikuaterniyonunun reel bileşeni ile manyetik alanı, eliptik bileşeni ise elektrik alanı gösterir. Bu sayede (3.56) denkleminde ifade edilen dönüşüm sonucunda elde edilen fiziksel sonuçlar birbiri ile kolay bir şekilde ilişkilendirilebilmiştir. Rölativistik dönüşüm bağıntısı sonucunda manyetik ve elektrik alan bileşenleri basitçe ayırt edilebilirdir. Eliptik bikuaterniyonlar ile birçok fiziksel nicelik sekiz boyuta kadar ifade edilebilmektedir.

Klasik yönteme göre elektrik ve manyetik alanların Lorentz dönüşümü aynı anda gerçekleşemeyeceğinden ayrı ayrı ifade edilebilmekte ve aynı anda ifadesi gerçekleştirilememektedir. Fakat eliptik bikuaterniyonlar sayesinde bu sorun ortadan kalkmaktadır. Dolayısıyla eliptik bikuaterniyonik dönüşüm bağıntısının kullanıldığı yöntemde hem elektrik alanı ile manyetik alan birlikte ifade edilebilmekte hem de dönüşüm bağıntısı sayesinde rölativistik biçimleri basit bir şekilde elde edilebilmektedir. Dahası $\mathbf{D}$ eliptik bikuaterniyonik diferensiyel operatörünün eşleniğinin, skaler potansiyel ve vektör potansiyeli birleştiren $\mathbb{A}$ eliptik bikuaterniyonu üzerine etkisi ile elde edilen (3.50) denklemi ile Maxwell denklemlerinin tümü bir tek denklem ile birleştirilmiştir. Ayrıca (3.52) denkleminden, $\boldsymbol{E}$ elektrik alanı ile $\boldsymbol{H}$ manyetik alanının tanımlanan eliptik bikuaterniyonik potansiyel yardımıyla türetilebileceği görülmüş ve bir örnek ile desteklenmiştir. Daha sonra vektörlerden yararlanarak elektrik ve manyetik alanın Lorentz dönüşümleri altındaki değişimi incelenmiştir. Klasik Lorentz dönüşüm formülleri ile elde edilen elektrik ve magnetik alana ilişkin denklemlerin eliptik bikuaterniyonik dönüşüm formülleri denklemleri ile elde edilebileceği ve sonuçların aynı olduğu görülmüştür.

Sonuç olarak dönüşüm bağıntısı ile elde edilen yöntemin diğer yöntemlere göre daha kullanışlı olduğu görülmüştür. Görüldüğü gibi, eliptik bikuaterniyonlar ile elde edilen formülasyonların rölativistik elektromanyetizmanın incelenmesinde daha kısa, basit ve kullanışlı olduğu ve görülmektedir.

Daha sonra genelleştirilmiş yerçekimi için eliptik bikuaterniyonlar aracılığıyla alternatif bir formülasyon sunduk. Daha önce sıfır olmayan durgun gravitonların kütlesine dayanan Proca tipi bir yerçekimi genellemesi önermelerine rağmen, ilgili makalelerde, bu genellemenin eliptik bikuaterniyonik formülasyonu yoktur. Dolayısıyla bu makale daha önce benzer çalışmalarda formüle edilmemiş bir boşluğu doldurmaktadır. Gravitomanyetik monopol terimlerini Proca tipi genelleme ile birleştirerek bunları zarif, kullanışlı ve yararlı bir biçimde eliptik bikuaterniyonlar vasıtasıyla ifade ettik. Önerilen eliptik bikuaterniyonik yöntem, sıfırdan farklı graviton kütlesi ve Dirac -Maxwell denklemleri için benzer sonuçlar sağlar. Yerçekiminin tüm alan denklemleri bir eliptik bikuaterniyonik denklem olarak (3.58) denkleminde ifade edilmiştir. Ayrıca (3.57) denkleminin bir sonucu olarak kullanılan eliptik bikuaterniyonlar sayesinde Maxwell -like denklemlere ilave ek terim olması açısından bir farklı bakış açısı ve önem arz etmektedir. Ayrıca (3.62) denkleminde Proca-tip genelleştirilmiş yerçekimi dalga denklemi zarif ve kompakt bir şekilde elde edilmiştir. Dahası graviton için Klein-Gordon denkleminin eliptik bikuaterniyonlar yardımıyla (3.63) denklemine geliştirilmiştir. Gravitoelektromanyetik enerji korunumu için eliptik bikuaterniyonlar cinsinden alternatif bir formülasyon önerilmiştir. Eliptik bikuaterniyonlar vasıtasıyla elektromanyetik enerji korunumunun imajiner kısmı (3.72) denkleminin bir sonucu olarak Poynting teoremini temsil eder. Graviton kütlesi ile birlikte enerji yoğunluğu için Poynting vektörü doğrudan skaler ve vektör potansiyellerine bağlıdır. (3.65) denkleminin bir sonucu olarak görüldüğü gibi skaler kısım ise Proca-Maxwell denklemleri ile vektörel kısım da enerji-momentum ile ilişkili bir ifadedir.

Eliptik bikuaterniyonlar plazmada, manyetohidrodinamikte fiziksel niceliklerin temsili için yararlı ve kullanışlı olacağını dahası fizikte geniş uygulama alanı bulacağını düşünüyoruz. Sonuç olarak, eliptik bikuaterniyonların fiziksel sistemleri temsil etmek ve matematik problemlerini çözmek için tıpkı vektörler, matrisler ve tensörler gibi faydalı ve etkili unsurlar olduğu açıktır. Bu çalışmada kullanılan eliptik bikuaterniyonik formalizm, gravitoelektromanyetizma ile fizikte alternatif temsillerinin türetilmesi açısından kompakt, daha basit ve zarif bir araç sunar.

Bu yazıda, göreli elastik çarpışma problemini eliptik bikuaterniyonlar aracılığıyla yeniden formüle ettik. Bu formülasyon için dört vektör çok daha yaygın olarak kullanılsa da bu çalışmada sunulan eliptik bikuaterniyonik temsil dört vektöre formülasyonuna göre birçok avantajlı ve kullanışlı sonuçlar verir. Bunlardan bir tanesi dört gerçek bileşene sahip dört vektör, farklı fiziksel yapıya sahip nicelikleri ayırt etmek için yeterli değil iken eliptik bikuaterniyonlardaki I eliptik sayısı sayesinde, eliptik bikuaterniyonlar açık bir şekilde zaman ve uzay koordinatları veya göreli enerji ve üç boyutlu momentum vb. gibi ayrı fiziksel nicelikleri ayırt etmeye katkıda bulunur.

Ayrıca I $\left(I^2 = p < 0\right)$ eliptik sayısı, i $\left(i^2 = -1\right)$ kompleks sayısını da kapsar. Böylece bağımsız sonuçların nasıl ilişkilendirileceği kolayca görülebilir. Örneğin, denklem (5.14) denkleminde imajiner kısım genelleştirilmiş Newtonian üç momentumu gösterir. Skaler bileşen ise çarpışmadan önceki genelleştirilmiş rölativistik enerjiyi ifade eder. Rölativistik dönüşüm denkleminin bir sonucu olarak (5.33) denkleminde imajiner kısım parçacıkların momentumları ile skaler kısmı ise enerjileri ile ilişkilendirilmiştir. Buradaki temel problem çarpışmadan önceki ve sonraki iki farklı referans çerçevesinde toplam eliptik bikuaterniyonik momentumu bulmaktır: İlk olarak hedefin S durgun referans çerçevesi ve daha sonra merminin S' durgun referans çerçevesini bulmaktır.

Ayrıca eliptik matris formlarını da ele aldık. Daha sonra 4×4 matris formundaki gerçek ve eliptik bikuaterniyonlar arasındaki temsili benzerliği kullanarak, bazı yararlı özdeşlikler elde ettik.

Bağıl hızın korunması ve daha sonra bir Lorentz dönüşümünün kullanılması daha sonra problemi doğrusal bir denklemin çözülmesine indirger. Dolayısıyla bu makale eliptik bikuaterniyonik yaklaşımın, bu tür problemlerin formülasyonu için çok uygun ve kullanışlı bir temsil olduğunu göstermektedir.

(5.34) denklemine dikkat edilerek $I^2 = p < 0$ reel sayısının farklı reel değerleri için v_1 hızı hakkında bazı yorumlar yapılabilir. Örneğin, $I^2 = p < 0$ reel sayısının sırasıyla -4, -1 ve $-0,25$ değerleri için v_1 hızı aşağıdaki tablodaki gibidir:

Tablo 6.1 v_1 hızının kütle ve $I^2 = p$ değerlerine göre ilişkisi

$I^2 = p < 0$	$m_{01} = m_{02}$	$m_{01} < m_{02}$	$m_{01} > m_{02}$
$I^2 = p = -4$	$v_1 = 1/3$	$v_1 = 0$ veya $v_1 > 0$	$v_1 > 0$
$I^2 = p = -1$	$v_1 = 0$	$v_1 < 0$	$v_1 > 0$
$I^2 = p = -0,25$	$v_1 = -1$	$v_1 < 0$	$v_1 = 0$ veya $v_1 < 0$ veya $v_1 > 0$

Bu sonuçlar gösteriyor ki $v_1 = 0$ yani çarpışmadan sonra parçacığın durgun olması durumu için, $I^2 = p = -4$ durumunda $m_{01} < m_{02}$ olur. $I^2 = p = -1$ durumunda ise $m_{01} = m_{02}$ olur. Fakat $I^2 = p = -0,25$ için $m_{01} > m_{02}$ dir. Dolayısıyla $p = -1$ denge durumu gibi düşünülürse $p = -1$'den küçük değerler ve büyük değerler için birbirinin tersi durumların geçerli olmasının mümkün olduğu görülmektedir.

Bu tezden yola çıkılarak eliptik bikuaterniyonların daha üst boyutları ile fizikte ele aldığımız konuların yanında daha pek çok özel problemler çalışılabilir. Biz düşünüyoruz ki bu çalışma esasında, fiziğin birçok alanlarına uygulanabilirliği açısından hem fizikçiler için hem de matematikçiler için temel bir çalışma olacaktır.

KAYNAKLAR

[1] Yaglom, I.M., *Complex Numbers in Geometry*, Academic Press, 1968.

[2] Harkin, A. A. ve Harkin, J. B. (2014). Geometry of Generalized Complex Numbers. *Math. Mag.,* 77(2), 118-129. https://doi.org/10.1080/0025570X.2004.11953236

[3] Erisir, T. ve Güngör, M. A. (2018). Holditch-Type Theorem for Non-Linear Points in Generalized Complex Plane $\mathbb{C}_p$, *Universal Journal of Mathematics and Applications*, 1 (4), 239-243. https://doi.org/10.32323/ujma.430853

[4] Hamilton, W. R. (1844) On Quaternions, Or on A New System of Imaginaries In Algebra. *Philosophical Magazine*, 25(163), 1844-1850. https://doi.org/10.1080/14786444408644923

[5] Hamilton, W. R. (1853). *Lectures on quaternions*, Hodges and Smith

[6] Der Waerden, B. L. (1976) Hamilton's Discovery of Quaternions. Math. Magazine, 49(5), 227-234. https://doi.org/10.2307/2689449

[7] Hacısalihoğlu, H. H. (1983). *Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi*, Gazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Yayınları.

[8] Rao, S. K. N. (1983). On the Quaternion Representation of the Proper Lorentz Group SO(3,1). *Journal of Mathematical Physics*, 24(8), 1945-1954. https://doi.org/10.1063/1.525952

[9] Silberstein, L. (1912). Quaternionic Form of Relativity, *Philosophical Magazine*, 23(137); 790-809. https://doi.org/10.1080/14786440508637276

[10] Manogue, C. ve Schray, J. (1993). Finite Lorentz Transformations, Automorphisms and Divison Algebras. *Journal of Mathematical Physics 34*(8), 3746-3767. https://doi.org/10.1063/1.530056

[11] De Leo, S. (1996). Quaternions and Special Relativity. *Journal of Mathematical Physics,* 37(6), 2955- 2968, 1996. https://doi.org/10.1063/1.531548

[12] Conway, A W. (1911). On the Application of Quaternions to Same Recent Developments of Electrical Theory. *Proceedings of Royal Irish Academy*, A29(80), 1-9. https://www.jstor.org/stable/20490608

[13] Özdaş K. ve Özdaş A. (1989). Fiziksel Niceliklerin Kuaterniyonlarla Temsili. *Anadolu Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Dergisi*, 1-2, 101-113.

[14] Chou, J. C. K. (1992). Quaternion Kinematics and Dynamic Differantial Equation. *IEEE Transaction on Robotics and Automation*, 8(1) 53-63. Doi: 10.1109/70.127239

[15] Chanyal, B. C. ve Sandhya, A. (2020). Comparative Study of Quaternionic Rotational Dirac Equation and Its Interpretation. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 17, 2050018. https://doi.org/10.1142/S0219887820500188

[16] Tanışlı, M. ve Özdaş, K. (1997). Application of Quaternion Representation to Stanford Manipulator. *Balkan Physics Letters,* 5, 65-68.

[17] Imaeda, K. A. (1976). New Formulation of Classical Electrodynamics. *Nuovo Cimento*, 32B(1), 138-162. https://link.springer.com/article/10.1007/ BF0272 6749

[18] Gurlebeck, K. ve Sprossig, W. (1997). *Quaternionic and Clifford Calculus for Physicists and Engineers*. John Wiley & Sons, Chichester.

[19] Dahm, R. (1998) Complex Quaternions in Spacetime Symmetry and Relativistic Spin-Flavor Supermultiplets. *Physics of Atomic Nuclei*, 61(11), 1885-1891.

[20] Conte, E. (1993). On a Generalization of Quantum Mechanics by Biquaternions. *Hadronnic Journal*, 16, 261-275.

[21] De Leo, S. ve Rodrigues W. A. (1997). QuantumMechanics: From Complex to Complexified Quaternions. *Int. Journal of Theoretical Physics,* 36(12), 2725-2757.

[22] Gsponer, A. ve Hurni, J. P. (2001). Comment on Formulating and Generalizing Dirac's, Proca's, and Maxwell's Equations with Biquaternions or Clifford Numbers. *Foundations of Physics Letters*, 14(1), 77-85.

[23] De Leo, S. (2001) Quaternionic Lorentz Group and Dirac Equation. *Foundations of Physics Letters*, 14(1), 37-50.

[24] Tanışlı, M. ve Özgür, G. (2003) Biquaternionic Representationa of Angular Momentum and Dirac Equation. *Acta Physica Slovaca*, 53(3), 243-252.

[25] Demir, S. (2006). Rölativistik Elektromanyetizmanın Kompleks Kuaternionik Dönüşüm Bağıntıları. *Anadolu University Journal of Science and Technology*, 7(2), 247-253.

[26] Conway A. W. (1937). Quaternionic Treatment of The Relativistic Wave Equation. *Proc. R. Soc. A*, 162(909), 145-154.

[27] Ward, J. P. (1997). *Quaternions and Cayley Numbers: Algebra and Applications*. Kluwer Academic Publishers.

[28] Abonyi, I., Bito J. F. ve Tar, J. K. (1991). A Quaternion Representation of the Lorentz Group for Classical Physical Applications. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 24, 3245-3254.

[29] Sobczyk, G. (1981). Spacetime Vector Analysis. *PhysicsLetters* 84A(2), 45-48.

[30] Kassandrov, V. V. (1995). Biquaternion Electrodynamics and Weyl-Cartan Geometry of Space-Time. *Garvitation and Cosmology* 1(3), 216-222.

[31] Dahm, R., Complex Quaternions in Spacetime Symmetry and Relativistic Spin-Flavor Supermultiplets. *Physics of Atomic Nuclei*, 61(11), 1885-1891.

[32] Tian, Y. (2013). Biquaternions and Their Complex Matrix Representations. *Beiträge zur Algebra und Geometrie/Contributions to Algebra and Geometry,* 54(2), 575 592.

[33] Jafari, M. (2016). On the Matrix Algebra of Complex Quaternions, *TWMS Journal of Pure and Applied Mathematics,* In press, Doi: 10.13140/RG.2.1.3565.2321.

[34] Lam, T. Y. (1973). *The Algebraic Theory of Quadratic Forms*, Birkhauser Boston.

[35] Mehta, M. L. (1989) *Matrix Theory*: *Selected Topics and Useful Results*. Les Editions de Physique, Les Ulis Cedex.

[36] Pierce, R. S. (1982). *Associative Algebras.* Springer-Verlag.

[37] Van der Waerden, B. L. (1985) *A History of Algebra from al- Khwarizmi to Emmy Noether*, Springer- Verlag.

[38] Demir, S. (2007). Lorentz Dönüsümlerinin Kompleks Kuaternionlarla İncelenmesi, *C.B.Ü. Fen Bilimleri Dergisi*, 3.(1), 1-14.

[39] Negi, O. P. S., et al. (1998). Revisiting quaternion Formulation and Electromagnetism, Nuovo Cimento 113 B (12): 1449-1467.

[40] Kravchenko, V. V. (2000). A New Approach for Describing Electromagnetic Wave Propagationin Inhomogeneous Media. *Zeitschrift für Analysis und ibre Anwendungen Journal for Analysis and its Applications*, 19(4), 903-912.

[41] Khmelnytskaya, K.V., Kravchenko, V.V. (2009). Biquaternions for Analytic and Numerical Solution of Equations of Electrodynamics, 1-29. https://doi.org/10.48550/arXiv.0902.3490

[42] Dirac, P.A.M. (1931). Quantised Singularities in the Electromagnetic Field, *Proceedings of the Royal Society A*, 133, 60. https://doi.org/10.1098/rspa.1931.0130

[43] Dirac, P. A. M. (1948) The Theory of Magnetic Poles. *Physical Review Journals;* 74 (7), 817-830. https://doi.org/10.1103/PhysRev.74.817

[44] Maxwell, J. C. (1865). A Dynamic Theory of The Electromagnetic Field. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. R. Soc. Trans*., 155, 459. https://doi.org/10.1098/rstl.1865.0008

[45] Heaviside, O. (1893). A Gravitational and Electromagnetic Analogy, *The Electrician*, 31, 281-282. http://rstl.royalsocietypublishing.org/subscriptions

[46] Singh, A. (1982). On the Quaternionic Form of Linear Equations for the Gravitational Field, 33, 457–459. https://link.springer.com/article/10.1007/BF02822662

[47] Bisht, P. S. ve Negi, O.P.S., Rajput, B.S. (1990). Biquaternionic formulation of Gravito-dyons, *Indian Journal of Pure & Applied Physics,* 28, 157-161.

[48] Rawat, A. S. (2012). Quaternion gravi-electromagnetism, *International Journal of Theoretical Physics,* 51, 738-745. Doi:10.1007/s10773-011-0953-1

[49] Imaeda, K. (1976). A New Formulation of Classical Electrodynamics. *Nuovo cimento,* 32, 138-162. Doi:10.1007/BF02726749

[50] Majerik, V. (1999). Quaternionic Formulation of the Classical Fields. *Advances in Applied Clifford Algebras* 9, 119-130. Doi:10.1007/BF03041944

[51] Majernik, V. (1971). Field Approach to Gravitation and Its Significance in Astrophysics, 14, 285. Doi:10.1007/BF00653317

[52] Rajput, B. S. (1984). Unification of Generalized Electromagnetic and Gravitational *Fields. Journal of Mathematical Physics*, 25, 351. https://doi.org/10.1063/1.526159

[53] Proca, G. A. ve Proca, A. (1988). *The Mass of the Photon*. Oeuvre Scientifique Publiee (S.I.A.G.).

[54] Argyris, J. ve Ciubotariu, C. (1997). Massive gravitons in General Relativity. *Aust. J. Phys*., 50, 879 – 891. Doi:10.1071/PH970879

[55] Demir, S. ve Tanışlı, M. (2011). Biquaternionic Proca-type Generalization of Gravity. *Eur. Phys. J. Plus*, 126(5), 1–7. Doi:10.1140/epjp/i2011-11051-7

[56] Griffiths, D. J. (1999). *Introduction to Electrodynamics* (3rd. Edn.), Prentice-Hall.

[57] Tolan, T., Tanışlı M. ve Demir, S. (2013). Octonic Form of Proca – Maxwell's Equations and Relativistic Derivation of Electromagnetism. *Int. J. Theor Phys,* 52, 4488-4506. Doi:10.1007/s10773-013-1768-z

[58] Mironov, V. L. ve Mironov, S.V. (2009). Octonic representation of Electromagnetic Field Equations. Journal of Mathematical Physics 50, 012901-1—012901-10 (2009). https://doi.org/10.1063/1.3041499

[59] Demir, S. (2007). Matrix Realization of Dual Quaternionic Electromagnetism. Central European Journal of Physics, 5(4), 487-506, 2007. https://doi.org/10.2478/s11534-007-0031-8

[60] Demir, S. ve Tanışlı M. (2012). Sedenionic Formulation for Generalized Fields of Dyon. *International Journal of Theoretical Physics*, 51(4), 1239-1252. https://link.springer.com/article/10.1007/s10773-011-0999-0

[61] Özen, K.E. ve Tosun, M. (2018). Further Results for Elliptic Biquaternions, *Conference Proceeding of 7 th International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Application* (IECMSA -2018). https://dergipark.org.tr/en/pub/cpost/issue/41126/479295

[62] Özen, K.E. ve Tosun, M. (2018). Elliptic Biquaternion Algebra. *AIP Conf. Proc*. 1926, 020032-1-020032-6. https://doi.org/10.1063/1.5020481

[63] Özen, K.E. ve Tosun, M. (2018). $p-$Trigonometric Approach to Elliptic Biquaternions. *Adv. Appl. Clifford Algebras,* 28(62): 1-16. Doi:10.1007/s00006-018-0878-3

[64] Derin, Z. ve Güngör, M.A. (2020). On Lorentz transformations with elliptic biquaternions. *Tbilisi Mathematical Journal*, Special Issues. 125-144. https://doi.org/10.2478/9788395793882-012

[65] Derin, Z. ve Güngör, M. A. (2021). A Study of Elliptic Biquaternionic Angular Momentum and Dirac Equation. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 18, 1-18. https://doi.org/10.1142/S0219887821501735

[66] Derin, Z. ve Güngör, M. A. (2021). Electromagnetism and Maxwell's Equations in terms of Elliptic Biquaternions in Relativistic Notation. *Eur. Phys. J. Plus*, 136(756): 1-13. Doi:10.1140/epjp/s13360-021-01719-y

[67] Derin, Z. ve Güngör, M. A. (2022). Elliptic Biquaternionic Equations of Gravitoelectromagnetism, *Math. Appl. Sci.*, 45(8), 1-13. https://doi.org/10.1002/mma.8036

[68] Kyrala, A. (1967). *Theoretical Physics: Applications of Vectors, Matrices, Tensors and Quaternions*.W. B. Saunders Company, Philadelphia, London

[69] Jackson J.C. (1999). The Classical Electrodynamics (3rd. Edn.). Wiley.

[70] Demir, S. (2003). Kompleks ve Dual Kuaterniyonların Fiziksel Uygulamaları [Doktora Tezi]. Anadolu Üniversitesi.

[71] Cafaro, C. ve Ali, S. (2007). The Spacetime Algebra Approach to Massive Classical Electrodynamics with Magnetic Monopoles. *Advances in Applied Clifford Algebras* 17, 23-36. arxiv:math-ph/0702006

[72] Balanis, C. A. (1989). Advanced Engineering Electromagnetics (2nd. Edn.). Wiley.

[73] Tamburini, F., Sponselli, A., Thidé, B. ve Mendoça, J.T. (2010). Photon Orbital Angular Momentum and Mass in a Plasma Vortex. *Europhysics Letters*, 90(4), 45001-45004. Doi:10.1209/0295-5075/90/45001

[74] Byrne, J. C. (1976). Cosmic Tests of Maxwell's Equations, *Astrophys*. *Space Sci*,, 46(1), 11. 5–132. Doi:10.1007/BF00643758

[75] Carmeli M. ve Malin, S. (1985). Field theory on $R \times S^3$ topology 111: The Dirac equation. *Found. Phys.*, 15,1019-1029. https://doi.org/10.1007/BF00732844

[76] Essen, H. (2002). Note on the Relativistic Elastic Head-on Collision, *Eur. J. Phys.*, 23, 565-568. http://dx.doi.org/10.1088/0143-0807/23/5/312

[77] Demir, S. ve Tanışlı, M. (2007). Complex Quaternionic Reformulation of the Relativistic Elastic Collision Problem. *Phys. Scr.*, 75, 630-637. http://dx.doi.org/10.1088/0031-8949/75/5/007

[78] Özen, K.E. (2019). *Eliptik Bikuaterniyonlar ve Onların Matrisleri Üzerine*, [Doktora Tezi] Sakarya Üniversitesi.

ÖZGEÇMİŞ

Ad-Soyad : Zülal DERİN YAQUB

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans :** 2012, Zonguldak Karaelmas Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü
- **Yüksek lisans :** 2016, Bülent Ecevit Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı, Tezli Yüksek Lisans
- **Doktora :** Halen, Sakarya Üniversitesi, YÖK 100/2000 Doktora, Hesaplamalı Bilim ve Mühendislik, Matematik Anabilim Dalı.

MESLEKİ DENEYİM VE ÖDÜLLER:

- Derin, Z., Güngör, M. A., 2022. Elliptic biquaternionic equations of gravitoelectromagnetism, *Math. Appl. Sci.*, 45(8), 1-13 yayınlanan makale ile ULAKBİM akademik teşvik ödülü kazanmıştır.

- 2021/2022 Bahar Dönemi, Sakarya Üniversitesi Fen-Edebiyat Fak. MATEMATİK Bölümü ANALİTİK GEOMETRİ II dersinin uygulama derslerini vermiştir.

- 2020/2022 YÖK 100-2000 doktora programı, TÜBİTAK Bilim İnsan Destekleme Daire Başkanlığı, "2211-Yurt İçi Doktora Burs Programı" kapsamında doktora öğrenim desteği almıştır.

- 2013-2019 yılları arasında Millî Eğitim Bakanlığı'nda ve özel öğretim kurumlarında matematik öğretmeni olarak çalışmıştır.

TEZDEN ÜRETİLEN ESERLER

- Derin, Z., Güngör, M. A., 2020. On Lorentz Transformations with Elliptic Biquaternions, *Tbilisi Mathematical Journal*, Special Issues. 125-144.

- Derin, Z., Güngör, M. A., 2021. A Study of Elliptic Biquaternionic Angular Momentum and Dirac Equation, *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics* 18, 1-18.

- Derin, Z., Güngör, M. A., 2022. Elliptic Biquaternionic Equations of Gravitoelectromagnetism, *Math. Appl. Sci.*, 45(8), 1-13.
- Derin, Z., Güngör, M. A., 2021. Electromagnetism and Maxwell's equations in terms of Elliptic Biquaternions in Relativistic Notation, *The European Physical Journal Plus*. 136(756), 1-13.

DİĞER ESERLER

- Derin, Z., Güngör, M. A., (2020, 1-13 Temmuz). About Lorentz Transformatıons with Elliptic Biquaternions, *9th International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications*. 137

- Derin, Z., Güngör, M. A., (2020, 25-28 Ağustos). A Study of Elliptic Biquaternionic Angular Momentum and Dirac Equation, Sözlü Sunum, *9th International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications*, Skopje, North Macedonia.

- Derin, Z., Güngör, M. A., (2021, 12-13 Temmuz). Electromagnetism and Maxwell's Equations in terms of Elliptic Biquaternions in Relativistic Notation, *18th International Geometry Symposium,* İnönü Üniversitesi, Malatya, Turkey.

- Derin, Z., Güngör, M. A., (2021, 25-27 Ağustos), Elliptic Biquaternionic Equations of Gravitoelectromagnetism, *10th International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications*, Sözlü Sunum, Sakarya University, Sakarya, Turkey.

- Derin, Z., Güngör, M. A., (2021, 25-27 Ağustos), Elliptic Biquaternionic Relativistic Eelastic Collision Problem, *10th International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications*, Sözlü Sunum, Sakarya University, Sakarya, Turkey.

- Derin Yaqub, Z., Güngör, M. A, (2022, 25-27 Ağustos). On Elliptic Biquaternionic Equations in Field Theory, *18th International Geometry Symposium*, Trakya Üniversites, Edirne, Turkey.

- Derin Yaqub, Z., Güngör, M. A, (2022, 29 Ağustos-1 Eylül). A New Approach to the Wave Equations of Massive Fields, *10th International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications*, Sözlü Sunum, Yıldız Teknik Üniversitesi, İstanbul, Turkey.