

**T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**BULANIKLIK OPERATÖR BİLGİSİ OLMADAN
SÜPER-ÇÖZÜNÜRLÜKLÜ GÖRÜNTÜ ELDE
EDİLMESİ**

DOKTORA TEZİ

Elk. Yük. Müh. Fatih KARA

Enstitü Anabilim Dalı : ELEKTRİK-ELEKTRONİK MÜH.

Enstitü Bilim Dalı : ELEKTRONİK

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Cabir VURAL

Temmuz 2009

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**BULANIKLIK OPERATÖR BİLGİSİ OLMADAN
SÜPER-ÇÖZÜNÜRLÜKLÜ GÖRÜNTÜ ELDE
EDİLMESİ**

DOKTORA TEZİ

Fatih KARA

Enstitü Anabilim Dalı : ELEKTRİK-ELEKTRONİK MÜH.

Enstitü Bilim Dalı : ELEKTRONİK

Bu tez 29/07/2009 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.



Prof. Dr. Osman ÇEREZCİ
Jüri Başkanı



Prof. Dr. Abdullah FERİKOĞLU
Üye



Prof. Dr. Sarp ERTÜRK
Üye



Doç. Dr. Cabir VURAL
Üye



Doç. Dr. Oğuzhan URHAN
Üye

TEŞEKKÜR

Gösterdiği esneklik, bana olan güveni, yol göstericiliği ve verdiği bilimsel destekle bu eserin ortaya çıkmasında büyük katkısı olan tez danışmanım ve hocam Sn. Doç. Dr. Cabir Vural'a teşekkürü bir borç bilirim. Kullanımımıza açtığı MDSP süper-çözünürlük yazılım paketi için University of California, Santa Cruz'dan Sn. Prof. Dr. Peyman Milanfar'a teşekkür ederim. Doktora çalışmamı bitirmem konusunda gerekli motivasyonu sağlamamda yardımcı olan arkadaşlarım Sn. Tayyar Güzel ve Sn. Murat Yılmaz'a şükranlarımı sunarım. Bu eser, mensubu olmakla gurur duyduğum TÜBİTAK-UEKAE'nin sunduğu teknik imkanlar kullanılarak gerçekleştirilmiştir. İlgili tüm enstitü personeline müteşekkirim. Ayrıca anne ve babama da teşekkür ederim, onlar olmasaydı bu tez çalışması asla var olamazdı. Teşekkürlerin en büyüğü ise sevgi, anlayış ve sabırları için sevgili eşim ve hayat arkadaşım Nurdan ve sevgili oğlum Ertuğrul'a...

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR.....	ii
İÇİNDEKİLER	iii
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ.....	v
ŞEKİLLER LİSTESİ	viii
TABLolar LİSTESİ.....	x
ÖZET.....	xi
SUMMARY.....	xii
BÖLÜM 1.	
GİRİŞ.....	1
BÖLÜM 2.	
SÜPER-ÇÖZÜNÜRLÜK YÖNTEMLERİ.....	10
2.1. Frekans Uzayı Yaklaşımı.....	11
2.2. Yerleştirme – Ara Değerleme – Bulanıklık Giderme Yöntemi.....	14
2.3. Düzenleştirilmiş Süper-Çözünürlük: Deterministik Yaklaşım.....	15
2.4. Düzenleştirilmiş Süper-Çözünürlük: Olasılıksal Yaklaşım.....	17
2.5. Dışbükey Kümelere İzdüşüm Yaklaşımı.....	20
2.6. ML-POCS Hibrid Yaklaşım.....	22
2.7. Özyinelemeli Geri-İzdüşüm Yöntemi.....	23
2.8. Uyarlanırlı Filtre Yaklaşımı.....	24
2.9. Gözü-Kapalı Süper-Çözünürlük.....	25
BÖLÜM 3.	
YENİDEN-OLUŞTURMA FİLTRELERİ İÇİN VARLIK-TEKLİK ANALİZİ	27
3.1. Problem Tanımlama.....	27

3.2. Yeniden-Oluşturma Filtrelerinin Varlık-Teklik Koşulları.....	33
3.3. Hatasız Bir Süper-Çözünürlük Algoritması.....	39
3.4. Test Sonuçları.....	40
3.5. Sonuç.....	47
BÖLÜM 4.	
SABİT-BÜYÜKLÜK ALGORİTMASI TABANLI GÖZÜ-KAPALI	
GÖRÜNTÜ SÜPER-ÇÖZÜNÜRLÜĞÜ.....	49
4.1. Problem Tanımlama.....	52
4.2. 2-D CMA Tabanlı Gözü-Kapalı Süper-Çözünürlük Algoritması...	55
4.3. Test Sonuçları.....	60
4.4. Sonuç.....	64
BÖLÜM 5.	
KARMAŞIK HARİTALAMAYA DAYALI GÖZÜ-KAPALI	
GÖRÜNTÜ SÜPER-ÇÖZÜNÜRLÜĞÜ.....	67
5.1. Algoritmanın Geliştirilmesi.....	67
5.2. Karmaşık Haritalama Diyagramının Seçilmesi.....	74
5.3. Test Sonuçları.....	79
5.3.1. Gözü-kapalı onarım.....	79
5.3.2. Gözü-kapalı süper-çözünürlük.....	82
BÖLÜM 6.	
SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....	86
KAYNAKLAR.....	91
EKLER.....	97
ÖZGEÇMİŞ.....	114

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

2-D	: İki boyutlu (2-Dimensional)
B_k	: k . düşük çözünürlüklü görüntü için bulanıklık matrisi
$b_k(n_1, n_2)$: k . bulanıklık operatörü
BSNR	: Bulanık işaret/gürültü oranı (Blurred Signal to Noise Ratio)
C	: Yüksek geçiren filtre
C_i	: Kapalı bir dışbükey küme
C_s	: Dışbükey kümelerin kesişim kümesi
CCD	: Yüklenme iliştirilmiş araç (Charge Coupled Device)
CFT	: Sürekli Fourier dönüşümü (Continuous Fourier Transform)
CLS	: Sınırlandırılmış en-küçük kareler (Constrained Least Squares)
CMA	: Sabit büyüklük algoritması (Constant Modulus Algorithm)
CMOS	: Bütünleyici Metal Oksit Yarıiletken (Complementary Metal Oxide Semiconductor)
D	: Alt-örnekleme matrisi
dB	: Desibel
D_s	: Alt-örnekleme oranı
D.Ç.	: Düşük çözünürlüklü
DCT	: Ayrık Kosinüs dönüşümü (Discrete Cosine Transform)
DFT	: Ayrık Fourier dönüşümü (Discrete Fourier Transform)
EM	: Beklenti-enbüyültme (Expectation-Maximization)
FIR	: Sonlu dürtü yanıtı (Finite Impulse Response)
GD	: Gradyan düşüş (Gradient Descent)
HDTV	: Yüksek çözünürlüklü televizyon (High Definition TV)
H_k ve V_k	: k . görüntü için yatay ve dikey hareket miktarları
IBP	: Özyinelemeli geri-izdüşüm (Iterative Back-Projection)

IEEE	: Elektrik ve Elektronik Mühendisleri Enstitüsü (The Institute of Electrical and Electronics Engineers)
ISI	: Semboller arası girişim (Intersymbol Interference)
ISNR	: İşaret/gürültü oranındaki iyileşme (Improvement in Signal to Noise Ratio)
J_{CM}	: Sabit büyüklük maliyeti
K	: Düşük çözünürlüklü görüntü sayısı
L	: Orijinal görüntüde piksel başına düşen bit sayısı
L_1, L_2	: Yatay ve dikey yönlerdeki alt-örnekleme oranları
LMS	: En-küçük karesel ortalama (Least Mean Squares)
$M \times M$: Bulanıklık fonksiyonlarının boyutları
MAP	: En büyük sonsal (Maximum A-Posteriori)
M_k	: k . düşük çözünürlüklü görüntü için hareket matrisi
MIMO	: Çok giriş – çok çıkışlı (Multiple Input – Multiple Output)
ML	: En büyük olasılırlık (Maximum Likelihood)
MRF	: Markov rastgele alan (Markov Random Field)
MSE	: Ortalama karesel hata (Mean Square Error)
$N \times N$: Yeniden-oluşturma filtrelerinin boyutları
(n_1, n_2)	: Ayrık zaman indisleri
$N_1 \times N_2$: Düşük çözünürlüklü görüntülerin boyutları
NTSC	: Ulusal Televizyon Standartları Komitesi (National Television Standards Committee)
PAL	: Faz değişim hattı (Phase Alternating Line)
P_i	: İzdüşüm operatörü
POCS	: Dışbükey kümelere izdüşüm (Projection onto Convex Sets)
PSF	: Nokta dağılım fonksiyonu (Point Spread Function)
R-LMS	: Özyinelemeli en-küçük karesel ortalama (Recursive Least Mean Squares)
RLS	: Özyinelemeli en-küçük kareler (Recursive Least Squares)
SD	: En dik iniş (Steepest Descent)
SIMO	: Tek giriş – çok çıkışlı (Single Input – Multiple Output)
SISO	: Tek giriş – tek çıkışlı (Single Input – Single Output)
SNR	: İşaret/gürültü oranı (Signal to Noise Ratio)

SVD	: Tekil-değer ayrıştırması (Singular Value Decomposition)
(t_1, t_2)	: Sürekli zaman indisleri
(T_1, T_2)	: Örnekleme periyodu
(u_1, u_2)	: Sürekli frekans indisleri
(v_1, v_2)	: Ayrık frekans indisleri
\mathbf{v}_k	: Toplanır gürültü vektörü
$v_k(n_1, n_2)$: k . düşük çözünürlüklü görüntü için toplanır gürültü
$w_k(n_1, n_2)$: k . düşük çözünürlüklü görüntü için yeniden-oluşturma filtresi
W_k	: Birleştirilmiş hareket - bulanıklık - alt örnekleme matrisi
x	: Orijinal görüntü vektörü
X	: $x(t_1, t_2)$ 'nin bilinmeyen CFT'sinin örneklerini içeren vektör
$x(n_1, n_2)$: Orijinal ayrık görüntü
$\hat{x}(n_1, n_2)$: Orijinal görüntünün kestirimi
$x(t_1, t_2)$: Orijinal sürekli görüntü
$X(u_1, u_2)$: Orijinal görüntünün sürekli Fourier dönüşümü
$x_k(t_1, t_2)$: k . kaymış sürekli görüntü
$X_k(u_1, u_2)$: Kaymış sürekli görüntülerin Fourier dönüşümü
Y.Ç.	: Yüksek çözünürlüklü
Y	: $K \times 1$ boyutunda sütun vektörü
\mathbf{y}_k	: k . düşük çözünürlüklü görüntü vektörü
$y_k(n_1, n_2)$: k . düşük çözünürlüklü ayrık görüntü
$Y_k(v_1, v_2)$: k . düşük çözünürlüklü ayrık görüntünün Fourier dönüşümü
α	: Lagrange çarpanı
β	: Yakınsaklık parametresi
δ_{1k} ve δ_{2k}	: k . görüntü için kayma değerleri
γ	: Saçılma sabiti
κ_x	: Normalleştirilmiş savrukluk
μ	: Adım aralığı
Φ	: Gözlenen verilerin DFT'si ile ideal görüntünün CFT örneklerini ilişkilendiren matris

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1.1.	D.Ç. bir görüntü dizisinden Y.Ç. video oluşturma.....	2
Şekil 1.2.	Süper-çözünürlük kavramının görsel anlatımı.....	4
Şekil 1.3.	Gözlem modeli.....	6
Şekil 2.1.	Genel bir süper-çözünürlük yöntemi.....	11
Şekil 2.2.	Yerleştirme–Ara değerlendirme–Onarım yöntemi.....	14
Şekil 2.3.	Özyinelemeli ters-izdüşüm yaklaşımı.....	24
Şekil 3.1.	Gözlem modeli: açık gösterim.....	28
Şekil 3.2.	Basitleştirilmiş gözlem modeli.....	29
Şekil 3.3.	Yeniden-oluşturma aşaması.....	30
Şekil 3.4.	Alt-örnekleme matrisi oluşturma örneği.....	33
Şekil 3.5.	İdeal durum için sonuç.....	42
Şekil 3.6.	Düşük çözünürlüklü görüntü sayısının etkisi.....	43
Şekil 3.7.	Sinyal / artık gürültü oranının düşük çözünürlüklü görüntü sayısına göre değişimi.....	43
Şekil 3.8.	Yeniden-oluşturma filtre boyutunun etkisi.....	45
Şekil 3.9.	Sinyal / artık gürültü oranının yeniden-oluşturma filtre boyutuna göre değişimi.....	45
Şekil 3.10.	Doğrusal bağımlı bulanıklık filtre sayısının etkisi.....	46
Şekil 3.11.	Toplanır gürültünün etkisi.....	46
Şekil 3.12.	Ortalama karesel hatanın toplanır gürültü sinyal/gürültü oranına göre değişimi.....	48
Şekil 3.13.	Hareketin etkisi.....	48
Şekil 4.1.	MIMO kanal ve uyarlanır filtreler kullanarak kanal denkleştirme	50
Şekil 4.2.	Bulanıklık ve CMA'nın histograma etkisi.....	52
Şekil 4.3.	Yeniden-oluşturma aşaması.....	53
Şekil 4.4.	Önerilen süper-çözünürlük yöntemi.....	60

Şekil 4.5.	Bilgisayarla oluşturulmuş bir bitlik bir görüntü için sonuçlar.....	62
Şekil 4.6.	Bilgisayarla oluşturulmuş bir bitlik görüntü durumunda değişik boyutlardaki bulanıklık fonksiyonları için ISNR – yineleme sayısı grafiği.....	62
Şekil 4.7.	Bulanıklık ve yeniden-oluşturma filtrelerinin DFT genlikleri.....	63
Şekil 4.8.	Yukarıdan aşağıya: Bir, iki, üç, dört ve beş bitlik görüntüler için sonuçlar.....	65
Şekil 4.9.	Gerçek görüntü için sonuçlar.....	66
Şekil 5.1.	Çeşitli karmaşık haritalama diyagramları (5 bit için) ve karşılık gelen saçılma sabiti ile normalleştirilmiş savrukluk tabloları.....	69
Şekil 5.2.	Bir bitlik Lena görüntüsü için gözü-kapalı onarım sonuçları.....	75
Şekil 5.3.	İki bitlik Lena görüntüsü için gözü-kapalı onarım sonuçları.....	75
Şekil 5.4.	Üç bitlik Lena görüntüsü için gözü-kapalı onarım sonuçları.....	76
Şekil 5.5.	Dört bitlik Lena görüntüsü için gözü-kapalı onarım sonuçları.....	76
Şekil 5.6.	Beş bitlik Lena görüntüsü için gözü-kapalı onarım sonuçları.....	77
Şekil 5.7.	Altı bitlik Lena görüntüsü için gözü-kapalı onarım sonuçları.....	77
Şekil 5.8.	Yedi bitlik Lena görüntüsü için gözü-kapalı onarım sonuçları....	78
Şekil 5.9.	Sekiz bitlik Lena görüntüsü için gözü-kapalı onarım sonuçları....	78
Şekil 5.10.	Onarım durumunda yöntemlerin karşılaştırılması.....	81
Şekil 5.11.	Gauss bulanıklığı durumunda süper-çözünürlük sonuçları.....	83
Şekil 5.12.	Düzgün bulanıklık durumunda süper-çözünürlük sonuçları.....	83
Şekil 5.13.	Gerçek bir görüntü kümesi için gözü-kapalı süper-çözünürlük sonuçları.....	85

TABLolar LİSTESİ

Tablo 3.1.	Değişik durumlarda hatasız süper-çözünürlük için yeniden oluşturma filtre boyutları.....	41
Tablo 4.1.	Değişik grilik seviyelerindeki görüntüler için saçılma sabitleri ve normalleştirilmiş savrukluklar.....	56
Tablo 4.2.	Değişik grilik seviyeleri için mandril görüntüsü durumunda elde edilen ISNR değerleri.....	66
Tablo 5.1.	Diyagramların işaret/gürültü oranlarında sağladıkları iyileşme....	79
Tablo 5.2.	Bölüm 4'deki ve yeni yöntemlerin değişik bit seviyelerinde ve değişik tip bulanıklıklar ile sağladıkları ISNR değerleri.....	84

ÖZET

Anahtar kelimeler: Gözü-kapalı görüntü süper-çözünürlüğü, varlık-teklik analizi, uyarlanırlı filtreler, sabit-büyüklik algoritması.

Süper-çözünürlüklü görüntü oluşturma, eldeki çok sayıda düşük kaliteli (düşük çözünürlüklü, bulanıklığa uğramış) ve birbirine göre kaymış görüntüden yüksek kaliteli (yüksek çözünürlüklü, bulanıklık etkileri giderilmiş) bir görüntü elde etmektir. Literatürde önerilen hemen hemen tüm görüntü süper-çözünürlüğü yöntemlerinde bulanıklık operatörünün bilindiği varsayılmıştır. Ancak, pratik uygulamalarda kullanılacak bir süper-çözünürlük yönteminin gözü kapalı, yani bulanıklık operatörünü biliniyor varsaymayan olması gerekmektedir. Bu tez çalışmasında, bulanıklık operatörü bilinmiyor iken görüntü süper-çözünürlüğünün sağlanması ile ilgili çalışmalar yapılmıştır. Öncelikle gözlem modelinin izin verdiği hareket çeşidi olarak genel kayma hareketi ele alınmıştır. Bu durumda yüksek çözünürlüklü görüntü, iki aşamalı bir yöntemle oluşturulabilir. Birinci aşama, düşük çözünürlüklü görüntülerin boyutunu, ara-değerleme veya piksel aralarına sıfır değerli pikseller ekleme yoluyla arttırmaktır. İkinci aşama, boyutları arttırılmış görüntülerin her birini ayrı ayrı yeniden-oluşturma filtrelerinden geçirip toplamak ve yüksek çözünürlüklü görüntüyü elde etmektir. Yeniden oluşturma filtreleri, uyarlanırlı bir yapıya sahiptir ve katsayıları, her yinelemede görüntü ile ilgili bir maliyet fonksiyonunu (sabit-büyüklik maliyeti) enküçültecek şekilde yenilenir. Bu şekilde geliştirilen algoritma, piksel başına düşen bit sayısı düşük iken iyi sonuçlar vermiştir, ancak bit sayısı yükseldikçe performansı kötüleşmiştir. Bu durumu engellemek için gerçek görüntü piksel değerlerini karmaşık sayılar varsayan ve karmaşık değerli yeniden-oluşturma filtreleri kullanan yeni bir yöntem geliştirilmiştir. Geliştirilen yöntem, yüksek bit sayılarında performansın kötüleşmesi problemini gidermiş ve yüksek çözünürlüklü görüntüyü elde etmeyi başarmıştır.

Gözü-kapalı süper-çözünürlük yöntemlerini geliştirmeden önce yeniden-oluşturma filtrelerinin varlık ve teklik koşulları araştırılmıştır. Yapılan analizler sonucunda, düşük çözünürlüklü görüntü sayısı belli bir değerden fazlaysa ve bulanıklık operatörlerinin birbirlerinden doğrusal bağımsız olması durumunda, boyutları belli bir değerden büyük olacak şekilde yeniden-oluşturma filtre kümelerinin oluşturulabileceği görülmüştür.

IMAGE SUPER-RESOLUTION FOR NON-EXISTENT BLUR OPERATORS

SUMMARY

Keywords: Blind image super-resolution, existence-uniqueness analysis, adaptive filters, constant-modulus algorithm.

Super-resolution image reconstruction can be defined as the process of constructing a high-quality and high-resolution image from several shifted, degraded and undersampled ones. In almost all super-resolution methods, the blur operator is assumed to be known. In this thesis, a super-resolution algorithm is presented in which the assumption of availability of the blur parameters is not necessary. The algorithm consists of determining a set of deconvolution filters to be applied on interpolated low-resolution and low-quality images. The adaptation of the filters are done by using the constant modulus algorithm. The method is suitable for pure translational motion and shift-invariant blur. Experimental results show that the method can reconstruct the high-resolution image and remove the blur especially for five or less-bit images. A new method is developed in which the original image pixels are assumed to have complex values and complex-valued adaptive filters are used. This method does not suffer from the problem of degradation of performance as the bit number increases. The method is shown to remove the blur and achieve increase in resolution for any-bit images.

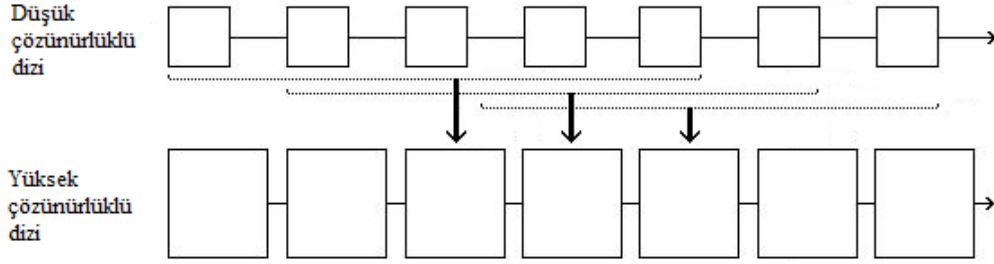
Before developing the blind super-resolution algorithms, the conditions for the existence and uniqueness of FIR restoration filters for exact super-resolution image reconstruction in case of pure translational motion and shift-invariant blur are derived. If the number of low-resolution images is larger than a threshold and the blur functions meet a certain property, then a set of restoration filters can be constructed for exact high-resolution image reconstruction even in the absence of motion.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Elektronik görüntü uygulamalarında genellikle görüntülerin yüksek çözünürlüklü (Y.Ç.) olması arzulanır, bu sayede görüntünün sunduğu detay daha fazla olacaktır. Örneğin, Y.Ç. tıbbi görüntüler doktorun doğru teşhis koymasına yardım eder, uydudan elde edilen fotoğrafların Y.Ç. olması, bir nesnenin benzerlerinden ayırt edilebilmesini sağlar ve eğer Y.Ç. görüntü sağlanırsa bilgisayarla görme sistemlerindeki görüntü tanınmanın performansı artırılabilir. 1970'lerden beri sayısal görüntü elde etmek için CCD ve CMOS algılayıcılar kullanılmaktadır. Bu algılayıcıların çözünürlüğü çoğu görüntü uygulamaları için yeterli olmakla birlikte, şu anki çözünürlük seviyesi ve kullanıcıya maliyeti, gelecekteki talebi karşılamayacaktır. O halde, CCD ve CMOS algılayıcıların mevcut çözünürlük seviyesi bir şekilde artırılmadır.

Uzamsal çözünürlüğü arttırmanın doğrudan bir yolu, algılayıcı (sensör) üretim teknikleri kullanılarak piksel boyutunun küçültülmesi, diğer bir deyişle birim alana düşen piksel miktarının arttırılmasıdır. Fakat, piksel boyutu küçüldükçe sensör üzerinde her bir piksele düşen ışığın miktarı azalır, görüntü kalitesine büyük zarar veren bir bozulma biçimi (shot noise) oluşturmaktadır [1]. Dolayısıyla, piksel boyutu küçültmenin bir sınırı vardır ve günümüzdeki görüntü algılayıcı teknolojisi bu sınıra neredeyse erişmiştir [3].

Çözünürlüğü arttırmak için bir başka yöntem yonga boyutunu arttırmaktır. Fakat bu yaklaşım kapasitansı arttırıp yük transfer oranını düşürdüğünden verimli sayılmamaktadır [2]. Ayrıca, yüksek hassasiyetli optik ve görüntü algılayıcıların yüksek maliyeti de Y.Ç. görüntü kullanımı içeren ticari uygulamalar için göz önüne alınması gereken önemli bir etkidir. Özetle algılayıcı ve optik üretim teknolojilerindeki bu sınırlamaları aşmak için Y.Ç. görüntü elde etmede yeni bir yaklaşım gerekmektedir.



Şekil 1.1. D.Ç. bir görüntü dizisinden Y.Ç. video oluşturma.

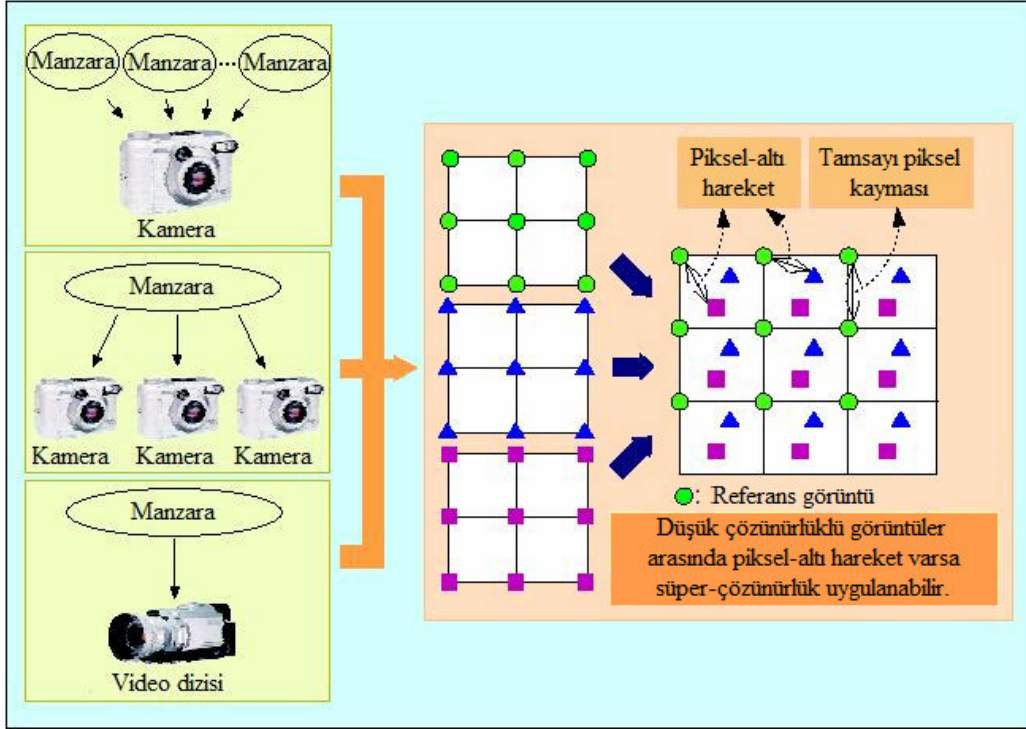
Bu konuda ilgi gören yaklaşımlardan biri, işaret işleme teknikleri kullanılarak eldeki çok sayıda düşük çözünürlüklü (D.Ç.) görüntüden Y.Ç. bir görüntü veya görüntü dizisi elde etmektir. Son zamanlarda bu şekilde bir çözünürlük iyileştirme yaklaşımı üzerine çok sayıda araştırma yapılmaktadır ve buna literatürde süper-çözünürlük, Y.Ç. görüntü yeniden-oluşturulması veya basitçe çözünürlük iyileştirme denmektedir. İşaret işleme yaklaşımının temel üstünlüğü, maliyetinin düşük olması ve mevcut D.Ç. görüntü sistemlerinin kullanılabilir olmasıdır.

İşaret işleme yöntemleriyle süper-çözünürlüklü görüntü elde etme, tıbbi görüntüleme, uydudan görüntüleme ve video gibi aynı manzaranın birden çok görüntüsünün elde edilebildiği durumlarda başarılı sonuçlar vermektedir. Süper-çözünürlüğün bir uygulaması, kalitesiz ve D.Ç. bir kamera ile elde edilmiş çok sayıda D.Ç. görüntüden çerçeve dondurma veya çıktı alma amaçları için yüksek kaliteli ve Y.Ç. sayısal bir görüntü oluşturmaktır. Ayrıca, Şekil 1.1'de gösterildiği gibi büyütülmüş çerçeveleri arka arkaya göstererek Y.Ç. video oluşturmak da mümkündür. İstenen bölgeye yapay büyütme yapılması da güvenlik, adliye, tıp ve uydudan görüntüleme alanlarında kullanılabilen önemli bir uygulamadır. Bazı adli uygulamalarda görüntüdeki bir nesnenin, örneğin suçlunun yüzünün veya araba plakasının büyütülmesi gerekebilmektedir. Çözünürlük kalitesinin sınırlı olduğu, ancak çok sayıda D.Ç. görüntünün elde edilebildiği tomografi ve manyetik rezonans görüntüleme gibi tıbbi görüntü uygulamalarında da süper-çözünürlük yöntemleri uygulama bulmaktadır. Uzaktan algılama ve uydudan görüntüleme uygulamalarında genellikle aynı manzaradan çok sayıda görüntü elde edilmektedir ve istenen bölgenin çözünürlüğünü arttırmak için süper-çözünürlük yöntemleri uygulanabilir. Bir başka

uygulama da PAL veya NTSC video işaretinin gözle görülür bozulmalar olmadan yüksek çözünürlüklü televizyon (HDTV) işaretine dönüştürülmesidir.

Çok sayıda D.Ç. görüntüden Y.Ç. bir görüntü nasıl elde edilebilir? Süper-çözünürlük tekniklerinde uzamsal çözünürlüğü arttırmak için gerekli olan ilk şart, elde aynı manzaradan alınmış çok sayıda görüntü olmasıdır [3]. Genelde D.Ç. bu görüntüler, aynı manzaraya değişik bakışları temsil etmektedirler. Bu nedenle, D.Ç. görüntülerin alt-örneklenmiş ve örtüşmüş olmalarının yanında birbirlerine göre piksel-altı hassasiyetinde harekete sahip olmaları gerekir. Eğer D.Ç. görüntüler birbirlerine göre bir pikselin katları kadar kaymışlarsa, her görüntü aynı bilgiyi içereceğinden Y.Ç. görüntüyü oluşturmak için kullanılacak yeni bilgi mevcut olmayacaktır. Bununla birlikte, eğer piksel-altı seviyesinde hareket varsa ve örtüşme mevcutsa herhangi bir görüntü diğerlerinden elde edilemeyeceğinden D.Ç. her görüntüdeki yeni bilgi, Y.Ç. görüntü elde edilmesinde kullanılabilir. Aynı manzaradan değişik bakışlar elde etmek için çok sayıda görüntü veya video aracılığıyla görüntüler arasında hareketin olması gereklidir. Çok sayıda görüntü, manzaranın bir kamera ile defalarca çekilmesi veya değişik yerlere yerleştirilmiş kameralar ile kaydedilmesi ile elde edilebilir. Görüntüler arası hareket, görüntüleme sisteminin kontrollü hareketi (mesela yörüngede hareket eden uydulardan çekilmiş görüntüler), yerel nesnelerin hareketleri veya görüntüleme sisteminin titremesi gibi kontrol edilmeyen hareketler ile oluşabilir. Eğer görüntüler arası hareket biliniyorsa veya piksel-altı seviyesinde kestirilebiliyorsa, Şekil 1.2’de belirtildiği gibi eldeki D.Ç. görüntüleri birleştirerek Y.Ç. görüntü oluşturmak mümkündür.

Sayısal bir görüntü kaydedilirken optik bozulmalar (odaklanamama, kırınım limiti, vs.), hareketten kaynaklanan bulanıklık, algılayıcıda veya iletim esnasında oluşan gürültü ya da piksel sayısının yetersiz olması gibi nedenlerden dolayı uzamsal çözünürlükte bir kayıp oluşmaktadır. Sonuç olarak kaydedilen görüntü, elde edilmesi mümkün olmayan orijinal görüntünün gürültülü ve örtüşmüş bir hali olacaktır. Süper-çözünürlük algoritmalarının ana amacı alt-örneklenmiş olarak düşünülebilecek D.Ç. görüntülerden yüksek çözünürlüklü görüntü oluşturmak olmasına rağmen, bu algoritmalar gürültülü ve bulanık görüntülerden gürültü ve bulanıklık giderilmiş görüntü elde etmeyi amaçlayan görüntü onarımı tekniklerini de kapsamaktadır.



Şekil 1.2. Süper-çözünürlük kavramının görsel anlatımı. (IEEE'nin izniyle [3]'den uyarlanmıştır.)

Sonuç olarak, süper-çözünürlük yöntemlerinin amacı, eldeki çok sayıda bozuk, düşük kaliteli ve uzamsal olarak örtüşmüş D.Ç. görüntüden yüksek kaliteli ve Y.Ç. bir görüntü elde etmek olarak özetlenebilir.

Süper-çözünürlükle ilişkili bir problem, görüntü onarımıdır. Görüntü onarımının amacı, bozuk (bulanık, gürültülü) bir görüntüden ideal (bozulmamış) görüntüyü elde etmek olup görüntünün boyutu değiştirilmez. Gerçekte onarım ve süper-çözünürlük teorik olarak yakından ilişkili alanlardır Süper-çözünürlük, görüntü onarımının ikinci nesil bir problemi olarak düşünülebilir.

Süper-çözünürlük ile ilişkili başka bir problem, tek görüntünün boyutunu arttırmayı amaçlayan görüntü ara-değerlemesidir. Bu alanda çok fazla çalışma yapılmış olmasına rağmen örtüşmüş bir D.Ç. görüntü büyütülerek elde edilmiş Y.Ç. görüntünün kalitesi, ideal sinc taban fonksiyonu kullanılsa bile sınırlıdır ($\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$ olarak tanımlanır). Yani, tek bir görüntü üzerinde ara-değerleme işleminin uygulanması, D.Ç. örnekleme işleminde kaybolan veya bozulan yüksek frekans

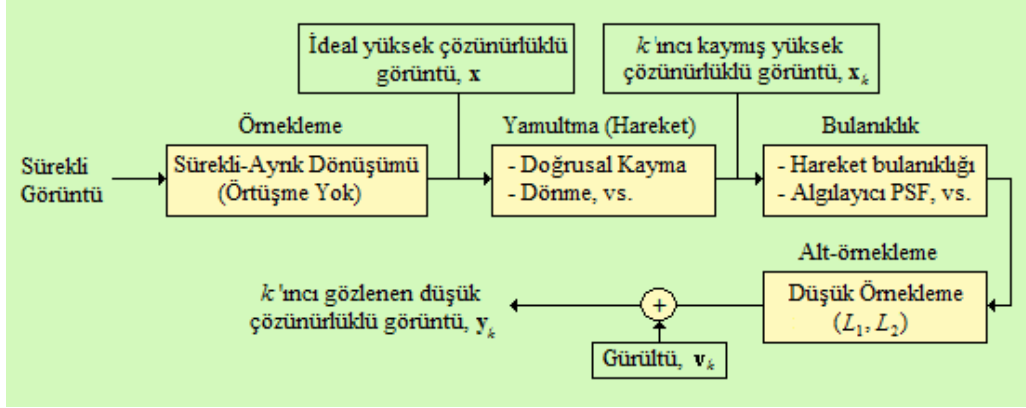
bileşenlerini geri getiremez. Bu nedenle görüntü ara-değerleme yöntemleri, süper-çözünürlük yöntemleri olarak sayılmamaktadırlar.

Süper-çözünürlük yöntemlerinde ilk adım, orjinal Y.Ç. görüntüyü gözlenen D.Ç. görüntülerle ilişkilendiren bir gözlem modeli kurmaktır. $L_1N_1 \times L_2N_2$ boyutlarında olan ve leksikografik notasyonda vektör olarak $x = [x_1, x_2, \dots, x_N]^T$, $N = L_1N_1 \times L_2N_2$ şeklinde yazılmış Y.Ç. görüntüyü ele alalım. Leksikografik gösterim, bir matrisin satırlarının alt alta dizilmesiyle elde edilen vektörü belirtmektedir. x , bant-sınırlı olduğu varsayılan sürekli bir görüntüden Nyquist oranında veya daha yüksek örnekleme frekansında örneklenmiş ideal bozulmamış görüntüdür. L_1 ve L_2 , gözlem modelindeki yatay ve dikey yönlerde alt-örnekleme katsayılarını belirtsin. Bu varsayım altında gözlenen tüm D.Ç. görüntüler $N_1 \times N_2$ boyutlarına sahip olacaktır. K adet D.Ç. görüntü içinden k 'inci görüntü, leksikografik notasyonda $y_k = [y_{k,1}, y_{k,2}, \dots, y_{k,M}]^T$, $k = 1, 2, \dots, K$ ve $M = N_1 \times N_2$ olarak gösterilsin. x 'in, D.Ç. görüntüler elde edilirken model tarafından izin verilen hareket veya bozulmalar haricinde sabit kaldığı varsayılırsa gözlenen D.Ç. görüntüler, Y.Ç. görüntü x üzerine uygulanan yamultma, bulanıklaştırma ve alt-örnekleme işlemlerinin sonuçları olacaktır. D.Ç. her görüntünün toplanır gürültüye maruz kaldığı varsayıldığında gözlem modeli;

$$y_k = DB_k M_k x + v_k, \quad 1 \leq k \leq K \quad (1.1)$$

olarak temsil edilebilir [4]. Denklem (1.1)'de M_k , $L_1N_1L_2N_2 \times L_1N_1L_2N_2$ boyutlarındaki yamultma matrisini, B_k , $L_1N_1L_2N_2 \times L_1N_1L_2N_2$ boyutlarındaki bulanıklık matrisini, D , $(N_1N_2)^2 \times L_1N_1L_2N_2$ boyutlarındaki alt-örnekleme matrisini ve v_k ise leksikografik şekilde sıralanmış gürültü vektörünü temsil eder. Gözlem modelinin blok diyagramı Şekil 1.3'de gösterilmiştir.

Görüntü elde edilirken meydana gelen hareket, geometrik bozulma (yamultma) operatörü M_k ile temsil edilip genel veya bölgesel kayma, dönme, vs. içerebilir. D.Ç. bütün görüntüler referans görüntüye göre alt-piksel seviyesinde hareket içermelidir. Bu sayede D.Ç. her görüntüdeki ek bilgi, Y.Ç. görüntüyü oluşturmak için kullanılabilir. Hareket bilgisi genellikle elde olmadığından, bir görüntü referans alınarak her görüntü için piksel-altı hassasiyetinde hesaplanmalıdır.



Şekil 1.3. Gözlem modeli. (IEEE'nin izniyle [3]'den uyarlanmıştır.)

Görüntü oluşum modelindeki ikinci doğrusal operatör bulanıklık işlemidir (B_k). Bulanıklık, görüntüleme sistemi ve manzara arasındaki göreceli hareket, odaklanamama, algılayıcının nokta-dağılım fonksiyonu (point-spread function, PSF) gibi faktörlerden meydana gelebilir. Genellikle iki boyutlu kayma-bağımsız sonlu dürtü yanıtı filtreler şeklinde modellenirler. Görüntü onarımı probleminde bulanıklığın kaynağı optik nedenler veya hareket iken süper-çözünürlük durumunda bunlara ek olarak D.Ç. algılayıcıların boyutunun sonlu olmasından kaynaklanan bir bulanıklık çeşidi daha vardır. Bu durum, modele uzamsal ortalama olarak ilave edilir. Bazı süper-çözünürlük yöntemleri, bulanıklık operatörünün bütün D.Ç. görüntüler için aynı olduğunu varsaymaktadır. Ancak daha genel ve doğru olan durum, bulanıklık operatörünü her görüntü için farklı varsaymaktır. Ayrıca bir çok süper-çözünürlük yönteminde bulanıklık biliniyor varsayılmaktadır. Fakat pratik uygulamaların çoğunda bu varsayım da geçerli değildir. Ya bulanıklık parametreleri önceden kestirilmelidir, ya da Y.Ç. görüntü bulanıklık parametrelerine ihtiyaç duyulmadan oluşturulmalıdır, yani yöntem "gözü kapalı" bir süper-çözünürlük yöntemi olmalıdır. Bulanıklığı biliniyor varsaymayan yöntem sayısı çok azdır. Bu çalışmada özellikle bu problem üzerinde durulmuştur, yani bulanıklık operatörü bilinmiyor iken süper-çözünürlüklü görüntü oluşturma amacı doğrultusunda çalışmalar yapılmıştır.

Modeldeki üçüncü operatör olan alt-örnekleme operatörü (D), yamultulmuş ve bulanık görüntü üzerinde örtüşme (aliasing) etkisine yol açar. Görüntü ara-değerleme

teknikleri, örtüşme ile kaybolan yüksek frekanslı bileşenleri, yani görüntü detaylarını geri elde edemeyeceklerinden örtüşme etkisini gidermek için süper-çözünürlük yöntemlerini kullanmak gerekir. Modelde ayrıca nicemleme ve model hatalarından, algılayıcıdan, vs. kaynaklanan toplanır gürültü de bulunmaktadır. Olası gürültü kaynaklarının çok sayıda olması, merkezi limit teoremi ışığında gürültünün beyaz Gauss gürültüsü olduğunun varsayılmasına imkan vermektedir

Bu çalışmada, D.Ç. görüntüler arasındaki hareketin sadece global kayma şeklinde ve bulanıklık operatörünün kayma-bağımsız olduğu durumlar için gözü-kapalı süper-çözünürlük yöntemleri geliştirilmiştir. Hareketin kontrollü olduğu ve hiç bölgesel hareketin olmadığı bazı uygulamalarda D.Ç. görüntü dizileri arasındaki tek hareket genel kayma hareketidir ve yukarıdaki varsayım geçerli olur. Örneğin tarayıcı çözünürlüğü, doküman birden fazla taranarak ve her defasında biraz değiştirilmiş başlangıç noktaları kullanılarak artırılabilir. Ayrıca bazı video dizilerinde manzara sabittir ve görüntü dizileri, video kameranın kaydırılmasıyla elde edilir. Literatürde bu özel süper-çözünürlük durumunu ele alan çalışmalar mevcuttur [5, 6].

Bulanıklık genellikle iki boyutlu sonlu dürtü yanıtı (2-D FIR) filtreler şeklinde modellenir ve her D.Ç. görüntü için aynı olmak zorunda değildir. Önerilen yöntemlerde Y.Ç. görüntü, D.Ç. görüntülerin, katsayıları sabit-büyüklik algoritmasının (CMA) iki boyutlu genelleştirilmesi tarafından güncellenen, birbirinden farklı uyarlanır sabit dürtü yanıtı yeniden-oluşturma filtrelerinden geçirilmesi, ardından filtre çıkışındaki işaretlerin birbirleri üzerine üstüörtülmesiyle (superposition) elde edilmektedir.

CMA [7, 8], haberleşmede alanındaki gözü-kapalı kanal denkleştirme probleminin çözümünde kullanılan bir yöntem olup amacı semboller-arası girişimi (ISI) bastırmaktır. Tek-giriş tek-çıkışlı (SISO) sistemlerde kullanıldığı gibi semboller-arası girişimle beraber kullanıcılar-arası girişimi de bastırmak için tek-giriş çok-çıkışlı (SIMO) ve çok-giriş çok-çıkışlı (MIMO) sistemlerde de kullanılabilir [9]. CMA'nın ana fikri, kaynağın ürettiği sembollerin sabit büyüklüğe sahip veya sonlu sayıda eleman içeren bir alfabeden olduğu gerçeğine dayanır. Bu anlamda sayısal bir görüntü, sonlu sayıda eleman içeren bir alfabe kaynağı sayılabilir, çünkü her piksel

sonlu sayıda (genellikle 8) bite ifade edilir. [10]'da bu özellikten faydalanılmış ve tek görüntü için CMA tabanlı gözü-kapalı bir bulanıklık giderme yöntemi geliştirilmiştir. Bu tezde sunulan yöntemlerden ilki, [10]'daki yöntemin SIMO durumuna uyarlanmış halidir. İkinci yöntem ise yine aynı temel üzerinde olmakla birlikte, ilk yöntemdeki bazı zayıflıkları gidermek için yapılan geliştirmeleri kapsamaktadır.

Tez aşağıdaki şekilde düzenlenmiştir.

İkinci bölümde literatürde önerilmiş gözü-kapalı olan veya olmayan süper-çözünürlük çalışmalarının bir özeti verilmiştir. Gözü-kapalı olmayan yöntemler, frekans uzayı yaklaşımı, yerleştirme-ara değerlendirme-bulanıklık giderme yöntemi, düzenleştirilmiş süper-çözünürlük – deterministik ve olasılıksal yaklaşımlar, dışbükey kümeler izdüşüm yöntemi, olasılıksal – dışbükey kümeler izdüşüm hibrid yaklaşımı, özyinelemeli geri-izdüşüm ve uyarlanır filtre yöntemleridir. Gözü-kapalı yöntemler ise öğrenme tabanlı teknikler, parametrik nokta-dağılım fonksiyonları için çalışan teknikler ve genel nokta-dağılım fonksiyonları için geliştirilen yöntemler olarak üçe ayrılabilir.

Üçüncü bölümde, sonraki bölümlerde önereceğimiz gözü-kapalı süper-çözünürlük yöntemlerine ön hazırlık olması bakımından bulanıklık operatörlerinin biliniyor olması durumu için yeniden-oluşturma filtrelerinin varlık ve teklik koşulları araştırılmıştır. Bulanıklık fonksiyonlarının doğrusal bağımsız olmaları ve yeniden-oluşturma filtrelerinin boylarının belli bir eşik değerinden büyük olması durumlarında ideal görüntünün tam olarak yeniden oluşturulabildiği, teorik olarak ve benzetim sonuçlarıyla gösterilmiştir. Bu koşullar tam olarak sağlanmadığında ideal görüntünün bir miktar hata ile oluşturulabildiği görülmüştür ve hangi durumlarda bu hatanın kabul edilemez boyutta arttığı incelenmiştir.

Dördüncü bölümde, D.Ç. görüntüler arasındaki tek hareketin genel kayma şeklinde olduğu varsayımı altında çalışan, CMA tabanlı bir süper-çözünürlük yöntemi geliştirilmiştir. Önerilen yöntemde D.Ç. görüntüler uyarlanır filtrelerden geçirilmekte, Y.Ç. görüntü ise uyarlanır filtre çıkışındaki işaretlerin üst-düşürülmesi

ile elde edilmektedir. Uyarlanır filtre setinin katsayıları, sabit-büyüklik maliyet fonksiyonunu enküçültecek şekilde uygulanan en-dik iniş optimizasyon yöntemiyle güncellenmektedir. Benzetim (simülasyon) sonuçlarına göre önerilen yöntem, orijinal görüntünün piksel derinliği (piksel başına düşen bit sayısı) düşük iken iyi sonuç vermektedir, ancak piksel derinliği arttıkça performans düşmektedir.

Beşinci bölümde yukarıda bahsedilen durumun analizi yapılmış ve yine CMA tabanlı olduğu halde görüntü piksel değerlerinin karmaşık sayılar olarak ifade edilebildiği yeni bir yöntem önerilmiştir. Sunulan yöntem genel olarak dördüncü bölümde anlatılan yöntemle aynıdır, fakat piksel değerlerinin karmaşık sayılar olması dolayısıyla en-dik iniş algoritması farklı bir şekilde ifade edilmektedir. Deney sonuçlarına göre dördüncü bölümde belirtilen, piksel derinliği arttıkça performansın düşmesi problemi ortadan kaldırılmıştır. Yöntem, piksel başına düşen bit sayısı ne olursa olsun Y.Ç. görüntüyü oluşturabilmektedir.

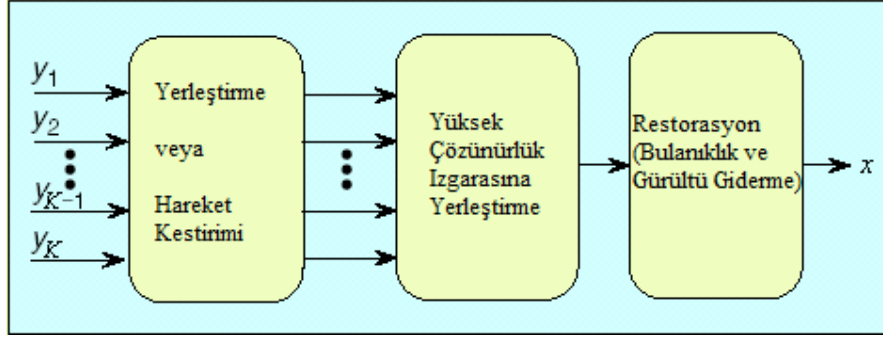
Altıncı bölüm olan sonuç bölümünde ise elde edilen sonuçların yorumlanması yapılmıştır. Önerilen yöntemlerin avantajları ve eksiklikleri belirtilmiş, bu eksikliklerin giderilmesi için yapılabilecek çalışmalar değerlendirilmiştir.

BÖLÜM 2. SÜPER-ÇÖZÜNÜRLÜK YÖNTEMLERİ

Süper-çözünürlüklü görüntü oluşturma, kötü konumlanmış (ill-posed) problemlere bir örnektir. Gözlenmiş bir D.Ç. görüntü kümesine karşılık gelen çok sayıda çözüm olabilir. Kötü konumlanmış problemler, çözümün önceden bilinen bir özelliği (düzensizlik, pozitiflik, vs.) kullanılıp çözüm kümesi daraltılarak iyi konumlanmış hale getirilebilir. Bu işlem “düzenleştirme” olarak bilinmektedir. Süper-çözünürlüklü görüntü elde etmek için bu şekilde sınırlamalar kullanmak zorunludur.

Çoğu süper-çözünürlük yöntemi, Şekil 2.1’de gösterilen üç aşamadan oluşur: Yerleştirme, ara-değerleme ve onarım (bulanıklık giderme). Bu aşamalar, kullanılan yöntemle göre tek tek veya bir arada uygulanabilir. Hareket bilgisinin kestirilmesi, yerleştirme (hizalama) olarak adlandırılır. Yerleştirme aşamasında, D.Ç. görüntülerin içerdiği hareketler, referans olarak alınan D.Ç. bir görüntüye göre kesirli piksel hassasiyetinde hesaplanır. Süper-çözünürlüklü görüntü oluşturma algoritmasının başarısında, hassas ve doğru hareket kestiriminin rolünün çok büyük olduğu açıktır. D.Ç. görüntüler arasındaki hareketler genellikle gelişigüzel olduğundan, yüksek çözünürlük ızgarasına düzgün bir şekilde denk gelmeyecektir. Bu nedenle düzgün yerleşmemiş düşük çözünürlüklü görüntüleri kullanarak düzgün yerleşmiş yüksek-çözünürlüklü görüntü elde etmek için düzgün-olmayan ara-değerleme yapmak gereklidir. Son aşama olarak ise üst-örneklenmiş görüntüden bulanıklık ve gürültüyü gidermek için görüntü onarım teknikleri uygulanır.

Literatürde önerilmiş süper-çözünürlüklük yöntemlerinin büyük bir çoğunluğu uygun bir şekilde belirlenmiş bazı ön şartlar kullanmaktadır. Yöntemler, hangi çeşit yeniden-oluşturma metodunun kullanıldığı, hangi gözlem modelinin varsayıldığı, algoritmanın hangi bölgede (uzamsal veya frekans) uygulandığı, D.Ç. görüntüleri elde etmek için hangi yöntemin kullanıldığı, bulanıklık parametrelerinin biliniyor varsayıp varsayılmadığı ve izin verilen hareket çeşitlerine göre farklılık



Şekil 2.1. Genel bir süper-çözünürlük yöntemi. (IEEE'nin izniyle [3]'den uyarlanmıştır.)

göstermektedir. [11]'de verilen teknik raporda o tarihe kadar olan süper-çözünürlük yöntemlerinin tam bir dökümü verilmektedir. Ayrıca [3] ve [12], konuya ilişkin çalışma yapmak isteyenler için iyi bir başlangıç noktası ve referans oluşturmaktadır.

Bundan sonraki alt-kısımlarda, şimdiye kadar önerilmiş önemli süper-çözünürlük yöntemleri anlatılacaktır. İlk olarak süper-çözünürlükte frekans uzayı yaklaşımından bahsedilecek, ardından Yerleştirme – Aradeğerleme – Bulanıklık Giderme yöntemi başta olmak üzere uzamsal bölge yöntemleri anlatılacaktır. Bu sınıfa deterministik ve olasılıksal düzenleme yaklaşımları, dışbükey kümelere izdüşüm yaklaşımı, özyineli ters-izdüşüm yöntemi, uyarlanır filtreler metodu ve diğer bazı metodlar girmektedir. Bu metodların ortak özelliği, bulanıklık parametrelerini biliniyor varsayımlarıdır. Son olarak, bölüm sonunda sayıları fazla olmamasına rağmen bulanıklık parametrelerini biliniyor varsayımayan yöntemlerden bahsedilecektir.

2.1. Frekans Uzayı Yaklaşımı

Frekans uzayı yaklaşımı, Y.Ç. görüntüyü oluşturmak için D.Ç. görüntülerde var olan örtüşmeden faydalanır. Tsai ve Huang [13], D.Ç. görüntüler arasındaki göreceli hareketi kullanarak, bu görüntüler ve ideal Y.Ç. görüntü arasındaki ilişkiyi tanımlayan bir sistem kurmuşlardır. Bu sistem, şu üç temel özelliğe dayanmaktadır: (i) Fourier dönüşümünün kayma özelliği, (ii) Sürekli Fourier Dönüşümü (CFT) ve Ayırık Fourier Dönüşümü (DFT) arasındaki örtüşme ilişkisi, (iii) ideal görüntünün bant-sınırlı olması. Bu özellikler, gözlenen görüntülere ait örtüşmüş DFT katsayılarını, bilinmeyen görüntüye ait CFT örnekleri ile ilişkilendiren sistem

denklemlerinin oluşturulmasına imkan verir. Bu denklemlerin çözümü ideal görüntünün frekans uzayı katsayılarını verir, buradan da ters DFT uygulanarak orijinal görüntüye ulaşılabilir. Sistem denklemlerini oluşturmak, görüntüler arasındaki genel kayma hareketinin alt-piksel hassasiyetinde bilinmesini gerektirmektedir. Gözlenen her görüntü, bağımsız denklemler sağlamalıdır. Bu sınırlama, yararlı veri getiren görüntüler arası hareket için bazı kısıtlamalar oluşturur.

Frekans uzayı süper-çözünürlük yönteminde kullanılmak üzere aşağıdaki notasyondan faydalanılmıştır:

$x(t_1, t_2)$: Sürekli görüntü,

$X(u_1, u_2)$: Görüntünün CFT'si,

K : Genel kayma hareketleri sonucunda oluşan görüntü sayısı,

δ_{1k} ve δ_{2k} : k 'inci görüntü için keyfi, ancak bilinen kayma değerleri,

$k = 1, 2, \dots, K$,

$x_k(t_1, t_2) = x(t_1 + \delta_{1k}, t_2 + \delta_{2k})$: K adet kaymış görüntü,

$X_k(u_1, u_2)$: Kaymış görüntülerin CFT'leri,

(T_1, T_2) : Örnekleme periyodu,

$y_k(n_1, n_2)$: K adet kaymış ve örneklenmiş görüntü,

$Y_k(v_1, v_2)$: Bu görüntülerin DFT'leri.

İdeal sürekli görüntünün CFT'si $X(u_1, u_2)$ ve kaymış-örneklenmiş görüntülerin DFT'leri $Y_k(v_1, v_2)$, $k = 1, 2, \dots, K$ arasındaki örtüşme etkisi Denklem (2.1)'de verilmiştir:

$$Y_k(v_1, v_2) = \alpha \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} X_k \left(\frac{2\pi}{T_1} \left(\frac{v_1}{N_1} + n_1 \right), \frac{2\pi}{T_2} \left(\frac{v_2}{N_2} + n_2 \right) \right). \quad (2.1)$$

Denklem (2.1)'de (N_1, N_2) , D.Ç. görüntülerin boyutlarıdır. CFT'nin kayma özelliğinden faydalanılarak kaymış görüntülerin CFT'leri, $X_k(u_1, u_2)$, orijinal görüntünün CFT'si $X(u_1, u_2)$ cinsinden,

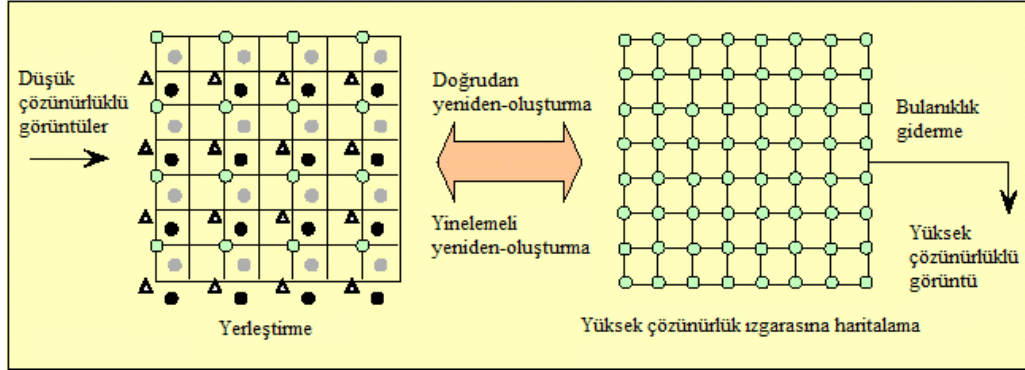
$$X_k(u_1, u_2) = X(u_1, u_2) \exp\{2\pi j(\delta_{k1}u_1 + \delta_{k2}u_2)\} \quad (2.2)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $X(u_1, u_2)$ 'nin bant-sınırlı olduğu varsayılmıştır ($|X(u_1, u_2)| = 0$, $|u_1| \geq (L_1\pi / T_1)$ ve $|u_2| \geq (L_2\pi / T_2)$ için). L_1 ve L_2 'nin yatay ve dikey yönlerde alt-örnekleme oranlarını gösterdiğini hatırlatmakta fayda vardır. Denklem (2.1)'deki eşitliğin sağ tarafını (n_1, n_2) için, sol tarafını ise k için leksikografik şekilde sıralarsak,

$$Y = \Phi X \quad (2.3)$$

ile verilen vektör-matris eşitliğini elde ederiz. Denklem (2.3)'de Y , k 'inci elemanı $Y_k(v_1, v_2)$ olan $K \times 1$ boyutunda bir sütun vektörü, X , KL_1L_2 boyutunda $x(t_1, t_2)$ 'nin bilinmeyen CFT'sinin örneklerini içeren vektör ve Φ ise gözlenen verilerin DFT'si ile ideal görüntünün CFT örneklerini ilişkilendiren matristir. Bu durumda frekans uzayında süper-çözünürlüklü görüntü oluşturma, gözlenen K görüntünün DFT'lerini bulma, hareket kestirimi kullanarak Φ 'yi oluşturma, X için Denklem (2.3)'deki denklem sistemini çözme ve ters DFT uygulayarak Y.Ç. görüntüyü oluşturma şeklinde özetlenebilir.

Frekans uzayı yaklaşımının bulanık ve gürültülü görüntülere uygulanması, ağırlıklı en-küçük kareler yöntemi kullanılarak yapılmıştır [14]. Bu çalışmada, D.Ç. bütün görüntülerin aynı bulanıklığa ve aynı gürültü karakteristiğine sahip oldukları varsayılmaktadır. Yöntem, [15]'deki çalışmada D.Ç. görüntülerin farklı bulanıklıklara sahip olmaları durumuna genişletilmiştir, bulanıklık operatöründen kaynaklanan kötü-konumlanma probleminin üstesinden gelmek için Tikhonov düzenleme metodu kullanılmıştır. [16]'da süper-çözünürlüklü görüntü oluşturmak için yerleştirme hatalarından (Φ hataları) kaynaklanan etkileri gidermek üzere yinelemeli toplam en-küçük kareler yöntemi önerilmiştir. [17]'de ayırık kosinüs dönüşümü (DCT) tabanlı bir yöntem önerilmiştir. DFT yerine DCT kullanılarak bellek ve hesaplama gereksinimleri azaltılmıştır. Ayrıca, eksik-belirtilmiş (under-determined) durumlardan ve yetersiz hareket bilgisinden kaynaklanan kötü-konumlanma problemini çözmek için çok kanallı uyarlanır düzenleme parametreleri kullanılmıştır.



Şekil 2.2. Yerleştirme–Ara değerlendirme–Onarım yöntemi. (IEEE'nin izniyle [3]'den uyarlanmıştır.)

Frekans uzayı yaklaşımının temel üstünlüğü teorik olarak basit olmasıdır. Yani Y.Ç. görüntü ile D.Ç. görüntüler arasındaki ilişki açık olarak ifade edilebilir. Ayrıca, frekans uzayı yaklaşımı donanım karmaşıklığını azaltmak üzere paralel uygulamaya uygundur. Bunlara karşın gözlem modeli, genel kayma hareketi ve doğrusal-kayma bağımsız (Linear Shift-Invariant, LSI) bulanıklık ile sınırlıdır. Ek olarak, frekans uzayındaki veri ilinti eksikliğinden dolayı düzenleştirme için uzamsal-bölge önsel bilgisini kullanmak zordur.

2.2. Yerleştirme – Ara Değerleme – Bulanıklık Giderme Yöntemi

Bu yaklaşımda Şekil 2.1'de gösterilen aşamalar teker teker uygulanır, (i) hareketin kestirilmesi ve yerleştirme, (ii) düzgün-olmayan ara-değerleme, (iii) bulanıklık giderme. Görsel bir örnek Şekil 2.2'de verilmiştir. Kestirilen göreceli hareket bilgisiyle birlikte düzgün olmayan bir biçimde yerleştirilmiş örneklerden oluşan süper-çözünürlüklü görüntü elde edilir. Ardından düzgün yerleştirilmiş örnek noktaları oluşturmak için doğrudan ya da özyineli (iterative) yeniden-oluşturma işlemi [18] uygulanır. Düzgün-olmayan ara-değerleme ile Y.Ç. görüntü elde edildikten sonra bulanıklık ve gürültüyü gidermeyi amaçlayan onarım (restorasyon) problemi ele alınır. Onarım, gürültünün varlığını göz önünde tutan herhangi bir bulanıklık giderme yöntemi ile yapılabilir.

[19]'da, Papuolis'in genelleştirilmiş çok kanallı örnekleme teoremi [20] kullanılarak birbirlerine göre kaymış bir grup D.Ç. görüntü üzerinde düzgün olmayan ara-

değerleme uygulanmıştır. Ara-değerlemenin ardından bulanıklık giderme işlemi yapılmıştır. Bu yöntemde hareket bilgisinin tam olarak bilindiği varsayılmaktadır. [2]'de, farklı kameralarla aynı zamanda çekilmiş çok sayıda görüntüden, Landweber algoritması kullanılarak çözünürlüğü iyileştirilmiş görüntü elde edilmiştir. Göreceli hareketi ölçmek için blok-eşleme tekniği kullanılmıştır. Kameralar aynı açıklığa sahipse, yöntem hem kameraların yerleşimi, hem de görüntünün niteliği konusunda oldukça fazla sınırlamalar getirmektedir. Nguyen ve Milanfar, dalgacık-tabanlı bir süper-çözünürlük algoritması önermişlerdir [21]. Yüksek çözünürlükteki örnekleme ızgarasının geçmeli (interlacing) yapısından faydalanmışlar ve iki boyutlu geçmeli veri için hesap yükü açısından verimli bir dalgacık ara-değerleme yöntemi geliştirmişlerdir.

Yerleştirme – ara değerlendirme – onarım yöntemlerinin üstünlüğü, fazla işlem yükü gerektirmediklerinden gerçek zamanlı uygulamalar için uygun olmalarıdır. Bununla birlikte, bu yaklaşımda bozulma modelleri sınırlıdır, D.Ç. tüm görüntüler için aynı bulanıklık ve gürültü karakteristiği varsayılmaktadır. Ayrıca tüm algoritmanın optimal olduğu garanti değildir, çünkü onarım aşamasında, ara-değerleme aşamasında meydana gelen olan hatalar göz önüne alınmamaktadır.

2.3. Düzenleştirilmiş Süper-Çözünürlük: Deterministik Yaklaşım

Hareket parametrelerinin kestirilmesiyle $y_k = W_k x + v_k$ ile verilen gözlem modeli tamamıyla belirlenebilir ($W_k = DB_k M_k$). Deterministik düzenleştirilmiş süper-çözünürlük yaklaşımı bu ters problemi, çözüm hakkındaki, problemi iyi-konumlanmış (well-posed) hale getirecek önsel bilgiyi kullanarak çözer. Örneğin, Denklem (2.4)'de verilen maliyet fonksiyonunu en küçük yapan x 'i bulabilmek için sınırlandırılmış en-küçük kareler (CLS) yöntemi kullanılabilir:

$$\left[\sum_{k=1}^K \|y_k - W_k x\|^2 + \alpha \|Cx\|^2 \right] \quad (2.4)$$

C genellikle yüksek-geçiren bir filtredir ve $\|\cdot\|$ l_2 -norm'u gösterir ($\|x\| = (x^T x)^{1/2}$). Denklem (2.4)'de, istenen çözümle ilgili olan önsel bilgi düzgünlük kısıtlamasıyla

temsil edilmektedir. Çoğu görüntü genellikle düzgündür, yani fazla yüksek frekans bileşeni yoktur. Bu nedenle, oluşturulacak görüntüde yüksek – frekans enerjisinin miktarını sınırlandırmak uygun olacaktır. α , $\sum_{k=1}^K \|y_k - W_k x\|^2$ ile ifade edilen veriyle olan tutarlılık ile $\|Cx\|^2$ ile gösterilen çözümün düzgünlüğü arasındaki tercihi kontrol eden düzenleme (Lagrange) çarpanıdır. α 'nın büyük olması çözümü daha düzgün yapacaktır. Bu durum, elde düşük sayıda D.Ç. görüntü var ise veya eldeki verilerin doğruluğundan, hareket kestirim hataları veya gürültü yüzünden emin değilsek faydalıdır. Bunun yanında, eğer çok sayıda D.Ç. görüntü varsa ve gürültü azsa α 'yı küçük seçmek daha iyi sonuçlar doğuracaktır. Yukarıdaki maliyet fonksiyonu dışbükeydir ve ikinci dereceden düzenleme teriminin kullanılmasından ötürü türevlenebilir. O halde, Denklem (2.4) ile verilen maliyet fonksiyonunu en küçük yapan tek bir çözüm vardır. Çözüm, matris tersi hesaplanmasını gerektirir. Bu nedenle, çözümü bulmak için özyineli yöntemler kullanılır. En temel deterministik özyineli tekniklerden biri Denklem (2.5)'i çözmeyi amaçlar:

$$\left[\sum_{k=1}^K W_k^T W_k + \alpha C^T C \right] \hat{x} = \sum_{k=1}^K W_k^T y_k \quad (2.5)$$

Denklem (2.5)'i çözmek için

$$\hat{x}^{i+1} = \hat{x}^i + \beta \left[\sum_{k=1}^K W_k^T (y_k - W_k \hat{x}^i) - \alpha C^T C \hat{x}^i \right] \quad (2.6)$$

olarak verilen özyineleme ilişkisi kullanılır. β yakınsaklık parametresini temsil eder ve W_k^T , üst-örnekleme, bulanıklık ve yamultma operatörlerini içerir.

Hong ve diğerleri, çok-kanallı düzenlenmiş bir süper-çözünürlük yöntemi önermiştir [22]. Bu yöntemde, her özyineleme basamağında önsel bilgiye ihtiyaç olmadan düzenleme fonksiyonu kullanılıp düzenleme parametresi hesaplanır. [23]'de, çok-kanallı düzenlenmiş süper-çözünürlük yaklaşımını da içeren genelleştirilmiş çok-kanallı ters evrişim metodu geliştirilmiştir.

Düzenleştirilmiş bir maliyet fonksiyonunu enküçültmeye dayanan bir süper-çözünürlük yöntemi [24]'de sunulmuştur. Çalışmada optik sistem ve algılayıcı dizisi bilgisini de içeren bir gözlem modeli tanımlanmış, özyinelemeli gradyan-temelli bir yerleştirme algoritması kullanılmış ve maliyet fonksiyonunu enküçültmek için hem gradyan iniş, hem eşlenik gradyan optimizasyon yöntemleri kullanılmıştır. [25]'de düzenleştirme parametresinin önemine dikkat çekilmiş ve bu parametrenin optimum değerini hesaplayan, L-eğrileri metodunu kullanan CLS-tabanlı bir süper-çözünürlük yöntemi önerilmiştir.

2.4. Düzenleştirilmiş Süper-Çözünürlük: Olasılıksal Yaklaşım

Olasılıksal süper-çözünürlük yaklaşımı, çözümle ilgili önsel bilgiyi modellemek için esnek ve uygun bir yol sağlamaktadır. Bayes kestirim yöntemleri, orjinal görüntünün sonsal olasılık-yoğunluk fonksiyonu elde edilebildiğinde kullanılabilir. x 'in en-büyük sonsal (maximum a posteriori, MAP) kestirimi, Denklem (2.7)'de verilen olasılık-yoğunluk fonksiyonunun x 'e göre enbüyütülmesi sonucunda elde edilir:

$$x = \arg \max P\{x | y_1, y_2, \dots, y_K\} \quad (2.7)$$

Bu ifadenin logaritmasını aldığımızda ve koşullu olasılığa Bayes Teoremi'ni uyguladığımızda MAP optimizasyon problemi,

$$x = \arg \max (\ln P\{y_1, y_2, \dots, y_K | x\} + \ln P\{x\}) \quad (2.8)$$

olarak yeniden düzenlenebilir. Burada önsel görüntü modeli $P\{x\}$ ile koşullu yoğunluk fonksiyonu $P\{y_1, y_2, \dots, y_K | x\}$, sırasıyla Y.Ç. görüntü x ile ilgili önsel bilgi ve görüntünün istatistiksel bilgisi tarafından belirlenecektir. MAP optimizasyonu, $P\{x\}$ ile ifade edilen önsel şartlar içerdiğinden düzenleştirilmiş (kararlı) süper-çözünürlük kestirimleri sağlar. Bayes kestirim, önsel görüntü modeli kullanarak olası çözümler arasında ayırmalar yapar. Bu amaçla görüntü ön modellemesinde uygun bir yöntem olan Markov Rastgele Alan (MRF) önsellerinden faydalanılmaktadır. MRF önseli kullanılarak $P\{x\}$, olasılık yoğunluğu

$$P\{X = x\} = \frac{1}{Z} \exp\{-U(x)\} = \frac{1}{Z} \exp\left\{-\sum_{c \in S} \varphi_c(x)\right\} \quad (2.9)$$

olarak verilen Gibbs önseli olarak tanımlanır. Burada, Z normalize edici bir sabittir, $U(x)$ enerji fonksiyonu olarak isimlendirilir, $\varphi_c(x)$, sadece c kliği (clique) içine konumlanmış piksel değerlerine dayalı olan potansiyel fonksiyonudur, S ise tüm kliklerin kümesini temsil eder. $\varphi_c(x)$ görüntünün türevinin bir fonksiyonu olarak tanımlanırsa $U(x)$ çözümün düzensizliklerinden kaynaklanan maliyeti temsil eder. Görüntü genellikle düzgün (smooth) kabul edilir, bu da kestirim problemine Gauss önseli olarak ilave edilir.

Bayes yaklaşımının önemli bir üstünlüğü kenar-koruyan görüntü önsel modellerinin kullanımına imkan sağlamasıdır. Gauss önselinin kullanımıyla potansiyel fonksiyonu $\varphi_c(x) = (D^{(n)}x)^2$ karesel biçimini alır ($D^{(n)}$, n 'inci dereceden farktır). Karesel potansiyel fonksiyonu, algoritmayı doğrusal yapmasına rağmen Y.Ç. bileşenleri ciddi bir biçimde etkiler. Sonuç olarak çözüm, aşırı düzgünleştirilmiş olur. Bununla birlikte x 'deki büyük değişiklikleri daha az cezalandıran bir potansiyel fonksiyon modeli kullanılırsa kenar-korunmuş bir Y.Ç. görüntü elde edilebilir.

Görüntüler arasındaki hatanın bağımsız olduğu ve gürültü örneklerinin bağımsız ve eşit dağılımlı (i.i.d.) sıfır ortalamaya sahip Gauss dağılımına sahip olduğu varsayılırsa optimizasyon problemi daha öz bir biçimde,

$$\hat{x} = \arg \min \left[\sum_{k=1}^K \|y - W_k \hat{x}\|^2 + \alpha \sum_{c \in S} \varphi_c(x) \right] \quad (2.10)$$

olarak ifade edilebilir. α düzenleme parametresidir. Ayrıca Denklem (2.5) ile tanımlanan kestirim, eğer Denklem (2.9) ile verilen Gauss önseli kullanılırsa MAP kestirime eşit olacağı gösterilebilir.

Süper-çözünürlük problemine enbüyük olabilirlik (ML) kestirimi uygulanması da önerilmiştir. ML kestirimi, MAP kestiriminin önsel bilgi içermeyen özel bir

durumdur. Süper-çözünürlük ters problemlerinin kötü-konumlanmış durumlarından ötürü MAP kestirimi, ML kestirimine oranla daha çok tercih edilmektedir.

Tom ve Katsaggelos [26], alt-piksel kaymaları, gürültü varyansını ve Y.Ç. görüntüyü aynı anda kestiren bir ML görüntü kestirim problemi tanımlamıştır. Önerilen ML kestirim problemi, beklenti-enbüyültme (EM) algoritması kullanılarak çözülmüştür. MAP tekniği kullanılarak D.Ç. bir video dizisinden süper-çözünürlüklü bir görüntü oluşturma, [27]'de sunulmuştur. Bu çalışmada Huber-Markov Gibbs önseli kullanılarak süreksizliği koruyan MAP kestirim yöntemi önerilmiştir. Sonuç olarak problem, tek bir minimuma sahip sınırlandırılmış bir optimizasyon problemine dönüşür. Alt-piksel seviyesinde yer değiştirme vektörlerini bulmak için değiştirilmiş hiyerarşik blok eşleme yöntemi kullanılmıştır. Ayrıca, bağımsız nesne hareketi ve Gauss gürültüsü olarak modellenen hareket kestirim hatalarını da göz önüne alınmıştır. [28]'de görüntü hareket parametrelerini ve Y.Ç. görüntüyü eşzamanlı olarak kestiren bir MAP yöntemi verilmiştir. Hareket parametreleri (bu durum için yatay ve düşey kayma miktarları), döngüsel bir optimizasyon işlemi ile Y.Ç. görüntü boyunca öz yinelemeli olarak güncellenmektedir. [29]'da, Viking uydusu tarafından elde edilen çok sayıda uydu görüntüsünü birleştirmek için Gauss önsel modeli kullanılarak Bayesian kestirim yapılmıştır. [39]'da görüntünün bölgesel özelliklerine dayalı uyarlanırlı düzgünleştirme yapan kenar-koruyucu bir olasılıksal yöntem önerilmiştir. Kang ve Lee, [40]'da düzenleme içeren bir en-küçük kareler çözümü sunmuşlardır. [41]'de yerleştirme parametrelerinin ve nokta dağılım fonksiyonunun hatalı kestirimlerini göz önünde tutan bir süper-çözünürlük algoritması geliştirilmiştir. Ayrıca [42]'de beklenti-enbüyültme ve MAP metodlarının frekans bölgesinde uygulanmaları ile ilgili bir çalışma yapılmıştır.

Olasılıksal süper-çözünürlük yaklaşımının kuvvetli yönü, gürültü karakteristiği ve çözümle ilgili önsel bilginin modellenmesinde sağlamlık ve esneklik sağlamasıdır. Ayrıca, gürültünün beyaz Gauss gürültüsü olduğu varsayıldığında ve önsel bilgi olarak dışbükey enerji fonksiyonları seçildiğinde çözümün tek olması sağlanır. Bu nedenle Y.Ç. görüntünün kestiriminde gradyan iniş yöntemleri emniyetle uygulanabilir. Ayrıca, hareket bilgisini ve Y.Ç. görüntüyü eşzamanlı olarak kestirmek de mümkündür.

2.5. Dışbükey Kümelere İzdüşüm Yaklaşımı

Dışbükey kümelere izdüşüm (POCS) yöntemi, Y.Ç. görüntü oluşturma işleminde çözümlü ilgili önsel bilginin kullanılması yönünden alternatif bir özyinelemeli yaklaşım sunar. Hareket parametrelerinin kestirimiyle birlikte bu algoritma, onarım ve ara-değerleme problemlerini eşzamanlı olarak çözer.

Süper-çözünürlük probleminin POCS yöntemi ile çözülmesi ilk olarak [30]'da önerilmiştir. Bu yöntem, [31]'de gözlem gürültüsünü de içerecek şekilde genişletilmiştir. POCS yöntemine göre çözüm işlemine önsel bilgiyi ilave etmek, çözümü belli bir kapalı dışbükey kümenin (C_i) elemanı olacak şekilde sınırlandırmak anlamındadır. C_i , belli bir özelliği sağlayan vektörlerin kümesi şeklinde tanımlanır. Eğer sınırlandırma kümelerinin kesişimi boş değilse, olası bir çözüm kendisi de dışbükey bir küme olan kesişim kümesinde olacaktır ($C_s = \cap_{i=1}^m C_i$). Çözümde, bu kümelere birbirini izleyen izdüşümler uygulanarak ulaşılabilir. Kesişim kümesindeki her çözüm önsel bilgilerle uyum içindedir ve dolayısıyla istenen bir çözümdür. POCS metodu, kesişim kümesinden bir vektörü bulmak için aşağıdaki özyinelemeli işlemi uygular:

$$x^{n+1} = P_m P_{m-1} \cdots P_2 P_1 x^n \quad (2.11)$$

x^0 , keyfi bir başlangıç noktasıdır ve P_i , herhangi bir x işaretini kapalı ve dışbükey kümelere C_i ($i = 1, 2, \dots, m$) izdüşüren izdüşüm operatörüdür. Bu işlem basit olmamasına rağmen, P_s 'yi (yani x 'i doğrudan çözüm kümesi C_s 'ye izdüşüren izdüşüm operatörünü) bir aşamada bulmaktan [30] daha kolaydır.

Hareket bilgisinin doğru olduğu varsayıldığında Denklem (1.1) ile verilen gözlem modeline dayalı veri tutarlılık sınırlandırma kümesi, D.Ç. görüntü pikselleri $y_k(m_1, m_2)$ için şu şekilde gösterilir [31, 32]:

$$C_D^k(m_1, m_2) = \{x(n_1, n_2) : |r^{(x)}(m_1, m_2)| \leq \delta_k(m_1, m_2)\} \quad (2.12)$$

$$r^{(x)}(m_1, m_2) = y_k(m_1, m_2) - \sum_{n_1, n_2} x(n_1, n_2) W_k(m_1, m_2; n_1, n_2) \quad (2.13)$$

$\delta_k(m_1, m_2)$, mevcut görüntünün $C_D^k(m_1, m_2)$ kümesinin bir elemanı olduğuna dair istatistiksel güveni yansıtan bir sınırdır [32]. $\delta_k(m_1, m_2)$ sınırı gürültü istatistiğinden çıkarıldığı için ideal çözüm, belli bir istatistiksel güvene sahip olan kümenin bir elemanı olacaktır. Ayrıca POCS yöntemi, uzam ve zamana göre değişen beyaz gürültü işlemlerini de modelleyebilmektedir. Keyfi bir $x(n_1, n_2)$ 'nin $C_D^k(m_1, m_2)$ üzerine izdüşümü,

$$x^{(n+1)}(n_1, n_2) = x^{(n)}(n_1, n_2) +$$

$$\begin{cases} \frac{(r^{(x)}(m_1, m_2) - \delta_k(m_1, m_2)) \cdot W_k(m_1, m_2; n_1, n_2)}{\sum_{p, q} W_k^2(m_1, m_2; p, q)} & , r^{(x)}(m_1, m_2) > \delta_k(m_1, m_2) \\ 0 & , |r^{(x)}(m_1, m_2)| \leq \delta_k(m_1, m_2) \\ \frac{(r^{(x)}(n_1, n_2) + \delta_k(n_1, n_2)) \cdot W_k(m_1, m_2; n_1, n_2)}{\sum_{p, q} W_k^2(m_1, m_2; p, q)} & , r^{(x)}(m_1, m_2) < -\delta_k(m_1, m_2) \end{cases} \quad (2.14)$$

olarak tanımlanır [31]. Sonuçları iyileştirmek için Denklem (2.14)'de verilen izdüşüm işleminden sonra genlik sınırlandırması gibi bazı sınırlandırmalar kullanılabilir [30].

[32]'de uzama göre değişen bulanıklığı, kameranın sıfırdan farklı açıklık zamanını, her algılayıcı birimin sıfırdan farklı olan fiziksel boyutunu, algılama gürültüsünü ve keyfi örnekleme kafeslerini göz önüne alan POCS temelli bir süper-çözünürlük algoritması geliştirilmiştir. Ardından bu yöntem, [33]'de geçerlilik haritası ve bölütleme haritası kavramları kullanılarak manzara içinde çok sayıda hareket eden nesnelere durumu genelleştirilmiştir. Geçerlilik haritası, hareket kestirim hatalarından fazla etkilenmeyen süper-çözünürlük sağlamaktadır, bölütleme haritası ise nesne-tabanlı süper-çözünürlüğe imkan oluşturmaktadır. [34]'de, daha yüksek dereceden ara-değerleme metodlarına imkan verecek şekilde, sürekli görüntü oluşması modelinde iyileştirme yapan POCS tabanlı bir süper-çözünürlük yöntemi geliştirilmiştir. Bu çalışmada, Y.Ç. algılayıcı alanının sabit olmadığı ve sürekli bir

görüntünün olduğu varsayılmıştır. Ayrıca kenar yakınlarında oluşan halkalar şeklindeki bozunumları gidermek için sınırlandırma kümesini değiştirilmiştir. [35]'de POCS'a benzeyen, küme kuramı tabanlı bir düzenleme yaklaşımı incelenmiştir. Elipsoid sınırlandırma kümeleri kullanılarak sınır elipsinin (küme kesişimi) merkezine denk gelen bir süper-çözünürlük kestirimi bulunmaktadır.

POCS yönteminin üstünlükleri, basit olması ve uzamsal bölge gözlem modelinden faydalanmasıdır. Ayrıca, önsel bilginin eklenmesine uygun bir ortam sağlar. Bu metotlar çözümün tek olmaması, yavaş yakınsaklık ve yüksek hesaplama maliyeti gibi eksikliklere sahiptir.

2.6. ML-POCS Hibrid Yaklaşım

ML-POCS hibrid süper-çözünürlük yaklaşımı, ML (ya da MAP) maliyet fonksiyonunu enküçülterek süper-çözünürlüklü görüntü oluşturmaya çalışırken aynı zamanda çözümü bazı belirli kümeler içinde olmaya zorlamaktadır.

[27]'de önerilen yöntemde izdüşüm temelli sınırlandırmalar kullanılırken aynı zamanda MAP optimizasyonu da uygulanmaktadır. Sınırlandırma kümesi, Y.Ç. görüntünün alt-örneklenmiş biçiminin referans D.Ç. görüntü ile aynı olmasını garantilemektedir. [4]'de, olasılıksal yaklaşımlar ile POCS yaklaşımının faydalarını birleştiren genel bir hibrid süper-çözünürlüklü görüntü oluşturma metodu anlatılmıştır. ML veya MAP ile POCS sınırlandırmaları aynı anda kullanılarak,

$$\min \mathcal{E}^2 = \left\{ [y_k - W_k x]^T R_n^{-1} [y_k - W_k x] + \alpha [Sx]^T V [Sx] \right\}, \{x \in C_k, 1 \leq k \leq K\} \quad (2.15)$$

olarak verilen yeni bir dışbükey optimizasyon problemi tanımlanmıştır. Burada R_n görüntünün özilinti matrisini, S Laplace operatörünü, V her pikselde düzleştirme faktörünü kontrol eden ağırlıklı matrisini, C_k ise ek sınırlandırmaları temsil etmektedir.

Hibrid yaklaşımın avantajı tüm önsel bilginin verimli bir şekilde birleştirilebilmesidir. Ayrıca POCS tabanlı yöntemlerden farklı olarak tek bir optimal çözümü garanti eder.

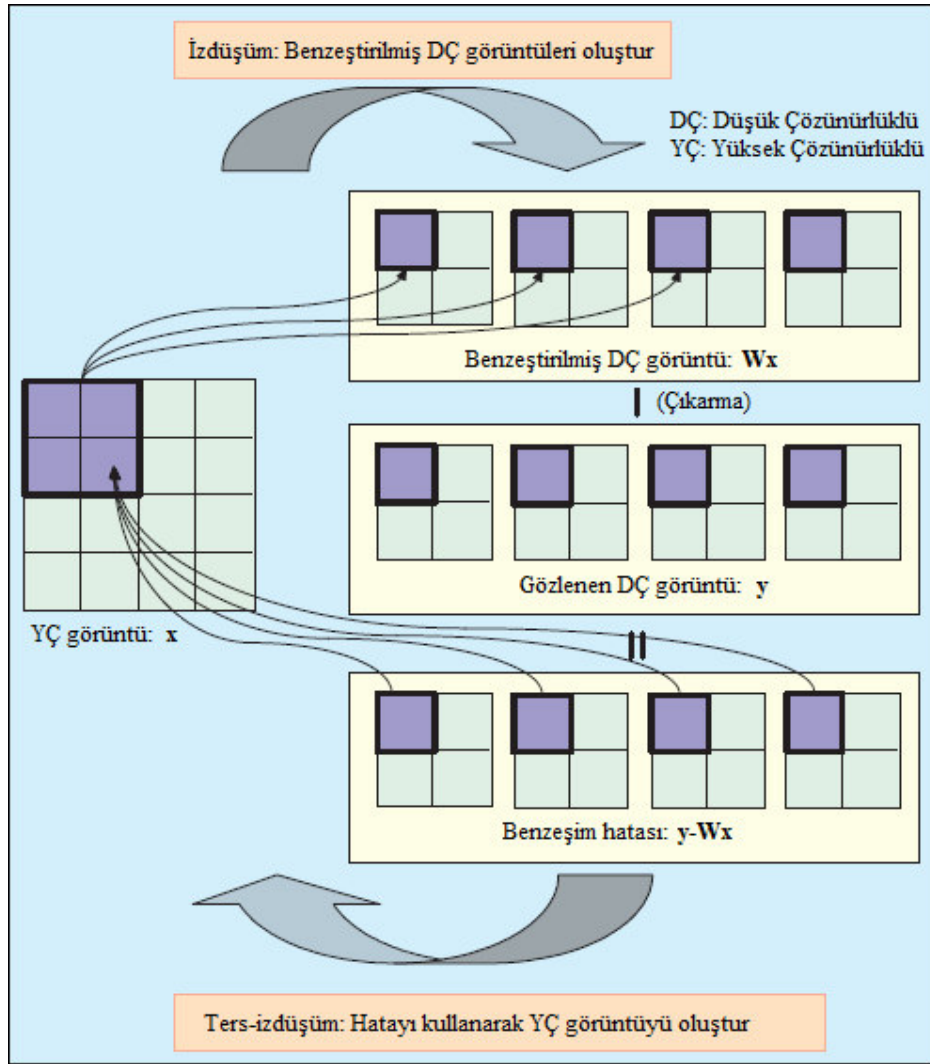
2.7. Özyinelemeli Geri-İzdüşüm Yöntemi

[36]'da, tomografide kullanılan geri-izdüşüm yöntemine benzer bir şekilde özyinelemeli geri-izdüşüm (IBP) süper-çözünürlük yöntemi geliştirilmiştir. Bu yaklaşımda Y.Ç. görüntü, benzeştirilmiş ve gözlenmiş D.Ç. görüntüler arasındaki hatanın geri izdüşürülmesiyle kestirilir. Bu işlem, hatanın enerjisini enküçültecek şekilde özyinelemeli olarak devam eder. IBP yönteminde, herhangi bir yineleme adımında kestirilen yüksek-çözünürlüklü görüntü,

$$\hat{x}^{n+1}(n_1, n_2) = \hat{x}^n(n_1, n_2) + \sum_{m_1, m_2 \in \gamma_k^{m_1, n_1}} (y_k(m_1, m_2) - \hat{y}_k^n(m_1, m_2)) \cdot h^{\text{BP}}(m_1, m_2; n_1, n_2) \quad (2.16)$$

olarak ifade edilmektedir. Denklem (2.16)'da, $\hat{y}_k^n (= W_k \hat{x}_n)$, n yineleme sonrasında x 'in yaklaşıklığından benzeştirilmiş D.Ç. görüntüleri, $\gamma_k^{m_1, n_1}$, $\{(m_1, m_2) \in y_k \mid (m_1, m_2), (n_1, n_2) \text{'den etkilenmiştir, } (n_1, n_2) \in x\}$ olarak tanımlanan kümeyi, $h^{\text{BP}}(m_1, m_2; n_1, n_2)$ ise hatanın $(y_k(m_1, m_2) - \hat{y}_k^n(m_1, m_2)) \hat{x}^n(n_1, n_2)$ 'e olan katkısını belirleyen geri-izdüşüm çekirdeğini göstermektedir. Özyinelemeli geri-izdüşüm yönteminin görsel hali Şekil 2.3'de gösterilmiştir. Görüntü bulanıklığından farklı olarak h^{BP} herhangi bir şekilde seçilebilir. [36]'da h^{BP} 'nin seçiminin, çok sayıda muhtemel çözüm olması durumunda çözümün karakteristiğini etkilediğine işaret edilmiştir. Bu sayede h^{BP} , çözümün istenen bir özelliğini temsil eden ek bir sınırlama olarak kullanılabilir.

IBP yönteminin üstünlüğü, kolayca ve sezgisel olarak anlaşılabilir olmasıdır. Bununla birlikte, bu teknikte ters problemin kötü-konumlanmış doğasına bağlı olarak tek bir çözüm yoktur ve h^{BP} seçiminde bazı zorluklar vardır. Düzenileştirilmiş POCS ve olasılıksal metotlardan farklı olarak önsel bilgilerin uygulanması zordur.



Şekil 2.3. Özyinelemeli ters-izdüşüm yaklaşımı. (IEEE'nin izniyle [3]'den uyarlanmıştır.)

2.8. Uyarlanır Filtre Yaklaşımı

[37]'de Elad ve Feuer, zaman uzayında uygulanan uyarlanır filtre teorisine dayalı bir süper-çözünürlüklü görüntü oluşturma algoritması önermişlerdir. Gözlem modelindeki notasyonu, zaman bağımlılığı gösterecek şekilde değiştirmişler ve özyinelemeli en-küçük kareler (RLS) veya özyinelemeli en-küçük karesel ortalama (R-LMS) tabanlı kestirimleri önermişlerdir. Y.Ç. görüntüyü her zaman biriminde yinelemeli olarak kestirmek için en dik iniş (SD) ve normalleştirilmiş SD algoritmaları uygulanmıştır. LMS algoritması, SD algoritmasından çıkarılmıştır. Bunun sonucunda, her zaman biriminde Y.Ç. görüntü, doğrudan matris tersi almanın

getirdiği hesap yükü atlanarak hesaplanabilmektedir. Bu yaklaşım, herhangi bir çıkış çözünürlüğü, doğrusal uzam ve zaman bağımlı bulanıklık ve hareket akışı için kullanılabilir, dolayısıyla Y.Ç. görüntü dizilerinin aşamalı olarak kestirimleri mümkün olmaktadır. Bu çalışmanın ardından özyinelemeli SD ve R-LMS algoritmaları, Kalman filtrelerinin bir yaklaşımı olarak yeniden türetilmiştir [38]. Ayrıca, bu algoritmaların yakınsaklık analizinden ve işlem yüklerinden de bahsedilmiştir.

2.9. Gözü-Kapalı Süper-Çözünürlük

Şimdiye kadar bahsedilen hemen hemen bütün yöntemlerde Y.Ç. görüntüyü oluşturmak için bulanıklık parametrelerinin bilinmesi gerekmektedir. Ancak, pratik uygulamalarda durum genellikle böyle değildir. Bulanıklık parametreleri süper-çözünürlük aşamasından önce kestirilmeli veya Y.Ç. görüntü, bulanıklık parametrelerine ihtiyaç olmadan elde edilmelidir. Bulanıklığı biliniyor varsaymayan süper-çözünürlük yöntemlerine “gözü-kapalı görüntü süper-çözünürlük” yöntemleri denmektedir.

Şimdiye kadar yapılmış gözü-kapalı süper-çözünürlük çalışmaları genel olarak üç kategoriye ayrılabilir: Öğrenme tabanlı teknikler, parametrik nokta dağılım fonksiyonları için çalışan teknikler ve genel nokta dağılım fonksiyonları için çalışabilen teknikler. Birinci kategoriye giren metotlar [43, 44] öğrenme aşamasını uygulamak için veri tabanında çok sayıda yüksek-çözünürlüklü görüntü saklarlar. Bu yöntemlerin başarısı, bu şekilde saklanabilecek Y.Ç. görüntülerin varlığına bağlıdır. İkinci kategoriye giren metotlar, nokta dağılım fonksiyonlarının özel bir yapıda olduğunu ve bulanıklık operatörünü belirlemek için sadece bir parametreye ihtiyaç duyulduğunu varsayarlar. Bu varsayım, bir çok uygulama için gerçekçi değildir. Genelleştirilmiş çapraz-doğrulama Gauss karesel teorisine dayalı metot [45] ve yinelemeli beklenti-enbüyültme algoritması [46] bu sınıfa girmektedir. İlk iki kategoriye girmeyen görüntü süper-çözünürlüğü teknikleri, daha gerçekçi bir durumu temsil eden üçüncü kategoriye oluşturmaktadır. [47]’de Y.Ç. görüntülerin gözü-kapalı çok kanallı yeniden oluşturulmaları için üç aşamadan oluşan bir yöntem önerilmiştir. Aşamalar gözü-kapalı çok kanallı onarım, dalgacık tabanlı görüntü

birleştirme ve en-büyük entropi görüntü ara-değerleme aşamalarıdır. Metot, bulanıklık operatörlerinin aralarında asal olmaları durumunda Y.Ç. görüntüyü kestirebilmektedir. [48] ve [49]'da normalde tek-giriş çok-çıkış olan süper-çözünürlük problemi, çok-fazlı bileşenler kullanılarak çok-giriş çok-çıkış haline dönüştürölmekte ve ardından karışmış çok-fazlı bileşenler ayrılmaktadır. [50]'de düzenleştirilmiş bir enerji fonksiyonu oluşturulup orijinal görüntü ve bulanıklıklara göre enküçöltölerek parametrik olmayan bir gözü-kapalı görüntü süper-çözünürlük yöntemi oluşturulmuştur.

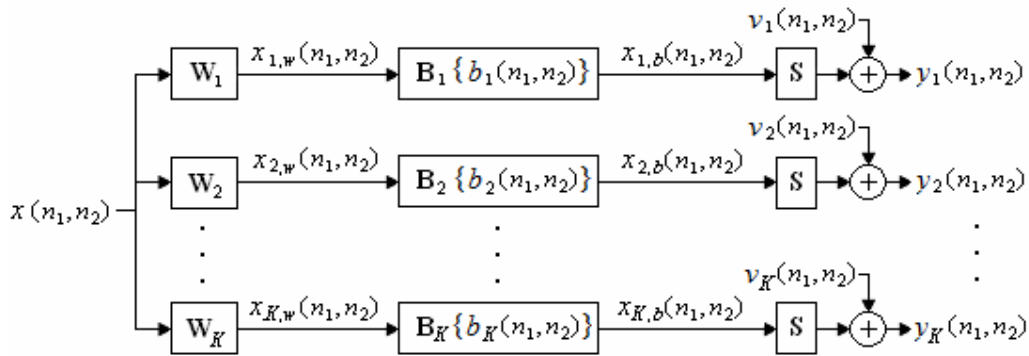
BÖLÜM 3. YENİDEN-OLUŞTURMA FİLTRELERİ İÇİN VARLIK-TEKLİK ANALİZİ

Bu bölümde, sadece kayma hareketi varken (veya hiç hareket yokken) ve kayma-bağımsız bulanıklık operatörleri durumunda yüksek çözünürlüklü (Y.Ç.) (ideal) görüntünün tam olarak geri kazanımı için kullanılacak iki boyutlu sonlu dürtü yanıtı (2-D FIR) filtrelerin varlık ve teklık durumları araştırılmış ve gerekli şartlar çıkarılmıştır. Mevcut düşük çözünürlüklü görüntü sayısı belirli bir eşik değerinden yüksekse ve bulanıklık operatörleri belirli bir özelliği sağlıyorsa, hareket yok iken bile Y.Ç. görüntüyü tam olarak oluşturacak bir geri-kazanım filtre kümesi oluşturulabilir. Bu şartlar tam olarak sağlanmıyorsa, Y.Ç. görüntü bir miktar hata ile oluşturulabilir, ideal görüntü hatasız olarak geri elde edilemez.

Bu bölümde elde edilen sonuçlar, gözü-kapalı olan veya olmayan görüntü süper-çözünürlük yöntemleri tarafından iki açıdan kullanılabilir. Eğer bulanıklık fonksiyonlarının boyutlarının bilindiği varsayılıyorsa uygulanacak uyarlanırlı filtrelerin boyutu, bu bölümde çıkacak sonuçlara göre seçilebilir. İkinci olarak, bu bölümde sunulan (gözü-kapalı olmayan) yöntem aracılığıyla elde edilecek sonuç, gözü-kapalı yöntemlerin performanslarının değerlendirilmesinde bir üst sınır olarak kullanılabilir.

3.1. Problem Tanımlama

Bölüm 1’de, gözlemlenen düşük çözünürlüklü (D.Ç.) görüntüleri Y.Ç. görüntüye bağlayan bir gözlem modeli verilmiş (Şekil 1.3) ve detaylı bir şekilde anlatılmıştı. Şekil 3.1’de bu modelin açık bir hali gösterilmektedir. Gözlemlenemeyen Y.Ç. görüntü $x(n_1, n_2)$, gözlemlenen DÇ görüntüler $y_k(n_1, n_2)$ $k = 1, \dots, K$ ve bulanıklık operatörleri ise $b_k(n_1, n_2)$ ile belirtilmiştir.



Şekil 3.1. Gözlem modelinin açık gösterimi.

Geometrik bozulma (yamultma veya hareket) operatörü sadece genel kayma hareketinden oluşuyorsa, Y.Ç. bulanık ve kaymış görüntünün iki boyutlu Z-dönüşümü

$$X_{k,b}(z_1, z_2) = X(z_1, z_2) z_1^{-H_k} z_2^{-V_k} B_k(z_1, z_2) \quad (3.1)$$

olarak yazılabilir. Denklem (3.1)'de $X(z_1, z_2)$, $X_{k,b}(z_1, z_2)$ ve $B_k(z_1, z_2)$, sırasıyla karşılık gelen uzamsal-bölge işaretlerinin iki boyutlu Z-dönüşümlerini, H_k ve V_k ise k . DÇ görüntü için ($k = 1, 2, \dots, K$) yüksek çözünürlük piksel değeri cinsinden yatay ve dikey kayma miktarlarını göstermektedirler.

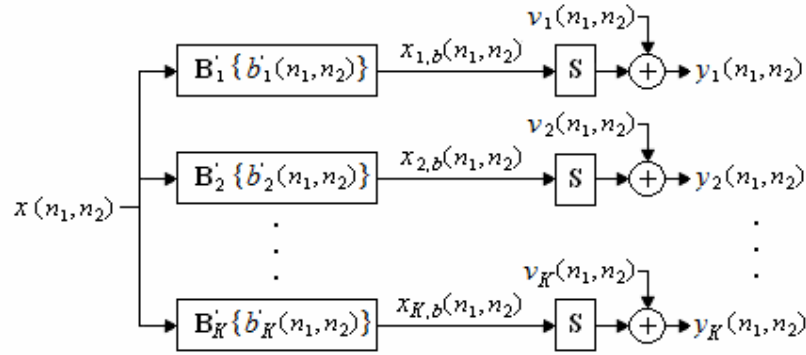
Eğer $B_k'(z_1, z_2) := z_1^{-H_k} z_2^{-V_k} B_k(z_1, z_2)$ veya eşdeğer olarak $b_k'(n_1, n_2) := b_k(n_1 - H_k, n_2 - V_k)$ şeklinde tanımlanırsa Denklem (3.1)

$$X_{k,b}(z_1, z_2) = X(z_1, z_2) B_k'(z_1, z_2) \quad (3.2)$$

şeklinde yeniden düzenlenebilir veya eşdeğer olarak

$$x_{k,b}(n_1, n_2) = x(n_1, n_2) * b_k'(n_1, n_2) \quad (3.3)$$

olarak yazılabilir.



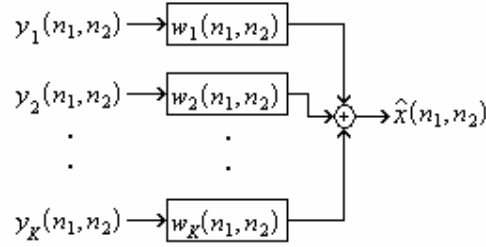
Şekil 3.2. Basitleştirilmiş gözlem modeli.

Özetle, hareket genel kayma şeklindeyse yamultma ve bulanıklık operatörleri tek bir bulanıklık operatörü içinde birleştirilebilir ve Şekil 3.1'deki gözlem modeli Şekil 3.2'de görülen haline dönüştürülebilir.

Y.Ç. ve bulanıklıktan arındırılmış görüntüyü elde etmek için D.Ç. görüntüler üzerine Şekil 3.3'deki gibi bir FIR yeniden-oluşturma filtre kümesi uygulanır. Sonsuz dürtü yanıtı (IIR) yerine FIR filtre kümesi uygulanması, IIR filtrelerden kaynaklanan kararsızlık ve işlem yükü gibi problemlerden uzak durmaktır. Bu bölümde, bu filtre setinin varlık ve teklik koşulları araştırılacak ve (varsa) ortaya çıkarılacaktır. Şekil 3.3'de D.Ç. görüntülerin filtrelenmeden önce üst örneklennmeleri gerektiğine dikkat ediniz. Bu bölüm için geçerli olmak üzere alt-örnekleme operatörünün görüntünün boyutunu düşürmediği, sadece istenen piksel değerlerini korurken diğer piksel değerlerini sıfırladığı varsayılmıştır. Bu nedenle, üst örnekleme operatörleri Şekil 3.3'de gösterilmemiştir.

Bu çalışma boyunca aşağıdaki varsayımlar ve notasyon kullanılmıştır:

- Toplanır gürültü ihmal edilmiştir.
- Tek kayma çeşidi genel kayma hareketidir ve bu etki Denklem (3.3)'de açıklandığı gibi bulanıklık operatörü ile birleştirilmiştir.
- Bulanıklık fonksiyonlarının her birinin boyutu $M \times M$, yeniden oluşturma filtrelerinin her birinin boyutu $N \times N$ ve hem yatay, hem de dikey yönde alt-örnekleme oranı D_s 'dir.
- $b_{ij} = b_k(i, j)$ ($0 \leq i, j < M$, $1 \leq k \leq K$) bulanıklık katsayılarını temsil eder.



Şekil 3.3. Yeniden-oluşturma aşaması.

- $w_{ij}^k = w_k(i, j)$ ($0 \leq i, j < N$, $1 \leq k \leq K$) yeniden-oluşturma filtrelerinin katsayılarını temsil eder.

Aşağıda yapılacak olan analizi daha genel durumlara (dikdörtgen bulanıklık ve yeniden-oluşturma filtreleri, vs.) uyarlamak kolaydır. Analizde, çok kanallı ters evrişim için geliştirilmiş kavramlardan yararlanılacaktır. Ancak, süper-çözünürlük probleminde alt örnekleme operatörleri var olduğundan iki problem farklıdır. Aşağıda verilecek analiz, bildiğimiz kadarıyla literatürde ilk kez yapılmaktadır.

Yeniden-oluşturma filtrelerinin varlık ve teklik koşullarını belirlemek için D.Ç. görüntüleri Y.Ç. görüntü, bulanıklık operatörleri ve alt-örnekleme operatörü, kestirilen görüntüyü ise D.Ç. görüntüler ve yeniden-oluşturma filtreleri cinsinden, vektör-matris notasyonuyla ifade etmek gereklidir. Giriş vektörü $x(n_1, n_2)$ 'yi, orjinal görüntü üzerinde (n_1, n_2) merkezli $(M+N-1) \times (M+N-1)$ boyutundaki görüntü parçasının leksikografik olarak gösterilmiş hali şeklinde tanımlayalım:

$$x(n_1, n_2) = \begin{bmatrix} f(n_1 - (M + N - 1)/2, n_2 - (M + N - 1)/2) \\ f(n_1 - (M + N - 1)/2, n_2 - (M + N - 1)/2 + 1) \\ \vdots \\ f(n_1 + (M + N - 1)/2, n_2 + (M + N - 1)/2) \end{bmatrix}^T$$

T, devrik alma işlemini göstermektedir. Giriş vektörü bir satır vektörüdür ve $(M+N-1)^2$ elemandan oluşmaktadır. (n_1, n_2) 'nin, bahsi geçen görüntü parçasının tam orta konumunda olması için $(M+N-1)$ tek sayı olmalıdır.

Çıkış vektörü, $y(n_1, n_2)$, şu şekilde oluşturulur: Her bir düşük çözünürlüklü görüntü için (n_1, n_2) merkezli $N \times N$ boyutlarında bir parça alınır ve leksikografik olarak ifade edilir. Ardından $y^k(n_1, n_2)$ ile gösterilen bu K adet alt-vektör yan yana dizilerek çıkış vektörü oluşturulur:

$$y(n_1, n_2) = [y^1(n_1, n_2) \quad y^2(n_1, n_2) \quad \cdots \quad y^K(n_1, n_2)]$$

$$y^k(n_1, n_2) = \begin{bmatrix} y_k(n_1 - (N-1)/2, n_2 - (N-1)/2) \\ y_k(n_1 - (N-1)/2, n_2 - (N-1)/2 + 1) \\ \vdots \\ y_k(n_1 + (N-1)/2, n_2 + (N-1)/2) \end{bmatrix}^T$$

Çıkış vektörü bir satır vektörüdür ve KN^2 elemana sahiptir. Giriş vektörü durumundakine benzer bir şekilde, (n_1, n_2) 'nin D.Ç. görüntü parçalarının tam orta noktalarında konumlanması için N tek bir sayı olmalıdır. Bu şart, $(M+N-1)$ 'in de tek bir sayı olması gerektiği şartıyla birleştiği zaman hem M 'nin, hem de N 'nin tek sayı olması gerektiği ortaya çıkar. Eğer bulanıklık filtrelerinin boyutu, yani M , tek sayı değilse filtrelerin sağına ve altına sıfır eklenerek boyutları tek sayı haline getirilebilir.

Bulanıklık matrisi B , bulanıklık fonksiyonlarının katsayılarından oluşturulur ve

$$B = [B_1 \quad B_2 \quad \cdots \quad B_K]$$

$$B_k = \begin{bmatrix} B_1^k & \underline{0} & \cdots & \underline{0} \\ \vdots & B_1^k & & \vdots \\ B_M^k & \vdots & \ddots & \underline{0} \\ \underline{0} & B_M^k & & B_1^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{0} & \underline{0} & \cdots & B_M^k \end{bmatrix}, \quad B_i^k = \begin{bmatrix} b_{i1}^k & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & b_{i1}^k & & \vdots \\ b_{iM}^k & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & b_{iM}^k & & b_{i1}^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{iM}^k \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

şeklinde tanımlanır ($i = 1, \dots, M, k = 1, \dots, K$). B_i^k 'nin boyutu $(M+N-1) \times N$, B_k 'nin boyutu $(M+N-1)^2 \times N^2$, B 'nin boyutu ise $(M+N-1)^2 \times KN^2$ 'dir. $\underline{0}$ uygun boyutlu sıfır matrisini göstermektedir.

Alt-örnekleme matrisi S şu şekilde tanımlanabilir:

$$\begin{aligned}
S_x &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, S_{xx} = \begin{bmatrix} S_x & \underline{0} & \cdots & \underline{0} \\ \underline{0} & S_x & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \underline{0} \\ \underline{0} & \cdots & \underline{0} & \end{bmatrix}, \\
S_{xxx} &= \begin{bmatrix} S_{xx} & \underline{0} & \cdots & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \cdots & \underline{0} \\ & & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & S_{xx} & \vdots \\ & & & \underline{0} & \\ \underline{0} & \underline{0} & \cdots & & \ddots \end{bmatrix}, S = \begin{bmatrix} S_{xxx} & \underline{0} & \cdots & \underline{0} \\ \underline{0} & S_{xxx} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \underline{0} \\ \underline{0} & \cdots & \underline{0} & S_{xxx} \end{bmatrix}. \quad (3.5)
\end{aligned}$$

S_x 'in boyutu $D_s \times D_s$, S_{xx} 'in boyutu $N \times N$, S_{xxx} 'in boyutu $N^2 \times N^2$, S 'nin boyutu ise $KN^2 \times KN^2$ 'dir. S_{xxx} 'in ana diyagonalindeki S_{xx} 'lerin oranı $1/D_s$ 'dir. Daha önce açıklandığı gibi, burada tanımlanan alt-örnekleme matrisi görüntünün boyunu küçültmez, sadece istenen piksellerin değerlerini korurken diğer piksel değerlerini sıfırlar.

Yukarıdaki gibi tanımlanan alt-örnekleme matrisinin bulanıklık operatöründen geçmiş giriş vektörü üzerinde alt-örnekleme nasıl yaptığını anlamak için görsel bir örnek, Şekil 3.4'de verilmiştir. Bu örnekte aşağıdaki değerler kullanılmıştır:

Düşük çözünürlüklü görüntü sayısı: $K = 1$,

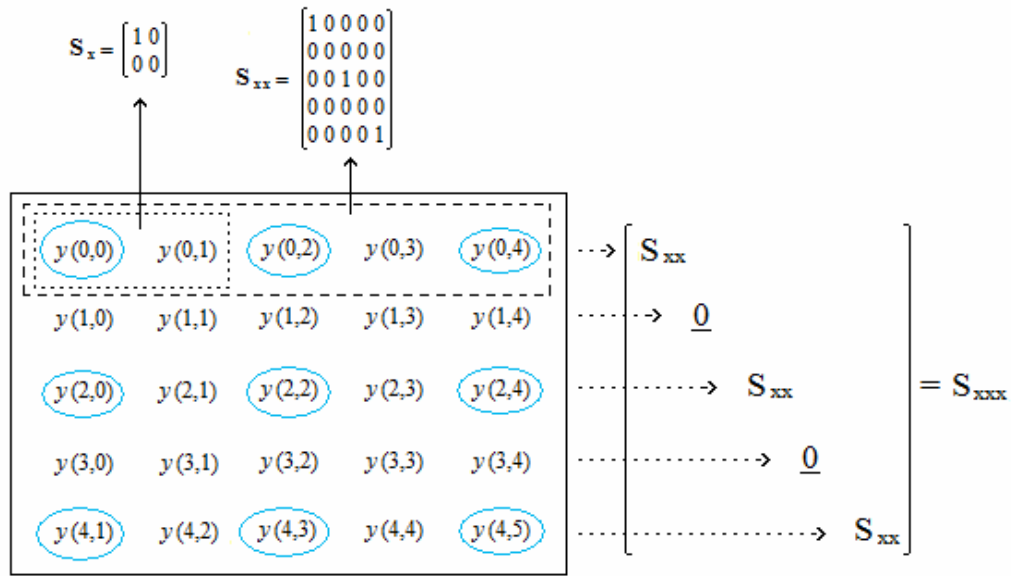
Alt-örnekleme oranı: $D_s = 2$,

Yeniden-oluşturma filtrelerinin eni ve boyu : $N = 5$,

Oluşturmak istediğimiz pikselin konumu: $(n_1, n_2) = (2, 2)$.

Yuvarlak içine alınmış pikseller, örnekleme istediğimiz piksellerdir. Örnek, sadece $K=1$ durumu için verilmiştir. K 'nın 1'den büyük olduğu durumlar için alt-örnekleme matrisi S , S_{xxx} 'in ana diyagonal üzerinde kendini tekrar etmesiyle oluşturulur.

Yukarıdaki tanımlara uygun olarak Şekil 3.2'de verilen gözlem modelinin giriş-çıkış ilişkisi, vektör-matris notasyonu ile



Şekil 3.4. Tek bir DÇ görüntü durumunda alt-örnekleme matrisinin oluşturulması.

$$y(n_1, n_2) = x(n_1, n_2) \cdot B \cdot S \quad (3.6)$$

olarak yazılabilir.

3.2. Yeniden-Oluşturma Filtrelerinin Varlık-Teklik Koşulları

Orijinal görüntüyü yeniden oluşturmak için bozulmuş görüntüler üzerine Şekil 3.3'deki gibi bir sonlu dürtü yanıtı filtre seti uygulanmaktadır. Yeniden-oluşturma vektörü w^k 'yi, her bir filtrenin katsayılarının yan yana yazılması şeklinde tanımlayalım:

$$w = \left[(w^1)^T \quad (w^2)^T \quad \dots \quad (w^K)^T \right]^T,$$

$$w^k = \left[w_{11}^k \quad w_{12}^k \quad \dots \quad w_{(N-1)N}^k \quad w_{NN}^k \right]^T$$

w^k , N^2 elemandan oluşan bir sütun vektörüdür ve w ise KN^2 elemanlı bir sütun vektörüdür. Kestirilen Y.Ç. görüntü şu şekilde ifade edilebilir:

$$\hat{x}(n_1, n_2) = y(n_1, n_2) \cdot w \quad (3.7)$$

Kusursuz yeniden oluşturma durumunda kestirilen Y.Ç. görüntü, tüm (n_1, n_2) değerleri için orijinal görüntünün kaymış bir şekline eşit olmalıdır:

$$\hat{x}(n_1, n_2) = x(n_1 - \alpha, n_2 - \beta) \quad (3.8)$$

Burada kayma (α, β) ile belirtilmektedir. Denklem (3.6) ve (3.7) birleştirildiğinde, kusursuz yeniden oluşturma için sağlanması gereken koşul

$$B \cdot S \cdot w = e_{\alpha, \beta} \quad (3.9)$$

olarak elde edilir. $e_{\alpha, \beta}$, sıfırdan farklı tek elemanı (α, β) kayması tarafından belirlenen $(M+N-1)^2$ elemanlı bir sütun vektörüdür. B, S ve (α, β) verildiğinde, Denklem (3.9)'u sağlayan yeniden-oluşturma vektörü w, B·S'nin (yarı) tersinin uygun (kaymaya bağlı) sütunu olur. Denklem (3.9)'daki sistemin tutarlı olması, yani Denklem (3.9)'u sağlayan yeniden-oluşturma filtrelerinin varlığı, B·S matris çarpımının tam satır derecesine sahip olmasına ve teklifi de B·S matris çarpımının kare matris veya tam sütun derecesine sahip olmasına bağlıdır. Bunun için öncelikle B·S'nin derece özellikleri araştırılacaktır.

Teorem 1: B ve S matrisleri, Denklem (3.4) ve Denklem (3.5) şeklinde tanımlansınlar. Bu durumda B·S çarpımının derecesi, aşağıdaki iki şart sağlandığında $(M+N-1)^2$ olur:

1. $K \cdot \lfloor N / D_s^2 \rfloor^2 \geq (M + N - 1)^2$. $\lfloor x \rfloor$ notasyonu x 'den büyük en küçük tamsayıyı göstermektedir.
2. $b_1(n_1, n_2), b_2(n_1, n_2), \dots, b_K(n_1, n_2)$ şeklinde ifade edilen bulanıklık filtrelerinin iki boyutlu Z-dönüşümlerinin aralarında asal olması.

İspat: Teorem 1'in ispatında, matris çarpımlarının derecesi konusundaki Sylvester Eşitsizliği'nden faydalanılacaktır [52]. Sylvester Eşitsizliği,

$$\text{rank}(B \cdot S) \leq \min\{\text{rank}(B), \text{rank}(S)\} \quad (3.10)$$

şeklinde verilmektedir. Sylvester Eşitsizliği, $B \cdot S$ çarpımının derecesinin B 'nin derecesinden veya S 'nin derecesinden büyük olamayacağını ifade etmektedir. B matrisinin boyutlarının $(M+N-1)^2 \times KN^2$ olduğunu hatırlayalım. $B \cdot S$ çarpımının derecesinin $(M+N-1)^2$ olabilmesi için, Sylvester eşitsizliğine göre B matrisinin de derecesinin $(M+N-1)^2$ olması gerekmektedir, yani B matrisi tam satır derecesine sahip olmalıdır. B 'nin tam satır derecesine sahip olması, alt-örneklemenin olmadığı durum için, yani çok kanallı görüntü ters-evrişimi probleminde (S birim matris iken) Denklem (3.9)'u sağlayacak yeniden-oluşturma filtrelerinin varlığı anlamına gelmektedir. Bu durumun analizi [51]'de yapılmıştır ve gerekli şartlar şu şekilde çıkarılmıştır: (i) B matrisinin sütun sayısı satır sayısından daha büyük olmalıdır $\{KN^2 \geq (M+N-1)^2\}$, (ii) $b_1(n_1, n_2), b_2(n_1, n_2), \dots, b_K(n_1, n_2)$ şeklinde ifade edilen bulanıklık filtrelerinin iki boyutlu Z -dönüşümleri, aralarında asal olmalıdır. Bu önermenin ispatı, [51]'den alıntı yapılarak Ek A'da verilmiştir.

Sylvester eşitsizliğine göre $B \cdot S$ 'nin derecesinin $(M+N-1)^2$ olması için S 'nin derecesi de en az $(M+N-1)^2$ olmalıdır. S 'nin bir diyagonal matris olduğunu ve sıfırdan farklı elemanlarının sadece ana köşegende 1'ler şeklinde olduğunu düşünecek olursak S 'nin derecesinin sahip olduğu 1'lerin sayısı olduğunu anlarız:

$$\begin{aligned} \text{rank}(S) &= (S_x \text{'deki } 1 \text{'lerin sayısı}) \times (S_{xx} \text{'deki } S_x \text{'lerin sayısı}) \times \\ &\quad (S_{xxx} \text{'deki } S_{xx} \text{'lerin sayısı}) \times (S \text{'deki } S_{xxx} \text{'lerin sayısı}) \\ &= \lfloor N/D_s^2 \rfloor \cdot \lfloor N/D_s^2 \rfloor \cdot K \end{aligned} \quad (3.11)$$

Sonuç olarak, S matrisinin derecesi için

$$K \cdot \lfloor N/D_s^2 \rfloor^2 \geq (M+N-1)^2 \quad (3.12)$$

şeklinde bir koşul ortaya çıkar. Dikkat edilirse Denklem (3.12) ile verilen koşul, B matrisinin derecesi ile ilgili verilen $\{KN^2 \geq (M+N-1)^2\}$ koşulunu kapsamaktadır. B ve S matrislerinin dereceleri için belirtilen koşulların sağlandığı durumda Sylvester

Eşitsizliği tekrar yazıldığında,

$$\text{rank}(B \cdot S) \leq (M + N - 1)^2 \quad (3.13)$$

şeklinde bir ifade elde ederiz. Teorem 1'i ispatlamak için son yapılması gereken, B ve S matrislerinin Denklem (3.4) ve Denklem (3.5) şeklinde tanımlandıkları durumda ve B ile S matrislerinin dereceleri için belirtilen koşullar geçerli iken Denklem (3.13) eşitsizliğinin eşitlik durumuna dönüştüğünü, yani B·S çarpımının derecesinin $(M+N-1)^2$ olduğunu göstermektir. Bunun için matris çarpımlarıyla ilgili üç adet özellikten faydalanılacaktır.

C, $m \times n$ boyutlarında, D ise $n \times p$ boyutlarında herhangi iki matris olmak üzere;

- Özellik 1: C^c , C matrisi üzerinde temel sütun işlemleri uygulanarak, D^r ise D matrisi üzerinde karşılık gelen temel satır işlemleri uygulanarak elde edilmiş matrisler olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlik geçerli olur:

$$C \cdot D = E \quad \Rightarrow \quad C^c \cdot B^r = E.$$

- Özellik 2: C matrisi $[C_1 \ 0]$ formunda ise ve D matrisini, D_2 'nin satır sayısı 0 matrisinin sütun sayısına eşit olacak şekilde $D = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix}$ şeklinde gösterirsek aşağıdaki eşitlik geçerli olur:

$$C \cdot D = C_1 \cdot D_1,$$

- Özellik 3: $\text{rank}(C) = n \Rightarrow \text{rank}(C \cdot D) = \min\{n, \text{rank}(D)\}$ [52].

Özellik 3'den faydalanabilmek için B·S matrisinin özel bir biçimde olması gerekmektedir. Bunun için Özellik 1 ve Özellik 2'yi kullanarak bazı işlemler yapmalıyız. Bu işlemler şöyledir:

(i) $(B \cdot S)^T = S^T \cdot B^T = S \cdot B^T.$

B·S tam satır derecesine sahipse $(B \cdot S)^T$ tam sütun derecesine sahip olacaktır. B^T , $KN^2 \times (M+N-1)^2$ boyutlarındadır ve yukarıda açıklandığı şekilde tam sütun derecesine sahiptir.

(ii) S matrisi üzerinde sütun değiştirme işlemleri yapılarak tamamen 0'dan oluşan sütunlar sağ tarafa toplanacak şekilde ayarlanır. Aynı işlemler, satırlar üzerinde olmak üzere B^T matrisi üzerinde de uygulanır. Ortaya çıkan matrisleri S^c ve $B^{T,r}$ ile ifade edelim. Özellik 1'den dolayı $S \cdot B^T$ arpımı, $S^c \cdot B^{T,r}$ çarpımı ile eşit olacaktır.

(iii) S^c matrisi, $[S_1^c \quad \underline{0}]$ formundadır. $B^{T,r}$ matrisini $B^{T,r} = \begin{bmatrix} B_1^{T,r} \\ B_2^{T,r} \end{bmatrix}$ ile ifade edelim. Bu durumda özellik 2 kullanılarak $S \cdot B^T = S^c \cdot B^{T,r} = S_1^c \cdot B_1^{T,r}$ olduğu bulunur.

(iv) S_1^c 'in boyutları $KN^2 \times K \cdot \lfloor N/D_s^2 \rfloor^b$ 'dir ve derecesi $K \cdot \lfloor N/D_s^2 \rfloor^b$ 'dir. $B_1^{T,r}$ (indirgenmiş devrik bulanıklık matrisi) $K \cdot \lfloor N/D_s^2 \rfloor^b \times (M+N-1)^2$ boyutlarındadır. Denklem (3.12) şartımın geçerli olduğunu dūřünecek olursak $B_1^{T,r}$ matrisinin satır sayısı, hala sütun sayısından daha yüksektir. Dolayısıyla $B_1^{T,r}$ matrisinin tam sütun dereceli olma özelliği devam etmektedir, yani derecesi $(M+N-1)^2$ 'dir. Artık zellik 3' kullanarak $S \cdot B^T$ matrisinin derecesini hesaplayabiliriz:

$$\begin{aligned} \text{rank}(S \cdot B^T) &= \text{rank}(S_1^c \cdot B_1^{T,r}) \\ &= \min \{ K \cdot \lfloor N/D_s^2 \rfloor^b, (M+N-1)^2 \} = (M+N-1)^2. \end{aligned} \quad (3.14)$$

(v) Bir matrisin derecesi, devriğinin derecesine eşittir, yani $\text{rank}(B \cdot S) = \text{rank}(S \cdot B^T) = (M+N-1)^2$ 'dir. Buradan çıkan sonuç, Denklem (3.12) sağlandığında $B \cdot S$ 'nin tam satır derecesine sahip olduğudur. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

Teorem 1'de ifade edildiği ve ispatlandığı şekilde $B \cdot S$ çarpımının tam satır derecesine sahip olduğu varsayıldığında Denklem (3.9)'un varlık ve teklik koşulları, Teorem 2'de verilmektedir.

Teorem 2: $K \cdot \lfloor N/D_s^2 \rfloor^2 \geq (M+N-1)^2$ eşitsizliğinin geçerli ve B-S çarpımının tam satır derecesine sahip, yani derecesinin $(M+N-1)^2$ olduğunu varsayalım. Bu durumda verilen bir kayma değeri (α, β) için Denklem (3.9)'u sağlayan bir w , yani yeniden-oluşturma filtre kümesi, vardır. Çözümün tekliği, eğer verilen eşitsizlik eşitlik olursa veya en küçük boy çözümü elde edilirse garanti olur.

İspat: Denklem (3.9)'da verilen sistemin en az bir çözümünün olabilmesi için B-S matrisinin tam satır derecesine sahip olması yeterlidir [52]. B-S matrisinin tam satır derecesine sahip olması için, sahip olduğu sütun sayısı satır sayısından fazla olmalıdır. $K \cdot \lfloor N/D_s^2 \rfloor^2 \geq (M+N-1)^2$ eşitsizliği B-S matrisinin sütun sayısının satır sayısından fazla olduğunu anlamına gelmektedir. O halde, $K \cdot \lfloor N/D_s^2 \rfloor^2 \geq (M+N-1)^2$ eşitsizliğinin geçerli ve B-S çarpımının tam satır derecesine sahip olması halinde Denklem (3.9)'da verilen sistemin en az bir çözümü vardır. Denklem (3.12), eşitlik olarak sağlanırsa B-S matrisi kare ve tekil olmayan bir matris olur, dolayısıyla çözüm tektir. Denklem (3.12) eşitsizlik olarak sağlanıyorsa, tek olduğu bilinen en küçük boy çözümü seçilir. ■

En küçük boy çözümünün tanımı ve nasıl hesaplanabileceği, [54]'den alıntılanarak Ek B'de açıklanmıştır. Özetlenecek olursa, Denklem (3.12)'de verilen koşul ve bulanıklık filtrelerinin iki boyutlu Z-dönüşümlerinin aralarında asal olması, yeniden-oluşturma filtrelerinin var olmaları için yeterli şartlardır. Bulunan sonuçlar alt-örneklemenin olmadığı durum, yani çok-kanallı görüntü ters-evrişimi probleminin varlık-teklik koşulları ile karşılaştırılacak olursa benzer sonuçların bulunduğu, ancak Denklem (3.12)'de görüldüğü gibi yeniden-oluşturma filtre boyutlarını belirlerken alt-örnekleme oranına da dikkat edilmesi gerektiği ortaya çıkmaktadır. Denklem (3.12) eşitsizliğinin doğrudan bazı sonuçları şu şekilde sıralanabilir:

- K en az D_s^2+1 olmalıdır.
- Hareket olmadan süper-çözünürlük, aralarında asal olma koşulu ve Denklem (3.12) eşitsizliği sağlandığı sürece mümkündür.

3.3. Hatasız Bir Süper-Çözünürlük Algoritması

Denklem (3.9) kullanılarak yeniden-oluşturma filtre vektörü şu şekilde bulunabilir:

$$w = \text{pinv}(B \cdot S) \cdot e_{\alpha, \beta} \quad (3.15)$$

$\text{pinv}(A)$, herhangi bir A matrisinin yarı-tersini (pseudo-inverse) veya genelleştirilmiş tersini ifade eder. Bir matrisin yarı-tersi, Ek B’de bahsedildiği şekilde (tekil-değer çözümlenmesi kullanılarak) bulunabilir. Bu çalışmada bir matrisin yarı-tersini almak için MATLABTM,’in $\text{pinv}()$ fonksiyonu kullanılmıştır.

Denklem (3.15)’de elde edilen w ’yı, orijinal görüntünün kaymış bir versiyonundan elde edildiği için $w_{\alpha, \beta}$ şeklinde ifade edelim. Bu durumda kestirilen görüntü şu şekilde yazılabilir:

$$\hat{x}_{\alpha, \beta}(n_1, n_2) = \sum_{k=1}^K y_k(n_1, n_2) * w_{\alpha, \beta}^k(n_1, n_2) \quad (3.16)$$

$*$, iki boyutlu evrişim işlemi temsil etmektedir ve $w_{\alpha, \beta}^k(n_1, n_2)$ dikdörtgen formundaki yeniden-oluşturma filtrelerini göstermektedir. Denklem (3.16) ile bulunan görüntü kestirimi, orijinal görüntünün tamamını temsil etmekten uzaktır, orijinal görüntünün boyutları $D_s N_1 \times D_s N_2$ olmak üzere sadece $(n_1, n_2) = (i D_s, j D_s)$, $i = 0, 1, \dots, N_1, j = 0, 1, \dots, N_2$ noktaları için orijinal görüntüye eşittir (varlık şartları sağlanıyorsa). Diğer piksel bölgelerinde sıfıra eşittir. Bu durumun nedeni, aslında bir değil, D_s^2 kadar alt-örnekleme matrisi bulunmasıdır, bunun sonucunda da D_s^2 kadar yeniden-oluşturma filtre seti bulunacaktır. Orijinal görüntünün her $N_1 \times N_2$ boyutlarındaki alt-görüntüsü için farklı bir yeniden-oluşturma filtre seti kullanmak gerekecektir.

D_s^2 kadar alt-örnekleme matrisi oluşturmak yerine (α, β) ile verilen kayma miktarından yararlanılarak alternatif bir şekilde orijinal görüntünün (dış sınırlar hariç) tamamı oluşturulabilir. Bu yöntem şu şekildedir:

- M ve K verili iken Denklem (3.12)'yi kullanarak N' yi bul.
- B ve S' yi oluştur.
- Bütün $0 \leq \alpha, \beta < D_s - 1$ için Denklem (3.15)'i kullanarak $w_{\alpha, \beta}$ ' yi bul.
- Bütün α ve β ' lar için Denklem (3.16)'yi kullanarak $\hat{x}_{\alpha, \beta}(n_1, n_2)$ ' yi bul.
- Bütün α ve β ' lar için $\hat{x}_{\alpha, \beta}(n_1, n_2)$ ' yi $(-\alpha, -\beta)$ kadar kaydır.
- $\hat{x}(n_1, n_2) = x(n_1, n_2)$ ' yi, $\hat{x}(n_1, n_2) = \sum_{\alpha=0}^{D_s-1} \sum_{\beta=0}^{D_s-1} \hat{x}_{\alpha, \beta}(n_1, n_2)$ kullanarak oluştur.

Burada sunulan algoritmanın amacı Kısım 3.2'de sunulan teörinin doğruluğunu benzetim aracılığıyla göstermektir, yoksa gerçek durumlar için uygulanabilir olduğu iddia edilmemektedir. Gerçekte problem, burada sunulduğu gibi tamamen belirlenmiş değildir, başta bulanıklık operatörlerinin bilinmemesi olmak üzere toplanır gürültü, hareket parametrelerinin yanlış kestirimi, elde yeteri kadar düşük çözünürlüklü görüntü olmaması, vs. gibi nedenlerden ötürü kötü-konumlanmıştır. Gerçek süper-çözünürlük problemlerine uygulanabilecek çözümler, dördüncü ve beşinci bölümlerde sunulmaktadır.

3.4. Test Sonuçları

Yukarıdaki analizi geçerlemek üzere 200x200 boyutlarındaki bir Lena görüntüsü üzerinde bilgisayar benzetimleri gerçekleştirilmiştir. Görüntü önce bulanık hale getirilmiş, ardından alt-örneklelenmiştir (Testin sadece son kısmında hareket göz önüne alınmıştır, normalde şartlar sağlandığı sürece harekete gerek yoktur). Orijinal görüntüye bulanıklık ve alt-örnekleme uygulama, defalarca tekrar edilmiş ve çok sayıda düşük çözünürlüklü görüntü elde edilmiştir. Bulanıklık fonksiyonunun uzamsal bölge değerleri rasgele seçilmiştir. Değişik bulanıklık boyutları, alt-örnekleme oranları ve farklı sayılarda düşük çözünürlüklü görüntüler için çok sayıda deney yapılmıştır. Her durum için önceki bölümde anlatılan yöntem kullanılarak yüksek çözünürlüklü görüntü oluşturmaya çalışılmıştır.

Tablo 3.1'de orijinal görüntünün hatasız olarak yeniden oluşturması için seçilmesi gereken yeniden-oluşturma filtre boyutları; değişik alt – örnekleme miktarları, düşük

Tablo 3.1. Değişik durumlarda hatasız süper-çözünürlük için yeniden-oluşturma filtre boyutları.

D_s	K	M	N	D_s	K	M	N
2	≤ 4	> 1	∞	3	≤ 9	> 1	∞
	5	3	9		10	3	5
		5	25			5	37
		7	43			7	73
	6	3	5		11	3	5
		5	13			5	19
		7	23			7	37

çözünürlüklü görüntü sayıları ve bulanıklık filtre boyutları için verilmiştir. Yeniden-oluşturma filtrelerinin boyutları, Denklem (3.12) hesaplanarak bulunmuştur.

Tablo 3.1’de D_s ile gösterilen sütun alt-örnekleme oranını, K elimizdeki düşük çözünürlüklü görüntülerin sayısını, M ise uygulanan bulanıklık filtrelerinin boyutunu göstermektedir. N ise tüm bu şartlar altında tam bir süper-çözünürlük olabilmesi için uygulanması gereken FIR filtrelerin boyutunu temsil etmektedir. Bütün bulanıklık filtrelerinin aynı boyutta olduğu, ayrıca bütün yeniden-oluşturma filtrelerinin boyutlarının da aynı olduğu varsayılmaktadır. Tabloda görülmektedir ki düşük çözünürlüklü görüntü sayısı alt-örnekleme oranının karesinden fazla olduğu sürece hatasız süper-çözünürlük için bir yeniden-oluşturma filtre kümesi tanımlanabilir. Düşük çözünürlüklü görüntü sayısı arttıkça hatasız süper-çözünürlük için gerekli olan filtrelerin boyutu azalmaktadır. Bulanıklık filtre boyutları ile yeniden-oluşturma filtre boyutları arasında ise doğru orantı vardır, bulanıklık filtre boyutu arttıkça tam geri kazanım için gerekli yeniden-oluşturma filtre boyutu da artmaktadır. Tüm bunlar teoriye uygun olduğu kadar mantığa da uygun gelmektedir.

Bundan sonraki bölümlerde çeşitli faktörlerin hatasız süper-çözünürlük üzerindeki görsel etkileri incelenecektir. Bu faktörler, (i) düşük çözünürlüklü görüntü sayısı, (ii)



Şekil 3.5. İdeal durum için sonuç.

a. Orijinal görüntü.

b. İdeal durumda oluşturulmuş yüksek çözünürlüklü görüntü (MSE = 0).

yeniden-oluşturma filtre boyutu, (iii) bulanıklık filtrelerinin Z-dönüşümlerinin aralarında asal olmama durumu, (iv) toplanır gürültünün var olması ve (v) hareketin olması durumlarıdır. Bunları incelemeden önce örnek bir ideal durum için ($D_s = 3$, $K = 11$, $M = 5$) ve yeniden-oluşturma filtre boyutu $N = 19$ seçilerek hatasız süper-çözünürlük gerçekleştirilmiştir. Orijinal görüntü Şekil 3.5a ile, yeniden oluşturulmuş görüntü ise Şekil 3.5b ile gösterilmektedir. Şekilde ayrıca orijinal görüntü ile kestirimi arasındaki ortalama karesel hata (mean-square error, MSE) de verilmektedir. Ortalama karesel hata şu şekilde gösterilmektedir:

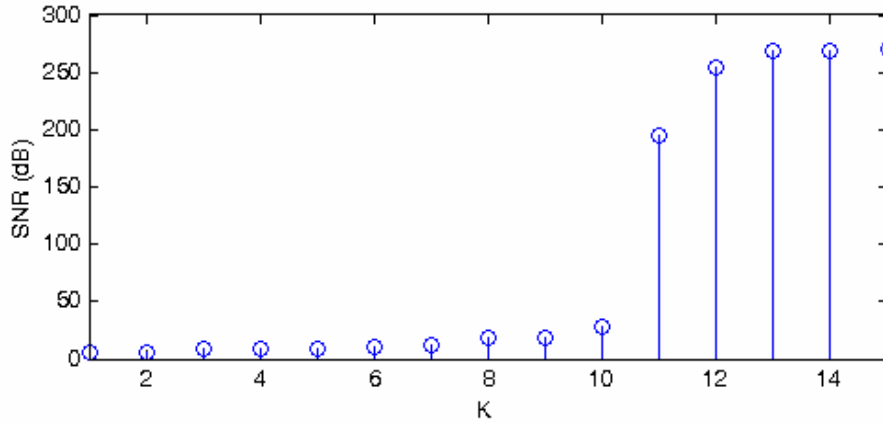
$$\text{MSE} = \frac{1}{D_s^2 N_1 N_2} \sum_{i=0}^{D_s N_1 - 1} \sum_{j=0}^{D_s N_2 - 1} [x(i, j) - \hat{x}(i, j)]^2 \quad (3.17)$$

Hem görsel olarak, hem de MSE açısından orijinal görüntünün hatasız olarak yeniden oluşturulabildiği görülmektedir. Bu noktadan sonra, yukarıda bahsedilen faktörler teker teker denenerek hatasız süper-çözünürlüğe olan etkileri gözlenecektir.

(i) Düşük çözünürlüklü görüntü sayısının hatasız süper-çözünürlüğe etkisi: Diğer faktörler aynı tutularak ($D_s = 3$, $M = 5$, $N = 19$) $K = 10$ ve $K = 9$ için iki ayrı deney yapılmıştır. Deney sonuçları Şekil 3.6'da görülmektedir. $K = 10$ durumu için ortalama karesel hata biraz yüksek çıksa bile oluşturulan görüntü, görsel olarak



Şekil 3.6. Düşük çözünürlüklü görüntü sayısının etkisi.
 a. $K = 10$ için sonuç (MSE = 9.89).
 b. $K = 9$ için sonuç (MSE = 155.98).



Şekil 3.7. Sinyal / artık gürültü oranının düşük çözünürlüklü görüntü sayısına göre değişimi.

orijinal görüntüden çok farklı görünmemektedir. $K = 9$ durumunda hem ortalama karesel hata oldukça yüksek çıkmış, hem de gözle görülür bozulmalar ortaya çıkmıştır.

Şekil 3.7’de sinyal / artık gürültü oranının (signal to residual noise ratio, SNR) düşük çözünürlüklü görüntü sayısına göre değişimi verilmektedir. Artık gürültüden kastedilen, yöntem uygulanıp yüksek çözünürlüklü görüntü oluşturulduktan sonra arta kalan (giderilemeyen) hatadır. Sinyal / artık gürültü oranı şu şekilde verilmektedir:

$$\text{SNR} = \frac{\sum_{i=0}^{D_s N_1 - 1} \sum_{j=0}^{D_s N_2 - 1} [x(i, j)]^2}{\sum_{i=0}^{D_s N_1 - 1} \sum_{j=0}^{D_s N_2 - 1} [x(i, j) - \hat{x}(i, j)]^2} \quad (3.18)$$

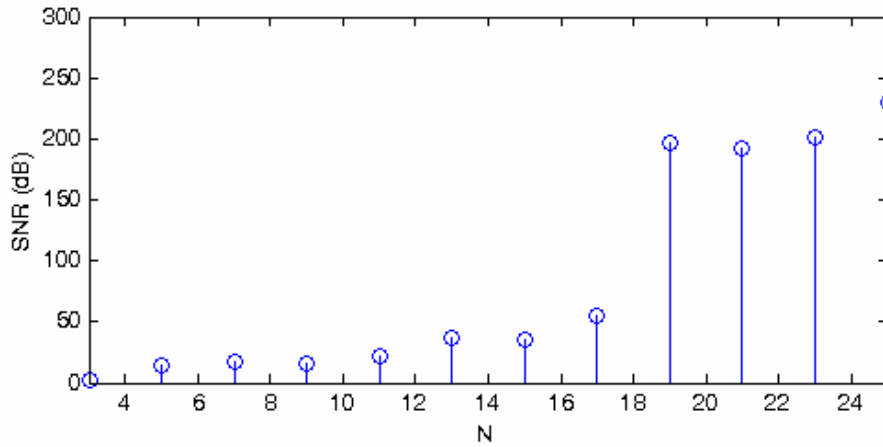
70 dB'den büyük SNR'lar için hatasız yeniden oluşturmanın gerçekleştiği söylenebilir, çünkü bu gibi durumlarda kestirilen görüntü nicemlendiğinde (quantization) orijinal görüntü ile tamamen aynı olmaktadır. 30 dB'den büyük (ve 70 dB'den küçük) SNR'lar için ise hatasız kestirimden söz edilemez, ancak oluşturulan yüksek çözünürlüklü görüntüde rahatsızlık verici görsel bozukluklar bulunmaz. Şekil 3.7'de görüldüğü gibi $K=11$ ve daha büyük iken hatasız süper-çözünürlük gerçekleştirilmiştir. $K=10$ için (SNR: ~30 dB) hatasız süper-çözünürlük yoktur, ancak oluşturulan görüntüde ciddi bir görsel bozukluk da yoktur. $K=9$ ve daha küçük iken ise hem SNR düşük çıkmıştır, hem de oluşturulan görüntüde rahatsızlık verici bozukluklar vardır (Şekil 3.6b). Buradan çıkarılabilecek bir sonuç şudur: Eğer eldeki düşük çözünürlüklü görüntü sayısı ve yeniden-oluşturma filtre boyutları Denklem (3.12)'yi sağlamıyorsa, ancak düşük çözünürlüklü görüntü sayısı alt-örnekleme oranının karesinden fazlaysa (hatasız süper-çözünürlük olmasa bile) kabul edilebilir derecede bir yüksek çözünürlüklü görüntü kestirimi elde edilebilir.

(ii) Yeniden-oluşturma filtre boyutunun hatasız süper-çözünürlüğe etkisi: Diğer faktörler aynı tutularak ($D_s = 3, M = 5, K = 11$) $N = 15$ ve $N = 11$ için iki ayrı deney yapılmıştır. Deney sonuçları Şekil 3.8'de görülmektedir. $N = 15$ durumu için ortalama karesel hata biraz yüksek çıkmıştır, oluşturulan görüntü ile orijinal görüntü arasındaki fark, ancak dikkat edilirse görülebilecek niteliktedir. $N = 11$ durumunda hem ortalama karesel hata daha yüksek çıkmış, hem de gözle görülür bozulmalar ortaya çıkmıştır.

Şekil 3.9'da sinyal / artık gürültü oranının yeniden-oluşturma filtre boyutuna göre değişimi verilmektedir. Teoriye uygun bir biçimde $N=19$ ve daha büyük iken hatasız süper-çözünürlük elde edilmektedir. $N=17, 15$ ve 13 için hatasız süper-çözünürlük olmamakla birlikte görsel olarak kabul edilebilir sonuçlar elde edilmektedir. $N=11$ ve daha küçük değerler için ise hem SNR çok düşük çıkmakta, hem de oluşturulan



Şekil 3.8. Yeniden-oluşturma filtre boyutunun etkisi.
 a. $N = 15$ için sonuç (MSE = 11.05).
 b. $N = 11$ için sonuç (MSE = 35.34).



Şekil 3.9. Sinyal / artık gürültü oranının yeniden-oluşturma filtre boyutuna göre değişimi.

görüntü kabul edilemez görsel bozukluklar içermektedir. Buradan çıkarılabilecek bir sonuç şudur: Yeniden-oluşturma filtre boyutları Denklem (3.12)'yi sağlamıyorsa bile belli bir değerden yüksekse kabul edilebilir derecede bir yüksek çözünürlüklü görüntü kestirimi elde edilebilir.

(iii) Bulanıklık filtrelerinin Z-dönüşümlerinin aralarında asal olmama durumunun hatasız süper-çözünürlüğe etkisi: Bu denemede diğer faktörler aynı iken bulanıklık fonksiyonlarının bir ya da bir kaçının diğerlerine bağımlı olması durumu için iki adet deney yapılmıştır. Bulanıklık fonksiyonları birbirlerine göre doğrusal bağımsız



Şekil 3.10. Doğrusal bağımlı bulanıklık filtre sayısının etkisi.

- a. Doğrusal bağımlı bulanıklık filtresi sayısı = 1 için sonuç (MSE = 42.84).
- b. Doğrusal bağımlı bulanıklık filtresi sayısı = 3 için sonuç (MSE = 77.35).



Şekil 3.11. Toplanır gürültünün etkisi.

- a. SNR = 60 dB için sonuç (MSE = 21.57).
- b. SNR = 40 dB için sonuç (MSE = 1474.13).

değilse Z-dönüşümlerinin aralarında asal olma durumu da bozulmaktadır. Birinci deneyde bir adet bulanıklık fonksiyonu, ikincisinde ise üç adet bulanıklık fonksiyonu diğerlerine bağımlı yapılmıştır. Görsel sonuçlar Şekil 3.10'da verilmiştir. Doğrusal bağımsız bulanıklık filtresi sayısı, gerekenden bir tane bile az olursa kestirilen yüksek-çözünürlüklü görüntüde gözle görülür bozulmalar başlamaktadır.

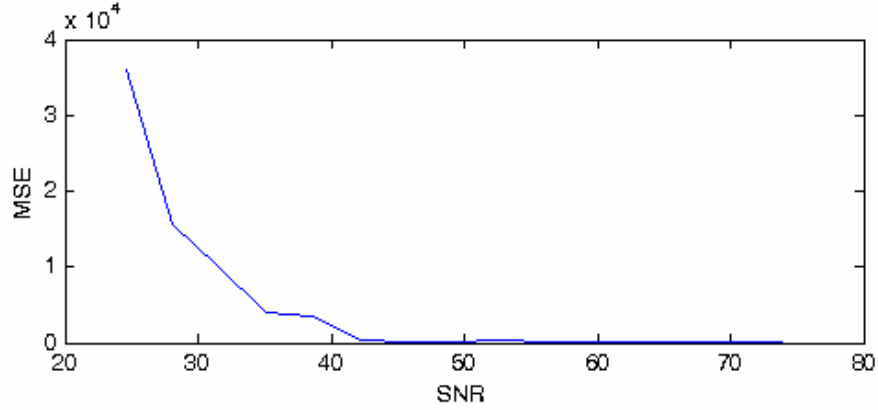
(iv) Toplanır gürültünün var olması durumunun hatasız süper-çözünürlüğe etkisi: Şimdiye kadarki bütün analizlerde ve geliştirilen yöntemlerde toplanır gürültü yok

sayılmıştı. Bu denemede diğer faktörler aynı iken toplanır gürültünün var olması durumu için iki adet deney yapılmıştır. Düşük çözünürlüklü görüntülere sinyal/gürültü oranı birinci deneyde 60 dB, ikinci deneyde ise 40 dB olacak şekilde gürültü eklenmiştir. Görsel sonuçlar Şekil 3.11’de verilmiştir. 60 dB için nispeten iyi bir sonuç çıkarken 40 dB için kabul edilemeyecek derecede kötü bir sonuç çıkmıştır. Şekil 3.12’de ortalama karesel hatanın sinyal/gürültü oranına göre değişim grafiği verilmektedir. 40-50 dB arasındaki bir noktadan sonra ortalama karesel hatada ciddi bir artma başlamaktadır.

(v) Hareketin hatasız süper-çözünürlüğe etkisi: Bu denemede hareketin var olması durumunda süper-çözünürlüklü görüntü oluşturmanın nasıl etkilendiği araştırılmıştır. Birinci deneyde 11 adet düşük çözünürlüklü görüntüden dört tanesinin bulanıklık operatörleri aynı yapılmıştır. Normalde bu durum (iii) no’lu denemelerde gösterildiği gibi hataya sebebiyet verecektir. Ancak bu dört görüntü, değişik piksel miktarlarınca kaydırılıp algoritmaya bu şekilde sokulmuşlardır. Şekil 3.13a’da görüldüğü gibi değişik piksel miktarlarınca kaydırma işlemi yapıldığı zaman aynı bulanıklık fonksiyonları kullanılıyor olmasına rağmen, (hareket ile) birleştirilmiş bulanıklık fonksiyonlarının doğrusal bağımsız oldukları anlaşılmıştır, bu sayede tam süper-çözünürlük mümkün olmuştur. Ardından aynı deneme dokuz düşük çözünürlüklü görüntünün aynı bulanıklığa sahip, ancak birbirlerine göre kaymış oldukları durum için tekrarlanmış ve aynı sonuç elde edilmiştir (Şekil 3.13b).

3.5. Sonuç

Bu bölümde, sadece kayma hareketi varken (veya hiç hareket yokken) ve kayma-bağımsız bulanıklık durumunda yüksek çözünürlüklü (ideal) görüntünün tam olarak geri kazanımı için kullanılacak sonlu dürtü yanıtı filtrelerin varlık ve teklik durumları araştırılmıştır ve gerekli şartlar çıkarılmıştır. Bu şartlar sağlandığında yüksek çözünürlüklü görüntünün hatasız bir biçimde kestirilebildiği görülmüştür. Şartların tam olarak sağlanamadığı durumlarda kestirimin nasıl etkilendiği araştırılmış, tam olmasa bile kabul edilebilir bir süper – çözünürlük için gerekli



Şekil 3.12. Ortalama karesel hatanın toplanır gürültü sinyal/gürültü oranına göre değişimi.



Şekil 3.13. Hareketin etkisi.

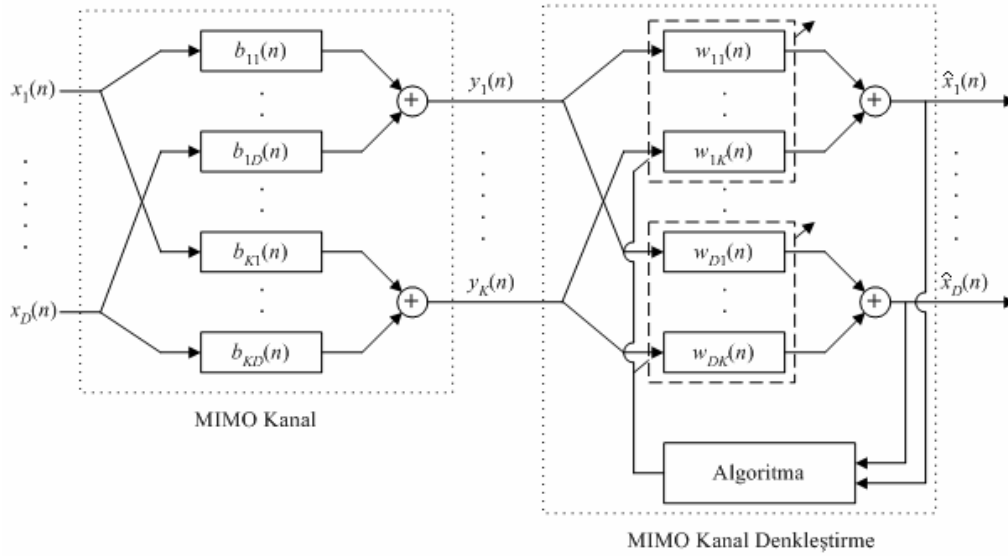
- a. Hareketli 4 çerçeve için sonuç (MSE = 0).
- b. Hareketli 9 çerçeve için sonuç (MSE = 0).

koşullar çıkarılmıştır. Bunlar şu şekildedir: 1. Eldeki düşük çözünürlüklü görüntü sayısı, mutlaka alt-örnekleme oranının karesinden büyük olmalıdır. 2. Yeniden-oluşturma filtre boyutu, (3.12)'yi sağlamıyor bile olsa mutlaka o değere yakın olmalıdır. 3. Bulanıklık fonksiyonları mutlaka birbirine göre doğrusal bağımsız olmalıdır, bir tanesinin bile diğerlerine bağımlı olması, ciddi sıkıntılar oluşturmaktadır. 4. Düşük çözünürlüklü görüntüler üzerindeki toplanır gürültünün miktarı, SNR 50 dB'den düşük çıkmayacak şekilde olmalıdır.

BÖLÜM 4. SABİT-BÜYÜKLÜK ALGORİTMASI TABANLI GÖZÜ-KAPALI GÖRÜNTÜ SÜPER-ÇÖZÜNÜRLÜĞÜ

Y.Ç. görüntü oluşturmak için şimdiye kadar önerilen hemen hemen tüm yöntemlerde bulanıklık ve hareket operatörlerinin bilindiği varsayılmıştır. Hareket parametreleri D.Ç. görüntülerden birisi referans alınarak önceden bir dereceye kadar kestirilebiliyor iken bildiğimiz kadarıyla sınırlı sayıdaki çalışmada bulanıklık operatörünün bilinmediği ve tüm D.Ç. görüntüler için eşit olduğu varsayılmıştır. Ancak, pratik uygulamalarda D.Ç. görüntülere neden olan bulanıklık operatörlerinin hepsi birbirinden farklı olabilir. O halde pratik bir süper-çözünürlük yöntemi, ya bulanıklık parametrelerini kestirmeli, ya da yüksek çözünürlüklü görüntüyü bulanıklık parametrelerine ihtiyaç duyulmadan oluşturmalıdır, yani yöntem “gözü kapalı” bir süper-çözünürlük yöntemi olmalıdır.

Bu bölümde, gözü-kapalı bir süper-çözünürlük yöntemi geliştirilmektedir. Yöntemi geliştirmek için süper-çözünürlük probleminin, haberleşmede önemli bir problem olan çok girişli / çok çıkışlı (MIMO) gözü-kapalı kanal denkleştirme problemine olan benzerliğinden yararlanılacaktır. MIMO bir haberleşme sisteminde alıcı tarafından çok sayıda anten aracılığıyla alınan işaretler, değişik kaynaklardan gönderilmiş bir çok işaretin bozulmuş ve birbiri üzerine binmiş halleridir. Dolayısıyla, alıcıda bu birbirine karışmış işaretlerin ayrıştırılması ve kanalın bir etkisi olan sembollerarası girişimin giderilmesi gerekmektedir. Pratik çoğu uygulamada kanal parametreleri bilinmemektedir. Bu nedenle, işaret ayrıştırma ve sembollerarası girişim etkisini giderme işlemlerinin gözü-kapalı bir biçimde yapılması gerekmektedir. Haberleşmedeki bu problemin çözümü için yaygın olarak uyarlanırlı filtreler yaklaşımı kullanılmaktadır ve oldukça etkin sonuçlar elde edilmektedir. MIMO kanalın ve uyarlanırlı filtre yaklaşımına dayalı kanal denkleştirme sisteminin gösterimi Şekil 4.1’de verilmiştir.



Şekil 4.1. MIMO kanal ve uyarlanırlı filtreler kullanarak kanal denkleştirme [9].

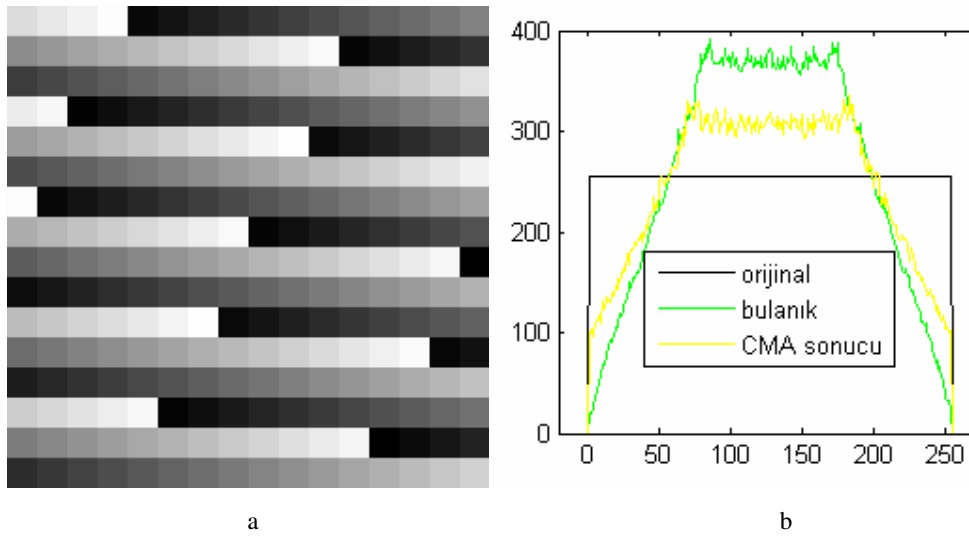
MIMO kanal denkleştirme problemi ile Bölüm 2’de tanıtılan süper-çözünürlük problemi arasında önemli dört fark vardır; (i) haberleşmedeki kanal denkleştirme probleminde elde edilmesi gereken birden fazla işaret varken süper çözünürlükte amaç sadece bir Y.Ç. görüntü elde etmektir, (ii) kanal denkleştirme probleminde örnekleme frekansının değişimi söz konusu değilken süper-çözünürlük probleminde elde edilen görüntüler alt-örnekleştirilmiştir, (iii) kanal denkleştirme durumunda hareket söz konusu değildir, ancak süper-çözünürlükte elde edilen D.Ç. görüntüler birbirlerine göre genel ya da bölgesel harekete sahip olabilirler, (iv) kanal denkleştirme probleminde işaretler tek boyutlu, süper-çözünürlük probleminde ise iki boyutludur.

Birinci fark incelendiğinde gözlem modelinde sadece bir basitleştirmeye neden olduğu, bunun dışında bir zorluk çıkarmayacağı görülmektedir. İkinci farkın getireceği güçlük, düşük çözünürlüklü görüntülerin ara-değerlemeyle (veya piksel aralarına sıfır eklemeye) boyutları artırıldığında ortadan kalkar. Daha sonra, uyarlanırlı filtreler boyutları artırılmış görüntülere uygulanabilir. Üçüncü farkın problemleri benzeştirmede getireceği güçlük de gözlem modeli üzerinde, izin verilen hareket sadece düzgün doğrusal hareket olacak şekilde bir sınırlandırma koyularak aşılabilir. Üçüncü bölümde, hareketin düzgün doğrusal olması durumunda gözlem modelindeki hareket ve bulanıklık operatörlerinin birleştirilebileceği gösterilmiştir. Aynı varsayım bu bölümde de geçerli sayıldığında, iki problem arasında hareketten

kaynaklanan fark ortadan kalkmaktadır. Dördüncü farkın getireceği zorluğun üstesinden gelmek için süper-çözünürlük problemine uyarlanması düşünülen bir boyutlu sabit büyüklük algoritmasının iki boyutlu hale getirilmesi gereklidir.

Bu bölümde, D.Ç. görüntüler arasındaki hareketin sadece global kayma ve bulanıklık operatörünün kayma-bağımsız olduğu durumlar için gözü-kapalı bir süper-çözünürlük yöntemi geliştirilmiştir. Genellikle, bulanıklık operatörleri iki boyutlu sonlu dürtü yanıtı filtreler ile modellenir ve D.Ç. her görüntü için aynı olmak zorunda değildir. Y.Ç. görüntü, D.Ç. görüntülerin, katsayıları iki boyutlu sabit-büyüklük algoritması tarafından güncellenen birbirinden farklı uyarlanır sonlu dürtü yanıtı yeniden-oluşturma filtrelerinden geçtikten sonra toplanmasıyla elde edilir. Sabit-büyüklük algoritması (CMA) [7, 8], yukarıda açıklanan gözü-kapalı kanal denkleştirme alanında kullanılan bir yöntemdir ve amacı sembollerarası girişimi gidermektir. Tek-giriş tek-çıkışlı sistemlerde kullanılabileceği gibi sembollerarası girişimin yanında kullanıcılar-arası girişimi de bastırmak için SIMO ve MIMO sistemlerde de kullanılabilir [9].

CMA'nın anafikri, kaynağın sabit büyüklüğe sahip semboller ürettiği veya sonlu sayıda eleman içeren bir alfabeye sahip olduğu gerçeğine dayanır. Bu açıdan bakıldığında, sayısal bir görüntünün sonlu sayıda eleman içeren bir kaynaktan türetildiği varsayılabilir. Örneğin, pikselleri 8 bitle temsil edilen sayısal bir görüntü, 256 eleman içeren bir alfabeye sahip kaynak tarafından üretilmiştir. Ayrıca, görüntü bulanık değilken histogramı (göreceli olarak) geniştir. Bulanıklık, görüntü üzerinde histogramı daraltıcı etki yapar. Görüntü üzerinde CMA uygulanırsa görüntü histogramı daha geniş olmaya zorlanarak bulanıklık etkisi azaltılmış olur. Bulanıklığın görüntünün histogramını daraltıcı ve CMA'nın ise genişletici özelliği görsel olarak Şekil 4.2'de verilmiştir. Şekil 4.2a'da 256x256 boyutlarında düzgün histograma sahip olacak şekilde bilgisayarla oluşturulmuş bir görüntü gösterilmektedir. Bu görüntü 13x13 boyutlarında düzgün bir bulanıklık filtresinden geçirilerek bulanık görüntü oluşturulmuş, daha iki boyutlu CMA kullanılarak bulanıklık giderilmeye çalışılmıştır. Şekil 4.2b'de orijinal, bulanık ve CMA sonucunda elde edilen görüntülerin histogramları verilmektedir. Bulanıklığın



Şekil 4.2. Bulanıklık ve CMA'nın histograma etkisi.

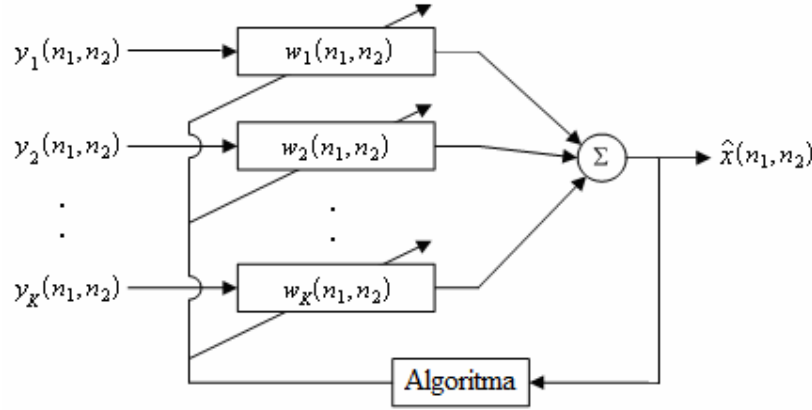
- Yapay olarak oluşturulmuş 256x256 boyutlarında bir görüntü.
- Orijinal görüntü, bulanık görüntü ve CMA uygulanarak elde edilen görüntünün histogramları. (Yatay eksen piksel değerini, dikey eksen piksel sayısını vermektedir.)

histogramı daralttığı, CMA algoritmasının ise histogramı genişletici etkide bulunduğu görülmektedir. [10]'da bu özelliklerden faydalanılmış ve tek görüntü için CMA tabanlı gözü-kapalı bir bulanıklık giderme yöntemi geliştirilmiştir. Bu bölümde geliştirilen yöntem, [10]'daki çalışmanın SIMO durumuna uyarlanmış halidir.

4.1. Problem Tanımlama

Üçüncü bölümde açıklandığı gibi tek hareket genel kayma hareketi ise hareket ve bulanıklık operatörleri birleştirilebilir ve gözlem modeli Şekil 3.2 ile gösterilen basitleştirilmiş biçime indirgenir. Geçici olarak, alt-örnekleme operatörünün olmadığını varsayalım. Bu durumda sistem çıkış vektörü $\mathbf{y}(n_1, n_2)$ 'yi ve sistem dürtü yanıtı matrisi $\mathbf{B}(n_1, n_2)$ 'yi,

$$\mathbf{y}(n_1, n_2) := \begin{bmatrix} y_1(n_1, n_2) \\ \vdots \\ y_K(n_1, n_2) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}(n_1, n_2) := \begin{bmatrix} b_1'(n_1, n_2) \\ \vdots \\ b_K'(n_1, n_2) \end{bmatrix}$$



Şekil 4.3. Yeniden-oluşturma aşaması.

olarak tanımlayalım. Bu özel düşük çözünürlüklü görüntü oluşum sistemi için giriş-çıkış ilişkisi,

$$\mathbf{y}(n_1, n_2) = \mathbf{B}(n_1, n_2) * x(n_1, n_2) \quad (4.1)$$

olarak ifade edilebilir. Denklem (4.1)'de * işareti, iki boyutlu vektör (veya matris) dizileri için evrişim (konvolüsyon) işlemini göstermektedir. Her bir elemanı bir ayrık-zaman dizisi olan bir $\mathbf{B}(n_1, n_2)$ vektörünün bir ayrık zaman dizisi $x(n_1, n_2)$ ile evrişiminin, $\mathbf{B}(n_1, n_2)$ vektörünün her elemanının $x(n_1, n_2)$ ile ayrı ayrı evrişimi anlamına geldiğini vurgulamakta yarar vardır.

$x(n_1, n_2)$ ile gösterilen yüksek çözünürlüklü görüntüyü elde etmek için $y_k(n_1, n_2)$ ile gösterilen düşük çözünürlüklü görüntülere Şekil 4.3'de gösterilen yeniden-oluşturma filtre seti uygulanır. Bu filtrelerin dürtü yanıtı dizisi $\mathbf{W}(n_1, n_2)$ 'nin

$$\mathbf{W}(n_1, n_2) * \mathbf{B}(n_1, n_2) = \alpha \cdot \delta(n_1 - S_1, n_2 - S_2) \quad (4.2)$$

eşitliğini sağlaması durumunda $x(n_1, n_2)$ mükemmel bir şekilde geri elde edilmiş olur. Denklem (4.2)'deki $\mathbf{W}(n_1, n_2)$,

$$\mathbf{W}(n_1, n_2) = [w_1(n_1, n_2) \quad w_2(n_1, n_2) \quad \cdots \quad w_M(n_1, n_2)] \quad (4.3)$$

olarak tanımlanır.

Denklem (4.2)'de α kazanç belirsizliğini, S_1 ve S_2 ise yatay ve dikey yöndeki kayma belirsizliklerini göstermektedir. Gözü-kapalı görüntü ters-evrişimi probleminde olduğu gibi gözü-kapalı görüntü süper-çözünürlük probleminde de kazanç ve kayma belirsizlikleri bulunmaktadır. α sabit bir kazanç olmak üzere yüksek çözünürlüklü görüntünün piksel değerleri α ile, aynı zamanda bulanıklık parametreleri de α^{-1} ile ölçeklendiğinde gözlenen düşük çözünürlüklü görüntüler değişmez. Bu durum matematiksel olarak,

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(n_1, n_2) &= \mathbf{B}(n_1, n_2) * x(n_1, n_2) \\ &= \mathbf{B}(n_1, n_2) * [\alpha^{-1} \alpha x(n_1, n_2)] \\ &= [\alpha^{-1} \mathbf{B}(n_1, n_2)] [\alpha x(n_1, n_2)] \end{aligned}$$

şeklinde gösterilebilir. Benzer şekilde, elde edilmek istenen yüksek çözünürlüklü görüntü tamsayı-değerli bir vektör (S_1, S_2) miktarınca kaydırılırsa ve bulanıklık operatörleri de aynı vektör tarafından tam zıt yönde kaydırılırsa gözlenen düşük çözünürlüklü görüntüler değişmez. Diğer bir deyişle,

$$\begin{aligned} y_i(n_1, n_2) &= b_i(n_1, n_2) * x(n_1, n_2) \\ &= \sum_k \sum_l b_i(n_1, n_2) x(n_1 - k, n_2 - l) \\ &= \sum_k \sum_l b_i(n_1 + S_1, n_2 + S_2) x(n_1 - S_1 - k, n_2 - S_2 - l) \\ &= b_i(n_1 + S_1, n_2 + S_2) * x(n_1 - S_1, n_2 - S_2). \end{aligned}$$

Şimdiye kadar alt-örnekleme operatörünün ihmal edildiği varsayılmıştı. Ancak, gözlem modelinde alt-örnekleme operatörleri bulunmaktadır. Uyarlanır filtreler uygulanacak düşük çözünürlüklü görüntülerin boyutlarını arttırmak için piksel aralarına alt-örnekleme uygun miktarda sıfır değerli pikseller eklenir. Örneğin, alt-örneklemenin 2 olması durumunda iki piksel arasına bir sıfır eklenerek D.Ç. görüntülerin boyutları iki katına çıkarılır. Böylece düşük çözünürlüklü görüntülerin boyutları, ideal yüksek çözünürlüklü görüntünün boyutuna getirilmiş olur.

Sonuç olarak, önerilen gözü-kapalı süper-çözünürlük yönteminin amacı, “bulanıklık operatör bilgisi olmadan gözlemlenen düşük kaliteli ve D.Ç. görüntüleri kullanarak yüksek kaliteli ve Y.Ç. orijinal görüntünün ölçeklenmiş ve kaymış bir şeklini elde etmek” olarak özetlenebilir.

4.2. 2-B CMA Tabanlı Gözü-Kapalı Süper-Çözünürlük Algoritması

Bu kısımda, önerilen algoritma ayrıntılarıyla açıklanacaktır. Sabit-büyüklik maliyeti Godard [7] ve Treichler ile Agee [8] tarafından sabit genliğe sahip veya sonlu sayıda eleman içeren alfabeyle sahip bir kaynak tarafından üretilen haberleşme işaretlerinin gözü-kapalı denkleştirilmesi amacıyla geliştirilmiştir. Daha sonra, Vural ve Sethares tarafından gerçek değerli, sıfır ortalamaya sahip ideal görüntü, gerçek değerli PSF ve sıfır ortalamaya sahip toplanır gürültü durumları için gözü-kapalı görüntü ters evrişim probleminin çözümünde kullanılmak üzere iki boyutlu duruma uyarlanmıştır [10].

Bu bölümde yüksek çözünürlüklü görüntünün piksel değerlerinin $-(L-1)$ ve $+(L-1)$ arasında tek tamsayı değerlerine sahip olduğu varsayılmıştır. L orijinal yüksek çözünürlüklü görüntüdeki grilik seviyesi sayısını göstermektedir. Çoğu görüntünün 8 bit (256 grilik seviyesi) olduğu bilinmektedir, ama ideal görüntüdeki piksellerin dağılımına bağlı olarak düzgün veya düzgün-olmayan eşikleme ile istenen piksel değerlerine sahip olacak şekilde dönüştürülebilirler. Ayrıca gerçek görüntünün grilik seviyelerinin bağımsız ve eşit dağılıma sahip rastlantı değişkenleri oldukları varsayılmıştır. Düşük çözünürlüklü görüntüler üzerinde histogram eşitleme gibi bir ön işleme, bu ön şartı gerçeklemeye yardımcı olabilir. Bu varsayımlar altında sabit-büyüklik maliyeti

$$\begin{aligned} J_{CM} &:= E \left[\left(\hat{x}^2(n_1, n_2) - \gamma \right)^2 \right] \\ &= E \left[\hat{x}^4(n_1, n_2) \right] - 2\sigma_x^2 \kappa_x E \left[\hat{x}^2(n_1, n_2) \right] + \sigma_x^4 \kappa_x^2 \end{aligned} \quad (4.4)$$

şeklinde verilir. γ and κ_x , gerçek görüntünün saçılma sabitini (dispersion constant) ve normalleştirilmiş savrukluğunu (normalized kurtosis) göstermektedirler ve

Tablo 4.1. Değişik grilik seviyelerindeki görüntüler için saçılma sabitleri ve normalleştirilmiş savrukluklar.

Grilik Seviyesi	γ	κ_x
2	1	1
4	8.2	1.64
8	37	1.716
16	152.2	1.790
32	613	1.797
64	2456.2	1.799
128	9829	1.799
256	39320	1.8

$$\gamma := \frac{E[x^4(n_1, n_2)]}{E[x^2(n_1, n_2)]}, \quad \kappa_x := \frac{E[x^4(n_1, n_2)]}{(E[x^2(n_1, n_2)])^2}.$$

eşitlikleriyle tanımlanmaktadır. Sıfır ortalama değere sahip düzgün dağılımlı bir görüntünün saçılma sabiti ve normalleştirilmiş savrukluğu, çeşitli grilik seviyeleri için Tablo 4.1’de verilmiştir.

Sabit büyüklük maliyetini en küçük yapan filtre katsayılarının elde edilmesi bir optimizasyon problemi olup problemin analitik bir çözümü yoktur. Olasılıksal bir gradyan-düşüş (GD) algoritması kullanılarak çözüm elde edilebilir. Sabit-büyüklük maliyetinin uyarlanır filtre parametrelerine göre çizilmesiyle “sabit-maliyet yüzeyi” olarak adlandırılan bir yüzey oluşturulur. GD algoritması, sıklıkla kullanılan bir uyarlanır filtre yöntemi olan en-küçük karesel ortalama yönteminde [54] olduğu gibi yüzey üzerinde bir noktadan başlayarak ve ardından en dik inişin yörüngesini takip ederek maliyet fonksiyonunu enküçültmeye çalışır. J_{CM} ’nin anlık bir kestirimi beklenen değer (veya eşdeğer olarak ortalama değer) operatörü ihmal edilerek

$$J := \frac{1}{4}(\hat{x}^2(n_1, n_2) - \gamma)^2 \quad (4.5)$$

eşitliğinden hesaplanabilir. Şekil 4.3'de $y_k(n_1, n_2)$ ile verilen düşük çözünürlüklü görüntülerin, bulanıklığı gidermeye ve yüksek çözünürlüklü görüntüyü oluşturmaya çalışan iki boyutlu sonlu dürtü yanıtı uyarlanır süzgeçlere uygulandığı gösterilmektedir. j . yineleme adımında gerçek görüntünün bir kestirimi

$$\hat{x}_j(n_1, n_2) = \sum_{k=1}^K \sum_{a=-A}^A \sum_{b=-B}^B w_{k,j}(a, b) y_k(a - n_1, b - n_2) \quad (4.6)$$

olarak verilebilir. Denklem (4.6)'da $A \times B$ uyarlanır filtrelerin boyutunu ve $w_{k,j}(a, b)$ ise k . uyarlanır filtrenin j . yinelemedeki katsayılarını göstermektedir. Gerçek görüntünün j . yineleme adımındaki kestirimi, uyarlanır filtre katsayılarının güncellenmesi ve bir sonraki yinelemede gerçek görüntünün daha iyi bir kestirimini elde etmek için kullanılır. GD yöntemi kullanılarak uyarlanır filtrelerin katsayıları

$$w_{j+1} = w_j - \mu \frac{dJ}{dw_j} \quad (4.7)$$

formülü ile güncellenir. μ , algoritma kararlılığını sağlayacak şekilde seçilmiş pozitif değerler alan adım aralığıdır. Adım aralığının alması gereken değeri gerçek görüntünün grilik seviyesi sayısına bağlıdır. Grilik seviyesi sayısı büyüdükçe daha küçük adım aralığı seçilmelidir.

Filtre katsayılarının GD yöntemi kullanılarak güncellenmesi amacıyla anlık maliyet fonksiyonu J 'nin uyarlanır filtre katsayılarına göre türevi gerekmektedir. J 'nin w_j 'ye göre türevi, türevin zincir kuralı kullanılarak

$$\frac{dJ}{dw_j} = \frac{dJ}{d\hat{x}_j(n_1, n_2)} \frac{d\hat{x}_j(n_1, n_2)}{dw_j} = (\hat{x}_j^2(n_1, n_2) - \gamma) \hat{x}_j(n_1, n_2) y(n_1, n_2) \quad (4.8)$$

eşitliklerinden hesaplanabilir. w_j ve $y(n_1, n_2)$ kullanılarak j . yinelemede (n_1, n_2) . piksel için gerçek görüntünün kestirimi

$$\hat{x}_j(n_1, n_2) = w_j^T y(n_1, n_2) \quad (4.9)$$

şeklinde yazılabilir. Denklem (4.9)'da w_j , j . yinelemede uyarlanırlı filtrelerin katsayılarından oluşan ve leksikografik şekilde sıralanmış vektörü gösterir:

$$w_j := \begin{bmatrix} w_{1,j} \\ w_{2,j} \\ \vdots \\ w_{K,j} \end{bmatrix}, \quad w_{i,j} = \begin{bmatrix} w_{k,j}(-A, -B) \\ w_{k,j}(-A, -B+1) \\ w_{k,j}(-A, -B+2) \\ \vdots \\ w_{k,j}(A, B) \end{bmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots, K,$$

$y(n_1, n_2)$ ise j . yinelemede (n_1, n_2) . piksel için gözlem vektörünü temsil eder:

$$y(n_1, n_2) := \begin{bmatrix} y_1(n_1, n_2) \\ y_2(n_1, n_2) \\ \vdots \\ y_K(n_1, n_2) \end{bmatrix}, \quad y_k(n_1, n_2) = \begin{bmatrix} y_k(n_1 + A, n_2 + B) \\ y_k(n_1 + A, n_2 + B - 1) \\ y_k(n_1 + A, n_2 + B - 2) \\ \vdots \\ y_k(n_1 - A, n_2 - B) \end{bmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots, K.$$

Herhangi bir durağan noktada dinamik bir sistemin üstel kararlılığı, ideal olmayan gürültülü durumun bu durağan noktanın komşuluğundaki bölgesel kararlılığı için yeterli bir koşuldur [55]. Bu nedenle, yukarıda geliştirilen yöntemde toplanır gürültü ihmal edilmiştir ancak elde edilen sonuçlar belli bir değerden büyük olmayan gürültü seviyeleri için de geçerlidir.

Sadece doğrusal kayma hareketi için önerilen süper-çözünürlük algoritması, Denklemler (4.7), (4.8) ve (4.9) ile verilmektedir. Algoritma, uyarlanırlı filtre parametrelerinin ardışık iki yineleme arasındaki normalize edilmiş ortalama farkı, belli bir eşik değerinin altına düşünce sonlandırılır. Bu durum, matematiksel olarak

$$\frac{\|w_{j+1} - w_j\|}{\|w_j\|} \leq \epsilon$$

olarak ifade edilebilir. $\| \cdot \|$, Öklid büyüklüğü anlamına gelmektedir. Denemelerde ε , 10^{-3} olarak seçilmiştir.

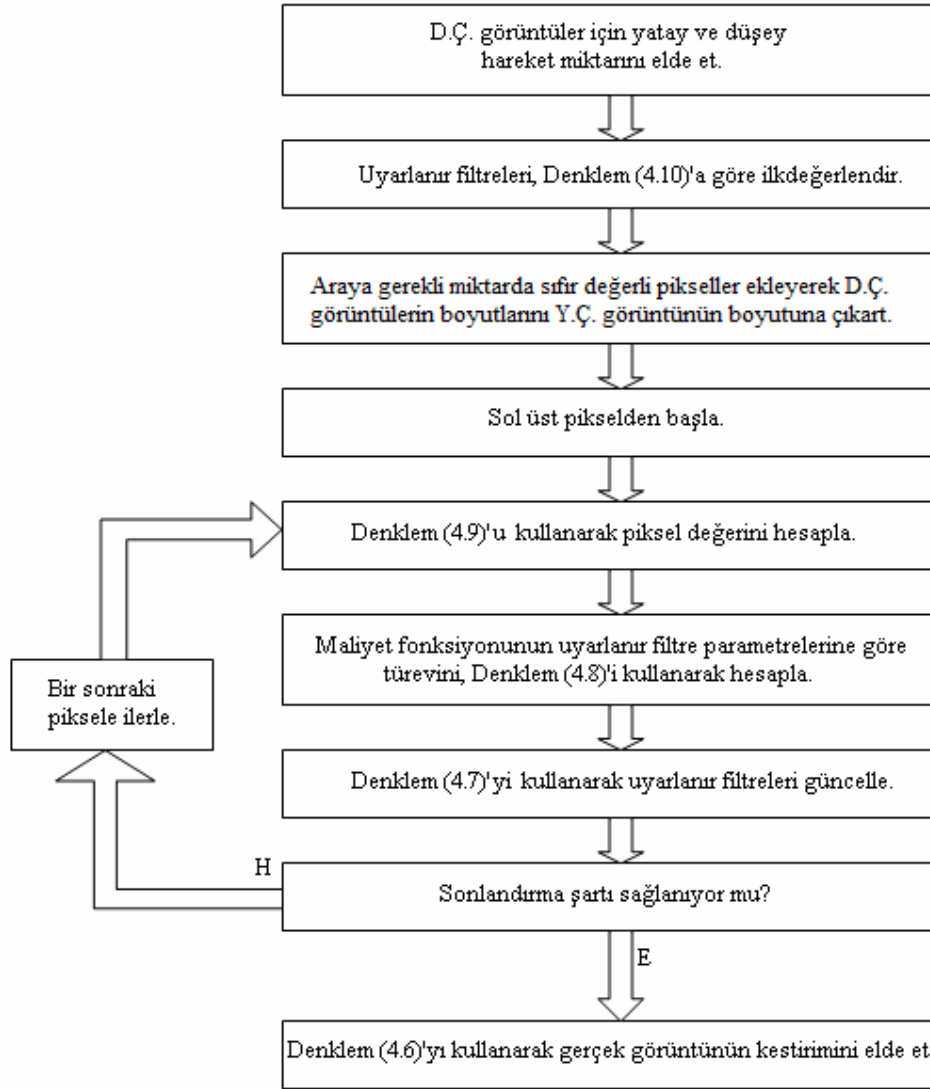
Her yineleme, kestirilmesi amaçlanan Y.Ç. görüntünün bir pikselinin işlenmesi anlamına gelmektedir. Uyarlanır filtre parametrelerini güncellemek için maliyet fonksiyonunun anlık gradyanı kullanıldığından, önerilen süper-çözünürlük yöntemi, piksel konumuna göre yavaşça ve düzgünce değiştiği sürece uzamla değişen bulanıklık filtreleri durumunda da çalışabilmektedir. Tüm pikseller işlendikten sonra algoritmanın sonlandırma şartı sağlanmadıysa görüntü üzerinden birden fazla kere geçilebilir. Ayrıca, sonlandırma şartı daha önce sağlandıysa tüm piksellerin işlenmesi gerekli değildir. Yakınsaklık elde edildiğinde, $\hat{x}_j(n_1, n_2)$ ile gerçek görüntünün bir kestiriminin sağlanması ve w_j ile verilen uyarlanır filtrelerin, nokta-dağılım fonksiyonlarının yaklaşık terslerine eşit olmaları beklenmektedir.

Sabit-büyüklik maliyetinin dışbükey olmaması gözönüne alındığında algoritma, uyarlanır filtrelerin başlangıç değerlerinin nasıl seçildiğine bağlı olarak genel yerine yerel en-küçük noktaya yakınsayabilir. Her uyarlanır filtrenin başlangıç değerleri için, sıfırdan farklı tek katsayısının konumu karşılık gelen giriş görüntüsünün (D.Ç. görüntünün) hareket vektörü tarafından belirlenen iki boyutlu bir dizi kullanılması faydalı görülmüştür:

$$w_{k,1} = \delta(n_1 + H_k, n_2 + V_k), \quad k = 1, 2, \dots, K \quad (4.10)$$

Başlangıç değerlerin bu şekilde seçilmesi, boyutu arttırılmış düşük çözünürlüklü görüntüleri, işlemlerin hemen başında hareket-öncesi yerlerine kaydıracağı için hareket etkisini ortadan kaldırır. Hareketin sadece genel kayma hareketi şeklinde olduğu varsayıldığından, hareket kestirimi, piksel-altı hassasiyette çalışabilen bir blok-eşleme tekniğiyle yapılabilir [56, 57].

Önerilmiş olan süper-çözünürlük yönteminin özet bir gösterimi, Şekil 4.4'de verilmiştir.



Şekil 4.4. Önerilen süper-çözünürlük yöntemi.

4.3. Test Sonuçları

Önerilen yöntemin Y.Ç. görüntüyü oluşturmadaki başarısını göstermek amacıyla bu kısımda bazı test sonuçları sunulmuştur. Testlerde bilgisayarda oluşturulmuş bir bitlik bir görüntü ve bir, iki, üç, dört ve beş bitlik mandril (bir çeşit maymun) görüntüleri kullanılmıştır. Kısım 4.2’de belirtilen varsayımları geçerli hale getirmek için görüntüler üzerinde ön-işleme yapılmıştır. Ardından, her görüntü için Şekil 3.1’deki gözlem modeli kullanılarak dört adet D.Ç. görüntü oluşturulmuştur.

Bulanıklık operatörü olarak 3x3, 5x5 ve 7x7'lik Gauss fonksiyonları, her kaymış görüntü için değişik varyanslarda olmak üzere uygulanmıştır. Bulanıklık varyansları sırasıyla 0.5, 1, 1.5 ve 2'dir. Gauss bulanıklık fonksiyonu,

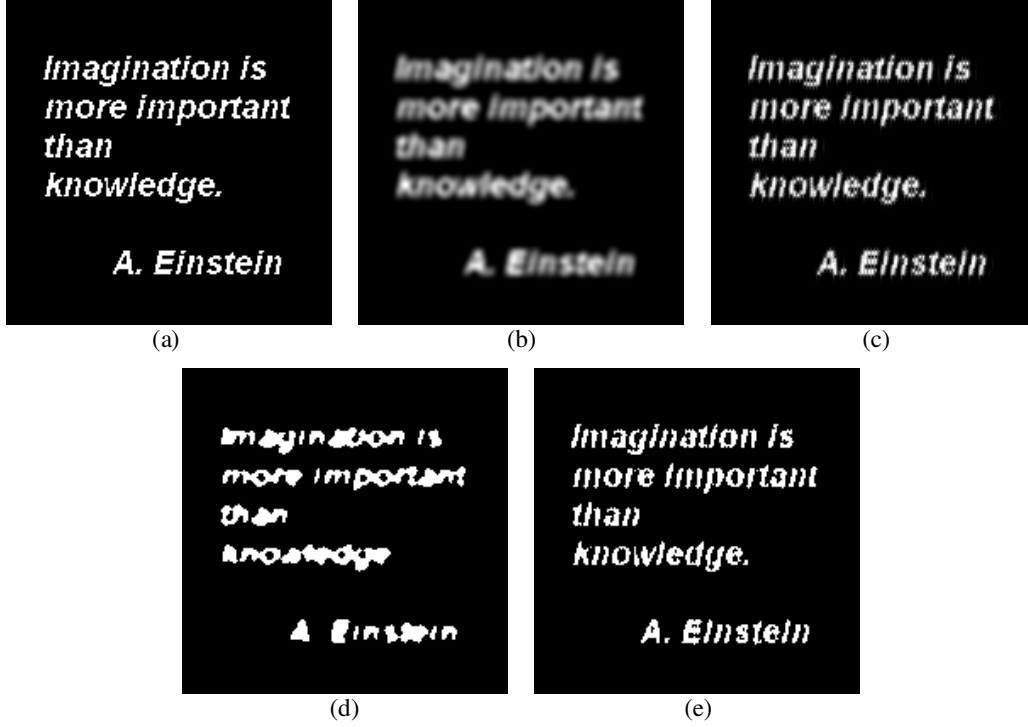
$$b(n_1, n_2) = K \exp\left(-\frac{n_1^2 + n_2^2}{2\sigma^2}\right) \quad (4.11)$$

şeklinde verilebilir. Denklem (4.11)'de σ^2 , bulanıklığın şiddetini belirleyen varyansı, K ise dağılımı birim alana sahip olacak şekilde ayarlayan normalizasyon sabitini göstermektedir. Bulanıklığın ardından kaymış ve bulanık görüntüler yatay ve dikey yöndeki boyutları yarıya düşecek şekilde alt-örneklenmiştir. Son olarak, alt-örneklenmiş her görüntüye, SNR 30 dB olacak şekilde sıfır ortalamalı Gauss gürültüsü eklenmiştir.

Şekil 4.5'de bilgisayarla oluşturulmuş orijinal bir bitlik görüntü, dört düşük çözünürlüklü görüntünün bir tanesi üzerine kübik ara-değerleme uygulanmasıyla elde edilmiş (boyutu arttırılmış) görüntü ve önerilen yöntemle oluşturulmuş görüntü, bir bite eşiklenmiş ve eşiklenmemiş halleriyle gösterilmektedir. Uyarlanır filtrelerin boyutları, bulanıklık filtrelerinin boyutları ile aynı olacak şekilde seçilmişlerdir. $N=6$ destek noktalı C2-sürekli kübik ara-değerleme fonksiyonu, diğer fonksiyonlara olan üstünlüğü nedeniyle ara-değerleme yöntemi olarak seçilmiştir [58]. Şekilde görüldüğü gibi önerilen yöntem, bulanıklık parametre bilgisi olmadan bulanıklığı bir dereceye kadar gidermiş ve yüksek-çözünürlüklü görüntüyü oluşturmuştur. Şekil 4.6'da, yineleme sayısının fonksiyonu olarak işaret-gürültü oranındaki iyileşme (ISNR) grafiği verilmiştir. ISNR,

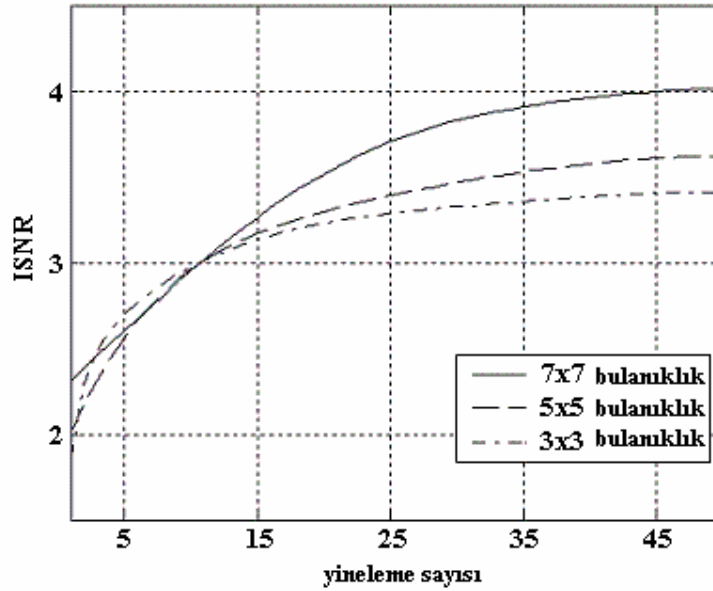
$$ISNR = 10 \log_{10} \left\{ \frac{\sum_{n_1=1}^{N_1} \sum_{n_2=1}^{N_2} [x(n_1, n_2) - y(n_1, n_2)]^2}{\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N [x(n_1, n_2) - \hat{x}(n_1, n_2)]^2} \right\} \quad (4.12)$$

olarak tanımlanır [59]. Denklem (4.12)'de $x(n_1, n_2)$ ve $y(n_1, n_2)$, orijinal görüntüyü ve

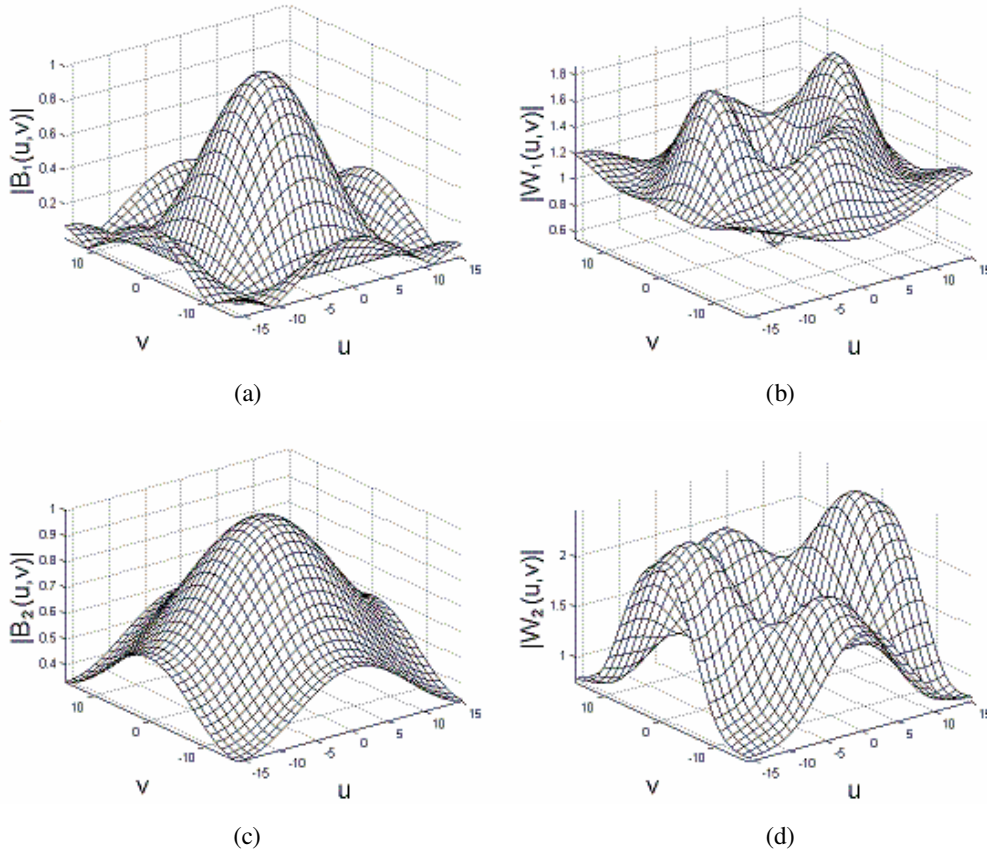


Şekil 4.5. Bilgisayarla oluşturulmuş bir bitlik bir görüntü için sonuçlar.

- Bilgisayarla oluşturulmuş bir bitlik görüntü.
- D.Ç. görüntülerden birinin ara-değerlenmesi.
- Önerilen yöntemle oluşturulan görüntü.
- (b)'deki görüntünün bir bite eşiklenmiş hali.
- (c)'deki görüntünün bir bite eşiklenmiş hali.



Şekil 4.6. Bilgisayarla oluşturulmuş bir bitlik görüntü durumunda değişik boyutlardaki bulanıklık fonksiyonları için ISNR – yineleme sayısı grafiği.



Şekil 4.7. Bulanıklık ve yeniden-oluşturma filtrelerinin DFT genlikleri.

- a, b. Varyansları 1 ve 2 olan bulanıklık filtrelerinin 32x32 DFT'lerinin genlikleri.
c, d. Karşılık gelen uyarlanır filtrelerin yakınsaklık anında genlikleri.

ara-değerlenmiş referans D.Ç. görüntüyü, $\hat{x}(n_1, n_2)$ ise orijinal görüntünün kestirimini göstermektedir. ISNR orijinal görüntü bilinmediği zaman hesaplanamaz, ancak bilindiği zaman değişik yöntemlerin performanslarını karşılaştırmak için kullanılabilir. Şekil 4.6'da görüldüğü gibi yinleme sayısı arttıkça ISNR artmaktadır. Bulanıklık fonksiyonunun boyutu arttıkça ISNR'daki iyileşme de artmaktadır.

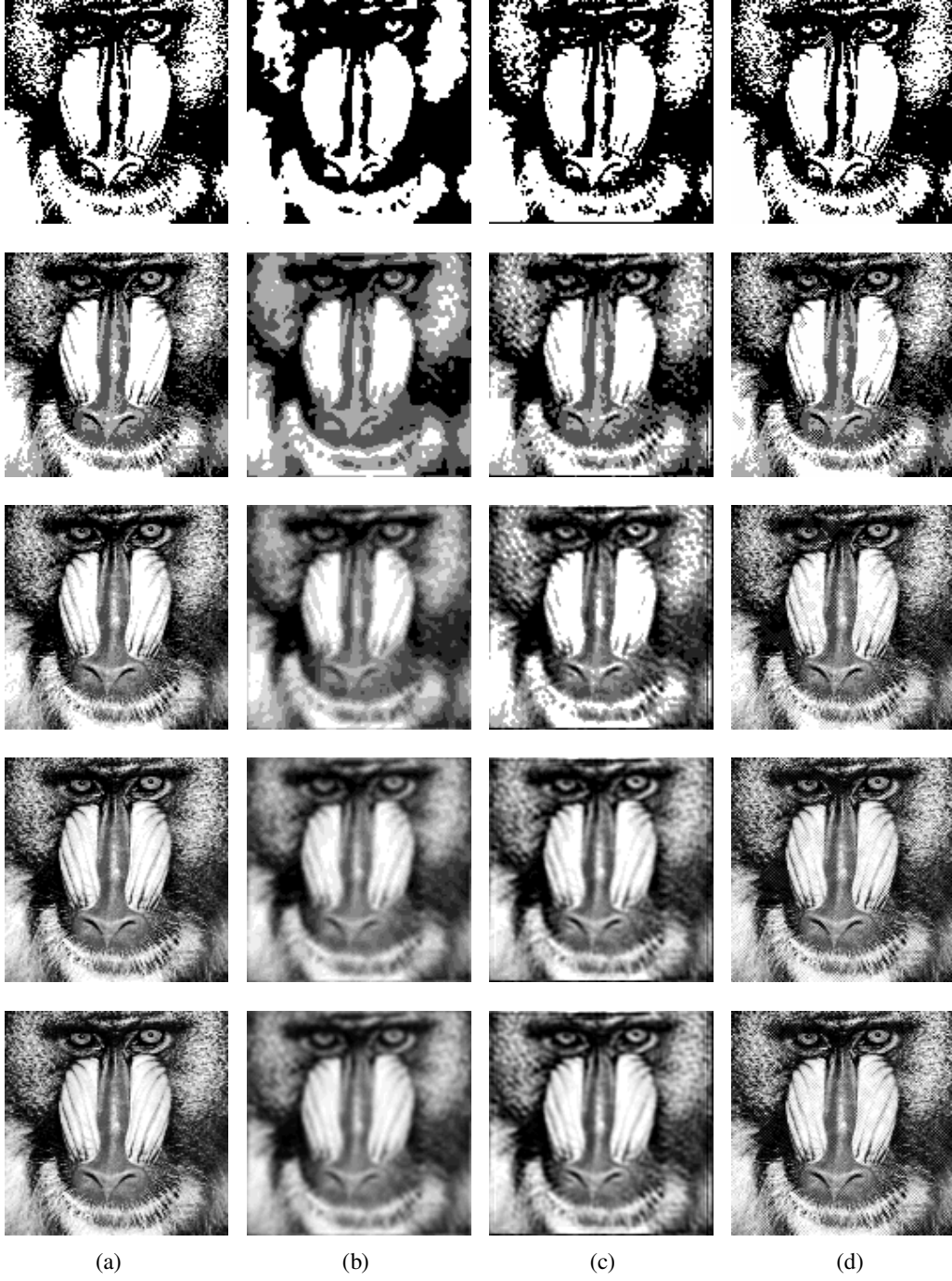
Kısım 4.2'de, yakınsaklık anında uyarlanır filtrelerin, yaklaşık olarak bulanıklık filtrelerinin tersine eşit olacakları belirtilmişti. Şekil 4.7'de, Gauss bulanıklık filtrelerinin (varyansları 1 ve 2 olanlar) ve karşılık gelen uyarlanır filtrelerin 32x32 noktalı 2-D Ayrık Fourier Dönüşümlerinin (DFT) genlikleri verilmektedir. Şekilde görüldüğü gibi yakınsaklık anında gerçekten de uyarlanır filtreler bulanıklık filtrelerinin yaklaşık terslerine eşittir.

Bir, iki, üç, dört ve beş bitlik mandril görüntüleri ile elde edilen sonuçlar Şekil 4.8'de verilmektedir. Karşılaştırma amaçlı olarak, Şekil 4.8d'de bulanıklığı biliniyor varsayan bir yöntemin de sonucu verilmiştir. Bulanıklığın biliniyor olması durumunda Y.Ç. görüntüyü elde etmek için üç aşamalı basit bir süper-çözünürlük yöntemi uygulanmıştır: (i) D.Ç. görüntüler Y.Ç. ızgara üzerine yerleştirilmiştir, (ii) kapsanmayan piksel değerleri ara-değerleme ile tespit edilmiştir, (iii) bulanıklık Wiener filtresi uygulanarak giderilmiştir. Her iki yöntem kullanılarak elde edilen ISNR sonuçları Tablo 4.2'de verilmiştir. Hem görsel, hem de ISNR sonuçlarından gerçek görüntünün piksel değerlerini temsil eden bit sayısı arttıkça görüntü kalitesindeki artmanın daha az belirgin olduğu anlaşılmaktadır. Bunun iki nedeni vardır. Birinci olarak, görüntü sivrüklüğü arttıkça maliyet yüzeyi yassılaştığından gözle görülür bir iyileşme elde etmek için gerekli yineleme sayısı çok artmaktadır. İkinci olarak, algoritmanın kararlılığını sağlamak için adım aralığını çok küçük seçmek gerektiğinden anlamlı iyileşmeler için gerekli işlem zamanı çok artar [60]. Bir boyutlu ve daha basit durumlar için analiz [60]'da yapılmıştır, bu çalışmayı süper-çözünürlük durumuna uyarlamak, fazla sayıda parametre olması yüzünden çok zordur.

Son olarak gerçek bir bulanık görüntü seti için sonuç Şekil 4.9'da verilmektedir. Şekil 4.9a'da ara-değerlenmiş olarak düşük çözünürlüklü görüntülerin biri görülmektedir. Şekil 4.9b, Şekil 4.9a'nın iki bite eşiklenmiş halidir. Önerilen yöntemin iki bit için sonucu Şekil 4.9c'de verilmiştir.

4.4. Sonuç

Bu bölümde gözü-kapalı bir süper-çözünürlük yöntemi sunulmuştur. Yöntem, haberleşme sistemlerinde gözü-kapalı kanal denkleştirme probleminin çözümünde kullanılan sabit-büyükölçüm algoritmasının iki boyuta ve tek giriş – çok çıkış durumuna uyarlanmış halidir. Önerilen yöntemin önemli bir üstünlüğü, sunulan diğer gözü-kapalı süper-çözünürlük yöntemlerinin aksine bulanıklık operatörlerinin her bir D.Ç. görüntü için farklı olabileceğini varsaymasıdır. Bununla birlikte yöntemin bir eksikliği, D.Ç. görüntüler arasındaki hareketi sadece düzgün doğrusal hareket olarak varsaymasıdır. Deney sonuçları, yöntemin, özellikle beş veya daha düşük bitlik

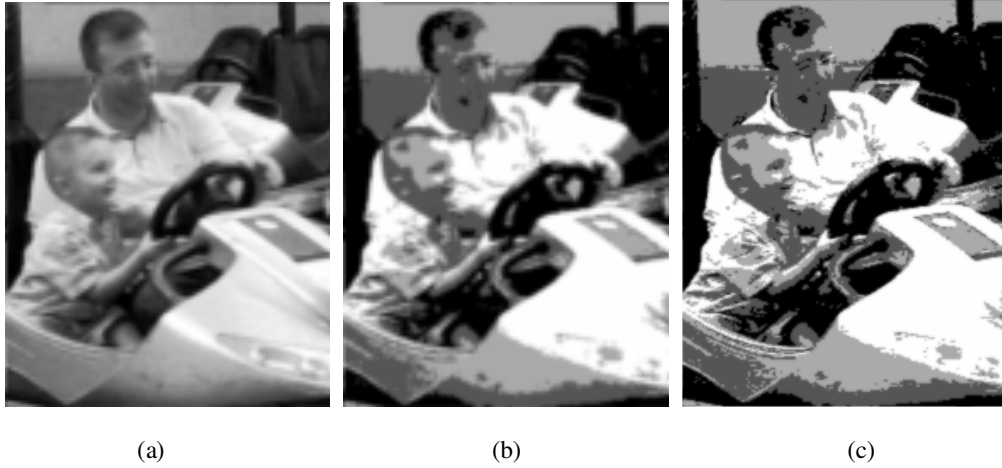


Şekil 4.8. Yukarıdan aşağıya: Bir, iki, üç, dört ve beş bitlik görüntüler için sonuçlar.

- Orijinal mandril görüntüsü.
- D.Ç. görüntülerden birinin ara-değerlemesi.
- Önerilen yöntemle elde edilen Y.Ç. görüntü.
- Yerleştirme-ara değerlendirme-Wiener bulanıklık giderme yöntemiyle elde edilen Y.Ç. görüntü.

Tablo 4.2. Değişik grilik seviyeleri için mandril görüntüsü durumunda elde edilen ISNR değerleri.

Piksel başına düşen bit sayısı	ISNR (önerilen yöntem)	ISNR (bulanıklık biliniyor iken)
1	3.54 dB	4.21 dB
2	2.18 dB	4.45 dB
3	1.52 dB	4.41 dB
4	1.16 dB	3.87 dB
5	1.02 dB	4.09 dB



Şekil 4.9. Gerçek görüntü için sonuçlar.

- Ara-değerlenmiş düşük çözünürlüklü görüntülerden biri (8 bit).
- (a)'daki görüntünün 2 bite eşiklenmiş hali.
- Önerilen yöntemle elde edilmiş iki bitlik görüntü.

görüntüler için bulanıklığı giderip Y.Ç. görüntüyü oluşturabildiğini göstermektedir. Gerçek görüntü piksel değerlerini temsil eden bit sayısı arttıkça performans kötüleşmektedir. Bu problemi çözmek için, sonraki bölümde gerçek görüntünün piksel değerlerinin gerçek sayılar yerine karmaşık sayılar olarak ifade edildiği yeni bir yöntem geliştirilecektir.

BÖLÜM 5. KARMAŞIK HARİTALAMAYA DAYALI GÖZÜ-KAPALI SÜPER-ÇÖZÜNÜRLÜĞÜ

Dördüncü bölümde, sabit-büyüklik algoritmasına dayalı bir gözü-kapalı süper-çözünürlük yöntemi geliştirilmiştir. Bu yöntem, özellikle piksel başına düşen bit sayısı düşük iken başarılı sonuçlar verirken bit sayısı arttıkça yüksek çözünürlüklü görüntüyü elde etmedeki performansı kötüleşmekteydi. Bu bölümde, algoritmanın eksikliğini giderilmesi için yöntemde iki değişiklik yapılmıştır. İlk olarak, görüntü piksel değerlerinin sabit genliğe sahip karmaşık sayılar olduğu varsayılmıştır. Gerçekte görüntü pikselleri gerçek değerlere sahiptir. Ancak, uygun bir dönüşüm (haritalama) aracılığıyla karmaşık sayılar olarak temsil edilebilirler. Çeşitli haritalama senaryoları geliştirilip denenmiş ve en uygun karmaşık haritalama diyagramı belirlenmiştir. İkinci olarak ise gerçek değerli yeniden-oluşturma filtre katsayıları yerine karmaşık değerli katsayılar kullanılmıştır. Karmaşık değerli filtreler, karmaşık değerli bir maliyet fonksiyonu ve gradyan-iniş temelli bir optimizasyon yöntemi kullanmanın doğal bir sonucudur. Sonuç olarak, oluşturulan yeni yöntem, tek görüntü üzerindeki bulanıklığı giderme (görüntü onarımı) ve birden çok görüntüyü birleştirerek çözünürlüğü artırma (görüntü süper-çözünürlüğü) problemlerine uygulanmıştır. Yeni yöntem kullanılarak elde edilen sonuçlar, Bölüm 4'de tanımlanan eski yöntemin ve literatürde sıklıkla kullanılan başka yöntemlerin sonuçlarıyla karşılaştırılmıştır.

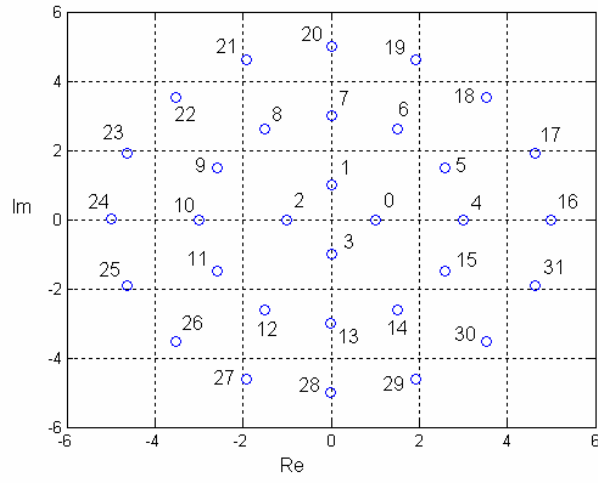
5.1. Algoritmanın Geliştirilmesi

Karmaşık haritalama tabanlı süper-çözünürlük yöntemi, temel olarak yine sabit-büyüklik algoritmasına dayanır, ama Bölüm 4'de anlatılan yöntem ile çeşitli yönlerden ayrılmaktadır. Farkları şu şekilde sıralanabilir:

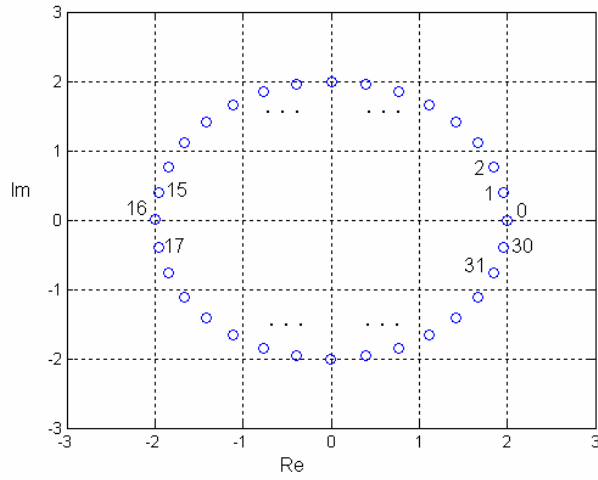
- 1- İlk yöntemde orijinal yüksek çözünürlüklü görüntünün piksel değerleri, $\log_2(L)$ piksel başına düşen bit sayısı olmak üzere $-(L-1)$ and $+(L-1)$ arasında tek tamsayı değerlerine sahip olacak şekilde bir ön-işlemden geçirilmekteydi. Yeni yöntemde ise, orijinal görüntünün piksel değerleri bire bir haritalama yoluyla karmaşık düzleme aktarılmaktadır. Diğer bir deyişle, karmaşık piksel değerlerine sahip bir ilk-görüntü mevcuttur. Haritalamanın nasıl olacağı konusunda çeşitli yaklaşımlar önerilebilir; Şekil 5.1'de çeşitli haritalama örnekleri (5 bit için) ve bu haritalara karşılık gelen saçılma sabiti ile normalleştirilmiş savruluk tabloları verilmektedir. Şekil 5.1'de verilen diyagramlardaki sayılar gerçek görüntü piksel değerlerini, sayılara karşılık gelen noktalar ise pikselin alacağı karmaşık değeri göstermektedir. Kısım 5.2'de bu diyagramlar içinde hangisinin en iyi sonucu verdiği, deneysel olarak anlatılmaktadır.
- 2- Orijinal yüksek çözünürlüklü görüntü karmaşık piksel değerli varsayıldığında gözlemlenen düşük çözünürlüklü ve düşük kaliteli görüntüler de karmaşık piksel değerli olacak ve orijinal görüntüyü elde etmek için de parametreleri karmaşık değerlere sahip olan uyarlanırlı filtreler kullanmak gerekecektir. $\hat{w}_i(n_1, n_2)$, gerçek kısmı $\text{Re}\{\hat{w}_i(n_1, n_2)\}$, sanal kısmı $\text{Im}\{\hat{w}_i(n_1, n_2)\}$ olan karmaşık değerli filtre katsayılarını gösterebilir. Karmaşık değerli orijinde Y.Ç. görüntünün kestirimi

$$\begin{aligned} \hat{x}(n_1, n_2) &= \sum_{i=1}^M \hat{w}_i(n_1, n_2) * y_i(n_1, n_2) \\ &= \sum_{i=1}^M (\text{Re}\{\hat{w}_i(n_1, n_2)\} + j \text{Im}\{\hat{w}_i(n_1, n_2)\}) * (\text{Re}\{y_i(n_1, n_2)\} + j \text{Im}\{y_i(n_1, n_2)\}) \\ &= \sum_{i=1}^M (\text{Re}\{\hat{w}_i(n_1, n_2)\} * \text{Re}\{y_i(n_1, n_2)\} - \text{Im}\{\hat{w}_i(n_1, n_2)\} * \text{Im}\{y_i(n_1, n_2)\}) \\ &\quad + j(\text{Im}\{\hat{w}_i(n_1, n_2)\} * \text{Re}\{y_i(n_1, n_2)\} + \text{Re}\{\hat{w}_i(n_1, n_2)\} * \text{Im}\{y_i(n_1, n_2)\}) \end{aligned}$$

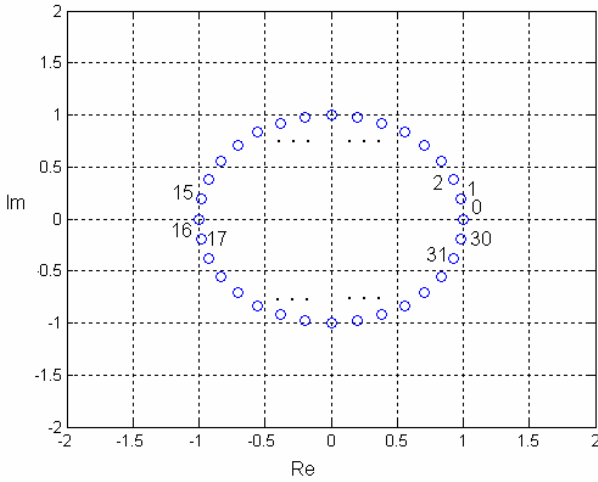
olarak yazılabilir. Görüldüğü gibi karmaşık değerli bir filtre, dört adet gerçek değerli filtre kullanılarak gerçekleştirilebilmektedir. Ayrıca, elimizde karmaşık uyarlanırlı filtre aşamasından sonra karmaşık değerli bir görüntü oluşacaktır ve gerçek değerli görüntüyü elde etmek için ters-haritalama uygulamak gerekecektir.



Grilik Seviyesi	γ	κ_r
2	1	1
4	1	1
8	8.2	1.64
16	8.7143	1.2449
32	21.4375	1.3398
64	40.6774	1.3122
128	87.6988	1.3544
256	168.6693	1.3281

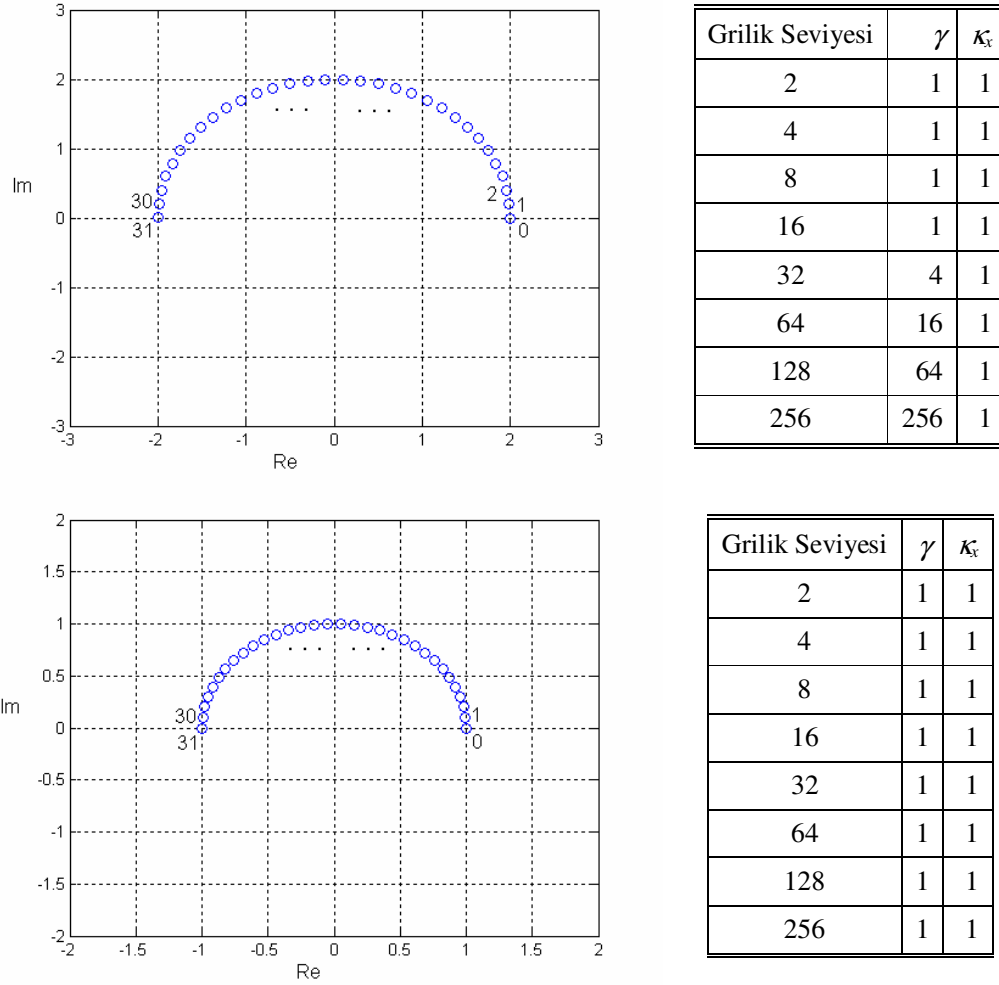


Grilik Seviyesi	γ	κ_r
2	1	1
4	1	1
8	1	1
16	1	1
32	4	1
64	16	1
128	64	1
256	256	1



Grilik Seviyesi	γ	κ_r
2	1	1
4	1	1
8	1	1
16	1	1
32	1	1
64	1	1
128	1	1
256	1	1

Şekil 5.1. Çeşitli karmaşık haritalama diyagramları (5 bit için) ve karşılık gelen saçılma sabiti ile normalleştirilmiş savrulukluk tabloları



Şekil 5.1. (devam)

3- Sabit-büyüklik fonksiyonunun uyarlanır filtre parametrelerine göre türevinin (dJ/dw) hesaplanması, karmaşık sayılar aritmetiği düşünüldüğünde ilk yönteme göre farklı olacaktır. Ek C'de karmaşık değerli bir vektöre göre türevin nasıl hesaplandığı açıklanmıştır [54].

Bu varsayımlar altında sabit-büyüklik maliyeti şu şekilde verilir:

$$\begin{aligned}
 J_{CM} &:= E \left[\left(\hat{x}^2(n_1, n_2) - \gamma \right)^2 \right] \\
 &= E \left[\hat{x}^4(n_1, n_2) \right] - 2\sigma_x^2 \kappa_x E \left[\hat{x}^2(n_1, n_2) \right] + \sigma_x^4 \kappa_x^2
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

γ ve κ_x , gerçek görüntünün saçılma sabitini ve normalleştirilmiş savrukluğunu göstermektedirler ve

$$\gamma = \frac{E[|x^4(n_1, n_2)|]}{E[|x^2(n_1, n_2)|]}, \quad \kappa_x = \frac{E[|x^4(n_1, n_2)|]}{(E[|x^2(n_1, n_2)|])^2} \quad (5.2)$$

eşitlikleriyle tanımlanırlar. J_{CM} maliyet fonksiyonunu en küçük yapan filtre katsayılarının çözümü için analitik bir ifade elde edilemediğinden olasılıksal bir gradyan-düşüş (GD) optimizasyon yöntemi kullanılmıştır. Sabit-büyüklik maliyetinin uyarlanır filtre parametrelerine göre çizilmesiyle sabit-maliyet yüzeyi denen bir yüzey oluşturulur. Enküçültme algoritması, yüzey üzerinde bir noktadan başlayarak, ardından en dik inişin yörüngesini takip ederek maliyeti enküçültmeye çalışır. J_{CM} 'nin anlık bir kestirimi

$$J := \frac{1}{4} \left(\hat{x}^2(n_1, n_2) - \gamma \right)^2 \quad (5.3)$$

olarak verilebilir. Uyarlanır filtreler uygulandığında j . yinelemede gerçek görüntünün bir kestirimi

$$\hat{x}_j(n_1, n_2) = \sum_{k=1}^K \sum_{a=-A}^A \sum_{b=-B}^B w_{k,j}(a, b) y_k(a - n_1, b - n_2) \quad (5.4)$$

ifadesiyle verilir. Burada, $A \times B$ uyarlanır filtrenin boyutlarıdır ve $w_{k,j}(a, b)$ k . uyarlanır filtrenin j . yinelemedeki katsayılarıdır. Hem uyarlanır filtre katsayıları, hem de elimizdeki düşük kaliteli görüntülerin piksel değerlerinin karmaşık sayılar olduğunu hatırlatmakta fayda vardır. Karmaşık uyarlanır filtre aşamasından sonra karmaşık değerli bir görüntü oluşacak ve gerçek değerli görüntüyü elde etmek için ters-haritalama uygulamak gerekecektir.

Gerçek görüntünün Denklem (5.4) ile verilen kestirimi, uyarlanır filtre katsayılarını

güncellemek amacıyla kullanılır. Filtre katsayılarının güncellenebilmesi için J nin uyarlanır filtre katsayılarına göre türevi gerekmektedir. $y(n_1, n_2)$ ve w_j , j 'inci yinelemede (n_1, n_2) . piksel için gözlem vektörünün ve uyarlanır filtrenin katsayılarından oluşan, leksikografik şekilde sıralanmış vektörleri belirtsin (bkz. Bölüm 4). w_j ve $y(m, n)$ kullanılarak j 'inci yinelemede (n_1, n_2) 'inci piksel için gerçek görüntünün kestirimi şu şekilde yazılabilir:

$$\hat{x}_j(n_1, n_2) = w_j^T y(n_1, n_2) \quad (5.5)$$

J 'nin w_j 'ye göre türevi, türevin zincir kuralından

$$\frac{dJ}{dw_j} = \frac{dJ}{d\hat{x}} \cdot \frac{d\hat{x}}{dw_j} \quad (5.6)$$

olarak yazılabilir. İlk terimi hesaplamak kolaydır ve

$$\frac{dJ}{d\hat{x}} = \left(\hat{x}_j^2(n_1, n_2) - \gamma \right) \hat{x}_j(n_1, n_2) \quad (5.7)$$

olduğu gösterilebilir. İkinci terim, Ek C'da anlatılan kavramlardan yararlanılarak

$$\frac{d\hat{x}}{dw_j} = y^*(n_1, n_2) \quad (5.8)$$

şeklinde hesaplanır. O halde, J 'nin w_j 'ye göre türevi

$$\frac{dJ}{dw_j} = \left(\hat{x}_j^2(n_1, n_2) - \gamma \right) \hat{x}_j(n_1, n_2) y^*(n_1, n_2) \quad (5.9)$$

olur. (*), karmaşık eşleniği göstermektedir. Denklem (4.8)'de verilen türev ifadesinde uyarlanır filtre katsayıları olarak gerçek sayılar kullanıldığında denklemde karmaşık eşlenik işaretinin olmadığına dikkat ediniz. Uyarlanır filtrelerin katsayıları, GD algoritması kullanılarak güncellenir:

$$w_{j+1} = w_j - \mu \frac{dJ}{dw_j} \quad (5.10)$$

μ , algoritma kararlılığını sağlayacak şekilde seçilmesi gereken pozitif değerli bir sabittir. Bölüm 4’de, piksel başına düşen bit sayısı arttıkça adım aralığını daha küçük seçilmesi gerektiği açıklanmıştı. Karmaşık haritalama tabanlı sabit büyüklük algoritmasında ise bit seviyesinden bağımsız olarak adım aralığı sabit bir sayı olarak seçilebilir. Deneylerde adım aralığı için genellikle 10^{-3} civarında değerler kullanılmıştır.

Şimdiye kadarki tartışmada alt-örnekleme operatörünün olmadığı varsayılmıştır. Bölüm 4’de olduğu gibi, uyarlanır filtreler giriş olarak kullanılacak düşük çözünürlüklü görüntülerin boyutlarını arttırmak için piksel aralarına uygun miktarda sıfır değerli pikseller eklenerek düşük çözünürlüklü görüntülerin boyutları, yüksek çözünürlüklü görüntünün boyutuna çıkartılır.

Sabit-büyüklik maliyeti dışbükey olmadığından birden fazla minimumu olabilir. Bu nedenle algoritma, uyarlanır filtrelerin ilk değerlerinin nasıl seçildiğine bağlı olarak global yerine yerel bir en-küçük noktaya yakınsayabilir. Bölüm 4’de olduğu gibi her uyarlanır filtrenin başlangıç değerleri için, karşılık gelen D.Ç. görüntünün hareket vektörüne bağlı ilk-değerler kullanılmıştır:

$$w_{k,1} = \delta(n_1 + H_k, n_2 + V_k), \quad k = 1, 2, \dots, K \quad (5.11)$$

Şimdiye kadar anlatılanlara bağlı olarak, önerilen karmaşık haritalama ve sabit-büyüklik tabanlı gözü-kapalı görüntü süper-çözünürlüğü algoritması şu şekilde özetlenebilir:

1. Referans bir görüntüye bağlı olarak düşük çözünürlüklü görüntülerin yatay ve düşey hareket miktarlarını yüksek çözünürlüklü piksel cinsinden elde et.
2. Uyarlanır filtreleri, Denklem (5.11)’i kullanarak ilkdeğerlendir.
3. Düşük çözünürlüklü görüntüleri, araya sıfır değerli pikseller ekleyerek yeniden boyutlandır.

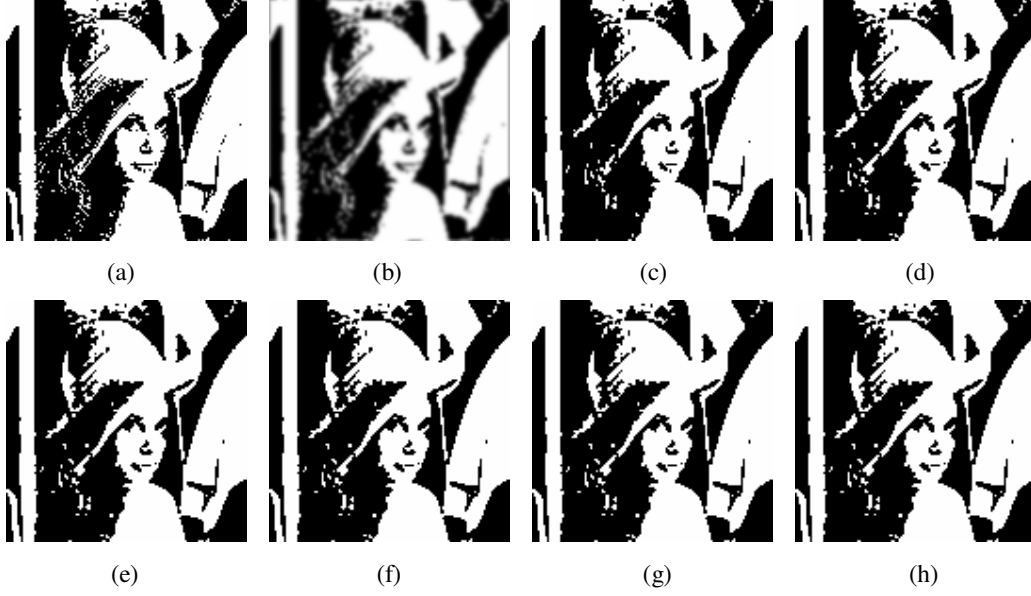
4. Karmaşık haritalama diyagramını kullanarak tüm piksel değerlerini karmaşık değerler haline dönüştür.
5. Sol üst pikselden başla.
6. Pikselin değerini, Denklem (5.5)'i kullanarak kestir.
7. Maliyet fonksiyonunun uyarlanırlı filtre parametrelerine göre türevini, Denklem (5.9)'u kullanarak elde et.
8. Uyarlanırlı filtreleri, Denklem (5.10)'u kullanarak güncelle.
9. Algoritmadan çıkış şartı sağlanıyorsa, 10. basamaktan devam et. Eğer sağlanmıyorsa bir sonraki piksele geç ve 6. basamağa atla.
10. Karmaşık değerli gerçek görüntü kestirimini, Denklem (5.4)'ü kullanarak elde et.
11. Ters haritalama uygulayarak gerçek değerli görüntüyü oluştur.

Algoritma, gözü-kapalı süper-çözünürlük problemi ile birlikte sadece tek görüntünün olduğu ve alt-örneklemenin olmadığı gözü-kapalı görüntü onarımı probleminde de kullanılabilir. Bu durumda yukarıdaki birinci ve üçüncü basamaklar atlanır, uyarlanırlı filtre, $(H_i, V_i) = (0, 0)$ şeklinde ilkdeğerlendirilir ve diğer basamaklar $K = 0$ için gerçekleştirilir.

5.2. Karmaşık Haritalama Diyagramının Seçilmesi

Bu kısımda, Kısım 5.1'de açıklanan algoritmada kullanılacak olan karmaşık haritalama diyagramı seçilecektir. Çeşitli karmaşık haritalama diyagramları, Şekil 5.1'de gösterilmiştir. Bu diyagramlar, gözü-kapalı görüntü restrasyonu için kullanılmış ve en iyi sonucu veren seçilmiştir.

Şekil 5.2-5.9'da, çeşitli bit sayıları için ve çeşitli karmaşık haritalama diyagramları kullanılarak elde edilen sonuçlar verilmiştir. Karşılaştırma amacıyla karmaşık haritalama kullanmayan yöntemin de sonuçları eklenmiştir. Tablo 1'de ise karmaşık haritalama yöntemlerinin ve eski yöntemin, görüntü işaretleme/gürültü oranında meydana getirdikleri iyileşme oranları sunulmuştur. Görüntüler ve tablolardan aşağıdaki gözlemler çıkarılabilir:



Şekil 5.2. Bir bitlik Lena görüntüsü için gözü-kapalı onarım sonuçları.

- a. Orijinal görüntü.
- b. Bulanık görüntü.
- c. Eski (karmaşık haritalama kullanmayan) yöntemin sonucu.
- d, e, f, g, h. Birinci, ikinci, üçüncü, dördüncü ve beşinci karmaşık haritalama diyagramları için önerilen yöntemin sonuçları.



Şekil 5.3. İki bitlik Lena görüntüsü için gözü-kapalı onarım sonuçları.

- a. Orijinal görüntü.
- b. Bulanık görüntü.
- c. Eski (karmaşık haritalama kullanmayan) yöntemin sonucu.
- d, e, f, g, h. Birinci, ikinci, üçüncü, dördüncü ve beşinci karmaşık haritalama diyagramları için önerilen yöntemin sonuçları.



Şekil 5.4. Üç bitlik Lena görüntüsü için gözü-kapalı onarım sonuçları.

- a. Orijinal görüntü.
- b. Bulanık görüntü.
- c. Eski (karmaşık haritalama kullanmayan) yöntemin sonucu.
- d, e, f, g, h. Birinci, ikinci, üçüncü, dördüncü ve beşinci karmaşık haritalama diyagramları için önerilen yöntemin sonuçları.



Şekil 5.5. Dört bitlik Lena görüntüsü için gözü-kapalı onarım sonuçları.

- a. Orijinal görüntü.
- b. Bulanık görüntü.
- c. Eski (karmaşık haritalama kullanmayan) yöntemin sonucu.
- d, e, f, g, h. Birinci, ikinci, üçüncü, dördüncü ve beşinci karmaşık haritalama diyagramları için önerilen yöntemin sonuçları.



Şekil 5.6. Beş bitlik Lena görüntüsü için gözü-kapalı onarım sonuçları.

- Orijinal görüntü.
- Bulanık görüntü.
- Eski (karmaşık haritalama kullanmayan) yöntemin sonucu.
- d, e, f, g, h. Birinci, ikinci, üçüncü, dördüncü ve beşinci karmaşık haritalama diyagramları için önerilen yöntemin sonuçları.



Şekil 5.7. Altı bitlik Lena görüntüsü için gözü-kapalı onarım sonuçları.

- Orijinal görüntü.
- Bulanık görüntü.
- Eski (karmaşık haritalama kullanmayan) yöntemin sonucu.
- d, e, f, g, h. Birinci, ikinci, üçüncü, dördüncü ve beşinci karmaşık haritalama diyagramları için önerilen yöntemin sonuçları.



Şekil 5.8. Yedi bitlik Lena görüntüsü için gözü-kapalı onarım sonuçları.

- Orijinal görüntü.
- Bulanık görüntü.
- Eski (karmaşık haritalama kullanmayan) yöntemin sonucu.
- d, e, f, g, h. Birinci, ikinci, üçüncü, dördüncü ve beşinci karmaşık haritalama diyagramları için önerilen yöntemin sonuçları.



Şekil 5.9. Sekiz bitlik Lena görüntüsü için gözü-kapalı onarım sonuçları.

- Orijinal görüntü.
- Bulanık görüntü.
- Eski (karmaşık haritalama kullanmayan) yöntemin sonucu.
- d, e, f, g, h. Birinci, ikinci, üçüncü, dördüncü ve beşinci karmaşık haritalama diyagramları için önerilen yöntemin sonuçları.

Tablo 5.1. Diyagramların işaret/gürültü oranlarında sağladıkları iyileşme.

Bit Sayısı	Eski	Harita 1	Harita 2	Harita 3	Harita 4	Harita 5
1	6.0554	5.7844	5.7844	5.7846	5.7845	5.7843
2	3.5691	5.2802	5.2803	5.2804	5.4884	5.4881
3	1.7015	-7.7570	4.1576	4.1577	5.3332	5.3332
4	0.9112	-6.4843	3.1176	3.1176	5.6553	5.6554
5	0.4283	-7.7220	1.7131	1.3391	5.0083	5.7851
6	0.1656	-10.0653	1.6930	0.8756	4.9096	5.8736
7	0.0910	-10.5731	0.6977	-1.0189	5.3791	5.9178
8	0.0505	-11.2614	-1.4168	-0.6268	5.7716	5.9181

- 1- Bir bitlik görüntü için bütün yöntemler hemen hemen aynı sonucu vermiştir. Bu sonucun nedeni açıktır. Bir bitlik bir görüntünün piksel değerleri sabit genlik varsayımını sağladığında bütün karmaşık haritalamaya dayanan yöntemler eski yöntem gibi çalışmaktadırlar.
- 2- Bit sayısı yükseldikçe özellikle dördüncü ve beşinci diyagramları kullanan karmaşık haritalamaya dayanan yöntemler eski yönteme ve diğer diyagramları kullanan yöntemlere göre öne çıkmaktadırlar. Bit sayısı arttıkça görüntü kalitesindeki iyileşmenin azalması problemi, dördüncü ve beşinci diyagramları kullanan yöntemler için söz konusu değildir. Sonuçta, karmaşık haritalama diyagramı olarak beşinci diyagram tercih edilmiştir.

5.3. Test Sonuçları

Bu bölümde, onarım ve süper-çözünürlük için bazı test sonuçları sunulmaktadır.

5.3.1. Gözü-kapalı onarım

Önerilen yöntemin gözü-kapalı görüntü onarımı durumundaki performansını değerlendirmek için Şekil 5.10'a'da verilen görüntü üzerinde bir deney uygulanmıştır. Öncelikle 8 bitlik görüntü üzerinde histogram eşitleme uygulanmış, ardından Kısım 5.1'de açıklanan beşinci haritalama diyagramı kullanılarak karmaşık değerli pikseller elde edilmiştir. Orijinal (karmaşık değerli) görüntü üzerinde varyansı bir olan 7x7'lik Gauss bulanıklık fonksiyonu uygulanmıştır. Gauss nokta dağılım fonksiyonu,

uzaktan algılama ve havadan görüntüleme uygulamalarında sık ortaya çıkan bir bulanıklık çeşididir. Son olarak, bozulmuş görüntü, bulanık işaret/gürültü oranı (BSNR) 30 dB olacak şekilde Gauss gürültüsü eklenerek oluşturulmuştur. Önerilen algoritmaya giriş olarak kullanılacak olan bulanık ve gürültülü görüntü, Şekil 5.10b'de gösterilmektedir.

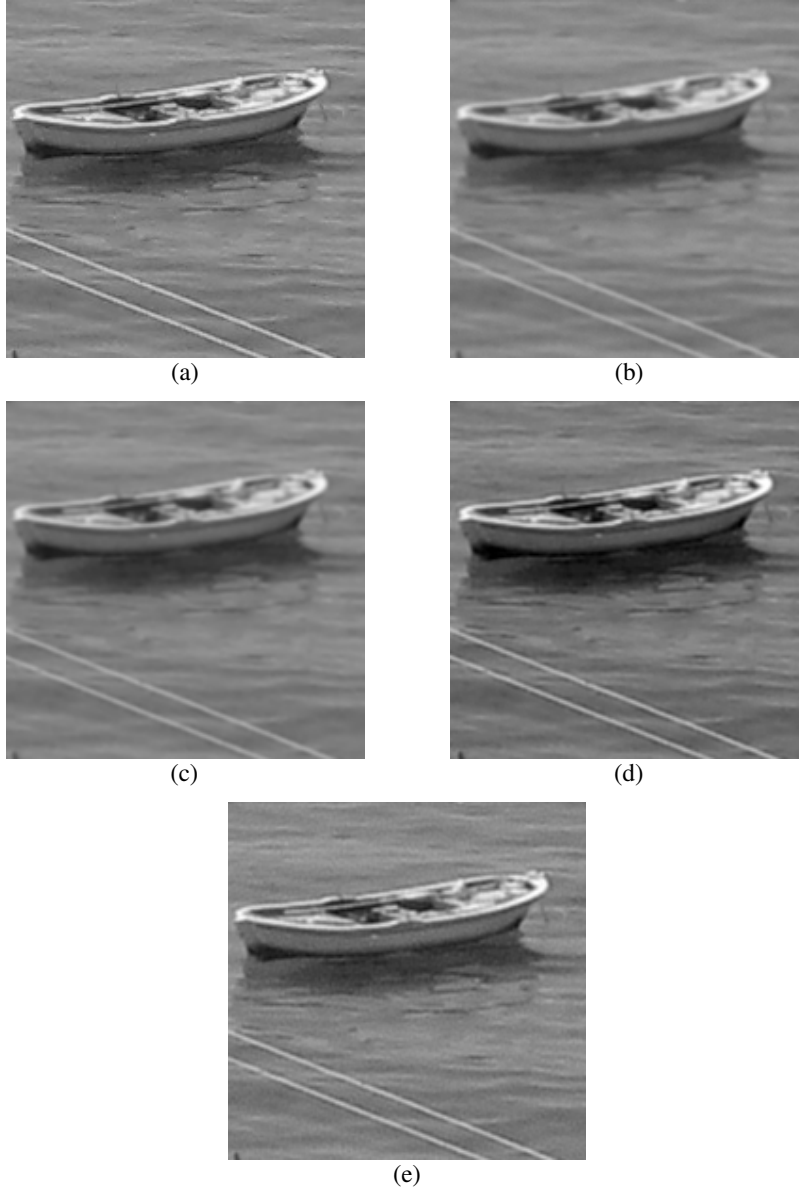
Bölüm 4'deki karmaşık haritalama kullanmayan yöntemin, önerilen yöntemin ve Wiener Filtreleme yönteminin sonuçları Şekil 5.10c, 5.10d ve 5.10e'de, işaret/gürültü oranındaki iyileşme (ISNR) değerleriyle birlikte verilmiştir.

Wiener filtreleme yöntemi, nokta dağılım fonksiyonun biliniyor olduğu varsayılan doğrusal görüntü onarımı alanında bilinen bir yöntem olup orijinal ve kestirilen görüntüler arasındaki ortalama karesel hatayı en küçük yapar. Wiener filtresi frekans uzayında,

$$\hat{X}(u_1, u_2) = \left[\frac{1}{B(u_1, u_2) |B(u_1, u_2)|^2 + K} \right] Y(u_1, u_2) \quad (5.12)$$

şeklinde gösterilir [62]. $\hat{X}(u_1, u_2)$, $Y(u_1, u_2)$ ve $B(u_1, u_2)$, sırasıyla kestirilen görüntünün, bozuk görüntünün ve nokta dağılım fonksiyonunun frekans uzayı gösterimleridir. K , orijinal görüntü ve toplanır gürültünün güç spektral yoğunluklarına bağlı olan bir parametredir ve ISNR'ı en büyük yapacak şekilde seçilmiştir.

Hem görsel sonuçlardan, hem de ISNR değerlerinden, önerilen karmaşık haritalama tabanlı yöntemin Bölüm 4'deki yönteme göre daha iyi sonuç verdiği görülmektedir. Bunun nedeni, piksel değerlerinin sabit genlikli karmaşık sayılar olarak temsil edilmesine bağlı olarak maliyet yüzeyinin düzleşmemesi ve bit sayısı yükseldikçe daha düşük değerli adım aralığı kullanma gerekliliğinin ortadan kalkmasıdır. Bölüm 4'de geliştirilen yöntem bu etkilere maruz kaldığından, piksel başına düşen bit sayısı yüksek olduğunda yeni yönteme kıyasla görüntü kalitesindeki iyileşme çok düşük



Şekil 5.10. Onarım durumunda yöntemlerin karşılaştırılması.

- a. Orijinal görüntü.
- b. Bozulmuş görüntü.
- c. Bölüm 4'deki yöntemin sonucu (ISNR = 0.23).
- d. Yeni yöntemin sonucu (ISNR = 3.42).
- e. Wiener filtreleme yönteminin sonucu (ISNR = 4.01).

olmaktadır. Bunun yanında, önerilen yöntemin sonucu Wiener Filtreleme yönteminin sonucuyla karşılaştırıldığında, birbirlerine görsel olarak ve ISNR değerleri açısından oldukça yakın oldukları görülmektedir. Wiener filtreleme yönteminin gerçekleştirilebilmesi için bulanıklık operatörünün ve toplanır gürültünün güç spektral yoğunluğunun bilinmesi gerekli iken sunulan yöntem bu

bilginin olmadığını varsaymaktadır.

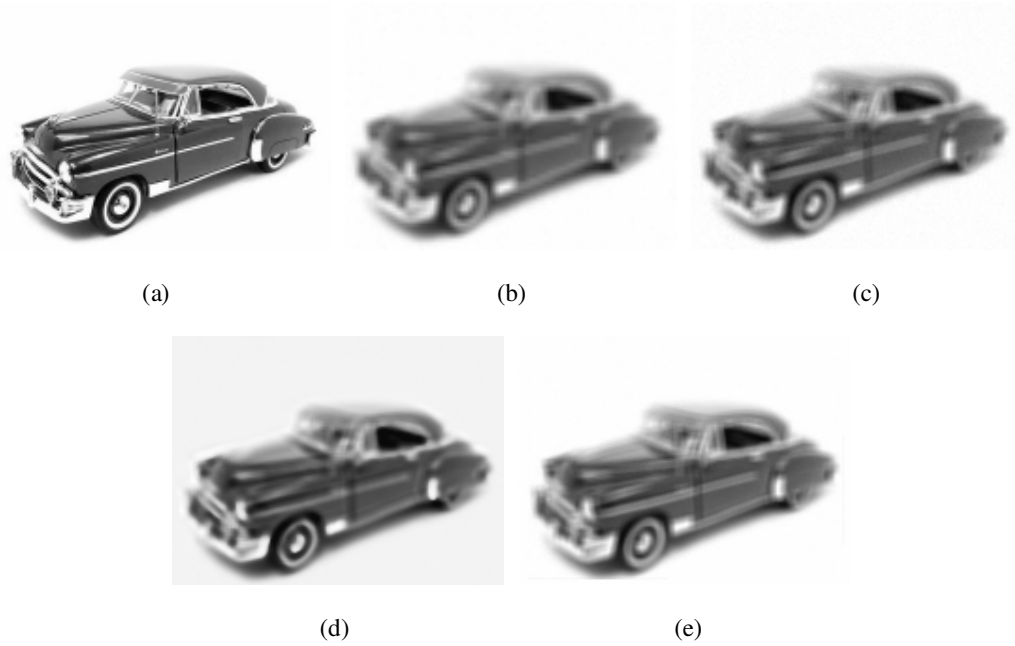
5.3.2. Gözü-kapalı süper-çözünürlük

Önerilen yöntemin gözü-kapalı süper-çözünürlük durumundaki performansını ölçmek için iki adet görüntü (Lena, otomobil) kullanılmıştır. Bulanıklık fonksiyonları olarak Gauss ve düzgün dağılımlı bulanıklık fonksiyonları kullanılmıştır. Düzgün dağılımlı bulanıklık, görüntüleme sisteminin tam odaklanamaması durumunda ortaya çıkar. Lena ve otomobil görüntüleri 8 bitlik görüntülerdir ve boyutları sırasıyla 128x128 ve 176x132'dir. Düşük çözünürlüklü ve bozulmuş görüntü oluşma modelini ve bu çalışma boyunca yapılan varsayımları sağlamak amacıyla öncelikle Lena görüntüsü üzerinde histogram eşitleme uygulanmış, ardından düzgün nicemleme kullanılarak görüntü istenen bit seviyesine düşürülmüştür. Bundan sonra, karmaşık haritalama diyagramı kullanılarak karmaşık değerli pikseller elde edilmiştir. Daha sonra görüntü üzerinde sırasıyla; (i) genel kayma hareketi, (ii) varyansı bir olan 5x5'lik Gauss bulanıklığı, (iii) yatay ve dikey yönlere 2 katsayısı ile alt-örnekleme uygulanmış ve (iv) BSNR 40 dB olacak şekilde toplanır gürültü eklenmiştir. (i)'den (iv)'e kadar olan aşamalar, değişik hareket ve toplanır gürültü katsayıları kullanılarak tekrarlanmış ve toplamda dört adet düşük kaliteli ve düşük çözünürlüklü görüntü oluşturulmuştur. Önerilen algoritmanın girişleri, bu görüntüler olacaktır. Otomobil görüntüsü de benzer aşamalardan geçirilmiştir, sadece bulanıklık olarak Gauss yerine 5x5'lik düzgün dağılımlı bulanıklık fonksiyonu kullanılmıştır.

Her iki görüntü için de görsel sonuçlar Şekil 5.11 ve 5.12'de verilmiştir. Değişik bit seviyeleri için ISNR sonuçları ise Tablo 5.2'de gösterilmiştir. Karşılaştırma amaçlı olarak, gözü-kapalı Lucy ters-evrişim algoritmasını kullanan çift taraflı kaydır-ve-ekle yönteminin [61] sonuçları da Şekil 5.11e ve 5.12e'de verilmiştir. Çift taraflı kaydır-ve-ekle metodunun parametreleri ve Lucy ters-evrişim algoritmasının yineleme sayısı, en iyi görsel sonucu verecek şekilde seçilmişlerdir. Çift taraflı kaydır-ve-ekle yönteminin ISNR sonuçları Tablo 5.2'de verilmemiştir, çünkü yöntemin parametreleri görsel olarak en iyi sonucu verecek şekilde ayarlandıklarında ISNR mantıklı çıkmamaktadır.



Şekil 5.11. Gauss bulanıklığı durumunda süper-çözünürlük sonuçları.
 a. Orjinal görüntü.
 b. Düşük çözünürlüklü görüntülerden biri (aradeğerlenmiş).
 c. Bölüm 4'deki yöntemin sonucu.
 d. Yeni yöntemin sonucu.
 e. Çift taraflı kaydır-ve-ekle yönteminin sonucu.



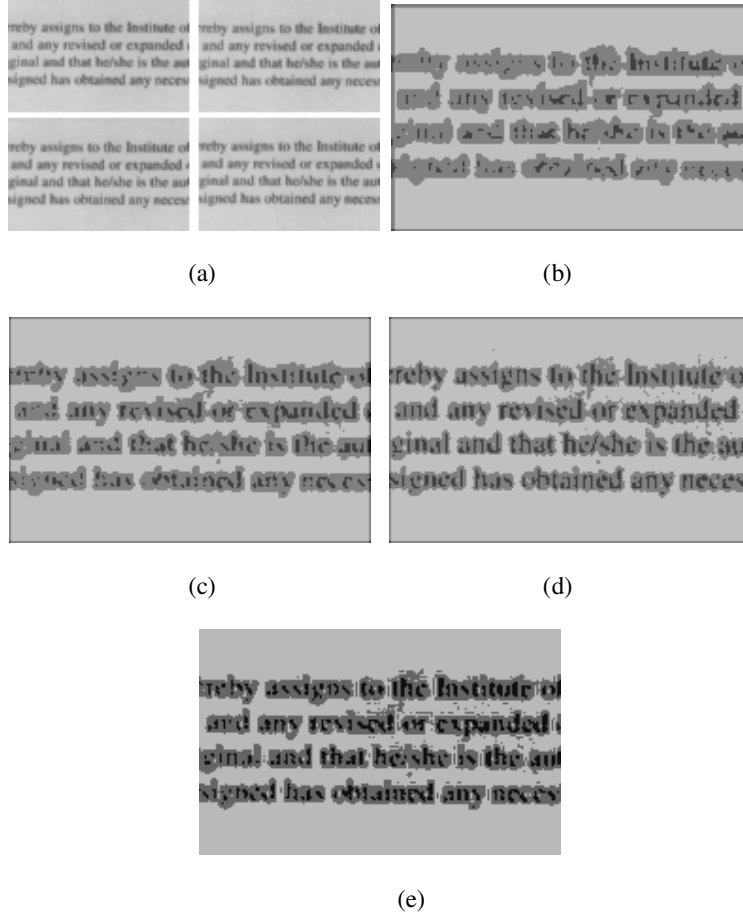
Şekil 5.12. Düzgün dağılımlı bulanıklık durumunda süper-çözünürlük sonuçları.
 a. Orjinal görüntü.
 b. Düşük çözünürlüklü görüntülerden biri (aradeğerlenmiş).
 c. Bölüm 4'deki yöntemin sonucu.
 d. Yeni yöntemin sonucu.
 e. Çift taraflı kaydır-ve-ekle yönteminin sonucu.

Tablo 5.2. Bölüm 4'deki ve yeni yöntemlerin değişik bit seviyelerinde ve değişik tip bulanıklıklar ile sağladıkları ISNR değerleri.

Piksel başına düşen bit sayısı	Gauss Bulanıklığı		Düzgün Bulanıklık	
	Bölüm 4'deki Yöntem	Yeni Yöntem	Bölüm 4'deki Yöntem	Yeni Yöntem
1	4.46	4.38	2.87	2.79
2	2.46	4.30	1.32	2.70
3	1.65	4.29	0.97	2.72
4	1.19	4.10	0.65	2.45
5	0.88	4.00	0.42	2.37
6	0.80	3.82	0.30	2.10
7	0.57	3.55	0.22	1.99
8	0.24	3.26	0.09	1.93

Karmaşık haritalama tabanlı olan ve olmayan yöntemler arasındaki fark, yüksek bit sayılarında daha belirgin olduğu için sadece 8 bit durumu için görsel sonuçlar verilmiştir. Görsel sonuçlardan ve ISNR değerlerinden, karmaşık haritalama tabanlı yöntemin Bölüm 4'deki yöntemden daha iyi performans gösterdiği görülmektedir. Bunun nedeni, tek görüntü durumunda açıklanmıştır. İlk bakışta, önerilen ve çift taraflı kaydır-ve-ekle yöntemlerinin sonuçları aynı gibi durmaktadır, ancak sonuçlar dikkatli incelendiğinde önerilen yöntemin bulanıklığı gidermede daha başarılı olduğu görülmektedir.

Son olarak önerilen yöntem, gerçek bir görüntü kümesi kullanılarak test edilmiştir. Şekil 5.13a 4 adet düşük çözünürlüklü görüntüyü göstermektedir, Şekil 5.13b'de ise bu görüntülerden birinin aradeğerlenmiş ve iki bite düşürülmüş hali verilmektedir. Hareket parametreleri, piksel-altı hareketi gözönüne alan basit bir ilinti tabanlı blok-eşleme yöntemiyle hesaplanmıştır. Bölüm 4'deki yöntem ve yeni yöntemin sonuçları sırasıyla Şekil 5.13c ve 5.13d'de, çift taraflı kaydır-ve-ekle yönteminin sonucu ise Şekil 5.13e'de verilmektedir. Karmaşık haritalama tabanlı yöntem, görüntüdeki metnin okunabilirliği açısından Bölüm 4'deki yöntemle göre daha iyi, çift taraflı kaydır-ve-ekle yöntemine ise yakın sonuçlar vermiştir.



Şekil 5.13. Gerçek bir görüntü kümesi için gözü-kapalı süper-çözünürlük sonuçları.
 a. Dört adet düşük çözünürlüklü görüntü.
 b. Düşük çözünürlüklü görüntülerin biri (aradeğerlenmiş ve iki bite düşürülmüş).
 c. Bölüm 4’deki yöntemin sonucu.
 d. Yeni yöntemin sonucu.
 e. Çift taraflı kaydır-ve-ekle yönteminin sonucu.

BÖLÜM 6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Süper-çözünürlüklü görüntü oluşturma, eldeki çok sayıda düşük kaliteli (düşük çözünürlüklü, bulanıklığa uğramış) ve birbirine göre kaymış görüntüden yüksek kaliteli (yüksek çözünürlüklü, bulanıklık etkileri giderilmiş) bir görüntü elde etmektir. Literatürde önerilen hemen hemen tüm görüntü süper-çözünürlüğü yöntemlerinde bulanıklık operatörünün bilindiği varsayılmıştır. Bu varsayım zaman zaman geçerli olmakla birlikte, çoğu gerçek uygulamada görüntünün ne tarz bir bulanıklık fonksiyonundan geçtiği bilinmemektedir. Bu yüzden, pratik uygulamalarda kullanılacak bir süper-çözünürlük yönteminin gözü kapalı, yani bulanıklık operatörünü biliniyor varsaymayan olması gerekmektedir. Bu tez çalışmasında, bulanıklık operatörü bilinmiyor iken görüntü süper-çözünürlüğünün sağlanması ile ilgili çalışmalar yapılmıştır. Eğer düşük çözünürlüklü görüntüler arasındaki tek hareket çeşidi genel kayma hareketi ise gözlem modelindeki bulanıklık ve hareket operatörleri, tek bir bulanıklık operatörü olarak birleştirilebilirler. Bu durumda yüksek çözünürlüklü görüntü, iki aşamalı bir yöntemle oluşturulabilir. Birinci aşama, düşük çözünürlüklü görüntülerin boyutunu, ara-değerleme veya piksel aralarına sıfır değerli pikseller ekleme yoluyla arttırmaktır. İkinci aşama, boyutları artırılmış görüntülerin her birini, çok-kanallı görüntü ters-evrişimi probleminin çözümünde olduğu gibi ayrı ayrı yeniden-oluşturma filtrelerinden geçirip toplamak ve yüksek çözünürlüklü görüntüyü bu şekilde elde etmektir. Yeniden oluşturma filtreleri, uyarlanır bir yapıya sahiptir ve katsayıları, her yinelemede görüntü ile ilgili bir maliyet fonksiyonunu enküçültecek şekilde yenilenir.

Gözü-kapalı süper-çözünürlük yöntemlerini geliştirmeden önce, bulanıklık operatörlerinin biliniyor olması durumunda yeniden-oluşturma filtrelerinin varlık ve teklik koşulları araştırılmıştır. Yapılan analizler sonucunda, düşük çözünürlüklü görüntü sayısı belli bir değerden fazlaysa ve bulanıklık operatörlerinin birbirlerinden

doğrusal bağımsız olması durumunda, boyutları belli bir değerden büyük olacak şekilde yeniden-oluşturma filtre kümelerinin oluşturulabileceği görülmüştür. Bu değer, düşük çözünürlüklü görüntü sayısına, bulanıklık fonksiyonlarının boyutlarına ve alt-örnekleme oranına bağlıdır. Bu tez kapsamında bir algoritma geliştirilerek filtre boyutları uygun bir şekilde seçildiğinde yüksek çözünürlüklü görüntünün hatasız bir şekilde oluşturulabildiği görülmüştür. Geliştirilen algoritma, ideal durumda, yani yeteri kadar düşük çözünürlüklü görüntünün olması, bulanıklık fonksiyonlarının birbirlerine göre doğrusal bağımsız olması, toplanır gürültünün olmaması ve yeniden-oluşturma filtre boyutlarının uygun şekilde seçilmesi durumunda hatasız sonuç vermektedir. Gerçek uygulamalarda durum bu şekilde değildir. Sistemi ideal durumdan uzaklaştırıcı çeşitli etkiler eklenerek algoritma sonucunun nasıl değiştiği incelenmiştir. Şartların tam olarak sağlanamadığı durumlarda kestirimin nasıl etkilendiği araştırılmış ve kabul edilebilir bir süper-çözünürlük için gerekli koşullar çıkarılmıştır. Koşullar şöyle sıralanabilir: (i) Düşük çözünürlüklü görüntü sayısı, alt-örnekleme oranının karesinden büyük olmalıdır. (ii) Yeniden-oluşturma filtre boyutu, hesaplanan eşik değerini sağlamıyor bile olsa o değere çok yakın olmalıdır. (iii) Bulanıklık fonksiyonları birbirlerine göre doğrusal bağımsız olmalıdır. Bir tanesinin bile diğerlerine bağımlı olması, ciddi sıkıntılar oluşturmaktadır. Düşük çözünürlüklü görüntülerin birbirlerine göre kesirli piksel cinsinden harekete sahip olması da birleştirilmiş bulanıklık-hareket operatörlerinin birbirlerine göre doğrusal bağımsız olmalarını sağlar. (iv) Düşük çözünürlüklü görüntüler üzerindeki toplanır gürültünün miktarı, SNR 50 dB'den düşük çıkmayacak şekilde olmalıdır. Bu şartların pratikte sağlanması zordur. O nedenle geliştirilecek bir süper-çözünürlük yönteminin, gözü-kapalı olmasının yanı sıra bu şartların sağlanmadığı durumlarda da iyi performans göstermesi gerekmektedir.

Yeniden oluşturma filtre setinin varlık-teklik analizinden sonra gözü-kapalı bir süper-çözünürlük yöntemi geliştirilmiştir. Bu yöntemde, uyarlanır filtrenin katsayıları, sabit-büyüklik maliyetini enküçültecek şekilde yinelemeli olarak güncellenmektedir. Sabit büyüklik maliyeti, haberleşme alanında gözü-kapalı kanal denkleştirme amacıyla geliştirilmiştir. Vural ve Sethares tarafından görüntü onarımı alanında da kullanılabilmesi gösterilmiştir. Bu çalışmada, Vural ve Sethares'in geliştirdiği algoritma gözü-kapalı görüntü süper-çözünürlüğü problemine

uyarlanmıştır. Yeniden-oluşturma filtrelerinin katsayılarının güncellenmesinde olasılıksal bir gradyan-düşüş (GD) optimizasyon metodu kullanılmıştır. Sabit-büyüklik maliyetinin uyarlanırlı filtre parametrelerine göre çizilmesiyle sabit-maliyet yüzeyi denen bir yüzey oluşturulur. GD algoritması, yüzey üzerinde bir noktadan başlayarak ve en dik inişin yörüngesini takip ederek maliyeti enküçültmeye çalışır.

Önerilen yöntem çeşitli durumlar için test edilmiş ve başarılı sonuçlar elde edilmiştir. Fakat yöntem, görüntülerde piksel başına düşen bit sayısı düşük iken (<5) iyi sonuç vermektedir. Bit sayısı arttıkça başarımlı düşmektedir. Bu durumun nedeni olarak, bit sayısı arttıkça artan savrukluğa bağlı olarak maliyet fonksiyonunun düzleşmesi ve GD algoritmasının yakınsaması için kullanılması gereken adım aralığı parametre değerinin çok küçültülmesi gerektiği görülmüştür. Dolayısıyla bit sayısı arttığında savrukluğu arttırmayacak bir maliyet fonksiyonunun kullanılması gerektiği anlaşılmıştır.

Bit sayısı arttıkça performanstaki kötüleşmenin giderilmesi için yöntemde iki değişiklik yapılmıştır. İlk olarak, orijinal görüntünün piksel değerlerinin aynı veya birbirine yakın büyüklüğe sahip karmaşık sayılar olduğu varsayılmıştır. Bu varsayımı doğrulamak üzere, görüntü piksel değerlerini karmaşık sayılar ile eşleştiren çeşitli haritalama diyagramları oluşturulmuş ve en iyi sonucu veren diyagram, deneysel olarak tespit edilmiştir. Görüntü piksel değerleri, bu diyagram kullanılarak karmaşık sayılara dönüştürülmüştür. İlk yöntemde yapılan ikinci değişiklik ise, karmaşık değerli maliyet fonksiyonu kullanmaya bağlı olarak kullanılan uyarlanırlı filtrelerin de karmaşık değerli olma zorunluluğudur. Bunlar haricinde yöntem, ilk oluşturulan yöntemle aynıdır. Yapılan testler sonucunda yöntemin, ilk yöntemde karşılaşılan yüksek bit sayılarında performansın düşmesi sorunuyla karşılaşmadığı görülmüştür. Piksel başına düşen bit sayısı ne olursa olsun yüksek çözünürlüklü ve yüksek kaliteli görüntü oluşturulabilmektedir.

Önerilen gözü-kapalı süper-çözünürlük yöntemlerinin bazı üstünlükleri şu şekilde sıralanabilir:

1. Literatürdeki çoğu yöntemin aksine bulanıklık operatörleri biliniyor

varsayılmamaktadır.

2. Hareket parametreleri, uyarlanır filtrelerin ilk-değerlendirilmesinde kullanılmaktadırlar, dolayısıyla bu parametreler kestirilken yapılan küçük hatalar, algoritmanın sonucunu fazla değiştirmeyecektir. Yani önerilen yöntemler, hareket parametreleri kestirimindeki hatalara karşı dayanıklıdırlar.
3. Bulanık fonksiyonlarının her düşük çözünürlüklü görüntü için aynı olmasına gerek yoktur, her görüntü için farklı farklı olabilirler.
4. Yöntemlerde maliyet fonksiyonunun anlık bir kestirimi kullanıldığından bulanıklık fonksiyonlarının, piksel konumuna göre yavaş bir şekilde değiştikleri sürece uzam-bağımsız olmalarına gerek yoktur.
5. Bulanıklık fonksiyonlarıyla ilgili minimum faz olma zorunluluğu gibi herhangi bir kısıtlama yoktur.

Yöntemlerin bazı eksiklikleri ve yapılabilecek iyileştirmeler ise şu şekildedir:

1. Önerilen yöntemler, düşük çözünürlüklü görüntüler arasındaki tek hareketin genel kayma hareketi olması durumunda çalışmaktadırlar. Özetlenecek olursa, genel kayma hareketi durumunda hareket ve bulanıklık operatörleri birleştirilebilir ve problem ara değerlendirme – çok kanallı bulanıklık giderme şeklinde iki aşamalı bir probleme dönüşür. Aynı durum, yani süper-çözünürlük probleminin yukarıda bahsedildiği gibi iki aşamalı bir probleme dönüştürülmesi, gözlem modelindeki hareket ve bulanıklık operatörlerinin yer değiştirmesiyle de mümkündür. Bu yer değişikliğinin hangi koşullarda yapılabileceği araştırılmaktadır. İlk sonuçlara göre D.Ç. görüntüler arasındaki hareket ilgin hareketse (kameranın üç boyutlu hareketi) ve bulanıklık fonksiyonları dairesel simetrik ise bahsedilen yer değiştirme gerçekleşebilir ve önerilen yöntemlerin daha genel hareket modelleriyle çalıştırılması mümkün olur. Bölgesel hareket için ise, görüntü ve video sıkıştırma olduğu gibi görüntüyü parçalara ayırıp her bir parça üzerinde algoritmanın çalıştırılması mümkün olabilir.
2. Önerilen yöntemler, gerçekte karşılaşılan bir çok bulanıklık çeşidiyle (doğrusal hareketten, odaklanamamadan vs. kaynaklanan bulanıklık) çalışabilmektedir, ancak (el titremesi sonucu oluşan) kamera sallanması gibi

karmaşık yapılı bulanıklık çeşitleriyle iyi sonuç vermemektedir. Bu durumun nedeninin analiz edilmesi ve yapılabiliyorsa düzeltilmesi gerekmektedir.

3. Yöntemlerin yakınsaklık analizi yapılmamıştır. Maliyet fonksiyonunun dışbükey olmamasından dolayı yöntemler global minimum yerine yerel minimuma yakınsayabilirler. Benzetlenmiş tavlama (simulated annealing) gibi bir yöntemle yerel minimuma yakınsama problemi çözülebilir.
4. Yöntem oluşturulurken, maliyet fonksiyonlarının en küçük yapan optimizasyon probleminin çözülmesinde gradyan düşüş metodu kullanılmıştır. Bu metottan daha hızlı sonuç veren eşlenik gradyan (conjugate gradient) yöntemlerinin kullanılması düşünülebilir.
5. Oluşturulan yöntemlerde maliyet fonksiyonunun anlık (piksel bazında) bir kestirimi kullanıldığında ortaya en küçük karesel ortalama (LMS) uyarlanırlı filtre yöntemi çıkmıştır. Bunun yerine, maliyet fonksiyonunun bir kestirimi olarak tüm görüntü üzerinde ortalama alınmış hali düşünülebilir. Böylece ortaya yinelemeli en küçük kareler (RLS) benzeri bir yöntem çıkacaktır. Böyle bir yöntemin daha iyi sonuç vereceği kesin olmamakla birlikte denenebilir.
6. Teorik olarak herhangi bir sıkıntı olmasına rağmen önerilen yöntemlerin gerçek görüntü setlerine uygulanmasında zorluk yaşanmıştır. Bu da, kullandığımız maliyet fonksiyonunun gerçek görüntüler için ne derece uygun bir fonksiyon olduğu konusunda düşünmemize neden olmuştur. Ayrıca üçüncü maddede de belirtilen dışbükey olmama problemi de vardır. Daha uygun bir maliyet fonksiyonu bulunabilirse bu problemlere çözüm getirilebilir. Yaptığımız gözlemler sonucunda bulanık görüntünün bulanık olmayan görüntüye göre histogramının daha dar olduğu, yani varyansının daha küçük olduğu görülmüştür. Ayrıca bulanık görüntünün savrukluğu, bulanık olmayan görüntüye göre daha büyüktür. Tüm bu faktörleri gözönüne alan bir maliyet fonksiyonu oluşturulup onun üzerinde işlemler yapılabilir.
7. Önerilen yöntemler, bir donanım üzerinde gerçekleştirmediği için işlem yükü açısından net bir bilgi verilememektedir, ancak yöntemler yinelemeli olmasına rağmen aşama sayısının az olması ve boyut olarak küçük vektörlerle çalışılması, gerçek zamanlı uygulamalarda başarı sağlanacağını düşündürmektedir.

KAYNAKLAR

- [1] CHOI, E., CHOI, J., KANG, M.G., Super-resolution approach to overcome physical limitations of imaging sensors: An overview, *Imag. Syst. Technol.*, 14, pp. 36–46, 2004.
- [2] KOMATSU, T., AIZAWA, K., IGARASHI, T., SAITO, T., Signal-processing based method for acquiring very high resolution image with multiple cameras and its theoretical analysis, *Proc. Inst. Elec. Eng.*, 140, 1, pp. 19–25, 1993.
- [3] PARK, S.C., PARK, M.K., KANG, M.G., Super-resolution image reconstruction: a technical overview, *IEEE Signal Process. Mag.*, 20, 5, pp. 21–36, 2003.
- [4] ELAD, M., FEUER, A., Restoration of a single superresolution image from several blurred, noisy, and undersampled measured images, *IEEE Trans. Image Process.*, 6, 12, pp. 1646–1658, 1997.
- [5] ELAD, M., HEL-OR, Y., A fast super-resolution reconstruction algorithm for pure translational motion and common space-invariant blur, *IEEE Trans. Image Process.* 10, 8, pp. 1187–1193, 2001.
- [6] GILLETTE, J.C., STADTMILLER, T.M., HARDIE, R.C., Aliasing reduction in staring infrared images utilizing subpixel techniques, *Opt. Eng.*, 34, 11, pp. 3130–3137, 1995.
- [7] GODARD, D., Self-recovering equalization and carrier tracking in two dimensional data communication systems, *IEEE Trans. Commun.*, 28, 11, pp. 1867–1875, 1980.
- [8] TREICHLER, J.R., AGEE, B.G., A new approach to multipath correction of constant modulus signals, *IEEE Trans. Commun.*, 31, 2, pp. 459–473, 1983.
- [9] LI, Y., LIU, K.J.R., Adaptive blind source separation and equalization for multiple-input/multiple-output systems, *IEEE Trans. Information Theory*, 44, 7, pp. 2864–2876, 1998.
- [10] VURAL, C., SETHARES, W.A., Blind image deconvolution via dispersion minimization, *Digit. Signal Process.*, 16, pp. 137–148, 2006.

- [11] BORMAN, S., STEVENSON, R.L., Spatial resolution enhancement of low-resolution image sequences: A comprehensive review with directions for future research, Lab. Image and Signal Analysis, University of Notre Dame, Tech. Rep., 1998.
- [12] FARSIU, S., ROBINSON, D., ELAD, M., MILANFAR, P., Advances and challenges in super-resolution, *Int. J. Imaging Syst. Technol.*, 14, 2, pp. 47-57, 2004.
- [13] TSAI, R.Y., HUANG, T.S., Multipleframe image restoration and registration, *Advances in Computer Vision and Image Processing*, JAI Press, Inc., pp. 317-339, Greenwich, CT, 1984.
- [14] KIM, S.P., BOSE, N.K., VALENZUELA, H.M., Recursive reconstruction of high resolution image from noisy undersampled multiframe, *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, 38, 6, pp. 1013-1027, 1990.
- [15] KIM, S.P., SU, W.Y., Recursive high-resolution reconstruction of blurred multiframe images, *IEEE Trans. Image Processing*, 2, 10, pp. 534-539, 1993.
- [16] BOSE, N.K., KIM, H.C., VALENZUELA, H.M., Recursive implementation of total least squares algorithm for image reconstruction from noisy, undersampled multiframe, *Proc. IEEE Conf. Acoustics, Speech and Signal Processing*, Minneapolis, MN, pp. 269-272, 1993.
- [17] RHEE, S.H., KANG, M.G., Discrete cosine transform based regularized high-resolution image reconstruction algorithm, *Opt. Eng.*, 38, 8, pp. 1348-1356, 1999.
- [18] CLARK, J.J., PALMER, M.R., LAURENCE, P.D., A transformation method for the reconstruction of functions from nonuniformly spaced samples, *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, ASSP-33, pp. 1151-1165, 1985.
- [19] UR, H., GROSS, D., Improved resolution from sub-pixel shifted pictures, *CVGIP: Graphical Models and Image Processing*, 54, pp. 181-186, 1992.
- [20] PAPOULIS, A., Generalized sampling theorem, *IEEE Trans. Circuits Syst.*, 24, pp. 652-654, 1977.
- [21] NGUYEN, N., MILANFAR, P., An efficient wavelet-based algorithm for image superresolution, *Proc. Int. Conf. Image Processing*, 2, pp. 351-354, 2000.
- [22] HONG, M.C., KANG, M.G., KATSAGGELOS, A.K., A regularized multi-channel restoration approach for globally optimal high resolution video sequence, *SPIE VCIP*, San Jose, CA, pp. 1306-1317, 1997.

- [23] KANG, M.G., Generalized multichannel image deconvolution approach and its applications, *Opt. Eng.*, 37, 11, pp. 2953-2964, 1998.
- [24] HARDIE, R.C., BARNARD, K.J., BOGNAR, J.K., ARMSTRONG, E.E., WATSON, E.A., High resolution image reconstruction from a sequence of rotated and translated images and its application to an infrared imaging system, *Opt. Eng.*, 37, 1, pp. 247-260, 1998.
- [25] BOSE, N.K., LERTRATTANAPANICH, S., KOO, J., Advances in super-resolution using L-curve, *Proc. Int. Symp. Circuits and Systems*, 2, pp. 433-436, 2001.
- [26] TOM, B.C., KATSAGGELOS, A.K., Reconstruction of a high-resolution image by simultaneous registration, restoration, and interpolation of low-resolution images, *Proc. IEEE Int. Conf. Image Processing*, Washington, DC, pp. 539-542, 1995.
- [27] SCHULZ, R.R., STEVENSON, R.L., Extraction of high-resolution frames from video sequences, *IEEE Trans. Image Processing*, 5, 6, pp. 996-1011, 1996.
- [28] HARDIE, R.C., BARNARD, K.J., ARMSTRONG, E.E., Joint MAP registration and high-resolution image estimation using a sequence of undersampled images, *IEEE Trans. Image Processing*, 6, 12, pp. 1621-1633, 1997.
- [29] CHEESEMAN, P., KANEFSKY, B., KRAFT, R., STUTZ, J., HANSON, R., Super-resolved surface reconstruction from multiple images, NASA Ames Research Center, Moffett Field, CA, Tech. Rep. FIA-94-12, 1994.
- [30] STARK, H., OSKOU, P., High resolution image recovery from image-plane arrays, using convex projections, *J. Opt. Soc. Am. A.*, 6, pp. 1715-1726, 1989.
- [31] TEKALP, A.M., OZKAN, M.K., SEZAN, M.I., High-resolution image reconstruction from lower-resolution image sequences and space-varying image restoration, *Proc. IEEE Conf. Acoustics, Speech and Signal Processing*, San Francisco, CA, pp. 169-172, 1992.
- [32] PATTI, A.J., SEZAN, M.I., TEKALP, A.M., Superresolution video reconstruction with arbitrary sampling lattices and nonzero aperture time, *IEEE Trans. Image Processing*, 6, 8, pp. 1064-1076, 1997.
- [33] EREN, P.E., SEZAN, M.I., TEKALP, A.M., Robust, object-based high-resolution image reconstruction from low-resolution video, *IEEE Trans. Image Processing*, 6, 10, pp. 1446-1451, 1997.

- [34] PATTI, A.J., ALTUNBASAK, Y., Artifact reduction for set theoretic super resolution image reconstruction with edge adaptive constraints and higher-order interpolants, *IEEE Trans. Image Processing*, 10, 1, pp. 179-186, 2001.
- [35] TOM, B.C., KATSAGGELOS, A.K., An iterative algorithm for improving the resolution of video sequences, *Proc. SPIE Conf. Visual Communications and Image Processing*, Orlando, FL, pp. 1430-1438, 1996.
- [36] RANI, P., PELEG, S., Improving resolution by image registration, *CVGIP: Graphical Models and Image Processing*, 53, pp. 231-239, 1991.
- [37] ELAD, M., FEUER, A., Superresolution restoration of an image sequence: adaptive filtering approach, *IEEE Trans. Image Processing*, 8, 3, pp. 387-395, 1999.
- [38] ELAD, M., FEUER, A., Super-resolution reconstruction of image sequences, *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intelli.*, 21, 9, pp. 817-834, 1999.
- [39] FARSIU, S., ROBINSON, D., ELAD, M., MILANFAR, P., Fast and robust multi-frame super-resolution, *IEEE Trans. Image Process.*, 13, 10, pp. 1327-1344, 2004.
- [40] KANG, M., LEE, E., Regularized adaptive high-resolution image reconstruction considering inaccurate subpixel registration, *IEEE Trans. Image Process.*, 12, 7, pp. 826-837, 2003.
- [41] HE, H., KONDI, L.P., An image super-resolution algorithm for different error levels per frame, *IEEE Trans. Image Process.*, 15, 3, pp. 592-603, 2006.
- [42] WOODS, N.A., GALATSANOS, N.P., KATSAGGELOS, A.K., Stochastic methods for joint registration, restoration, and interpolation of multiple undersampled images, *IEEE Trans. Image Process.*, 15, 1, pp. 201-213, 2006.
- [43] BAKER, S., KANADE, T., Limits on super-resolution and how to break them, *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 24, 9, pp. 1167-1183, 2002.
- [44] CAPEL, D., ZISSERMAN, A., Super-resolution from multiple views using learnt image models, *Proc. IEEE Conf. Computer Vis. and Pattern Recognit.*, pp. 627-634, 2001.
- [45] NGUYEN, N., MILANFAR, P., GOLUB, G., Efficient generalized cross-validation with applications to parametric image restoration and resolution enhancement, *IEEE Trans. Image Process.*, 10, 9, pp. 1299-1308, 2001.

- [46] WOODS, N., GALATSANOS, N., KATSAGGELOS, A.K., EM-based simultaneous registration, restoration, and interpolation of super-resolved images., Proc. IEEE Int. Conf. Image Process., pp. 303-306, 2003.
- [47] EL-KHAMY, S.E., HADHOUD, M.M., DESSOUKY, M.I., SALAM, B.M., ABD EL-SAMIE, F.E., Blind multichannel reconstruction of high-resolution images using wavelet fusion, Appl. Opt., 44, pp. 7349-7356, 2005.
- [48] WIRAWAN, DUHAMEL, P., MAITRE, H., Multi-channel high resolution blind image estimation, Proc. IEEE ICASSP, pp. 3229-3232, 1999.
- [49] YAGLE, A., Blind superresolution from undersampled blurred measurements, Proc. Adv. Signal Process. Algorithms, Archit., Implement. XIII, pp. 299-309, 2003.
- [50] SROUBEK, F., CRISTOBAL, G., FLUSSER, J., A unified approach to superresolution and multichannel blind deconvolution, IEEE Trans. Image Process., 16, 9, pp. 2322-2332, 2007.
- [51] GIANNAKIS, G.B., HEATH, J.R.W., Blind identification of multichannel FIR blurs and perfect image restoration, IEEE Trans. Image Process., 9, 11, pp. 1877-1896, 2000.
- [52] GANTMAKHER, F.R., The Theory of Matrices, American Mathematical Society, AMS Bookstore, Providence, RI, pp. 61-66, 2000.
- [53] KAILATH, T., Linear Systems, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1980.
- [54] HAYKIN, S., Adaptive Filter Theory, 4th edn., Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 2001.
- [55] ANDERSON, B.D.O., et al., Stability of Adaptive Systems: Passivity and Averaging Analysis, MIT Press, Cambridge, MA, 1987.
- [56] DE HAAN, G., BIEZEN, P., Sub-pixel motion estimation with 3-D recursive search block matching, Signal Process.: Image Commun., 6, pp. 229-239, 1994.
- [57] KILTHAU, S.T., DREW, M.S., MOLLER, T., Full search content independent block matching based on the fast Fourier transform, IEEE Int. Conf. Image Processing, Rochester, NY, 2002.
- [58] LEHMANN, T.M., GONNER, C., SPITZER, K., Survey: interpolation methods in medical image processing, IEEE Trans. Med. Imaging, 18, pp. 1049-1074, 1999.

- [59] BAHNAM, B.A., KATSAGGELOS, A.K., Digital image restoration, IEEE Signal Processing Mag., 14, pp. 24-41, 1997.
- [60] JONSON, J.R., et al., Blind equalization using the constant modulus criterion: a review, Proc. IEEE, 86, pp. 1927-1950, 1998.
- [61] FARSIU, S., ROBINSON, D., ELAD, M., MILANFAR, P., Robust shift and add approach to super-resolution, SPIE Conf. on Applications of Digital signal and Image Process., pp. 121-130, 2003.
- [62] GONZALES, R.C., WOODS, R.E., Digital Image Processing, 2nd edn., Prentice Hall, Upple Saddle River, NJ, 2002.

EKLER

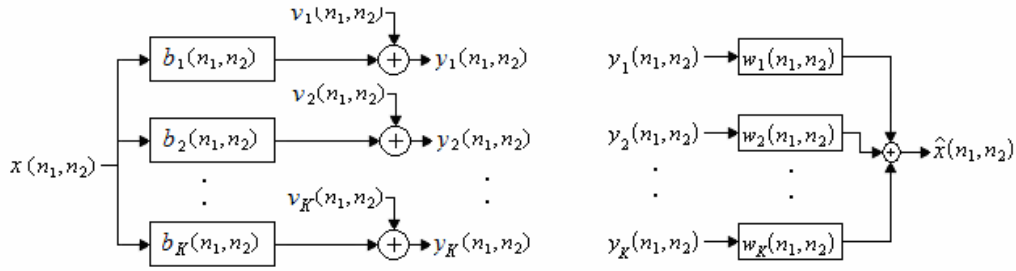
Ek A. Çok Kanallı Görüntü Ters-Evrişimi Probleminde Yeniden-Oluşturma Filtrelerinin Varlık-Teklik Koşulları

Çok kanallı görüntü ters-evrişimi problemi, elimizde aynı görüntünün değişik bulanıklık fonksiyonlarından geçmiş birden fazla versiyonu var iken orijinal görüntünün elde edilmesi şeklinde tanımlanabilir. Tek görüntü ters-evrişimi probleminden farkı, elde birden çok bulanık görüntü olmasıdır, her bulanık görüntüdeki ek bilgi, orijinal görüntünün elde edilmesinde kullanılabilir. Görüntü süper-çözünürlüğü probleminden farkı ise çok kanallı görüntü ters-evrişimi probleminde hareket ve alt-örneklemenin olmamasıdır.

Şekil A.1’de orijinal görüntüden bulanık görüntülerin oluşma modeli ve orijinal görüntünün yeniden-oluşturulması aşamaları gösterilmektedir. Orijinal görüntü $x(n_1, n_2)$ ile, bulanıklık operatörleri, $k = 1, \dots, K$ olmak üzere $b_k(n_1, n_2)$ ile ve gözlenen bulanık görüntüler $y_k(n_1, n_2)$ ile temsil edilmektedir. K , eldeki bulanık görüntü sayısıdır. $v_k(n_1, n_2)$, toplanır gürültüyü ifade etmektedir. Yeniden-oluşturma aşamasında bulanık ve gürültülü görüntülere $w_k(n_1, n_2)$ ile ifade edilen yeniden-oluşturma filtre kümesi uygulanır ve orijinal görüntünün bir kestirimi elde edilmiş olur. Bulanıklık fonksiyonlarının her birinin boyutu $M \times M$, yeniden oluşturma filtrelerinin her birinin boyutu ise $N \times N$ ’dir. Bu bölümde, yeniden-oluşturma filtre kümesinin varlık ve teklik şartları ortaya çıkarılacaktır.

Öncelikle Bölüm 3’de anlatılana benzer şekilde bulanıklık matrisi B oluşturulacaktır. Bulanıklık operatör katsayılarından oluşturulan ve boyutu $K \times 1$ olan $b(m_1, m_2)$ vektörünü, T devrik alma işlemini göstermek üzere

$$b(m_1, m_2) := [b_1(m_1, m_2) \dots b_K(m_1, m_2)]^T \quad (\text{Ek A1})$$



Şekil A.1. Tek giriş - çok çıkışlı görüntü-bulanıklık modeli ve yeniden-oluşturma aşaması.

şeklinde tanımlayalım. $m_1 \in [0, M-1]$ olacak şekilde $(M+N-1) \times KN$ lik B_{m_1} matrisini, $0 \times K$ lik sıfır vektörünü göstermek üzere

$$B_{m_1} := \begin{bmatrix} b^T(m_1, 0) & 0^T & \dots & 0^T \\ b^T(m_1, 1) & b^T(m_1, 0) & \dots & 0^T \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b^T(m_1, M-1) & b^T(m_1, M-2) & \dots & b^T(m_1, M-N-2) \\ 0^T & b^T(m_1, M-1) & \dots & b^T(m_1, M-N-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0^T & 0^T & \dots & b^T(m_1, M-1) \end{bmatrix} \quad (\text{Ek A2})$$

şeklinde, $(M+N-1)^2 \times KN^2$ lik B matrisini ise, $0 \times (M+N-1) \times KN$ lik sıfır matrisini göstermek üzere

$$B := \begin{bmatrix} H_0 & 0 & \dots & 0 \\ H_1 & H_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ H_{M-1} & H_{M-2} & \dots & H_{M-N-2} \\ 0 & H_{M-1} & \dots & H_{M-N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & H_{M-1} \end{bmatrix} \quad (\text{Ek A3})$$

şeklinde tanımlayalım. $KN^2 \times 1$ lik yeniden-oluşturma filtre vektörü w' 'yi ise, $n_1, n_2 \in [0, N-1]$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(n_1, n_2) &:= [w_1(n_1, n_2) \cdots w_K(n_1, n_2)]^T \\ \mathbf{w} &:= [\mathbf{w}^T(0,0) \ \mathbf{w}^T(0,1) \ \cdots \ \mathbf{w}^T(N-1, N-1)]^T \end{aligned} \quad (\text{Ek A4})$$

olarak tanımlayalım. Bölüm 3'tekine benzer aşamalardan geçtiğimizde, hatasız ters-evrişim için gerekli koşulun

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{e}_{\alpha, \beta} \quad (\text{Ek A5})$$

olduğu ortaya çıkar. $\mathbf{e}_{\alpha, \beta}$, sıfırdan farklı tek elemanı (α, β) kayması tarafından belirlenen $(M+N-1)^2$ boyunda bir sütun vektörüdür. \mathbf{B} ve (α, β) verili olduğu zaman Denklem (Ek A5)'i sağlayan yeniden-oluşturma vektörü \mathbf{w} , \mathbf{B} 'nin (yarı) tersinin (α, β) değerine bağlı sütunu olur. Denklem (Ek A5)'in çözümünün varlığı ve tekliği, \mathbf{B} matrisinin tam satır derecesine sahip olmasına, bu da $k = 1, \dots, K$ olmak üzere $b_k(n_1, n_2)$ ile verilen bulanıklık fonksiyonlarının 2-boyutlu Z dönüşümlerinin $\{ B_k(z_1, z_2), k = 1, \dots, K \}$ aralarında asal olmasına bağlıdır.

Tanım A1. $B_k(z_1, z_2), k = 1, \dots, K$ ile verilen 2 boyutlu FIR transfer fonksiyonlarını ele alalım. Sadece ve sadece tüm transfer fonksiyonlarını sıfır yapan bir (ζ_1, ζ_2) yok ise bu fonksiyonlar aralarında güçlü bir biçimde asaldır. Yani, herhangi bir (ζ_1, ζ_2) yoktur ki $(\zeta_1, \zeta_2) : B_k(\zeta_1, \zeta_2) = 0, \forall k = 1, \dots, K$. Sadece ve sadece tüm transfer fonksiyonlarının ortak bir $C(z_1, z_2)$ çarpanı yok ise bu fonksiyonlar aralarında zayıf bir biçimde asaldır. Yani, herhangi bir $C(z_1, z_2) \neq 1$ yoktur ki $C(z_1, z_2) \neq 1 : B_k(z_1, z_2) = C(z_1, z_2) \underline{B}_k(z_1, z_2), \forall k = 1, \dots, K$.

\mathbf{B} matrisinin derece özellikleri, Teorem A.1 ile belirtilecektir.

Teorem A.1. $N \geq M-1$ olsun ve \mathbf{B}_{m_1} ve \mathbf{B} , Denklem (Ek A2) ve Denklem (Ek A3) şeklinde tanımlansınlar. Bu durumda sadece ve sadece $B_k(z_1, z_2), k = 1, \dots, K$ güçlü bir biçimde aralarında asalsa ve $\text{rank}(\mathbf{B}_0) = M+N-1$ ise \mathbf{B} matrisinin derecesi $(M+N-1)^2$ 'dir.

İspat. Eğer B tam satır derecesine sahipse alt-matrisi B_0 da tam satır derecesine sahiptir, yani $\text{rank}(B_0) = M+N-1$ olur. Ayrıca, $\exists w : Bw = e$ ise Z -uzayında

$$\sum_{k=1}^K B_k(z_1, z_2) W_k(z_1, z_2) = 1 \quad (\text{Ek A6})$$

olur. Eğer $B_k(z_1, z_2)$, $k = 1, \dots, K$ güçlü bir şekilde aralarında asal değilse Denklem (Ek A6)'nın sol tarafını sıfır yapacak bir (ζ_1, ζ_2) bulunabilir, bu da $0 = 1$ çelişmesine neden olur.

Eğer $B_1(z_1, z_2), \dots, B_K(z_1, z_2)$ güçlü bir şekilde aralarında asalsa, sıfırdan farklı her $z_1 \in C$ için $B_1(z_1, z_2), \dots, B_K(z_1, z_2)$, z_2 'ye bağlı aralarında asal bir boyutlu polinomlardır. $N \geq M-1$ ise $z_1 \neq 0$ için polinom matrisi

$$B(z_1) := \begin{bmatrix} b^T(z_1, 0) & 0^T & \dots & 0^T \\ b^T(z_1, 1) & b^T(z_1, 0) & \dots & 0^T \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b^T(z_1, M-1) & b^T(z_1, M-2) & \dots & b^T(z_1, M-N-2) \\ 0^T & b^T(z_1, M-1) & \dots & b^T(z_1, M-N-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0^T & 0^T & \dots & b^T(z_1, M-1) \end{bmatrix} \quad (\text{Ek A7})$$

şeklinde oluşur ve her $z_1 \neq 0$ için tam satır derecesine sahiptir, yani $\text{rank}(B(z_1)) = M+N-1$ olur. Bu durum, B_0 'ın tam satır derecesine sahip olduğu gerçeğiyle düşünüldüğünde B_{m_i} , $m = 0, \dots, M$ matris dürtü yanıtına sahip çok-değişkenli sistemin indirgenemez olduğu ortaya çıkar [53]. Başka bir ifadeyle B blok Toeplitz matrisi tam satır derecesine sahiptir.

B_0 'ın tam satır derecesine sahip olması şartı, transfer fonksiyonlarının güçlü bir şekilde aralarında asal olma şartı kadar bağlayıcı değildir. Bu şart, $k = 1, \dots, K$ olmak üzere $h_k(0, m_2)$ 'nin ilk sütununa karşılık gelen $B_1(0, z_2), \dots, B_K(0, z_2)$ bir boyutlu polinomlarının aralarında asal olduğunu ifade etmektedir. Halbuki, eğer değilse, aralarında asal olma şartının sağlandığı herhangi bir sütunun olması yeterlidir. Bu

sütun, i . sütun olsun. Bu durumda B_i tam satır derecesine sahip olacaktır ve Denklem (Ek A6), eşitliğin sağ tarafı 1 yerine z^{-i} olacak şekilde sağlanacaktır.

Teorem A.1'de anlatıldığı şekilde B matrisinin tam satır derecesine sahip olduğunu varsayıldığında, bir sonraki teoremde Denklem (Ek A5)'de verilen denklemin çözümünün varlık ve teklik koşulları belirlenecektir.

Teorem A.2. $N \geq M-1$ olduğunu, B matrisinin tam satır derecesine sahip olduğunu ve

$$(M+N-1)^2 \leq KN^2 \quad (\text{Ek A8})$$

olduğunu kabul edelim. Bu durumda verili bir (α, β) kayması için Denklem (Ek A5)'i çözen bir w bulunabilir. Çözümün tekliği, Denklem (Ek A8) eşitsizliğinin eşitlik olduğu durumda veya Denklem (Ek A5)'de minimum boy çözümü elde edildiğinde sağlanır.

İspat. Denklem (Ek A8) ile verilen eşitsizlik, B matrisinin sütun sayısının satır sayısından daha fazla olduğunu, derece koşulu da B'nin eksik-belirtilmiş (under-determined) olduğunu, yani Denklem (Ek A5)'deki w 'nın, B matrisinin erim uzayı (range space) içinde olduğunu, dolayısıyla bir çözümün olduğunu belirtmektedir. Denklem (Ek A8) eşitlik olarak sağlanırsa B matrisi kare ve tekil olmayan bir matris olur, dolayısıyla çözüm tektir. Denklem (Ek A8) eşitsizlik olarak sağlanıyorsa, tek olduğu bilinen minimum boy çözümü seçilir.

Ek B. Bir Matrisin (Yarı) Tersinin Alınması

B.1. Tekil-Değer Ayrıştırması

Bir matrisin tekil-değer ayrıştırması (SVD), doğrusal bir denklem kümesinin yapısı hakkında nicel bilgiler sağlayan önemli bir algoritmadır. Genel bir doğrusal denklem sistemi, A $K \times M$ 'lik bir matrisi, d $K \times 1$ 'lik bir vektörü, bilinmeyen parameterlerden oluşan w ise $M \times 1$ 'lik bir vektörü göstermek üzere,

$$Aw = d \quad (\text{Ek B1})$$

şeklinde verilir. A matrisi verili iken,

$$U^H AV = \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_W) \quad (\text{Ek B2})$$

şartını sağlayacak şekilde tersleri eşlenik devriklerine eşit olan (birimcil) U ve V matrisleri bulunabilir. Σ , diyagonal elemanları $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_W > 0$ olan diyagonal bir matristir. H , bir matrisin eşlenik devriğini ifade etmektedir. Denklem (Ek B2), tekil-değer çözümlemesinin matematiksel gösterimidir.

Denklem (Ek B2)'deki W , A matrisinin derecesidir ve $W = \text{rank}(A)$ ile gösterilir. $\text{rank}(A)$, A matrisindeki doğrusal bağımsız sütun sayısı şeklinde tanımlanır. Her zaman $\text{rank}(A^H) = \text{rank}(A)$ eşitliği geçerlidir.

$K > M$ ve $K < M$ durumlarının ayrı ayrı ele alınması gerekmektedir. Her iki durum için de tekil-değer ayrıştırması ayrı ayrı ispatlanacaktır. $K > M$ durumu için denklem sayısı bilinmeyen sayısından çoktur, yani sistem “artık-belirtilmiş”tir. $K < M$ durumu için ise bilinmeyen sayısı denklem sayısından çoktur, yani sistem “eksik-belirtilmiş”tir.

Artık-belirtilmiş durum. $K > M$ durumu için, $M \times M$ boyutlarındaki $A^H A$ matrisini oluşturalım. $A^H A$, eşlenik devriği kendisine eşit (Hermityan) ve yarı kesin pozitif olduğundan özdeğerleri gerçekte ve negatif olmayan sayılardır. Sıfırdan farklı özdeğerler, $1 \leq W \leq M$ olmak üzere $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_W$ ile gösterilsin. Yani $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_W > 0$ ve $\sigma_{W+1} = \dots = \sigma_M = 0$. $A^H A$ matrisinin derecesi, A matrisinin derecesi ile aynıdır, dolayısıyla sıfırdan farklı W özdeğer vardır. v_1, v_2, \dots, v_M , $A^H A$ matrisinin $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_M$ özdeğerlerine karşılık gelen ortonormal özvektörlerini gösterebilir. V ise, sütunları v_1, v_2, \dots, v_M özvektörlerinden oluşan $M \times M$ lik birimcil matrisi gösterebilir. $A^H A$ matrisinin özdeğer ayrıştırmasını kullanarak

$$V^H A^H A V = \begin{bmatrix} \Sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{Ek B3})$$

ifadesini yazabiliriz. V matrisini, $[V_1, V_2]$ şeklinde ikiye ayıralım ve V_1 'i $[v_1, v_2, \dots, v_W]$ şeklinde $M \times W$ 'lik, V_2 'yi ise $[v_{W+1}, v_{W+2}, \dots, v_M]$ şeklinde $M \times (M-W)$ 'lik matrisler olarak tanımlayalım. V_1 ve V_2 ,

$$V_1^H V_2 = \mathbf{0} \quad (\text{Ek B4})$$

eşitliğini sağlar. Denklem (Ek B3)'den aşağıdaki iki sonuç çıkarılabilir:

1. V_1 matrisi için $V_1^H A^H A V_1 = \Sigma^2$ eşitliği yazılabilir, dolayısıyla

$$\Sigma^{-1} V_1^H A^H A V_1 \Sigma^{-1} = I \quad (\text{Ek B5})$$

eşitliği geçerli olur.

2. V_2 matrisi için $V_2^H A^H A V_2 = 0$ eşitliği yazılabilir, dolayısıyla

$$A V_2 = 0 \quad (\text{Ek B6})$$

eşitliği geçerli olur. $K \times W$ 'lik U_1 matrisini

$$U_1 = A V_1 \Sigma^{-1} \quad (\text{Ek B7})$$

şeklinde tanımlayalım. Denklem (Ek B5) kullanılarak

$$U_1^H U_1 = I \quad (\text{Ek B8})$$

eşitliği elde edilir. Bu, U_1 matrisinin sütunlarının ortonormal bir küme oluşturdukları anlamına gelir. Ardından öyle bir $K \times (K-W)$ 'lik U_2 matrisi seçelim ki $U = [U_1, U_2]$ şeklinde oluşturulan $K \times K$ 'lık matris birimcil olsun, yani

$$U_1^H U_2 = 0 \quad (\text{Ek B9})$$

eşitliği geçerli olsun. Denklemler (Ek B6), (Ek B7) ve (Ek B9) kullanılarak

$$\begin{aligned} U^H AV &= \begin{bmatrix} U_1^H \\ U_2^H \end{bmatrix} A [V_1, V_2] = \begin{bmatrix} U_1^H AV_1 & U_1^H AV_2 \\ U_2^H AV_1 & U_2^H AV_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (\Sigma^{-1} V_1^H A^H) AV_1 & U_1^H(0) \\ U_2^H(U_1 \Sigma) & U_2^H(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece Denklem (Ek B2), artık-belirtilmiş durum için ispatlanmış olur.

Eksik-belirtilmiş durum. $K < M$ durumu için, $K \times K$ boyutlarındaki AA^H matrisini oluşturalım. AA^H Hermityan ve yarı kesin pozitif olduğu için özdeğerleri gerçek ve negatif olmayan sayılardır. AA^H matrisinin sıfırdan farklı olan özdeğerleri, $A^H A$ matrisinin özdeğerleri ile aynıdır. Bu özdeğerler, $1 \leq W \leq K$ olmak üzere $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_W$ ile gösterilsin. Yani $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_W > 0$ ve $\sigma_{W+1} = \dots = \sigma_K = 0$. u_1, u_2, \dots, u_K , AA^H matrisinin $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_K$ özdeğerlerine karşılık gelen ortonormal özvektörlerini gösterebiliriz. U ise, sütunları u_1, u_2, \dots, u_K özvektörlerinden oluşan $K \times K$ lık birimcil matrisi gösterebiliriz. AA^H matrisinin özdeğer ayrıştırmasını kullanarak

$$U^H AA^H U = \begin{bmatrix} \Sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{Ek B10})$$

ifadesini yazabiliriz. U matrisini, $[U_1, U_2]$ şeklinde ikiye ayıralım ve U_1 'i $[u_1, u_2, \dots, u_W]$ şeklinde $K \times W$ lik, U_2 'yi ise $[u_{W+1}, u_{W+2}, \dots, u_K]$ şeklinde $K \times (K - W)$ lik matrisler olarak tanımlayalım. U_1 ve U_2 ,

$$U_1^H U_2 = 0 \quad (\text{Ek B11})$$

eşitliğini sağlarlar. Denklem (Ek B10)'den aşağıdaki iki sonuç çıkarılabilir:

1. U_1 matrisi için $U_1^H A A^H U_1 = \Sigma^2$ eşitliği yazılabilir, dolayısıyla

$$\Sigma^{-1} U_1^H A A^H U_1 \Sigma^{-1} = I \quad (\text{Ek B12})$$

eşitliği geçerli olur.

2. U_2 matrisi için $U_2^H A A^H U_2 = 0$ eşitliği yazılabilir, dolayısıyla

$$A^H U_2 = 0 \quad (\text{Ek B13})$$

eşitliği geçerli olur. $M \times W$ lik V_1 matrisini

$$V_1 = A^H U_1 \Sigma^{-1} \quad (\text{Ek B14})$$

şeklinde tanımlayalım. Denklem (Ek B12) kullanılarak

$$V_1^H V_1 = I \quad (\text{Ek B15})$$

eşitliği elde edilir. Bu, V_1 matrisinin sütunlarının ortonormal bir küme oluşturdukları anlamına gelir. Ardından öyle bir $M \times (M-W)$ lik V_2 matrisi seçelim ki $V = [V_1, V_2]$ şeklinde oluşturulan $M \times M$ lik matris birimcil olsun, yani

$$V_2^H V_1 = 0 \quad (\text{Ek B16})$$

eşitliği geçerli olsun. Denklemler (Ek B13), (Ek B14) ve (Ek B16) kullanılarak

$$\begin{aligned} U^H A V &= \begin{bmatrix} U_1^H \\ U_2^H \end{bmatrix} A [V_1, V_2] = \begin{bmatrix} U_1^H A V_1 & U_1^H A V_2 \\ U_2^H A V_1 & U_2^H A V_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} U_1^H A (A^H U_1 \Sigma^{-1}) & \Sigma V_1^H V_2 \\ (0) V_1 & (0) V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece Denklem (Ek B2), eksik-belirtilmiş durum için ispatlanmış olur.

B.2. Yarı-Ters

Kısım B.1’de anlatılan tekil-değer çözümlemesi, bir matrisin yarı-tersini almak için genel bir tanım oluşturacaktır. A , tekil-değer çözümlemesi Denklem (Ek B2) ile belirtilen $K \times M$ ’lik matris olsun. A matrisinin yarı-tersini,

$$A^+ = V \begin{bmatrix} \Sigma^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^H, \quad \Sigma^{-1} = \text{diag}(\sigma_1^{-1}, \sigma_2^{-1}, \dots, \sigma_w^{-1}) \quad (\text{Ek B17})$$

olarak tanımlayalım. W , A matrisinin derecesidir. A^+ , açık gösterimle

$$A^+ = \sum_{i=1}^W \frac{1}{\sigma_i} v_i u_i^H \quad (\text{Ek B18})$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu noktada karşımıza çıkabilecek iki durum şu şekildedir:

Artık-belirtilmiş durum. $K > M$ eşitsizliğinin geçerli olduğunu ve A matrisinin derecesi W ’nin M ’ye eşit olduğunu varsayarsak $(A^H A)^{-1}$ bulunabilir. Bu durumda A matrisinin yarı-tersi,

$$A^+ = (A^H A)^{-1} A^H \quad (\text{Ek B19})$$

şeklinde tanımlanır. Denklem (Ek B19)’un geçerliliğini göstermek üzere, Denklem (Ek B5) ve (Ek B7)’yi kullanarak

$$\begin{aligned} (A^H A)^{-1} &= V_1 \Sigma^{-2} V_1^H \\ A^H &= V_1 \Sigma U_1^H \end{aligned}$$

eşitliklerini elde ederiz. Bu eşitlikler kullanılarak Denklem (Ek B19)’un sağ tarafı,

$$(A^H A)^{-1} A^H = (V_1 \Sigma^{-2} V_1^H) (V_1 \Sigma U_1^H) = V_1 \Sigma^{-1} U_1^H = V \begin{bmatrix} \Sigma^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^H = A^+$$

olur.

Eksik-belirtilmiş durum. $K < M$ eşitsizliğinin geçerli olduğunu ve A matrisinin derecesi W 'nin K 'ya eşit olduğunu varsayarsak $(AA^H)^{-1}$ bulunabilir. Bu durumda A matrisinin yarı-tersi,

$$A^+ = A^H (AA^H)^{-1} \quad (\text{Ek B20})$$

şeklinde tanımlanır. Denklem (Ek B20)'nin geçerliliğini göstermek üzere, Denklem (Ek B12) ve (Ek B14)'ü kullanarak

$$\begin{aligned} (AA^H)^{-1} &= U_1 \Sigma^{-2} U_1^H \\ A^H &= V_1 \Sigma U_1^H \end{aligned}$$

eşitliklerini elde ederiz. Bu eşitlikler kullanılarak Denklem (Ek B20)'un sağ tarafı,

$$A^H (AA^H)^{-1} = (V_1 \Sigma U_1^H) (U_1 \Sigma^{-2} U_1^H) = V_1 \Sigma^{-1} U_1^H = V \begin{bmatrix} \Sigma^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^H = A^+$$

olur. Denklem (Ek B17) veya (Ek B18) ile tanımlanan A^+ yarı-tersi, A matrisinin artık-belirlenmiş veya eksik-belirlenmiş olmasına bağlı olmayan, ayrıca matrisin derecesi W 'den bağımsız bir uygulamadır. Bununla birlikte sayısal olarak kararlıdır.

B.3. $Aw = d$ Probleminin En Küçük Boy Çözümü

Kısım B.2'de bir matrisin yarı-tersinin, matrisin tekil-değer ayrıştırması kullanılarak nasıl tanımlanabileceğini gösterdik. Artık $Aw = d$ ile verilen doğrusal denklem sisteminin çözümünü araştırabiliriz. ($\text{null}(A)$, $Aw = 0$ denklemini çözen w vektörlerinin oluşturduğu kümedir. $\text{null}(A) \neq \emptyset$ durumu, A matrisinin tam sütun derecesine sahip olmadığını ifade etmektedir.) Denklem (Ek B1) ile verilen doğrusal denklem sisteminin çözümü

$$\hat{w} = A^+ d \quad (\text{Ek B21})$$

ile verilmektedir. A^+ yarı-ters matrisi, Denklem (Ek B17) ile tanımlanmaktadır. Bu durumda $\text{null}(A) \neq \emptyset$ iken doğrusal denklem sistemini çözen bir çok vektör içinde Denklem (Ek B21) ile verilen vektör, Euclid boyunun en küçük olması itibarıyla tektir.

Bu önemli sonucu, karesel hataların toplamının en küçük değerini tanımlayan denklem üzerinde işlem yaparak ispatlayabiliriz. VV^H ve UU^H matris çarpımlarının birim matrise eşit olduğunu düşünecek olursak çözümün Euclid boyunu şu şekilde ifade edebiliriz:

$$\begin{aligned} \xi_{\min} &= d^H d - d^H A \hat{w} = d^H (d - A \hat{w}) \\ &= d^H U U^H (d - A V V^H \hat{w}) = d^H U (U^H d - U^H A V V^H \hat{w}) \end{aligned} \quad (\text{Ek B22})$$

b ve c vektörlerini,

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = V^H \hat{w}, \quad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = U^H d \quad (\text{Ek B23})$$

şeklinde, b_1 ve c_1 $W \times 1$ boyutunda vektörler ve , b_2 ve c_2 herhangi iki vektör olacak şekilde tanımlayalım. Denklemler (Ek B2), (Ek B22) ve (Ek B23)'ü birleştirirsek,

$$\xi_{\min} = d^H U \left(\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \right) = d^H U \begin{bmatrix} c_1 - \Sigma b_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \quad (\text{Ek B24})$$

denklemini elde ederiz. ξ_{\min} 'in en küçük olması için

$$c_1 = \Sigma b_1, \quad b_1 = \Sigma^{-1} c_1 \quad (\text{Ek B25})$$

şartının sağlanması gerekmektedir. ξ_{\min} b_2 'den bağımsızdır, dolayısıyla b_2 herhangi bir şekilde seçilebilir. Bununla birlikte $b_2 = 0$ olarak seçersek

$$\hat{w} = Vb = V \begin{bmatrix} \Sigma^{-1}c_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{Ek B26})$$

denklemini elde ederiz. Ayrıca yukarıdaki ifadeye eşdeğer şekilde

$$\hat{w} = V \begin{bmatrix} \Sigma^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = V \begin{bmatrix} \Sigma^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^H d = A^+ d \quad (\text{Ek B27})$$

ifadesi yazılabilir. Bu ifade, Denklem (Ek B21) ile verilen ifade ile eşittir. A^+ , Denklem (Ek B17) ile tanımlanır. \hat{w} 'nın Denklem (Ek B21) ile verilen kestiriminin, $Aw = d$ denklem sisteminin bir çözümü olduğunu kanıtladık. Bununla birlikte bu şekilde tanımlanan \hat{w} , en küçük Euclid boyuna sahip olması itibarıyla tektir. $VV^H = I$ olduğundan Denklem (Ek B26)'dan \hat{w} 'nın karesel Euclid boyu,

$$\|\hat{w}\|^2 = \|\Sigma^{-1}c_1\|^2 \quad (\text{Ek B28})$$

şeklinde verilir. Şimdi doğrusal denklem kümesini çözen başka bir muhtemel çözümü ele alalım:

$$w' = V \begin{bmatrix} \Sigma^{-1}c_1 \\ b_2 \end{bmatrix}, \quad b_2 \neq 0 \quad (\text{Ek B29})$$

Bu çözümün karesel Euclid boyu

$$\|w'\|^2 = \|\Sigma^{-1}c_1\|^2 + \|b_2\|^2 \quad (\text{Ek B30})$$

ile verilir. Dolayısıyla $b_2 \neq 0$ için

$$\|w'\| > \|\hat{w}\| \quad (\text{Ek B31})$$

eşitsizliği geçerli olur. Sonuç olarak Denklem (Ek B21) ile tanımlanan \hat{w} vektörü, $\text{null}(A) \neq \emptyset$ iken bile doğrusal denklem kümesinin tek çözümüdür. \hat{w} , en küçük Euclid boyuna sahip olması itibarıyla tektir. \hat{w} vektörünün bu özel değerine "en küçük boy" çözümü denir.

Ek C. Karmaşık Değerli Vektöre Göre Türev Alma

Optimizasyon teorisinde sıklıkla karşılaşılan bir durum, bir maliyet fonksiyonunun bir parametre vektörüne göre türevinin alınması gerekliliğidir. Bu parametre vektörü eğer karmaşık değerlere sahipse türev alma işlemi zorlaşır. Ek C'nin amacı, karmaşık değerli bir vektöre göre türev almayı açıklamaktır. Önce bazı temel tanımları yaparak başlayalım.

C.1. Temel Tanımlar

Bir parametre vektörü olan w 'ye bağımlı karmaşık değerli bir fonksiyon olan $f(w)$ 'yi ele alalım. w karmaşık değerli olduğunda dikkat edilmesi gereken iki matematiksel kavram vardır, (i) w 'nin vektör olma özelliği, (ii) w 'nin her elemanının karmaşık değerli olduğu.

Öncelikle karmaşık sayı konusuna bakalım. x_k ve y_k , sırasıyla w vektörünün k . elemanı olan w_k 'nin gerçek ve sanal kısımlarını temsil etsinler. Bu durumda w_k

$$w_k = x_k + jy_k \quad (\text{Ek C1})$$

olarak yazılabilir. Dolayısıyla gerçek büyüklükler olan x_k ve y_k 'ya bağlı bir fonksiyona sahip oluruz. Denklem (Ek C1)'i kullanarak w_k 'nin gerçek kısmını, karmaşık eşlenik koordinat çifti w_k ve w_k^* cinsinden

$$x_k = \frac{1}{2}(w_k + w_k^*) \quad (\text{Ek C2})$$

olarak, w_k 'nin sanal kısmını ise

$$y_k = \frac{1}{2j}(w_k - w_k^*) \quad (\text{Ek C3})$$

olarak ifade edebiliriz. (*) sembolü, karmaşık eşleniği göstermektedir. Gerçek büyüklükler x_k ve y_k , w_k ve w_k^* 'ya bağlı fonksiyonlardır. Sadece f fonksiyonu analitik olduğunda Cauchy-Riemann denklemleri sayesinde karmaşık-eşlenik terim olan w_k^* 'yi kullanmayabiliriz. Ancak pratikte karşılaşılan çoğu fonksiyon analitik değildir.

Türev kavramı, diferansiyel olgusuyla birlikte düşünülmelidir. Özel olarak, değişkenlerin değişimini de içeren zincir kuralına uyulmalıdır. Bu önemli noktalarla birlikte karmaşık türev, gerçek türevler cinsinden

$$\frac{\partial}{\partial w_k} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} - j \frac{\partial}{\partial y_k} \right) \quad (\text{Ek C4})$$

ve

$$\frac{\partial}{\partial w_k^*} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} + j \frac{\partial}{\partial y_k} \right) \quad (\text{Ek C5})$$

şeklinde yazılabilir. Denklem (Ek C4) ve Denklem (Ek C5) ile verilen türevler aşağıdaki iki gerekliliği sağlar:

$$\frac{\partial w_k}{\partial w_k} = 1; \quad \frac{\partial w_k}{\partial w_k^*} = \frac{\partial w_k^*}{\partial w_k} = 0 \quad (\text{Ek C6})$$

Bu noktadan sonra ele alınması gereken kavram bir vektöre göre türev alınmasıdır. $w_0, w_1, \dots, w_{M-1}, w$ vektörüne ait $M \times 1$ 'lik elemanları temsil etsinler. Denklem (Ek C4) ve Denklem (Ek C5)'i bu yeni duruma göre uyarlayabiliriz:

$$\frac{\partial}{\partial w} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_0} - j \frac{\partial}{\partial y_0} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} - j \frac{\partial}{\partial y_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_{M-1}} - j \frac{\partial}{\partial y_{M-1}} \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial}{\partial w^*} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_0} + j \frac{\partial}{\partial y_0} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} + j \frac{\partial}{\partial y_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_{M-1}} + j \frac{\partial}{\partial y_{M-1}} \end{bmatrix} \quad (\text{Ek C7})$$

Denklem (Ek C7)'de $k=0, 1, \dots, M-1$ için $w_k = x_k + jy_k$ şeklinde tanımlanmaktadır. $\partial / \partial w$, “w vektörüne göre türev” ve $\partial / \partial w^*$ ise “w vektörüne göre eşlenik türev” olarak adlandırılmaktadır. Birlikte ele alınması gereken bu iki türev,

$$\frac{\partial w}{\partial w} = 1; \quad \frac{\partial w}{\partial w^*} = \frac{\partial w^*}{\partial w} = 0 \quad (\text{Ek C8})$$

şartlarını sağlarlar. Denklem (Ek C8)'de 1 birim matrisi, 0 ise sıfır matrisini göstermektedir.

C.2. Vektöre Göre Türev ve Gradyan Vektörü Arasındaki İlişki

$J(w)$ ile ifade edilen gerçek değerli maliyet fonksiyonunu, parametre-ağırlık vektörü w olan çapraz doğrusal filtrenin hata-performans yüzeyi olarak ele alalım. Hata-performans yüzeyinin gradyan vektörü,

$$\nabla J = \begin{bmatrix} \frac{\partial J}{\partial x_0} + j \frac{\partial J}{\partial y_0} \\ \frac{\partial J}{\partial x_1} + j \frac{\partial J}{\partial y_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial J}{\partial x_{M-1}} + j \frac{\partial J}{\partial y_{M-1}} \end{bmatrix} \quad (\text{Ek C9})$$

olarak tanımlanır. $x_k + jy_k$, parametre-ağırlık vektörü w 'nın k . elemanıdır. Gradyan vektörü, hata-performans yüzeyine diktir. Denklem (Ek C7)'nin ikinci kısmı ve

Denklem (Ek C9)'u karşılaştırdığımız zaman eşlenik türev $\partial J / \partial w^*$ ve gradyan vektörü ∇J arasında

$$\nabla J = 2 \frac{\partial J}{\partial w^*} \quad (\text{Ek C10})$$

şeklinde bir ilişki olduğunu görürüz. Sonuç olarak, gradyan vektörün tanımı, Denklem (Ek C7)'nin ikinci kısmı ile verilen eşlenik türev ile, bir ölçeklendirme katsayısı hariç aynıdır.

ÖZGEÇMİŞ

Fatih KARA, 25.09.1976'da Manisa'da doğdu. İlk ve orta eğitimini Manisa'da, lise eğitimini İzmir'de tamamladı. 1994 yılında başladığı Bilkent Üniversitesi Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü'nü 1998 yılında bitirdi. 2003 yılında Sakarya Üniversitesi Elektronik Mühendisliği Bölümü'nde, "Spektral Genlik Kestirimine Dayalı Konuşma İyileştirme" başlıklı tez çalışmasıyla yüksek lisansını tamamladı. 1998 yılından itibaren TÜBİTAK-UEKAE'de (Ulusal Elektronik ve Kriptoloji Araştırma Enstitüsü) Araştırmacı, Uzman Araştırmacı ve Başuzman Araştırmacı olarak çalıştı. Halen aynı kurumda Başuzman Araştırmacı / Proje Yönetim Sorumlusu olarak görev yapmaktadır. Uzmanlık alanları DSP/FPGA üzerinde gerçek zamanlı kod geliştirme, ses iyileştirme/kodlama, görüntü onarımı/süper-çözünürlüğü, modülasyon/demodülasyon teknikleri olarak sıralanabilir. Araştırmacı veya yürütücü olarak rol aldığı bazı projeler şunlardır: UHF/VHF ses/veri kriptolu cihazı, HF ses/veri kriptolu cihazı, HF modem standartlarının implementasyonu, ses kodlayıcısı geliştirme ve optimizasyonu, güç hatları üzerinden ses/veri aktarımı, kriptolu cep telefonu geliştirme, kriptolu PSTN telefon geliştirme.