T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI DİZİ UZAYLARI ARASINDAKİ MATRİS DÖNÜŞÜMLERİ VE NONKOMPAKTLIK ÖLÇÜSÜ

DOKTORA TEZİ

Emrah Evren KARA

Enstitü Anabilim Dalı : **MATEMATİK**

Tez Danışmanı : **Prof. Dr. Metin BAŞARIR**

Şubat 2012

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI DİZİ UZAYLARI ARASINDAKİ MATRİS DÖNÜŞÜMLERİ VE NONKOMPAKTLIK ÖLÇÜSÜ

DOKTORA TEZİ

Emrah Evren KARA

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Bu tez 13 / 02 /2012 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Hüseyin ÇAKALLI **Jüri Başkanı**	**Prof. Dr. Cenap ÖZEL** **Üye**	**Prof. Dr. Vatan KARAKAYA** **Üye**
Prof. Dr. Metin BAŞARIR **Üye**		**Doç. Dr. Mehmet ÖZEN** **Üye**

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın hazırlanmasında değerli zamanını ayıran, her aşamasını titizlikle değerlendirip, önerileriyle yol gösteren danışman hocam Sayın Prof. Dr. Metin BAŞARIR'a minnet ve şükranlarımı sunarım.

Eğitim hayatımın her aşamasında bana destek olup bugünlere gelebilmem için büyük fedakarlıklar gösteren, maddi ve manevi her türlü desteği veren aileme, özellikle de abim Recep İbrahim KARA'ya en derin duygularla teşekkür ederim.

2011-50-02-002 nolu proje ile çalışmama destek veren SAÜ Bilimsel Araştırma Projeleri Komisyonuna da teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}_+$	: $[0,+\infty)$ aralığı
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
B_X	: X uzayının kapalı birim yuvarı
S_X	: X uzayının birim küresi
Çek$A$	: A operatörünün sıfır uzayı (çekirdeği)
ω	: Kompleks terimli bütün dizilerin uzayı
φ	: Sonlu tane terimi hariç geri kalan tüm terimleri sıfır olan dizilerin uzayı
c_0	: Kompeks terimli sıfıra yakınsak dizilerin uzayı
c	: Kompleks terimli yakınsak dizilerin uzayı
ℓ_∞	: Kompleks terimli sınırlı dizilerin uzayı
ℓ_p	: p-mutlak yakınsak seri teşkil eden dizilerin uzayı
bs	: Sınırlı seri teşkil eden dizilerin uzayı
cs	: Yakınsak seri teşkil eden dizilerin uzayı
λ_A	: A sonsuz matrisinin bir λ dizi uzayı üzerindeki matris etki alanı
λ^α	: λ dizi uzayının α-duali
λ^β	: λ dizi uzayının β-duali
λ^γ	: λ dizi uzayının γ-duali
$\Vert L\Vert_\chi$	: L lineer operatörünün nonkompaktlık Hausdorff ölçüsü
$\mathcal{M}_X$	: X metrik uzayındaki bütün sınırlı kümelerin ailesi
$\mathcal{F}$	: $\mathbb{N}$'nin bütün sonlu alt kümelerinin ailesi
N_p	: Nörlund ortalaması
R^t	: Riesz ortalaması
C_1	: 1. mertebeden Cesàro ortalaması

S	: Toplam matrisi
$\Delta^{(1)}$	: Fark matrisi
$\Delta^{(m)}$	: $m.$ mertebeden fark matrisi
$B(r,s)$	: Genelleştirilmiş fark matrisi
$B^{(m)}$	: $m.$ mertebeden genelleştirilmiş fark matrisi
E^t	: $t.$ mertebeden Euler ortalaması
NH	: Nonkompaktlık Hausdorff Ölçüsü

ÖZET

Anahtar kelimeler: Dizi Uzayları, Paranormlu Uzay, Schauder Bazı, α-, β-, γ- Dualleri, Matris Dönüşümleri, Ağırlıklı Ortalama, Euler Ortalaması, Genelleştirilmiş Fark Matrisi, Nonkompaktlık Hausdorff Ölçüsü, Kompakt Operatörler.

"Bazı dizi uzayları arasındaki matris dönüşümleri ve nonkompaktlık ölçüsü" isimli bu tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, dizi uzayları, matris dönüşümleri ve nonkompaktlık Hausdorff ölçüsü ile ilgili bazı temel tanım ve teoremler verildi. İkinci ve üçüncü bölüm, bu çalışmanın orijinal kısmını oluşturmaktadır.

İkinci bölümde, $e_0^t(B^{(m)})$, $e_c^t(B^{(m)})$ ve $e_\infty^t(B^{(m)})$ Euler m. dereceden fark dizi uzayları tanımlanıp, bu uzayların α-, β-, γ- dualleri belirlendi. Ayrıca bu uzaylar üzerindeki bazı matris dönüşümlerinin sınıfları karakterize edildi ve nonkompaktlık Hausdorff ölçüsü yardımı ile $e_0^t(B^{(m)})$ ve $e_\infty^t(B^{(m)})$ uzayları üzerindeki bazı matris dönüşümlerinin kompakt olması için taşıması gereken şartlar belirlendi.

Üçüncü bölümde, $\ell(u,v,p;B)$ ve $\ell_p(u,v;B)$ ağırlıklı B-fark dizi uzayları tanımlandı. $\ell(u,v,p;B)$ paranormlu dizi uzayının bazı topolojik özellikleri çalışılıp, bu uzay üzerinde tanımlanan bazı matris dönüşümlerinin sınıfları incelendi. Ayrıca nonkompaktlık Hausdorff ölçüsünün uygulanması ile $\ell_p(u,v;B)$ dizi uzayı üzerinde, sonsuz matrisler tarafından verilen kompakt operatörlerin bazı sınıfları karakterize edildi.

Son bölümde ise ikinci ve üçüncü bölümde tanımlanan dizi uzaylarının bazı özel halleri verildi ve bundan sonra yapılacak araştırmalara yönelik önerilerde bulunuldu.

ON MATRIX TRANSFORMATIONS BETWEEN SOME SEQUENCE SPACES AND THE HAUSDORFF MEASURE OF NONCOMPACTNESS

SUMMARY

Key Words: Sequence Spaces, Paranormed Spaces, Schauder Basis, α-, β-, γ-Duals, Matrix Transformations, Weighted Means, Euler Mean, Generalized Difference Matrix, Hausdorff Measure of Noncompactness, Compact Operators.

This study which is entitled " On Matrix Transformations between Some Sequence Spaces and the Hausdorff Measure of Noncompactness" contains four chapters. In the first chapter, some basic definitions and theorems related to sequence spaces, matrix mappings and the Hausdorff measure of noncompactness are given. The second and third chapters are original parts of this study.

In the second chapter, the Euler mth-order difference sequence spaces $e_0^t(B^{(m)})$, $e_c^t(B^{(m)})$ and $e_\infty^t(B^{(m)})$ are introduced and the α-, β-, γ- duals of these spaces are determined. Also, some classes of matrix mappings on them are characterized. Moreover, by applying the Hausdorff measure of noncompactness, the characterization of some classes of compact operators on the sequence spaces $e_0^t(B^{(m)})$ and $e_\infty^t(B^{(m)})$ are given.

In the third chapter, the weighted B-difference sequence spaces $\ell(u,v,p;B)$ and $\ell_p(u,v;B)$ are defined. Also, some topological properties of the paranormed space $\ell(u,v,p;B)$ are studied and some classes of matrix mappings on this space are examined. Moreover, the Hausdorff measure of noncompactness is applied to characterize some classes of compact operators given by infinite matrices on the space $\ell_p(u,v;B)(1 \leq p < \infty)$.

In the last chapter, some special cases of sequence spaces defined in the second and third chapters are given. Also, some suggestions are proposed for investigations on the Hausdorff measure of noncompactness.

BÖLÜM 1. TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER

1.1. Temel Kavramlar ve Teoremler

Bu bölümde, diğer bölümlerde kullanılacak olan temel tanımlar ve teoremler verilecektir.

Tanım 1.1.1. $X \neq \emptyset$ ve $\mathrm{F} = \mathbb{R}$ veya $\mathrm{F} = \mathbb{C}$ olmak üzere

$$+: X \times X \to X \qquad\qquad .: \mathrm{F} \times X \to X$$
$$(x, y) \to x + y \qquad\qquad (\lambda, x) \to \lambda . x$$

ikili işlemleri $\forall \alpha, \beta \in \mathrm{F}$ ve $\forall x, y, z \in X$ için

1) $x + y = y + x$
2) $(x + y) + z = x + (y + z)$
3) $x + e = e + x = x$ olacak şekilde bir $e \in X$ vardır
4) $x + (-x) = (-x) + x$ olacak şekilde bir $-x \in X$ vardır
5) $1. x = x$
6) $\alpha. (x + y) = \alpha. x + \alpha. y$
7) $(\alpha + \beta). x = \alpha. x + \beta. x$
8) $\alpha. (\beta. x) = (\alpha. \beta). x$

şartlarını sağlıyorsa $(X, +, .)$ üçlüsüne, F üzerinde bir lineer uzay (vektör uzayı) denir [1].

Tanım 1.1.2. X, F cismi üzerinde bir lineer uzay ve M'de X'in bir alt kümesi olsun. Her $x, y \in M$ ve her $\alpha, \beta \in \mathrm{F}$ için $\alpha x + \beta y \in M$ ise M'ye X'in bir lineer alt uzayı denir [2].

Tanım 1.1.3. Sınırlı bir $x = (x_n)$ dizisinin üst limiti

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{r\to\infty}\left(\sup_{n\geq r} x_n\right)$$

şeklinde tanımlıdır. Ayrıca $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_n \geq 0$ ise

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

dır [3].

Tanım 1.1.4. Boş olmayan bir X kümesi ve bir

$$\begin{aligned} d: X \times X &\to \mathbb{R}_+ \\ (x,y) &\to d(x,y) \end{aligned}$$

dönüşümü verilsin. Eğer bu d dönüşümü $\forall x,y,z \in X$ için

(M1) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
(M2) $d(x,y) = d(y,x)$
(M3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (üçgen eşitsizliği)

özelliklerini sağlıyorsa X üzerinde uzaklık fonksiyonu ya da metrik adını alır ve bu durumda (X,d) ikilisine bir metrik uzay denir [2].

Tanım 1.1.5. (X,d) metrik uzay ve (x_n)'de bu uzayda bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve $m,n > n_0$ olan bütün $n,m \in \mathbb{N}$'ler için $d(x_n,x_m) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ bulunabiliyorsa, (x_n) dizisine (X,d) metrik uzayında bir Cauchy dizisi denir [1].

Tanım 1.1.6. Bir (X,d) metrik uzayındaki her Cauchy dizisi X içinde bir limite sahipse bu (X,d) metrik uzayına tam metrik uzay adı verilir [1].

Tanım 1.1.7. X bir lineer uzay olsun. $g: X \to \mathbb{R}$ dönüşümü $\forall x, y \in X$ için aşağıdaki şartları sağlıyorsa g'ye X üzerinde bir paranorm (X, g) ikilisine de paranormlu uzay denir.

(P1) $g(x) \geq 0$ ve $g(\theta) = 0$

(P2) $g(-x) = g(x)$

(P3) (alt toplamsallık özelliği): $g(x + y) \leq g(x) + g(y)$

(P4) (skalerle çarpımın sürekliliği): (t_n), $t_n \to t$ $(n \to \infty)$ şartını sağlayan skalerlerin bir dizisi ve (x_n), X içinde $g(x_n - x) \to 0$ $(n \to \infty)$ olan bir dizi ise $n \to \infty$ iken $g(x_n t_n - xt) \to 0$ dır [1].

Tanım 1.1.8. Bir (X, g) paranormlu uzayında alınan her Cauchy dizisi bu uzayın bir noktasına yakınsıyorsa (X, g) uzayına tam paranormlu uzay denir [1].

Tanım 1.1.9. X, F cismi (F $= \mathbb{R}$ veya F $= \mathbb{C}$) üzerinde bir vektör uzayı olsun.

$$\|.\|: X \to \mathbb{R}_+$$
$$x \to \| x \|$$

dönüşümü $\forall x, y \in X$ ve $\forall \alpha \in$ F için

(N1) $\| x \| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

(N2) $\| \alpha x \| = |\alpha| \, \| x \|$

(N3) $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$

özelliklerini sağlıyorsa X üzerinde norm adını alır ve bu durumda $(X, \|.\|)$ ikilisine bir normlu vektör uzayı denir [1].

Tanım 1.1.10. Bir $(X, \|.\|)$ normlu uzayındaki her Cauchy dizisi X içinde bir noktaya yakınsıyorsa, bu $(X, \|.\|)$ normlu uzayına tam normlu uzay veya Banach uzayı denir [1].

Tanım 1.1.11. Bir $(X, \|.\|)$ normlu uzayının B_X kapalı birim yuvarı ve S_X birim küresi

$$B_X = \{x \in X: \ \| x \| \leq 1\}$$

ve

$$S_X = \{x \in X: \ \| x \| = 1\}$$

şeklinde tanımlıdır [4].

Tanım 1.1.12. X ve Y aynı F cismi üzerinde iki lineer uzay olsun. Eğer $L: X \to Y$ dönüşümü $\forall x, y \in X$ ve $\forall \alpha, \beta \in$ F için

$$L(\alpha x + \beta y) = \alpha L(x) + \beta L(y)$$

şartını sağlıyorsa L'ye X uzayından Y uzayına bir lineer dönüşüm denir [2].

Örnek 1.1.13. X ve Y, $\mathbb{R}$ üzerinde iki lineer uzay olsun. Aşağıda verilen dönüşümler birer lineer dönüşümdür.

(i) $\forall x \in X$ için $0(x) = \theta$ şeklinde tanımlanan $0: X \to Y$ sıfır dönüşümü,
(ii) $\forall x \in X$ için $I(x) = x$ şeklinde tanımlanan $I: X \to Y$ birim dönüşümü,
(iii) $a \in \mathbb{R}$ sabit bir sayı olmak üzere $\forall x \in X$ için $f(x) = ax$ şeklinde tanımlanan $f: X \to Y$ dönüşümü [2].

Tanım 1.1.14. $A: X \to Y$ lineer operatörü verilsin.

$$\text{Çek}A = \{x \in X: A(x) = 0\}$$

kümesine A operatörünün sıfır uzayı veya çekirdeği denir [5].

Lemma 1.1.15. A lineer operatörünün bire-bir olması için gerek yeter şart Çek$A = \{0\}$ olmasıdır [5].

Tanım 1.1.16. $(X, \|.\|_X)$ ve $(Y, \|.\|_Y)$ iki normlu uzay olsun. $T: X \to Y$ lineer dönüşümünün sürekli (sınırlı) olması için gerek ve yeter şart $\forall x \in X$ için

$$\|T(x)\|_Y \leq M\|x\|_X$$

olacak şekilde bir $M > 0$ reel sayısının bulunabilmesidir [1].

X'den Y'ye tanımlı bütün sınırlı lineer operatörlerin kümesi $B(X, Y)$ ile gösterilir.

Tanım 1.1.17. $L \in B(X, Y)$ olsun. Bu durumda L operatörünün normu

$$\|L\| = \sup_{\|x\|=1} \|L(x)\|$$

şeklinde tanımlıdır [1].

Tanım 1.1.18. Aynı bir F cismi üzerinde tanımlı olan X ve Y lineer uzayları arasında bire-bir ve örten bir T lineer dönüşümü varsa X ve Y uzaylarına izomorfik (ya da lineer izomorfik) uzaylar denir. Bu durumda T dönüşümüne de izomorfizm adı verilir [2].

Lemma 1.1.19. $p > 1$ ve $p^{-1} + q^{-1} = 1$ olsun. O zaman herhangi bir $B > 0$ sayısı ve herhangi iki a, x kompleks sayıları için

$$|ax| \leq B(|a|^q B^{-q} + |x|^p)$$

eşitsizliği sağlanır [6].

1.2. Dizi Uzayları ve Matris Dönüşümleri

Tanım 1.2.1. $\mathrm{F} = \mathbb{R}$ veya $\mathrm{F} = \mathbb{C}$ olmak üzere

$$\omega = \{x = (x_k) |\ x\colon \mathbb{N} \to \mathrm{F}, k \to x(k) = (x_k)\}$$

kümesine bütün dizilerin kümesi denir. ω kümesi,

$$((x_k), (y_k)) \to (x_k + y_k) \text{ ve } \big(\lambda, (x_k)\big) \to (\lambda x_k)$$

ikili işlemleri ile F üzerinde bir vektör uzayıdır. ω'nın herhangi bir alt vektör uzayına bir dizi uzayı denir [7].

Örnek 1.2.2.

$$\varphi = \{x = (x_k) \in \omega\colon \exists N \in \mathbb{N};\ \forall k \geq N \text{ için } x_k = 0\},$$

$$c_0 = \left\{x = (x_k) \in \omega\colon \lim_{k\to\infty} x_k = 0\right\},$$

$$c = \left\{x = (x_k) \in \omega\colon \lim_{k\to\infty} x_k = l,\ \exists l \in \mathbb{R}\right\},$$

$$\ell_\infty = \left\{x = (x_k) \in \omega\colon \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k| < \infty\right\},$$

$$\ell_p = \left\{x = (x_k) \in \omega\colon \sum_k |x_k|^p < \infty,\ 1 \leq p < \infty\right\},$$

$$bs = \left\{x = (x_k) \in \omega\colon \sup_{n\in\mathbb{N}} \left|\sum_{k=0}^{n} x_k\right| < \infty\right\},$$

$$cs = \left\{x = (x_k) \in \omega\colon \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} x_k - l\right) = 0,\ \exists l \in \mathbb{R}\right\},$$

ve

$$cs_0 = \left\{x = (x_k) \in \omega\colon \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} x_k\right) = 0\right\}$$

uzayları birer dizi uzayıdır [7,8].

Tez çalışması boyunca aksi belirtilmedikçe, ℓ_p uzayından söz edildiğinde $1 \leq p < \infty$ olduğu anlaşılacak ve q ile de p'nin eşleniği gösterilecektir. Yani $p = 1$ ise $q = \infty$ ve $1 < p < \infty$ ise $q = p/(p-1)$'dir. Ayrıca $\mathbb{N}$'nin bütün sonlu alt kümelerinin ailesi $\mathcal{F}$ ile gösterilecek ve her bir $r \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{F}_r$ kümesi

$$\mathcal{F}_r = \{N \in \mathcal{F} : \forall n \in N \text{ için } n > r\}$$

şeklinde tanımlanacaktır.

Örnek 1.2.3. $p = (p_k)$ pozitif reel sayıların sınırlı bir dizisi, $\sup_k p_k = H$ ve $M = \max\{1, H\}$ olsun. Bu durumda

$$\ell(p) = \left\{x = (x_k) \in \omega : \sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^{p_k} < \infty\right\},$$

$$\ell_\infty(p) = \left\{x = (x_k) \in \omega : \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k|^{p_k} < \infty\right\},$$

$$c(p) = \left\{x = (x_k) \in \omega : \lim_{k \to \infty} |x_k - l|^{p_k} = 0, \ \exists l \in \mathbb{R}\right\}$$

ve

$$c_0(p) = \left\{x = (x_k) \in \omega : \lim_{k \to \infty} |x_k|^{p_k} = 0\right\}$$

uzayları birer dizi uzayıdır. Ayrıca $\ell(p)$ uzayı

$$g_1(x) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^{p_k}\right)^{1/M}$$

paranormu ile, $\ell_\infty(p)$, $c(p)$ ve $c_0(p)$ uzayları da

$$g_2(x) = \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k|^{p_k/M}$$

paranormu ile birer tam paranormlu uzaydır [8].

Tanım 1.2.4. $\forall i \in \mathbb{N}$ için λ dizi uzayı üzerinde $p_i(x) = x_i$ şeklinde tanımlanan $p_i: \lambda \to \mathbb{C}$ koordinat dönüşümü sürekli ise λ dizi uzayına bir K-uzayı denir [8].

Tanım 1.2.5. Tam lineer metrik bir K-uzayına FK-uzayı denir [8].

Tanım 1.2.6. Bir FK-uzayı, kendisine ait topoloji ile normlanabiliyorsa bu uzaya BK-uzayı denir [8].

Örnek 1.2.7. ℓ_∞, c ve c_0 uzayları $\parallel x \parallel_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}}|x_k|$ normuna göre, ℓ_p uzayı da $\parallel x \parallel_p = \left(\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^p\right)^{1/p}$ normuna göre birer BK-uzayıdır [4].

Tanım 1.2.8. λ ve μ iki dizi uzayı ve $A = (a_{nk})$ $(n, k = 0,1,2, \ldots)$ reel ya da kompleks sayıların bir sonsuz matrisi olsun. $\forall n \in \mathbb{N}$ için A matrisinin $n.$ satır dizisi A_n ile gösterilir. Yani $A_n = (a_{nk})_{k=0}^{\infty}$'dır. Ayrıca her bir $n \in \mathbb{N}$ için $A_n(x) = \sum_k a_{nk}x_k$ yakınsak ise $A(x) = (A_n(x))$ yazılır. Eğer $x = (x_k) \in \lambda$ için $A(x) = (A_n(x)) \in \mu$ ise o zaman A'ya λ dizi uzayından μ dizi uzayına bir matris dönüşümü denir ve bu durum $A: \lambda \to \mu$ olarak gösterilir. Ax dizisine de x'in A-dönüşümü adı verilir.

$A: \lambda \to \mu$ şeklindeki bütün A matrislerinin kümesi (λ, μ) ile gösterilir [4].

Tanım 1.2.9. $A = (a_{nk})$ reel ya da kompleks sayıların bir sonsuz matrisi olsun. $k > n$ olmak üzere $\forall n, k \in \mathbb{N}$ için $a_{nk} = 0$ ise $A = (a_{nk})$ matrisine üçgensel matris denir. $A = (a_{nk})$ üçgensel matrisinde $\forall n \in \mathbb{N}$ için $a_{nn} \neq 0$ ise A'ya normal matris denir [8].

Lemma 1.2.10. FK-uzayları arasında tanımlanan herhangi bir matris dönüşümü süreklidir [2].

Lemma 1.2.11. ([8])

$$\text{(i) } A=(a_{nk})\in(\ell_\infty,c)\Leftrightarrow\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}a_{nk}=\alpha_k;\ (k\in\mathbb{N})\\ \sum\limits_k|a_{nk}|\ \text{serisi } n\text{'ye göre düzgün yakınsak}\end{cases}$$

$$\text{(ii) } A=(a_{nk})\in(\ell_\infty,c_0)\Leftrightarrow\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}a_{nk}=0;\ (k\in\mathbb{N})\\ \sum\limits_k|a_{nk}|\ \text{serisi } n\text{'ye göre düzgün yakınsak}\end{cases}$$

Lemma 1.2.12. $1\le p\le\infty$ ve q'da p'nin eşleniği olmak üzere X uzayı c_0 ve ℓ_p uzaylarından herhangi biri olsun. Bu durumda $A\in(X,c)$ ise

(i) Her bir $k\in\mathbb{N}$ için $\lim\limits_{n\to\infty}a_{nk}=\alpha_k$

(ii) $\alpha=(\alpha_k)\in\ell_q$; ($X=c_0$ ya da $X=\ell_\infty$ ise $q=1$)

(iii) $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\left(\sum\limits_k|a_{nk}-\alpha_k|^q\right)^{1/q}<\infty$; ($X=c_0$ ya da $X=\ell_\infty$ ise $q=1$)

(iv) $\forall x=(x_k)\in X$ için $\lim\limits_{n\to\infty}A_n(x)=\sum\limits_k\alpha_kx_k$

özellikleri sağlanır [9,10].

Tanım 1.2.13. $p_0>0$, $p_n\ge0$ $(n\ge1)$ ve $P_n=p_0+p_1+\cdots+p_n$ olsun. $\forall n,k\in\mathbb{N}$ için

$$p_{nk}=\begin{cases}\dfrac{p_{n-k}}{P_n} & (0\le k\le n)\\ 0 & (k>n)\end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $N_p=(p_{nk})$ matrisine Nörlund ortalaması denir [8].

Tanım 1.2.14. $t_0>0$ olmak üzere $t=(t_k)$ negatif olmayan reel sayıların bir dizisi ve $T_n=\sum_{k=0}^n t_k$ $(n\in\mathbb{N})$ olsun. O zaman $\forall n,k\in\mathbb{N}$ için

$$r_{nk}^{t} = \begin{cases} \frac{t_k}{T_n} & (0 \leq k \leq n) \\ 0 & (k > n) \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $R^t = (r_{nk}^t)$ matrisine Riesz ortalaması denir [8].

Tanım 1.2.15. $\forall n, k \in \mathbb{N}\ için$

$$c_{nk} = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & (0 \leq k \leq n) \\ 0 & (k > n) \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $C_1 = (c_{nk})$ matrisine 1. mertebeden Cesàro ortalaması denir [8].

Tanım 1.2.16. $t \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\forall n, k \in \mathbb{N}$ için

$$e_{nk}^{t} = \begin{cases} \binom{n}{k} (1-t)^{n-k} t^k & (0 \leq k \leq n) \\ 0 & (k > n) \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $E^t = (e_{nk}^t)$ matrisine t. mertebeden Euler ortalaması denir [8].

Tanım 1.2.17. $u, v \in U = \{(u_n) \in \omega: \forall n$ için $u_n \neq 0\}$ olmak üzere $\forall n, k \in \mathbb{N}$ için

$$g_{nk} = \begin{cases} u_n v_k & (0 \leq k \leq n) \\ 0 & (k > n) \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $G = (g_{nk})$ matrisine genelleştirilmiş ağırlıklı ortalama denir. Burada u_n sadece n'ye v_k da sadece k'ya bağlıdır [11].

Tanım 1.2.18. $0 < r < 1$ ve $\lambda = (\lambda_k)$ dizisi

$$0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots \text{ ve } \lambda_k \to \infty\ (k \to \infty)$$

şartlarını sağlayan bir dizi olsun. Bu durumda $A^r = (a_{nk}^r)$ ve $\Lambda = (\lambda_{nk})$ matrisleri $\forall n, k \in \mathbb{N}$ için

$$a_{nk}^{r} = \begin{cases} \dfrac{1+r^{k}}{n+1} & (0 \leq k \leq n) \\ 0 & (n > k) \end{cases}$$

ve

$$\lambda_{nk} = \begin{cases} \dfrac{\lambda_k - \lambda_{k-1}}{\lambda_n} & (0 \leq k \leq n) \\ 0 & (n > k) \end{cases}$$

şeklinde tanımlıdır [12,13].

Tanım 1.2.19. $S = (s_{nk})$ toplam matrisi, $\Delta^{(1)} = (\delta_{nk})$, $\Delta = (d_{nk})$ fark operatörleri ve herhangi sabit bir $m \in \mathbb{N}$ için $\Delta^{(m)} = (\delta_{nk}^{(m)})$ m. dereceden fark matrisi $\forall n, k \in \mathbb{N}$ için sırasıyla

$$s_{nk} = \begin{cases} 1 & (0 \leq k \leq n) \\ 0 & (k > n), \end{cases}$$

$$\delta_{nk} = \begin{cases} (-1)^{n-k} & (n-1 \leq k \leq n) \\ 0 & (0 \leq k < n-1) \text{ ya da } (k > n), \end{cases}$$

$$d_{nk} = \begin{cases} (-1)^{n-k} & (n \leq k \leq n+1) \\ 0 & (0 \leq k < n \text{ ya da } k > n+1) \end{cases}$$

ve

$$\delta_{nk}^{(m)} = \begin{cases} (-1)^{n-k} \dbinom{m}{n-k} & (\max\{0, n-m\} \leq k \leq n) \\ 0 & (0 \leq k < \max\{0, n-m\}) \text{ ya da } (k > n) \end{cases}$$

şeklinde tanımlıdır [8].

Tanım 1.2.20. $B(r,s) = (b_{nk})$ genelleştirilmiş fark matrisi ve herhangi bir sabit $m \in \mathbb{N}$ için $B^{(m)} = (b_{nk}^{(m)})$ m. mertebeden genelleştirilmiş fark matrisi $\forall n, k \in \mathbb{N}$ ve

$\forall r, s \in \mathbb{R} - \{0\}$ için

$$b_{nk} = \begin{cases} r & (k = n) \\ s & (k = n-1) \\ 0 & (0 \leq k < n-1) \text{ ya da } (k > n) \end{cases}$$

ve

$$b_{nk}^{(m)} = \begin{cases} \binom{m}{n-k} r^{m-n+k} s^{n-k} & (\max\{0, n-m\} \leq k \leq n) \\ 0 & (0 \leq k < \max\{0, n-m\}) \text{ ya da } (k > n) \end{cases}$$

şeklinde tanımlıdır. $r = 1$ ve $s = -1$ durumunda $B(r, s)$ ve $B^{(m)}$ matrislerinin sırasıyla $\Delta^{(1)}$ ve $\Delta^{(m)}$ matrislerine dönüşeceği açıktır [15,16].

Tanım 1.2.21. λ bir dizi uzayı olmak üzere bir A sonsuz matrisinin λ uzayındaki matris etki alanı (domaini) olan λ_A kümesi

$$\lambda_A = \{x = (x_k) \in \omega \colon A(x) \in \lambda\}$$

olarak tanımlanır [8].

Lemma 1.2.22. T bir üçgensel matris ve $(X, \|.\|)$ bir BK-uzayı olsun. Bu durumda X_T uzayı da $\forall x \in X$ için

$$\|x\|_T = \|T(x)\|$$

şeklinde tanımlanan norm ile bir BK-uzayıdır [17].

Lemma 1.2.23. X ve Y, ω'nın herhangi iki alt uzayı ve T bir üçgensel matris olsun. O zaman $A \in (X, Y_T)$ olması için gerek ve yeter şart $B = TA \in (X, Y)$ olmasıdır [4].

Tanım 1.2.24. $\lambda \supset \varphi$ bir BK-uzayı olsun ve $n \in \mathbb{N}$ için $x^{[n]} = \sum_{k=0}^{n} x_k e^{(k)}$ ifadesi $x = (x_k) \in \lambda$ dizisinin n. kesimini göstersin ($e^{(k)}$, k. terimi 1 diğer terimleri 0 olan dizi). Bu durumda

$$\lim_{n\to\infty} x^{[n]} = \sum_{k=0}^{\infty} x_k e^{(k)} = x$$

ise λ uzayına AK özelliğine sahiptir denir [4].

Örnek 1.2.25. ω, c_0 ve ℓ_p $(1 \leq p < \infty)$ uzayları AK özelliğine sahiplerdir. Fakat c ve ℓ_∞ uzayları AK özelliğine sahip değillerdir [4].

Lemma 1.2.26. X ve Y iki BK-uzayı olsun. Bu durumda

(i) $(X,Y) \subset B(X,Y)$'dir. Yani, her $A \in (X,Y)$ için $A(x) = L_A(x)$ $(\forall x)$ olacak şekilde bir $L_A \in B(X,Y)$ lineer operatörü vardır [4].

(ii) Eğer X, AK özelliğine sahipse bu durumda $B(X,Y) \subset (X,Y)$'dir. Yani, her $L \in B(X,Y)$ için $A(x) = L(x)$ $(\forall x)$ olacak şekilde bir $A \in (X,Y)$ vardır [17].

Tanım 1.2.27. λ bir normlu dizi uzayı olsun ve (b_n) dizisi verilsin. $\forall x \in \lambda$ için

$$\lim_{n\to\infty} \| x - (\alpha_0 b_0 + \alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_n b_n) \| = 0$$

olacak şekilde bir tek (α_n) skalerler dizisi varsa (b_n)'ye λ dizi uzayının bir Schauder bazı (kısaca bazı) denir ve durumda $x = \sum_k \alpha_k b_k$ yazılır [8].

Literatürde, üçgensel bir A sonsuz matrisinin bilinen λ dizi uzayındaki matris etki alanı olan λ_A uzayı kullanılarak bir çok yeni dizi uzayı tanımlanmıştır. Aşağıdaki tabloda bunlardan bazıları gösterilmiştir.

λ	A	λ_A	Kaynak
ℓ_p, ℓ_∞	N_q	$X_{a(p)}, X_{a(\infty)}$	[19]
$\ell_p, (1 \leq p \leq \infty)$	C_1	X_p, X_∞	[20]
$X_p, (1 \leq p \leq \infty)$	Δ^m	$C_p(\Delta^m), C_\infty(\Delta^m)$	[21]
c_0, c, ℓ_∞	R^q	$(\overline{N}, q)_0, (\overline{N}, q), (\overline{N}, q)_\infty$	[22]
c_0, c, ℓ_∞	Δ	$c_0(\Delta), c(\Delta), \ell_\infty(\Delta)$	[23]
c_0, c	$G(u,v)$	$(c_0)_{G(u,v)}, c_{G(u,v)}$	[24]
$\ell_p, c_0, c, \ell_\infty$	$B(r,s)$	$\hat{\ell}_p, \hat{c}_0, \hat{c}, \hat{\ell}_\infty$	[25]
c_0, c, ℓ_p	$G(u,v)$	$Z(u,v;c_0), Z(u,v;c), Z(u,v;\ell_p)$	[26]
c_0, c	C_1	$\tilde{c}_0, \tilde{c}$	[27]
c_0, c	E^r	e_0^r, e_c^r	[28]
$\ell_p, (1 \leq p \leq \infty)$	E^r	e_p^r, e_∞^r	[29,30]
c_0, c	A^r	a_0^r, a_c^r	[12]
$\ell_p, (1 \leq p \leq \infty)$	A^r	a_p^r, a_∞^r	[31]
e_0^r, e_c^r, e_∞^r	$\Delta^{(1)}$	$e_0^r(\Delta), e_c^r(\Delta), e_\infty^r(\Delta)$	[32]
e_0^r, e_c^r, e_∞^r	$\Delta^{(m)}$	$e_0^r(\Delta^{(m)}), e_c^r(\Delta^{(m)}), e_\infty^r(\Delta^{(m)})$	[33]
e_0^t, e_c^t, e_∞^t	$B^{(m)}$	$e_0^t(B^{(m)}), e_c^t(B^{(m)}), e_\infty^t(B^{(m)})$	[34]
a_0^r, a_c^r	$\Delta^{(1)}$	$a_0^r(\Delta), a_c^r(\Delta)$	[35]
$a_p^r, (1 \leq p < \infty)$	$\Delta^{(1)}$	$a_p^r(\Delta)$	[36]
$(c_0)_{G(u,v)}, c_{G(u,v)}, (\ell_\infty)_{G(u,v)}$	$\Delta^{(1)}$	$c_0(u,v,\Delta), c(u,v,\Delta), \ell_\infty(u,v,\Delta)$	[37,9]
$\ell_p, (1 \leq p < \infty)$	$\Delta^{(1)}$	bv_p	[38,39]
$\ell_p, (0 < p < 1)$	$\Delta^{(1)}$	bv_p	[40]
c_0, c, ℓ_∞	Δ^m	$c_0(\Delta^m), c(\Delta^m), \ell_\infty(\Delta^m)$	[41,42]
c_0, c, ℓ_∞	$\Delta^{(m)}$	$c_0(\Delta^{(m)}), c(\Delta^{(m)}), \ell_\infty(\Delta^{(m)})$	[43]
$\ell_p, (1 \leq p < \infty)$	$\Delta^{(m)}$	$\ell_p(\Delta^{(m)})$	[44]
c_0, c	Λ	c_0^λ, c^λ	[13]
$\ell_p, (1 \leq p \leq \infty)$	Λ	$\ell_p^\lambda, \ell_\infty^\lambda$	[45]
$\ell_\infty(p)$	S	$bs(p)$	[46,47]
$\ell(p)$	S	$\overline{\ell(p)}$	[48]
$c_0(p), c(p), \ell_\infty(p)$	Δ	$\Delta c_0(p), \Delta c(p), \Delta \ell_\infty(p)$	[49]
$c_0(p), c(p), \ell_\infty(p)$	Δ^m	$\Delta^m c_0(p), \Delta^m c(p), \Delta^m \ell_\infty(p)$	[50]
$\ell(p)$	R^t	$r^t(p)$	[51]
$c_0(p), c(p), \ell_\infty(p)$	R^t	$r_0^t(p), r_c^t(p), r_\infty^t(p)$	[52]
$\ell(p)$	E^r	$e^r(p)$	[53]
$r^q(p)$	Δ	$r^q(p,\Delta)$	[54]
$r^q(p)$	$B^{(m)}$	$r^q(p, B^{(m)})$	[16]
$c_0(p), c(p), \ell_\infty(p)$	$G(u,v)$	$c_0(u,v;p), c(u,v;p), \ell_\infty(u,v;p)$	[11]
$\ell(p)$	$G(u,v)$	$\ell(u,v;p)$	[55]
$r_0^t(p), r_c^t(p), r_\infty^t(p), r^t(p)$	$B(r,s)$	$r_0^t(p,B), r_c^t(p,B), r_\infty^t(p,B), r^t(p,B)$	[56]

Bir A matrisinin λ dizi uzayına kısıtlanmasıyla elde edilen λ_A yeni dizi uzayı, genelde orijinal λ uzayının genişlemesi ya da daralması olmasına rağmen bazı durumlarda bu uzaylar birbirlerini kapsamazlar. Örneğin, $\lambda \in \{\ell_\infty, c, c_0\}$ ise $\lambda_S \subset \lambda$ ve $\lambda \in \{c, c_0\}$ ise $\lambda \subset \lambda_\Delta$ kapsamaları kesin bir şekilde sağlanır. Buna rağmen $z = ((-1)^k)$ olmak üzere $\lambda = c_0 + z$ yani $x \in \lambda \Leftrightarrow$ bazı $s \in c_0$ ve bazı $\alpha \in$

$\mathbb{C}$'ler için $x = s + \alpha z$ olarak alınsın ve A matrisi de satırları $\forall n \in \mathbb{N}$ için $A_n = (-1)^n e^{(n)}$ şeklinde tanımlanan bir matris olsun. O zaman $Ae = z \in \lambda$ ama $Az = e \notin \lambda$ olup bu $z \in \lambda \backslash \lambda_A$ ve $e \in \lambda \backslash \lambda_A$ olduğunu gösterir ($e = (1,1,1, \ldots)$) [29].

Tanım 1.2.28. λ dizi uzayının α-, β ve γ $-$dualleri olan $\lambda^\alpha, \lambda^\beta$ ve λ^γ kümeleri,

$$\lambda^\alpha = \{z = (z_k) \in \omega : \forall x \in \lambda \text{ için } xz = (x_k z_k) \in \ell_1\},$$
$$\lambda^\beta = \{z = (z_k) \in \omega : \forall x \in \lambda \text{ için } xz = (x_k z_k) \in cs\}$$

ve

$$\lambda^\gamma = \{z = (z_k) \in \omega : \forall x \in \lambda \text{ için } xz = (x_k z_k) \in bs\}$$

şeklinde tanımlıdır [8].

Tanım 1.2.29. $X \supset \varphi$ bir BK-uzayı ve $a = (a_k) \in \omega$ olsun. Bu durumda, $\forall x \in X$ için $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_k$ yakınsak olmak üzere $\|a\|_X^*$ değeri

$$\|a\|_X^* = \sup\left\{\left|\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_k\right| : \|x\| = 1\right\}$$

şeklinde tanımlıdır. $a \in X^\beta$ olması durumunda $\forall x \in X$ için $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_k$ değerlerinin mevcut ve sonlu olduğu açıktır [4].

Lemma 1.2.30. X uzayı c_0, c ya da ℓ_∞ uzaylarından herhangi biri olsun. Bu durumda $X^\beta = \ell_1$ ve $\forall a \in \ell_1$ için $\|a\|_X^* = \|a\|_{\ell_1}$ dir [57].

Lemma 1.2.31. $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $\ell_p^\beta = \ell_q$ ve $\forall a \in \ell_p$ için $\|a\|_{\ell_p}^* = \|a\|_{\ell_q}$ dir [10].

Lemma 1.2.32. T bir üçgensel matris ve R de T^{-1} matrisinin transpozesi olsun. Bu durumda $X = c_0$ ya da $X = \ell_\infty$ ise $\forall a \in (X_T)^\beta$ için $\|a\|_{X_T}^* = \|Ra\|_{\ell_1}$'dir [58].

Lemma 1.2.33. $X \supset \varphi$ bir BK-uzayı ve Y'de c_0, c ya da ℓ_∞ uzaylarından herhangi biri olsun. O zaman $A \in (X, Y)$ ise

$$\|L_A\| = \|A\|_{(X,\infty)} = \sup_n \|A_n\|_X^* < \infty$$

dır [59].

Lemma 1.2.34. $x = (x_n) \in \ell_1$ olsun. Bu durumda her bir $r \in \mathbb{N}$ için

$$\sup_{N \in \mathcal{F}_r} \left| \sum_{n \in N} x_n \right| \leq \sum_{n=r+1}^{\infty} |x_n| \leq 4. \sup_{N \in \mathcal{F}_r} \left| \sum_{n \in N} x_n \right|$$

eşitsizliği sağlanır [3].

Lemma 1.2.35. $X \supset \varphi$ bir BK-uzayı ve

$$\|A\|_{(X,\ell_1)} = \sup_{N \in \mathcal{F}} \left\| \sum_{n \in N} A_n \right\|_X^* < \infty$$

olsun. Bu durumda $A \in (X, \ell_1)$ ise

$$\|A\|_{(X,\ell_1)} \leq \|L_A\| \leq 4. \|A\|_{(X,\ell_1)}$$

dır [3].

1.3. Nonkompaktlık Hausdorff Ölçüsü

Bu bölümde nonkompaktlık Hausdorff (NH) ölçüsü tanımlanıp bu konuyla ilgili temel kavramlar ve teoremler verilecektir.

Tanım 1.3.1. Bir (X, d) metrik uzayında S ve M iki alt uzay olsun ve $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin. Eğer her bir $x \in M$ için $d(x, s) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $s \in S$ varsa S'ye M

kümesinin X içinde ε-neti denir. Ayrıca S kümesi sonlu ise S'ye M kümesinin sonlu bir ε-neti denir [1].

Tanım 1.3.2. (X, d) metrik uzayının bir M alt kümesinin, $\forall\varepsilon > 0$ için sonlu bir ε-neti varsa bu M kümesine total sınırlıdır denir [1].

Tanım 1.3.3. (X, d) bir metrik uzay ve $M \subset X$ olsun. Eğer M'nin kapanışı olan $\overline{M}$ kümesi kompakt ise M'ye X uzayında ön kompakt küme denir [14].

Tanım 1.3.4. X, Y Banach uzayları ve $L: X \to Y$ lineer operatörü verilsin. Eğer X uzayındaki sınırlı her Q kümesi için $L(Q)$ kümesi Y uzayında ön kompakt bir küme ise L operatörüne kompakt lineer operatör denir. X'den Y'ye bütün kompakt lineer operatörlerin kümesi $K(X, Y)$ ile gösterilir [14].

(X, d) metrik uzayındaki tüm sınırlı Q kümelerinin cümlesi $\mathcal{M}_X$ ile gösterilecektir.

Tanım 1.3.5. (X, d) bir metrik uzay olmak üzere bir $Q \in \mathcal{M}_X$ kümesinin NH ölçüsü

$$\chi(Q) = \inf\{\varepsilon > 0 : Q\text{'nun } X \text{ içinde sonlu bir } \varepsilon\text{-neti vardır}\}$$

şeklinde tanımlanır ve $\chi: \mathcal{M}_X \to [0, +\infty)$ fonksiyonuna NH ölçüsü denir [4].

Kompakt operatörler ilk kez integral operatörler şeklinde Volterra tarafından ortaya konulmuştur. Banach uzaylarında kompakt operatörlerin genel tanımı ilk kez ünlü Alman matematikçi Hilbert tarafından verilmiştir. Kompakt operatörler özellikle de lineer kompakt operatörler fonksiyonel analizin, operatör teorisi ve yaklaşım teorisi gibi birçok dalında önemli bir yer teşkil etmiştir. Çoğu kez iki dizi uzayı arasındaki en genel lineer dönüşüm bir matris dönüşümü ile verilebildiğinden, bir matris dönüşümünün hangi şartlar altında kompakt olacağı sorusunun sorulması da kaçınılmazdır. NH ölçüsü bu soruyu cevaplayacak en önemli kavramlardan biridir.

NH ölçüsü ile ilgili çalışmalara Gohberg [60] ile başlandı. 1968'de Goldenstein ve Markus, 1972'de Istrătesku ve sonrasında bir çok matematikçi tarafından çalışıldı.

NH ölçüsünün operatör teorisi, sabit nokta teorisi, diferansiyel denklemler gibi bir çok alanda önemli özellikleri vardır. Bir lineer operatörün kompakt operatör olması için taşıması gereken şartları belirlemenin en etkili yollarından biri de NH ölçüsüdür. Bu yöntemle bir çok dizi uzayı üzerinde kompakt matris dönüşümleri sınıflandırılmıştır. Örneğin, Malafosse ve ark. [57] c ve c_0 uzayları üzerinde lineer operatörler ile matris dönüşümlerinin kompaktlık durumunu incelemişler ve $K(c,c,)$, $K(c_0,c_0)$, $K(c,c_0)$, $K(c_0,c)$ kümelerini karakterize etmişlerdir. Malafosse ve Rakočević [61] s_α, s_α^0, s_α^c, ℓ_α^p uzayları üzerinde, Mursaleen ve Noman [59], c_0^λ, ℓ_∞^λ dizi uzayları üzerinde, Mursaleen ve ark. [9] $c_0(u,v,\Delta)$ ve $\ell_\infty(u,v,\Delta)$ uzayları üzerinde, Başar ve Malkosky [62] w_0^p, w_∞^p ve w^p dizi uzayları üzerinde, Djolović [63] $a_0^r(\Delta)$, $a_c^r(\Delta)$ ve $a_\infty^r(\Delta)$ uzayları üzerinde, Malkowsky ve ark. [64] $bv_p(1<p<\infty)$ uzayı üzerinde, Başarır ve Kara [65] $c_0(u,v,\Delta^m)$ ve $\ell_\infty(u,v,\Delta^m)$ uzayları üzerinde NH ölçüsünü kullanarak matris dönüşümlerinin kompaktlık durumunu incelemişlerdir. Ayrıca [4] ve [66-76] nolu çalışmalar, dizi uzayları üzerinde NH ölçüsünün uygulanması ile ilgili diğer önemli çalışmalardır. [3,4,18,77,78] nolu çalışmalarda yazarlar, FK-uzaylarında keyfi üçgensel matrislerin, matris etki alanları üzerinde bazı matris dönüşümlerinin sınıflarını inceleyip, NH ölçüsünün uygulanması ile bu uzaylar üzerinde kompakt lineer dönüşümlerle ilgili daha genel sonuçlar elde etmişlerdir. Djolović ve Malkowsky [58], T bir üçgensel matris olmak üzere $K((\ell_\infty)_T,c)$ ve $K((c_0)_T,c)$ sınıflarını karakterize etmişlerdir. [34] nolu çalışmada Kara ve Başarır $e_0^t(B^{(m)})$, $e_c^t(B^{(m)})$ ve $e_\infty^t(B^{(m)})$ dizi uzaylarını tanımlayıp bu uzaylar üzerinde matris dönüşümlerinin kompaktlık durumunu incelemiş ve NH ölçüsünü kullanarak, Djolović ve Malkowsky'nin çalışmalarını bir adım daha öne götürüp, herhangi bir T üçgensel matrisi için $(\ell_\infty)_T,c_0) \subset K((\ell_\infty)_T,c_0)$ ve $((\ell_\infty)_T,c) \subset K((\ell_\infty)_T,c)$ olduğunu göstermişlerdir. Son zamanlarda Mursaleen [79], NH ölçüsünü Sargent tarafından tanımlanan $n(\phi)$ dizi uzayı üzerinde uygulayıp bu uzay üzerindeki bazı matris dönüşümlerinin kompaktlık durumunu incelemiştir. Ayrıca bu çalışmada yazar, NH ölçüsü yardımı ile $n(\phi)$ Banach uzayındaki diferansiyel denklemlerin sonsuz sistemlerinin çözümlerini araştırmıştır.

NH ölçüsünün uygulanmasıyla, bir matris dönüşümünün kompakt olması için taşıması gereken şartları belirlerken genel itibariyle şu adımlar takip edilir.

1. Adım : X bir keyfi BK uzayı ve Y'de bilinen bir dizi uzayı iken $A \in (X, Y)$ olması için gerek ve yeter şartlar bulunur.
2. Adım : Verilen bir X, BK uzayının β-duali bulunur.
3. Adım : X ve Y bilinen BK uzayları iken $A \in (X, Y)$ olması için gerek ve yeter şartlar bulunur. Bu, 1. ve 2. Adım'daki sonuçların kullanılması ve 2. Adım'da bulunan X'in β-dualindeki doğal norm ile operatörün normunun yer değiştirilmesi ile yapılır.
4. Adım : 3. Adım'daki sonuçlar ve NH ölçüsünün uygulanması ile $A \in K(X, Y)$ olması için gerek ve yeter şartlar bulunur.

Lemma 1.3.6. Bir (X, d) metrik uzayının sınırlı Q, Q_1 ve Q_2 alt kümeleri için χ fonksiyonu aşağıdaki özelliklere sahiptir [80].

(i) $\chi(Q) = 0 \Leftrightarrow Q$ total sınırlı bir kümedir

(ii) Q'nın $\overline{Q}$ kapanışı için $\chi(Q) = \chi(\overline{Q})$ dir

(iii) $Q_1 \subset Q_2$ ise $\chi(Q_1) \leq \chi(Q_2)$ dir

(iv) $\chi(Q_1 \cup Q_2) = \max\{\chi(Q_1), \chi(Q_2)\}$

(v) $\chi(Q_1 \cap Q_2) = \min\{\chi(Q_1), \chi(Q_2)\}$

Lemma 1.3.7. Q, Q_1 ve Q_2 kümeleri bir X normlu uzayının sınırlı alt kümeleri olsun. Bu durumda

(i) $\chi(Q_1 + Q_2) \leq \chi(Q_1) + \chi(Q_2)$

(ii) Her bir $x \in X$ için $\chi(Q + x) = \chi(Q)$

(iii) Her bir $\lambda \in$ F için $\chi(\lambda Q) = |\lambda|\chi(Q)$

özellikleri sağlanır [80].

Lemma 1.3.8. $X = \ell_p$ $(1 \leq p < \infty)$ ya da $X = c_0$ ve $Q \in \mathcal{M}_X$ olsun. Ayrıca $P_n \colon X \to X$ operatörü $\forall x = (x_n) \in X$ için $P_n(x) = (x_0, x_1, \dots, x_n, 0, 0, \dots)$ olarak tanımlansın. Bu durumda $\chi(Q) = \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{x\in Q}\|(I - P_n)(x)\|\right)$ dir [4].

Tanım 1.3.9. X, Y Banach uzayları ve $L \in B(X, Y)$ olsun. Bu durumda

(i) $\|L\|_\chi = \chi\left(L(\bar{B}_X)\right) = \chi\left(L(S_X)\right)$
(ii) $L \in K(X, Y) \Leftrightarrow \|L\|_\chi = 0$

dır [4].

Lemma 1.3.10. X, bir $\{e_1, e_2, e_3, \dots\}$ Schauder bazına sahip Banach uzayı, Q, X'in sınırlı bir alt kümesi ve $P_n \colon X \to X$ dönüşümü $\{e_1, e_2, e_3, \dots\}$'nin lineer gereni üzerinde bir projektör olsun. Bu durumda $a = \limsup_{n\to\infty}\|I - P_n\|$ olmak üzere

$$\frac{1}{a}.\limsup_{n\to\infty}\left(\sup_{x\in Q}\|(I - P_n)(x)\|\right) \leq \chi(Q) \leq \limsup_{n\to\infty}\left(\sup_{x\in Q}\|(I - P_n)(x)\|\right)$$

dır [4].

Teorem 1.3.11. X bir normlu uzay ve T bir üçgensel matris olsun. $\mathcal{M}_X$ ve $\mathcal{M}_{X_T}$ kümeleri sırasıyla X ve X_T uzaylarındaki bütün sınırlı kümelerin aileleri, χ ve χ_T değerleri de sırasıyla $\mathcal{M}_X$ ve $\mathcal{M}_{X_T}$ üzerindeki NH ölçüleri olsun. O zaman her $Q \in \mathcal{M}_{X_T}$ için $\chi_T(Q) = \chi(T(Q))$'dır [81].

BÖLÜM 2. BAZI EULER m. DERECEDEN FARK DİZİ UZAYLARI VE KOMPAKT OPERATÖRLER

Bu bölümde $B^{(m)}$ ve E^t matrisleri kullanılarak $e_0^t\big(B^{(m)}\big)$, $e_c^t\big(B^{(m)}\big)$ ve $e_\infty^t\big(B^{(m)}\big)$ Euler m. dereceden fark dizi uzayları tanımlanacak ve bu uzayların sırasıyla c_0, c ve ℓ_∞ uzaylarına lineer izomorfik oldukları gösterilecektir. Ayrıca bu uzayların α-, β- ve γ- dualleri belirlenecek ve $e_0^t\big(B^{(m)}\big)$, $e_c^t\big(B^{(m)}\big)$ uzayları üzerinde bazı matris dönüşümlerinin sınıfları karakterize edilecektir. Son olarak NH ölçüsü kullanılarak $e_0^t\big(B^{(m)}\big)$ ve $e_\infty^t\big(B^{(m)}\big)$ dizi uzayları üzerinde tanımlanan bazı matris dönüşümlerinin kompakt olması için taşıması gereken şartlar belirlenecektir.

Tez çalışması boyunca, $r, s \in \mathbb{R} - \{0\}$ ve $0 < t < 1$ olduğu kabul edilecektir. Ayrıca kısalık olması bakımından, herhangi bir $j, k, m \in \mathbb{N}$ için

$$\nabla(j,k) = \sum_{i=k}^{j} \binom{m+j-i-1}{j-i} \binom{i}{k} (-1)^{j-k} \frac{s^{j-i}}{r^{m+j-i}} (t-1)^{i-k} t^{-i}$$

gösterimi kullanılacaktır.

2.1. Giriş

Tanım 2.1.1. e_0^t, e_c^t ve e_∞^t Euler dizi uzayları

$$e_0^t = \left\{ x = (x_k) \in \omega \colon \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1-t)^{n-k} t^k x_k = 0 \right\},$$

$$e_c^t = \left\{ x = (x_k) \in \omega \colon \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1-t)^{n-k} t^k x_k \text{ mevcut} \right\}$$

ve

$$e_{\infty}^{t} = \left\{ x = (x_k) \in \omega : \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1-r)^{n-k} r^k x_k \right| < \infty \right\}$$

olarak tanımlanır [28-30].

Tanım 2.1.2. $e_0^t(B^{(m)})$, $e_c^t(B^{(m)})$ ve $e_\infty^t(B^{(m)})$ Euler m. dereceden genelleştirilmiş fark dizi uzayları

$$e_0^t\big(B^{(m)}\big) = \{x = (x_k) \in \omega : B^{(m)}(x) \in e_0^t\},$$
$$e_c^t\big(B^{(m)}\big) = \{x = (x_k) \in \omega : B^{(m)}(x) \in e_c^t\}$$

ve

$$e_\infty^t\big(B^{(m)}\big) = \{x = (x_k) \in \omega : B^{(m)}(x) \in e_\infty^t\}$$

şeklinde tanımlıdır. Tanım 1.2.21'deki matris etki alanı tanımı kullanılarak $e_0^t(B^{(m)})$, $e_c^t(B^{(m)})$ ve $e_\infty^t(B^{(m)})$ uzayları

$$e_0^t\big(B^{(m)}\big) = \{e_0^t\}_{B^{(m)}},\ e_c^t\big(B^{(m)}\big) = \{e_c^t\}_{B^{(m)}} \text{ ve } e_\infty^t\big(B^{(m)}\big) = \{e_\infty^t\}_{B^{(m)}}$$

yada $T^{(m)} = E^t.B^{(m)}$ olmak üzere

$$e_0^t\big(B^{(m)}\big) = \{c_0\}_{T^{(m)}},\ e_c^t\big(B^{(m)}\big) = \{c\}_{T^{(m)}} \text{ ve } e_\infty^t\big(B^{(m)}\big) = \{\ell_\infty\}_{T^{(m)}}$$

şeklinde tekrar tanımlanabilir.

Tanım 2.1.3. Bir $x = (x_k)$ dizisinin $T^{(m)} = E^t.B^{(m)}$-dönüşüm dizisi olan $y = (y_k(r,s,t))$ dizisi, $\forall k \in \mathbb{N}$ için

$$y_k(r,s,t) = T_k^{(m)}(x) = \sum_{j=0}^{k}\left[\sum_{i=j}^{k}\binom{m}{i-j}\binom{k}{i}(1-t)^{k-i}t^i r^{m+j-i} s^{i-j}\right]x_j \quad (2.1.1)$$

şeklinde tanımlıdır.

Teorem 2.1.4. $\lambda \in \{c_0, c, \ell_\infty\}$ olsun. Bu durumda $\lambda_{T^{(m)}}$ uzayı koordinatsal toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre bir lineer uzaydır ve

$$\|x\|_{\lambda_{T^{(m)}}} = \left\|T^{(m)}(x)\right\|_{\ell_\infty} = \|y\|_{\ell_\infty} \quad (2.1.2)$$

normu ile de bir BK-uzayıdır.

İspat: Teoremin ilk kısmının ispatı yani $\lambda_{T^{(m)}}$ uzayının bir lineer uzay olduğunun gösterilmesi kolaydır. Diğer taraftan $T^{(m)} = E^t.B^{(m)}$ matrisi bir normal matris ve λ uzayı da $\|.\|_{\ell_\infty}$ normuna göre bir BK-uzayı olduğundan Lemma 1.2.22'den dolayı $\lambda_{T^{(m)}}$ uzayı (2.1.2) normlu ile bir BK-uzayıdır.

Teorem 2.1.5. $e_0^t(B^{(m)})$, $e_c^t(B^{(m)})$ ve $e_\infty^t(B^{(m)})$ uzayları, sırasıyla c_0, c ve ℓ_∞ uzaylarına lineer izomorfiktir. Yani $e_0^t\left(B^{(m)}\right) \cong c_0$, $e_c^t\left(B^{(m)}\right) \cong c$ ve $e_\infty^t\left(B^{(m)}\right) \cong \ell_\infty$'dır.

İspat: Benzer yöntem ile $e_c^t(B^{(m)})$ ve $e_\infty^t(B^{(m)})$ uzayları içinde ispat yapılabileceğinden, teorem sadece $e_0^t(B^{(m)})$ uzayı için ispatlanacaktır.

Bunun için $e_0^t(B^{(m)})$ ve c_0 uzayları arasında bire bir, örten ve normu koruyan bir lineer L dönüşümün varlığının gösterilmesi gerekir. Bu L dönüşümü (2.1.1) ile verilen ifade olarak alınsın. Yani

$$L: e_0^t\left(B^{(m)}\right) \to c_0, \quad x \to L(x) = T^{(m)}(x) = y$$

olsun. L'nin lineer olduğu açıktır. $L(x)=0$ ise $\forall k\in\mathbb{N}$ için $x_k=0\Rightarrow x=\theta$ olacağından Çek$T=\{0\}$'dır. Lemma 1.1.15'e göre L dönüşümü bire-bir dönüşümdür. $y\in c_0$ olsun. $\forall k\in\mathbb{N}$ için

$$x_k(r,s,t)=\sum_{j=0}^{k}\nabla(k,j)\,y_j$$

olacak şekilde $x=\{x_k(r,s,t)\}$ dizisi tanımlansın. O zaman

$$\lim_{n\to\infty}(T^{(m)}(x))_n=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\left[\sum_{i=k}^{n}\binom{m}{i-k}\binom{n}{i}(1-t)^{n-i}t^{i}r^{m+k-i}s^{i-k}\right]x_k(r,s,t)\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}y_n=0$$

olup $x\in e_0^t\big(B^{(m)}\big)$'dir. $y\in c_0$ keyfi seçildiğinden L örtendir. Ayrıca

$$\|x\|_{e_0^t(B^{(m)})}=\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|(T^{(m)}(x))_n\right|=\sup_{n\in\mathbb{N}}|y_n|=\|y\|_{c_0}<\infty$$

dır. Sonuç olarak L dönüşümü bire-bir, örten ve normu koruyan bir lineer dönüşümdür. O halde $e_0^t\big(B^{(m)}\big)\cong c_0$'dır. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

$e_0^t\big(B^{(m)}\big)$, $e_c^t(B^{(m)})$ ve c_0, c uzayları arasında tanımlanan, Teorem 2.1.5'deki L izomorfizmi örten olduğundan c_0 ve c'nin bazlarının bu izomorfizm altındaki ters görüntüleri, sırasıyla $e_0^t\big(B^{(m)}\big)$ ve $e_c^t\big(B^{(m)}\big)$ uzaylarının birer bazıdır. Dolayısıyla aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 2.1.6. Herhangi bir sabit $k\in\mathbb{N}$ için $c^{(k)}=\left\{c_n^{(k)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ ve $c^{(-1)}=\left\{c_n^{(-1)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizileri

$$c_n^{(k)}=\begin{cases}0 & (0\le n<k)\\ \nabla(n,k) & (n\ge k)\end{cases}$$

ve

$$c_n^{(-1)}=\sum_{j=0}^{n}\nabla(n,j)\,;(n\in\mathbb{N})$$

olarak tanımlansın ve $\eta=\lim_{k\to\infty}\left(T^{(m)}(x)\right)_k$ olsun. Bu durumda

(i) $(c^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ dizisi, $e_0^t\big(B^{(m)}\big)$ uzayı için bir Schauder bazıdır ve $e_0^t\big(B^{(m)}\big)$ uzayındaki herhangi bir $x=(x_k)$ elemanı

$$x=\sum_k\left(T^{(m)}(x)\right)_k x_k$$

formunda bir tek şekilde yazılabilir.

(ii) $(c^{(k)})_{k=-1}^{\infty}$ dizisi $e_c^t\big(B^{(m)}\big)$ uzayı için bir Schauder bazıdır ve $e_c^t\big(B^{(m)}\big)$ uzayındaki herhangi bir $x=(x_k)$ elemanı

$$x=\eta.\,c^{(-1)}+\sum_k\left[\left(T^{(m)}(x)\right)_k-\eta\right]x_k$$

formunda bir tek şekilde yazılabilir.

2.2. $e_0^t\big(B^{(m)}\big)$, $e_c^t\big(B^{(m)}\big)$ ve $e_\infty^t\big(B^{(m)}\big)$ Uzaylarının α-, β- ve γ- Dualleri

Bu bölümde $e_0^t\big(B^{(m)}\big)$, $e_c^t\big(B^{(m)}\big)$ ve $e_\infty^t\big(B^{(m)}\big)$ uzaylarının α-, β- ve γ-dualleri belirlenecektir.

Lemma 2.2.1. ([82])

(i) $A\in(c_0,\ell_1)=(c,\ell_1)=(\ell_\infty,\ell_1)\Leftrightarrow\sup_{K\in\mathcal{F}}\sum_n\left|\sum_{k\in K}a_{nk}\right|<\infty$

$$\text{(ii) } A \in (c_0, c) \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} a_{nk} = \alpha_k \,; \quad (k \in \mathbb{N}) \\ \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \sum\limits_k |a_{nk}| < \infty \end{cases}$$

$$\text{(iii) } A \in (c_0, \ell_\infty) = (c, \ell_\infty) = (\ell_\infty, \ell_\infty) \Leftrightarrow \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_k |a_{nk}| < \infty$$

Teorem 2.2.2. $D = (d_{nk})$ matrisi $\forall n, k \in \mathbb{N}$ için

$$d_{nk} = \begin{cases} \nabla(n,k)a_n & (0 \leq k \leq n) \\ 0 & (k > n) \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın ve

$$D_1 = \left\{ a = (a_k) \in \omega \colon \ \sup_{K\in\mathcal{F}} \sum_n \left| \sum_{k\in K} d_{nk} \right| < \infty \right\}$$

olsun. Bu durumda $\{e_0^t(B^{(m)})\}^\alpha = \{e_c^t(B^{(m)})\}^\alpha = \{e_\infty^t(B^{(m)})\}^\alpha = D_1$'dir.

İspat: $a = (a_k) \in \omega$ olsun. $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} a_n x_n &= \sum_{k=0}^{n} \left[\sum_{j=k}^{n} \binom{m+n-j-1}{n-j} \binom{j}{k} (-1)^{n-k} \frac{s^{n-j}}{r^{m+n-j}} (t-1)^{j-k} t^{-j} a_n \right] y_k \\ &= \sum_{k=0}^{n} (\nabla(n,k)a_n) y_k = \sum_{k=0}^{n} d_{nk} y_k = D_n(y) \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

yazılabilir. Dolayısıyla (2.2.1) ve (2.1.2) eşitlikleri göz önüne alınarak

$x = (x_k) \in e_0^t(B^{(m)}),\ \ e_c^t(B^{(m)})$ ya da $e_\infty^t(B^{(m)})$ iken $ax = (a_k x_k) \in \ell_1$
$\Leftrightarrow y = (y_k) \in c_0, c$ ya da ℓ_∞ iken $D(y) \in \ell_1$

yani

$$a=(a_k)\in\left\{e_0^t\left(B^{(m)}\right)\right\}^\alpha,\left\{e_0^t\left(B^{(m)}\right)\right\}^\alpha \text{ ya da } \left\{e_\infty^t\left(B^{(m)}\right)\right\}^\alpha$$
$$\Leftrightarrow D\in(c_0,\ell_1),\ \ (c,\ell_1) \text{ ya da } (\ell_\infty,\ell_1\ )$$

bulunur. O halde Lemma 2.2.1 (i) kullanılırsa

$$a=(a_k)\in\left\{e_0^t\left(B^{(m)}\right)\right\}^\alpha,\left\{e_0^t\left(B^{(m)}\right)\right\}^\alpha \text{ ya da } \left\{e_\infty^t\left(B^{(m)}\right)\right\}^\alpha \Leftrightarrow \sup_{K\in\mathcal{F}}\sum_n\left|\sum_{k\in K}d_{nk}\right|<\infty$$

elde edilir. Bu ise $\left\{e_0^t\left(B^{(m)}\right)\right\}^\alpha=\left\{e_c^t\left(B^{(m)}\right)\right\}^\alpha=\left\{e_\infty^t(B^{(m)})\right\}^\alpha=D_1$ demektir.

Teorem 2.2.3. $D_2,\ D_3,\ D_4$ ve D_5 kümeleri

$$D_2=\left\{a=(a_k)\in\omega:\ \sup_{n\in\mathbb{N}}\sum_{k=0}^{n}\left|\sum_{i=k}^{n}\nabla(i,k)a_i\right|<\infty\right\},$$
$$D_3=\left\{a=(a_k)\in\omega:\ \text{her bir } k\in\mathbb{N} \text{ için } \sum_{i=k}^{\infty}\nabla(i,k)a_i\ \text{ mevcut}\right\},$$
$$D_4=\left\{a=(a_k)\in\omega:\ \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=k}^{n}\nabla(i,k)a_i\ \text{ mevcut}\right\}$$

ve

$$D_5=\left\{a=(a_k)\in\omega:\ \lim_{n\to\infty}\sum_k\left|\sum_{i=k}^{n}\nabla(i,k)a_i\right|=\sum_k\left|\sum_{i=k}^{\infty}\nabla(i,k)a_i\right|\right\}$$

olarak tanımlansın. O zaman $\left\{e_0^t\left(B^{(m)}\right)\right\}^\beta=D_2\cap D_3,\ \left\{e_c^t\left(B^{(m)}\right)\right\}^\beta=D_2\cap D_3\cap D_4$ ve $\left\{e_\infty^t\left(B^{(m)}\right)\right\}^\beta=D_3\cap D_5$’dir.

İspat: $a=(a_k)\in\omega$ olsun ve $C=(c_{nk})$ matrisi $\forall k,n\in\mathbb{N}$ için

$$c_{nk}=\begin{cases}\displaystyle\sum_{i=k}^{n}\nabla(i,k)a_i & (0\le k\le n)\\ 0 & (k>n)\end{cases}$$

olarak tanımlansın. (2.1.1)'deki bağıntı kullanılarak $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x_k = \sum_{k=0}^{n}\left[\sum_{i=0}^{k} \nabla(k,i) y_i\right] a_k = \sum_{k=0}^{n}\left[\sum_{i=k}^{n} \nabla(i,k) a_i\right] y_k = C_n(y) \quad (2.2.2)$$

bulunur. Dolayısıyla (2.1.2) ve (2.2.2)'den

$$x = (x_k) \in e_0^t(B^{(m)}) \text{ iken } ax = (a_k x_k) \in cs \Leftrightarrow y = (y_k) \in c_0 \text{ iken } C(y) \in c$$

yani

$$a = (a_k) \in \{e_0^t(B^{(m)})\}^\beta \Leftrightarrow C \in (c_0, c)$$

elde edilir. O halde Lemma 2.2.1(ii) kullanılarak

$$a = (a_k) \in \{e_0^t(B^{(m)})\}^\beta \Leftrightarrow \begin{cases} \text{her bir } k \in \mathbb{N} \text{ için } \sum_{i=k}^{\infty} \nabla(i,k) a_i \text{ mevcut} \\ \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{n} \left|\sum_{i=k}^{n} \nabla(i,k) a_i\right| < \infty \end{cases}$$

bulunur. Bu ise $\{e_0^t(B^{(m)})\}^\beta = D_2 \cap D_3$ olduğunu gösterir. Benzer yöntemle $\{e_c^t(B^{(m)})\}^\beta = D_2 \cap D_3 \cap D_4$ ve $\{e_\infty^t(B^{(m)})\}^\beta = D_3 \cap D_5$ olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 2.2.4. $e_0^t(B^{(m)})$, $e_c^t(B^{(m)})$ ve $e_\infty^t(B^{(m)})$ uzaylarının γ- duali D_2 kümesidir.

İspat: Bu teoremin ispatı, Teorem 2.2.3'ün ispatında Lemma 2.2.1'in (ii) kısmı yerine (iii) kısmı alınarak yapılabilir.

Teorem 2.2.5. X uzayı $e_0^t(B^{(m)})$ ve $e_\infty^t(B^{(m)})$ uzaylarından herhangi biri olsun. Eğer $a = (a_k) \in X^\beta$ ise

$$\|a\|_X^* = \|Ra\|_{\ell_1} = \sum_{j=k}^{\infty} \left|\nabla(j,k)a_j\right|$$

dır.

İspat: Lemma 1.2.32'de $T = T^{(m)}$ alınırsa istenilen sağlanır.

2.3. $e_0^t(B^{(m)})$ ve $e_c^t(B^{(m)})$ ve $e_\infty^t(B^{(m)})$ Uzayları Üzerinde Bazı Matris Dönüşümleri

Bu bölümde, $e_0^t(B^{(m)})$ ve $e_c^t(B^{(m)})$ uzaylarından ℓ_p $(1 \le p \le \infty)$, c ve c_0 uzaylarına olan matris dönüşümlerinin sınıfları karakterize edilecektir. Daha sonra da $X = \ell_\infty$, c ya da c_0 olmak üzere $A \in (e_\infty^t(B^{(m)}), X)$ iken A'nın operatör normu belirlenecektir.

Kısalık olması bakımından, bir sonsuz $A = (a_{nk})$ matrisi verildiğinde $\forall k, n, \ell \in \mathbb{N}$ için

$$\bar{a}_{nk}^{\ell} = \sum_{j=k}^{\ell} \nabla(j,k)a_{nj} \tag{2.3.1}$$

ve

$$\bar{a}_{nk} = \sum_{j=k}^{\infty} \nabla(j,k)a_{nj} \tag{2.3.2}$$

olarak alınacaktır.

Lemma 2.3.1. $1 \le p < \infty$ olsun. O zaman

$$A \in (c, \ell_p) \Leftrightarrow \sup_{F \in \mathcal{F}} \sum_n \left|\sum_{k \in F} a_{nk}\right|^p < \infty$$

dır [82].

Teorem 2.3.2. $A \in (e_c^t(B^{(m)}), \ell_p) \Leftrightarrow$
(i) $1 \leq p < \infty$ için,

$$\sup_{F\in\mathcal{F}} \sum_n \left| \sum_{k\in F} \bar{a}_{nk} \right|^p < \infty, \tag{2.3.3}$$

$$\sup_{\ell\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{\ell} \left|\bar{a}_{nk}^{\ell}\right| < \infty, \tag{2.3.4}$$

$$\forall k, n \in \mathbb{N} \text{ için } \bar{a}_{nk} \text{ mevcut,} \tag{2.3.5}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ için } \sum_k \bar{a}_{nk} \text{ yakınsak} \tag{2.3.6}$$

şartları sağlanır.

(ii) $p = \infty$ için (2.3.4) ve (2.3.5) sağlanır ve ayrıca

$$\|L_A\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_k |\bar{a}_{nk}| < \infty \tag{2.3.7}$$

şartı da sağlanır.

İspat: Teoremin (ii) kısmı (i) kısmına benzer şekilde ispatlanabileceğinden sadece (i) kısmı için ispat verilecektir.

(i) $(2.3.3) - (2.3.6)$ şartları sağlansın ve herhangi bir $x \in e_c^t(B^{(m)})$ verilsin. Bu durumda, Teorem 2.2.3'den dolayı $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\{a_{nk}\}_{k\in\mathbb{N}} \in \{e_c^t(B^{(m)})\}^{\beta}$ olacağından $A(x)$'in varlığı garantilenmiş olur. Ayrıca (2.3.3) kabulü ile Lemma 2.3.1 birlikte düşünülürse $\bar{A} = (\bar{a}_{nk})$ matrisinin (c, ℓ_p) sınıfında olduğu görülür. Diğer taraftan $y = (y_k)$ dizisi (2.2.1) ile verilen dizi olmak üzere $\forall n, \ell \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{k=0}^{\ell} a_{nk}x_k = \sum_{k=0}^{\ell}\left(\sum_{j=k}^{\ell}\nabla(j,k)a_{nj}\right)y_k = \sum_{k=0}^{\ell}\bar{a}_{nk}^{\ell}y_k \tag{2.3.8}$$

dır. (2.3.8) ifadesinde $\ell \to \infty$ iken limite geçilirse $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{k} a_{nk}x_k = \sum_{k}\bar{a}_{nk}y_k \tag{2.3.9}$$

olur. Bu durumda ℓ_p-normu alınırsa

$$\|A(x)\|_{\ell_p} = \|\bar{A}(y)\|_{\ell_p} < \infty$$

elde edilir. Bu ise $A \in (e_c^t(B^{(m)}), \ell_p)$ demektir.

Tersine, $A \in (e_c^t(B^{(m)}), \ell_p)$ olsun. $e_c^t(B^{(m)})$ ve ℓ_p uzayları BK-uzayı olduklarından Lemma 1.2.10'dan dolayı $\forall x \in e_c^t(B^{(m)})$ için

$$\|A(x)\|_{\ell_p} \le K\|x\|_{e_c^t(B^{(m)})} \tag{2.3.10}$$

olacak şekilde bir $K > 0$ reel sayısı vardır. $F \in \mathcal{F}$ ve her sabit $k \in \mathbb{N}$ için $c^{(k)} = \left\{c_n^{(k)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi Teorem 2.1.6'da tanımlanan dizi olsun. $x = (x_k) = \sum_{k\in F} c^{(k)}$ dizisi $e_c^t(B^{(m)})$ uzayına ait olduğu için (2.3.10) eşitliği bu $x = (x_k)$ dizisi içinde sağlanacaktır. Dolayısıyla

$$\|A(x)\|_{\ell_p} = \left(\sum_{n}\left|\sum_{k\in F}\bar{a}_{nk}\right|^p\right)^{1/p} \le K\|x\|_{e_c^t(B^{(m)})}$$

elde edilir. Bu durum (2.3.3) şartının sağlandığını gösterir.

Kabulden dolayı A matrisi $e_c^t(B^{(m)})$ uzayına uygulanabileceğinden $(2.3.4)-(2.3.6)$ şartlarının sağlandığı açıktır. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 2.3.3. $A \in (e_0^t(B^{(m)}), \ell_p) \Leftrightarrow$
(i) $1 \le p < \infty$ için $(2.3.3)-(2.3.5)$ şartları sağlanır.
(ii) $p=\infty$ için (2.3.4), (2.3.5) ve (2.3.7) şartları sağlanır.

İspat: Bu teoremin ispatı, Teorem 2.3.2'nin ispatına benzer şekilde yapılabilir.

Teorem 2.3.4. $A \in (e_c^t(B^{(m)}), c)$ olması için gerek ve yeter şartlar (2.3.4) ve (2.3.7)'nin sağlanması ve

$$\lim_{n\to\infty} \bar{a}_{nk} = \alpha_k\,; \quad \forall k \in \mathbb{N}, \tag{2.3.11}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_k \bar{a}_{nk} = \alpha; \ \exists \alpha \in \mathbb{R} \tag{2.3.12}$$

olmasıdır.

İspat: A matrisi için (2.3.4), (2.3.7), (2.3.11) ve (2.3.12) şartları sağlansın ve $x_k \to l\ (k\to\infty)$ olacak şekilde $x=(x_k) \in e_c^t(B^{(m)})$ dizisi verilsin. Bu durumda Teorem 2.2.3'den dolayı $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\{a_{nk}\}_{k\in\mathbb{N}} \in \{e_c^t(B^{(m)})\}^\beta$ olacağından $A(x)$'in varlığı garantilenmiş olur. Ayrıca (2.3.11) ve (2.3.7)'den her bir $k \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{j=0}^{m} |\alpha_j| \le \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_j |\bar{a}_{nj}| < \infty; \ \ (m \in \mathbb{N})$$

olur. Bu ise $(\alpha_k) \in \ell_1$ ve dolayısıyla da $\sum_k \alpha_k(y_k - l)$ serisinin yakınsak olduğunu gösterir. Burada $y=(y_k)$ dizisi (2.2.1) ile verilen dizidir. $x_k \to l\ (k\to\infty)$ olduğundan $y_k \to l\ (k\to\infty)$'dır. Diğer taraftan (2.3.9) eşitliği kullanılarak

$$\sum_k a_{nk}x_k = \sum_k \bar{a}_{nk}(y_k - l) + \sum_k \bar{a}_{nk}\ ; (n \in \mathbb{N}) \tag{2.3.13}$$

yazılabilir. Bu durumda (2.3.7), (2.3.11) ve (2.3.12) ifadeleri göz önünde bulundurularak (2.3.13) eşitliğinde $n \to \infty$ iken limite geçilirse, eşitliğin sağ tarafındaki ilk toplam $\sum_k \alpha_k(y_k - l)$'ye, ikinci toplam ise $l\alpha$'ya yakınsar. Dolayısıyla (2.3.13)'den

$$(A(x))_n \to \sum_k \alpha_k(y_k - l) + l\alpha; (n \to \infty)$$

elde edilir. Bu ise $A \in (e_c^t(B^{(m)}), c)$ olduğunu gösterir.

Tersine $A \in (e_c^t(B^{(m)}), c)$ olsun. $c \subset \ell_\infty$ kapsaması sağlandığından (2.3.4) ve (2.3.7)'nin gerekliliği Teorem 2.3.3 (ii)'den görülür. Diğer taraftan her bir $k \in \mathbb{N}$ için Teorem 2.1.6'daki gibi tanımlanan $x = c^{(k)} = \left\{c_n^{(k)}\right\}_{n\in\mathbb{N}} \in e_c^t(B^{(m)})$ dizisi ele alınacak olursa, her bir $k \in \mathbb{N}$ için $A(c^{(k)}) = \{\bar{a}_{nk}\}_{n\in\mathbb{N}} \in c$ olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Bu ise (2.3.11)'in gerekliliğini gösterir.

Benzer şekilde (2.3.9)'da $x = e$ alınırsa $A(x) = \{\sum_k \bar{a}_{nk}\}_{n\in\mathbb{N}} \in c$ bulunur. Buradan (2.3.12)'in gerekliliği elde edilir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

Aşağıdaki teoremlerin ispatı, Teorem 2.3.4'ün ispatına benzer şekilde yapılabilir.

Teorem 2.3.5. $A \in (e_0^t(B^{(m)}), c)$ olması için gerek ve yeter şartlar (2.3.4), (2.3.7) ve (2.3.11)'in sağlanmasıdır.

Teorem 2.3.6. $A \in (e_c^t(B^{(m)}), c_0)$ olması için gerek ve yeter şartlar (2.3.4) ve (2.3.7)'nin sağlanması ve

$$\lim_{n\to\infty} \bar{a}_{nk} = 0; \ \forall k \in \mathbb{N},$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_k \bar{a}_{nk} = 0 \tag{2.3.14}$$

olmasıdır.

Teorem 2.3.7. $A \in (e_0^t(B^{(m)}), c_0)$ olması için gerek ve yeter şartlar (2.3.4), (2.3.7) ve (2.3.14)'ün sağlanmasıdır.

Teorem 2.3.8. $A = (a_{nk})$ bir sonsuz matris ve $\bar{A} = (\bar{a}_{nk})$ matrisi de (2.3.2)'de tanımlanan matris olsun. Bu durumda A matrisi $(e_\infty^t(B^{(m)}), c_0)$, $(e_\infty^t(B^{(m)}), c)$ ya da $(e_\infty^t(B^{(m)}), \ell_\infty)$ sınıflarından herhangi birinde ise (2.3.7) şartı sağlanır.

İspat: Bu sonuç, Lemma 1.2.33 ve Teorem 2.2.5'den elde edilir.

2.4. $e_0^t(B^{(m)})$ ve $e_\infty^t(B^{(m)})$ Uzaylarında Kompakt Operatörler

Bu bölümde, NH ölçüsünün uygulanması ile ilk olarak keyfi bir T üçgensel matrisi için $((\ell_\infty)_T, c_0) \subset K((\ell_\infty)_T, c_0)$ ve $((\ell_\infty)_T, c) \subset K((\ell_\infty)_T, c)$ kapsamalarının sağlandığı gösterilecektir. Daha sonra da $e_0^t(B^{(m)})$ ve $e_\infty^t(B^{(m)})$ uzayları üzerinde tanımlanan bazı matris dönüşümlerinin kompakt olması durumu incelenecektir.

Bölüm boyunca bir $T = (t_{nk})$ üçgensel matrisinin tersi $S = (s_{nk})$ matrisi ile gösterilecektir. T bir üçgensel matris olduğundan S'nin mevcut ve üçgensel olduğu açıktır.

Lemma 2.4.1. $X \in \{\ell_\infty c, c_0\}$ olsun ve $\hat{A} = (\hat{a}_{nk})$ matrisi $\forall n, k \in \mathbb{N}$ için

$$\hat{a}_{nk} = \sum_{j=k}^{\infty} a_{nj} s_{jk}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $A \in ((\ell_\infty)_T, X)$ ise $\hat{A} \in (\ell_\infty, X)$'dir.

İspat: $A \in ((\ell_\infty)_T, X)$ olsun ve herhangi bir $x = (x_k) \in (\ell_\infty)_T$ verilsin. $y = (y_k)$ dizisi $x = (x_k)$ dizisinin T-dönüşüm dizisi olarak tanımlansın. Yani $\forall k \in \mathbb{N}$ için

$$y_k = \sum_{j=0}^{k} t_{nj}\, x_j; \quad (n \in \mathbb{N})$$

olsun. Bu durumda $y = (y_k) \in \ell_\infty$ olduğu açıktır. Diğer taraftan $\forall n, m \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{k=0}^{m} a_{nk}x_k = \sum_{k=0}^{m} a_{nk}\left(\sum_{j=0}^{k} s_{kj}y_j\right) = \sum_{k=0}^{m}\left(\sum_{j=k}^{m} a_{nj}s_{jk}\right)y_k \qquad (2.4.1)$$

yazılabilir. (2.4.1) eşitliğinde $m \to \infty$ iken limite geçilirse

$$\sum_k a_{nk}x_k = \sum_k \hat{a}_{nk}y_k$$

elde edilir. Yani $Ax = \hat{A}y$ olur. $Ax \in X$ olduğundan $\hat{A}y \in X$'dir. Bu ise $\hat{A} \in (\ell_\infty, X)$ olduğunu gösterir.

Lemma 2.4.2. $\hat{A} = (\hat{a}_{nk})$ matrisi Lemma 2.4.1'de tanımlandığı gibi olsun. Bu durumda $A \in ((\ell_\infty)_T, c_o)$ ise

$$\|L_A\|_\chi = \lim_{r\to\infty}\left(\sup_{n\ge r}\left(\sum_{k=0}^{\infty}|\hat{a}_{nk}|\right)\right)$$

dır [58].

Lemma 2.4.3. $\hat{A} = (\hat{a}_{nk})$ matrisi Lemma 2.4.1'deki gibi tanımlansın ve her bir $k \in \mathbb{N}$ için $\hat{\alpha}_k = \lim_{n\to\infty}\hat{a}_{nk}$ olsun. Bu durumda $A \in ((\ell_\infty)_T, c)$ ise

$$\frac{1}{2}\lim_{r\to\infty}\left(\sup_{n\ge r}\left(\sum_{k=0}^{\infty}|\hat{a}_{nk} - \hat{\alpha}_k|\right)\right) \le \|L_A\|_\chi \le \lim_{r\to\infty}\left(\sup_{n\ge r}\left(\sum_{k=0}^{\infty}|\hat{a}_{nk} - \hat{\alpha}_k|\right)\right)$$

dır [58].

Lemma 2.4.4. $A \in ((\ell_\infty)_T, c_o)$ ya da $A \in ((\ell_\infty)_T, c)$ ise $\|L_A\|_\chi = 0$'dır.

İspat: $A \in ((\ell_\infty)_T, c_o)$ olsun. Lemma 2.4.1' de $X = c_0$ olarak alınırsa $\hat{A} \in (\ell_\infty, c_0)$ olur. Bu yüzden Lemma 1.2.11(ii)'den

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |\hat{a}_{nk}| = 0$$

olduğu görülür. O halde bu eşitlikle beraber Lemma 2.4.2 ve Tanım 1.1.3 birlikte düşünülürse

$$\|L_A\|_\chi = \lim_{r\to\infty}\left(\sup_{n\geq r}\left(\sum_{k=0}^{\infty}|\hat{a}_{nk}|\right)\right) = \limsup_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty}|\hat{a}_{nk}| = 0$$

elde edilir.

$A \in ((\ell_\infty)_T, c)$ durumu, Lemma 1.2.11(i) ve Lemma 2.4.3 kullanılarak benzer şekilde ispatlanabilir.

Sonuç 2.4.5. $((\ell_\infty)_T, c_0) \subset K((\ell_\infty)_T, c_0)$ ve $((\ell_\infty)_T, c) \subset K((\ell_\infty)_T, c)$'dır.

İspat. Lemma 2.2.4 ve Tanım 1.3.9(ii)'den istenilen elde edilir.

Teorem 2.4.6.

(i) $A \in (e_0^t(B^{(m)}), c_0)$ ise

$$\|L_A\|_\chi = \limsup_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}|\bar{a}_{nk}|\right) \tag{2.4.2}$$

dır.

(ii) $A \in (e_0^t(B^{(m)}), \ell_\infty)$ ya da $A \in (e_\infty^t(B^{(m)}), \ell_\infty)$ ise

$$0 \leq \|L_A\|_\chi \leq \limsup_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}|\bar{a}_{nk}|\right) \tag{2.4.3}$$

dır.

İspat: Teorem 2.3.3(ii), Teorem 2.3.7 ve Teorem 2.3.8'den (2.4.2) ve (2.4.3)'deki limitlerin varlığı açıktır. Kısalık olması bakımından $X = e_0^t(B^{(m)}), e_\infty^t(B^{(m)})$ için $S = S_X$ olsun. Lemma 1.2.26(i) ve Tanım 1.3.9(i)'den

$$\|L_A\|_\chi = \chi(AS) \tag{2.4.4}$$

dir.

(i) $AS \in \mathcal{M}_{c_0}$'dır. Her $x = (x_k) \in c_0$ için $P_r: c_0 \to c_0$ $(r \in \mathbb{N})$ operatörü

$$P_r = (x_0, x_1, \dots, x_r, 0, 0, \dots) \tag{2.4.5}$$

şeklinde tanımlansın. I dönüşümü c_0 üzerindeki birim dönüşüm olmak üzere Lemma 1.3.8'den

$$\chi(AS) = \lim_{r\to\infty}\left(\sup_{x\in S}\|(I-P_r)(A(x))\|_{\ell_\infty}\right) \tag{2.4.6}$$

bulunur. O halde her bir $r \in \mathbb{N}$ ve her $x \in X$ için $\|(I-P_r)(A(x))\|_{\ell_\infty} = \sup_{n>r}|A_n(x)|$'dir. Bu yüzden Tanım 1.2.29 ve Teorem 2.2.5'den her bir $r \in \mathbb{N}$ için

$$\sup_{x\in S}\|(I-P_r)(A(x))\|_{\ell_\infty} = \sup_{n>r}\|A_n\|_X^* = \sup_{n>r}\|\bar{A}_n\|_{\ell_1}$$

elde edilir. Bu sonuç ve (2.4.6)'dan

$$\chi(AS) = \lim_{r\to\infty}\left(\sup_{n>r}\|\bar{A}_n\|_{\ell_1}\right) = \limsup_{n\to\infty}\|\bar{A}_n\|_{\ell_1}$$

olur. Dolayısıyla (2.4.4)'den (2.4.2) elde edilir.

(ii) Her $x = (x_k) \in \ell_\infty$ için $P_r : \ell_\infty \to \ell_\infty \ (r \in \mathbb{N})$ dönüşümü (2.4.5)'deki gibi tanımlansın. O halde I dönüşümü ℓ_∞ üzerindeki birim dönüşüm olmak üzere her $r \in \mathbb{N}$ için

$$AS \subset P_r(AS) + (I - P_r)(AS)$$

dir. Bu yüzden χ fonksiyonun özellikleri kullanırsa $\forall r \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} 0 \leq \chi(AS) &\leq \chi\big(P_r(AS)\big) + \chi\big((I - P_r)(AS)\big) \\ &= \chi\big((I - P_r)(AS)\big) \\ &\leq \sup_{x \in S} \|(I - P_r)(A(x))\|_{\ell_\infty} \\ &= \sup_{n > r} \|\bar{A}_n\|_{\ell_1} \end{aligned}$$

olur. Sonuç olarak $\forall r \in \mathbb{N}$ için

$$0 \leq \chi(AS) \leq \lim_{r \to \infty} \left(\sup_{n > r} \|\bar{A}_n\|_{\ell_1} \right) = \limsup_{n \to \infty} \|\bar{A}_n\|_{\ell_1}$$

bulunur. Bu son eşitsizlik ve (2.4.4) birlikte düşünülürse (2.4.3) elde edilir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

Sonuç 2.4.7.

(i) $A \in (e_0^t\big(B^{(m)}\big), c_0)$ olsun. Bu durumda

$$L_A \text{ kompakt} \Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} |\bar{a}_{nk}| \right) = 0$$

dır.

(ii) $A \in (e_0^t\big(B^{(m)}\big), \ell_\infty)$ ya da $A \in (e_\infty^t\big(B^{(m)}\big), \ell_\infty)$ olsun. Bu durumda

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}|\bar{a}_{nk}|\right)=0$$

ise L_A kompakttır.

İspat: Bu sonuç, Teorem 2.4.6 ile Tanım 1.3.9(ii) ve Tanım 1.1.2'nin birlikte kullanılması ile elde edilir.

Teorem 2.4.8. $A \in (e_0^t(B^{(m)}), c)$ ise

$$\frac{1}{2}\limsup_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}|\bar{a}_{nk}-\bar{\alpha}_k|\right)\le \|L_A\|_\chi \le \limsup_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}|\bar{a}_{nk}-\bar{\alpha}_k|\right) \qquad (2.4.7)$$

dır.

İspat: $A \in (e_0^t(B^{(m)}), c)$ ve $S = S_{e_0^t(B^{(m)})}$ olsun. Bu durumda $AS \in \mathcal{M}_c$'dir. $\forall z = (z_n) \in c$ için $P_r: c \to c$ $(r \in \mathbb{N})$ projektör dönüşümü

$$P_r(z) = \bar{z}e + \sum_{n=0}^{r}(z_n - \bar{z})e^{(n)}\,;(r \in \mathbb{N})$$

şeklinde tanımlansın ($\bar{z} = \lim_{n\to\infty} z_n$). O halde I dönüşümü c üzerinde birim dönüşüm olmak üzere her bir $r \in \mathbb{N}$ ve $\forall z = (z_n) \in c$ için $(I - P_r)(z) = \sum_{n=r+1}^{\infty}(z_n - \bar{z})e^{(n)}$ ve bu yüzden de

$$\|(I - P_r)(z)\|_{\ell_\infty} = \sup_{n>r}|z_n - \bar{z}| \qquad (2.4.8)$$

dir. Ayrıca (2.4.4)'deki eşitliğin kullanılması ve Lemma 1.3.10'un uygulanması ile

$$\frac{1}{2}\lim_{r\to\infty}\left(\sup_{x\in S}\|(I - P_r)(A(x))\|_{\ell_\infty}\right) \le \|L_A\|_\chi$$

$$\leq \lim_{r\to\infty}\left(\sup_{x\in S}\left\|(I-P_r)\big(A(x)\big)\right\|_{\ell_\infty}\right) \tag{2.4.9}$$

elde edilir. Diğer taraftan her bir $x=(x_k)\in e_0^t\big(B^{(m)}\big)$ için $y=(y_k)\in c_0$ dizisi (2.1.1) ile verilen dizi olsun. $A\in\big(e_0^t\big(B^{(m)}\big),c\big)$ olduğu için $\bar{A}\in(c_0,c)$ ve $A(x)=\bar{A}(y)$'dir. Ayrıca Lemma 1.2.12'den dolayı her bir $k\in\mathbb{N}$ için $\bar{\alpha}_k=\lim_{n\to\infty}\bar{a}_{nk}$ mevcut, $\bar{\alpha}=(\bar{\alpha}_k)\in\ell_1=c^\beta$ ve $\lim_{n\to\infty}\bar{A}_n(y)=\sum_{k=0}^{\infty}\bar{\alpha}_k\,y_k$'dır. Dolayısıyla (2.4.8)'den $\forall r\in\mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}\|(I-P_r)(A(x))\|_{\ell_\infty} &= \|(I-P_r)(\bar{A}(y))\|_{\ell_\infty}\\ &= \sup_{n>r}\left|\bar{A}_n(y)-\sum_{k=0}^{\infty}\bar{\alpha}_k y_k\right|\\ &= \sup_{n>r}\left|\sum_{k=0}^{\infty}(\bar{a}_{nk}-\bar{\alpha}_k)y_k\right|\end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca $x\in S_{e_0^t(B^{(m)})}\Leftrightarrow y\in S_{c_0}$ olduğundan Tanım 1.2.29 ve Lemma 1.2.30'dan $\forall r\in\mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}\sup_{x\in S}\left\|(I-P_r)\big(A(x)\big)\right\|_{\ell_\infty} &= \sup_{n>r}\left(\sup_{y\in S_{c_0}}\left|\sum_{k=0}^{\infty}(\bar{a}_{nk}-\bar{\alpha}_k)y_k\right|\right)\\ &= \sup_{n>r}\|\bar{A}_n-\bar{\alpha}\|_X^*\\ &= \sup_{n>r}\|\bar{A}_n-\bar{\alpha}\|_{\ell_1}\end{aligned}$$

olduğu görülür. Sonuç olarak (2.4.9)'dan (2.4.7) elde edilir.

Sonuç 2.4.9. $A\in\big(e_0^t\big(B^{(m)}\big),c\big)$ olsun. O zaman

$$L_A \text{ kompakt} \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}|\bar{a}_{nk}-\bar{\alpha}_k|\right)=0$$

dır.

İspat: Bu sonuç, Teorem 2.4.8 ile Tanım 1.3.9(ii) ve Tanım 1.1.2'nin birlikte kullanılması ile elde edilir.

Teorem 2.4.10. $(e_\infty^t(B^{(m)}), c_0) \subset K(e_\infty^t(B^{(m)}), c_0)$ ve $(e_\infty^t(B^{(m)}), c_0) \subset K(e_\infty^t(B^{(m)}), c)$ kapsamaları sağlanır. Yani her bir $A \in (e_\infty^t(B^{(m)}), c_0)$ ya da $A \in (e_\infty^t(B^{(m)}), c)$ matrisi için L_A operatörü kompakttır.

İspat: Sonuç 2.4.5'de $T = T^{(m)}$ alınırsa istenilen sağlanır.

Teorem 2.4.11. Her bir $r \in \mathbb{N}$ için

$$\|A\|_{(e_0^t(B^{(m)}),\ell_1)}^{(r)} = \sup_{N \in \mathcal{F}_r} \sum_{k=0}^{\infty} \left| \sum_{n \in N} \bar{a}_{nk} \right|$$

olsun. Bu durumda $A \in (e_0^t(B^{(m)}), \ell_1)$ ise,

$$\text{(i)} \quad \lim_{r\to\infty} \|A\|_{(e_0^t(B^{(m)}),\ell_1)}^{(r)} \leq \|L_A\|_\chi \leq 4. \lim_{r\to\infty} \|A\|_{(e_0^t(B^{(m)}),\ell_1)}^{(r)} \tag{2.4.10}$$

$$\text{(ii)} \ L_A \text{ kompakt} \Leftrightarrow \lim_{r\to\infty} \|A\|_{(e_0^t(B^{(m)}),\ell_1)}^{(r)} = 0$$

şartları sağlanır.

İspat: $\mathcal{F} \supset \mathcal{F}_0 \supset \mathcal{F}_1 \supset \cdots$ kapsamaları sağlandığından Lemma 1.2.35'den dolayı negatif olmayan $\left(\|A\|_{(e_0^t(B^{(m)}),\ell_1)}^{(r)}\right)_{r=0}^{\infty}$ dizisi artmayan ve sınırlı bir dizidir. Dolayısıyla (2.4.10)'daki limit mevcuttur.

$S = S_{e_0^t(B^{(m)})}$ olsun. Lemma 1.2.26(i)'den dolayı $L_A(S) = AS \in \ell_1$' dir. Bu yüzden Tanım 1.3.9(i) ve Lemma 1.3.8'den

$$\|L_A\|_\chi = \chi(AS) = \lim_{r\to\infty}\left(\sup_{x\in S}\left(\sum_{n=r+1}^{\infty}|A_n(x)|\right)\right) \tag{2.4.11}$$

yazılabilir. $A \in (e_0^t(B^{(m)}), \ell_1)$ olduğundan Lemma 1.2.34'den dolayı $\forall x \in e_0^t(B^{(m)})$ ve her bir $r \in \mathbb{N}$ için

$$\sup_{N\in\mathcal{F}_r}\left|\sum_{n\in N} A_n(x)\right| \leq \sum_{n=r+1}^{\infty}|A_n(x)| \leq 4.\sup_{N\in\mathcal{F}_r}\left|\sum_{n\in N} A_n(x)\right| \tag{2.4.12}$$

eşitsizliği sağlanır. Diğer taraftan her bir $n \in \mathbb{N}$ için $A_n \in \{e_0^t(B^{(m)})\}^\beta$ olduğundan Lemma 1.2.32'de $T = T^{(m)}$ alınırsa her $N \in \mathcal{F}_r$ $(r \in \mathbb{N})$ için

$$\sup_{x\in S}\left|\sum_{n\in N} A_n(x)\right| = \sup_{x\in S}\left|\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{n\in N} a_{nk}\right)x_k\right| = \left\|\sum_{n\in N} A_n\right\|_{e_0^t(B^{(m)})}^{*} = \left\|\sum_{n\in N} \bar{A}_n\right\|_{\ell_1}$$

olur. Bu son eşitlik ve (2.4.12) eşitsizliği birlikte düşünülürse her bir $r \in \mathbb{N}$ için

$$\sup_{N\in\mathcal{F}_r}\left\|\sum_{n\in N} \bar{A}_n\right\|_{\ell_1} \leq \sup_{x\in S}\left(\sum_{n=r+1}^{\infty}|A_n(x)|\right) \leq 4.\sup_{N\in\mathcal{F}_r}\left\|\sum_{n\in N} \bar{A}_n\right\|_{\ell_1} \tag{2.4.13}$$

elde edilir. Dolayısıyla (2.4.13)'de $r \to \infty$ iken limite geçilir ve (2.4.11) eşitliği kullanılırsa (2.4.10)'da verilen eşitsizlik elde edilir. Bu ise Teoremin (i) kısmının ispatını tamamlar.

Teoremin (ii) kısmı, yukarıda ispatlanan (i) kısmı ve Tanım 1.3.9(ii)'nin birlikte kullanılmasıyla elde edilir. Dolayısıyla istenilen sağlanır.

BÖLÜM 3. AĞIRLIKLI ORTALAMA B-FARK DİZİ UZAYLARI VE KOMPAKT OPERATÖRLER

Bu bölümde $G(u,v)$ ağırlıklı ortalama ve $B(r,s)$ genelleştirilmiş fark matrisinin kullanılması ile $\ell(u,v,p;B)$ ve $\ell_p(u,v;B)$ dizi uzayları tanımlanıp bu uzayların sırasıyla $\ell(p)$ ve ℓ_p uzaylarına lineer izomorfik oldukları gösterilecektir. Ayrıca $\ell(u,v,p;B)$ paranormlu dizi uzayının Schauder bazı belirlenip, $\alpha-$, $\beta-$, $\gamma-$dualleri oluşturulacaktır. Daha sonra $\ell(u,v,p;B)$ uzayından ℓ_∞, c ve c_0 uzaylarına tanımlanan matris dönüşümlerinin sınıfları karakterize edilecek ve son olarak da $\ell_p(u,v;B)$ normlu dizi uzayı üzerinde tanımlanan bazı matris dönüşümlerinin kompakt olması için taşıması gereken şartlar NH ölçüsü kullanılarak incelenecektir.

Bölüm boyunca $p=(p_k)$ pozitif reel sayıların sınırlı bir dizisi, $\sup_k p_k = H$, $M=\max\{1,H\}$ ve $p_k^{-1}+(p_k')^{-1}=1$ olarak kabul edilecektir. Kısalık olması bakımından $G(u,v;B)=G(u,v).B(r,s)$ olarak alınacak ve $\forall j,k\in\mathbb{N}$ için

$$\bar{\Delta}(j,k)=(-1)^{j-k}\left(\frac{s^{j-k}}{r^{j-k+1}v_k}+\frac{s^{j-k-1}}{r^{j-k}v_{k+1}}\right)$$

notasyonu kullanılacaktır. Buradaki u,v dizileri ile r,s reel sayıları $G(u,v)$ ve $B(r,s)$ matrislerinin tanımındaki gibidir.

3.1. Giriş

Tanım 3.1.1. $y=(y_n)$ dizisi, bir $x=(x_k)$ dizisinin $G(u,v;B)=G(u,v).B(r,s)$-dönüşüm dizisi, yani

$$y_0 = ru_0v_0 \text{ ve } k \geq 1 \text{ için } y_k = u_k\left(\sum_{j=0}^{k-1}(rv_j + sv_{j+1})x_j + rv_kx_k\right) \tag{3.1.1}$$

olmak üzere $\ell(u, v, p; B)$ dizi uzayı

$$\ell(u, v, p; B) = \{x = (x_k) \in \omega: (y_k) \in \ell(p)\}$$

şeklinde tanımlıdır. Eğer $\forall k \in \mathbb{N}$ için $p_k = p$ $(1 \leq p < \infty)$ ise o zaman $\ell(u, v, p; B)$ yerine $\ell_p(u, v; B)$ yazılacaktır. Matris etki alanı tanımı kullanılarak $\ell(u, v, p; B)$ ve $\ell_p(u, v; B)$ uzayları

$$\ell(u, v, p; B) = \big(\ell(p)\big)_{G(u,v;B)} \text{ ve } \ell_p(u, v; B) = \big(\ell_p\big)_{G(u,v;B)} \tag{3.1.2}$$

şeklinde tekrar tanımlanabilir.

Teorem 3.1.2.
(i) $\ell(u, v, p; B)$ uzayı

$$g(x) = \left(\sum_k \left|\sum_{j=0}^{k-1} u_k(rv_j + sv_{j+1})x_j + ru_kv_kx_k\right|^{p_k}\right)^{1/M}$$

paranormu ile bir paranormlu uzaydır.

(ii) $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $\ell_p(u, v; B)$ uzayı

$$\|x\|_{\ell_p(u,v;B)} = \|y\|_{\ell_p}$$

normu ile bir BK-uzayıdır.

İspat: (ii) kısmı Teorem 2.1.4'ün ispatına benzer şekilde ispatlanacağı için sadece (i) kısmı ispatlanacaktır.

$\forall z, x \in \ell(u, v, p; B)$ ve herhangi bir $\alpha \in \mathbb{R}$ için

$$\left(\sum_k \left|\sum_{j=0}^{k-1} u_k\big(rv_j + sv_{j+1}\big)\big(z_j + x_j\big) + ru_k v_k x_k (z_k + x_k)\right|^{p_k}\right)^{1/M}$$

$$\leq \left(\sum_k \left|\sum_{j=0}^{k-1} u_k(rv_j + sv_{j+1})z_j + ru_k v_k z_k\right|^{p_k}\right)^{1/M} \qquad (3.1.3)$$

$$+\left(\sum_k \left|\sum_{j=0}^{k-1} u_k(rv_j + sv_{j+1})x_j + ru_k v_k x_k\right|^{p_k}\right)^{1/M}$$

ve

$$|\alpha|^{p_k} \leq \max\{1, |\alpha|^M\} \qquad (3.1.4)$$

eşitsizlikleri kullanılarak $\ell(u, v, p; B)$ uzayının lineer uzay olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Ayrıca $g(\theta) = 0$ ve her $x \in \ell(u, v, p; B)$ için $g(x) = g(-x)$ olduğu açıktır. (3.1.3) ve (3.1.4) eşitsizliklerinin kullanılmasıyla g'nin alt toplamsallık özelliğini ve

$$g(\alpha x) \leq \max\{1, |\alpha|\}\, g(x)$$

eşitsizliğini sağladığı görülür.

Şimdi $g(x^n - x) \to 0$ $(n \to \infty)$ olmak üzere $\ell(u, v, p; B)$ uzayında bir (x^n) dizisi verilsin. Ayrıca (α_n) dizisi $\alpha_n \to \alpha$ $(n \to \infty)$ olacak şekilde skalerlerin bir dizisi olsun. g'nin alt toplamsallık özelliğinden dolayı

$$g(x^n) \leq g(x) + g(x^n - x)$$

eşitsizliği sağlanacağından $\{g(x^n)\}$ dizisi sınırlıdır. Dolayısıyla

$$g(\alpha_n x^n - \alpha x)$$
$$= \left(\sum_k \left| \sum_{j=0}^{k-1} u_k \big(r v_j + s v_{j+1} \big) (\alpha_n x_j^{(n)} - \alpha x_j) + r u_k v_k x_k (\alpha_n x_k^{(n)} - \alpha x_k) \right|^{p_k} \right)^{1/M}$$
$$\leq |\alpha_n - \alpha| g(x^n) + |\alpha| g(x^n - x)$$

eşitsizliğinde $n \to \infty$ iken limite geçilirse $g(\alpha_n x^n - \alpha x) \to 0$ olur. Bu durum skalerle çarpımın sürekli olduğunu gösterir. Bu yüzden g, $\ell(u, v, p; B)$ uzayı üzerinde bir paranormdur.

Son olarak $\ell(u, v, p; B)$ uzayının tamlığının gösterilmesi gerekir. Her bir $i \in \mathbb{N}$ için $x^i = (x_0^i, x_1^i, x_2^i, \ldots)$ olmak üzere (x^i) dizisi $\ell(u, v, p; B)$ uzayında herhangi bir Cauchy dizisi olsun ve $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin. Bu durumda $\forall i, j \geq n_0(\varepsilon)$ için

$$g\big(x^i - x^j\big) < \varepsilon \tag{3.1.5}$$

olacak şekilde bir $n_0(\varepsilon)$ pozitif tamsayısı vardır. g'nin tanımının kullanılması ile her bir sabit $k \in \mathbb{N}$ ve her bir $i, j \geq n_0(\varepsilon)$ için

$$\left| \big\{G(u, v; B)x^i\big\}_k - \big\{G(u, v; B)x^j\big\}_k \right|$$
$$\leq \left(\sum_k \left| \big\{G(u, v; B)x^i\big\}_k - \big\{G(u, v; B)x^j\big\}_k \right|^{p_k} \right)^{1/M} < \varepsilon \tag{3.1.6}$$

elde edilir. Bu ise her bir sabit $k \in \mathbb{N}$ için $\{\{G(u, v; B)x^0\}_k, \{G(u, v; B)x^1\}_k, \ldots\}$ reel sayı dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir. $\mathbb{R}$ reel sayılar uzayı tam olduğundan her bir sabit $k \in \mathbb{N}$ için bu dizi yakınsaktır. $\big\{G(u, v; B)x^i\big\}_k \to \{G(u, v; B)x\}_k$ $(i \to \infty)$ olsun. Şimdi bu sonsuz tane $\{G(u, v; B)x\}_0$, $\{G(u, v; B)x\}_1$, $\{G(u, v; B)x\}_2, \ldots$ limit değeri kullanılarak $\{\{G(u, v; B)x\}_0, \{G(u, v; B)x\}_1, \{G(u, v; B)x\}_2, \ldots\}$ dizisi tanımlansın. (3.1.6) eşitsizliğinden dolayı her bir $m \in \mathbb{N}$ ve $i, j \geq n_0(\varepsilon)$ için

$$\sum_{k=0}^{m}\left|\left\{G(u,v;B)x^i\right\}_k-\left\{G(u,v;B)x^j\right\}_k\right|^{p_k}\leq g\left(x^i-x^j\right)^M<\varepsilon^M \tag{3.1.7}$$

olur. Dolayısıyla $i\geq n_0(\varepsilon)$ için (3.1.7) ifadesinde $j\to\infty$ iken limite geçilirse $g\left(x^i-x^j\right)\leq\varepsilon$ elde edilir. Son olarak (3.1.7)'de $\varepsilon=1$ alınsın ve $i\geq n_0(1)$ olsun. O halde Minkowski eşitsizliğinin kullanılması ile her bir $m\in\mathbb{N}$ için

$$\left[\sum_{k=0}^{m}\left|\{G(u,v;B)x\}_k\right|^{p_k}\right]^{1/M}\leq g\left(x^i-x\right)+g\left(x^i\right)\leq 1+g\left(x^i\right)$$

bulunur. Bu ise $x\in\ell(u,v,p;B)$ olduğunu gösterir. Ayrıca her $i\geq n_0(\varepsilon)$ için $g\left(x-x^i\right)\leq\varepsilon$ olduğundan dolayı $x^i\to x\ (i\to\infty)$'dır. (x^i) dizisi $\ell(u,v,p;B)$ uzayından keyfi seçilmiş bir Cauchy dizisi olduğundan $\ell(u,v,p;B)$ tamdır. Dolayısıyla istenilen sağlanır.

Teorem 3.1.3. Her bir $k\in\mathbb{N}$ için $0<p_k\leq H<\infty$ olsun. Bu durumda $\ell(u,v,p;B)$ dizi uzayı $\ell(p)$ uzayına lineer izomorfiktir. Yani $\ell(u,v,p;B)\cong\ell(p)$'dir.

İspat: $0<p_k\leq H<\infty$ $(k\in\mathbb{N}$) için $\ell(u,v,p;B)$ ve $\ell(p)$ uzayları arasında bire-bir ve örten bir lineer L dönüşümünün varlığının gösterilmesi gerekir. Bu L dönüşümü (3.1.1) ile verilen ifade olarak alınsın. Yani

$$L:\ell(u,v,p;B)\to\ell(p),\quad x\to Lx=G(u,v;B)(x)=y$$

olsun. L'nin lineerliği açıktır. Ayrıca $L(x)=\theta$ ise $x=\theta$ olacağından L operatörü bire-bir'dir.

Şimdi $y\in\ell(p)$ olsun ve $x=(x_k)$ dizisi $\forall k\in\mathbb{N}$ için

$$x_k=\sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{u_j}\bar{\Delta}(k,j)y_j+\frac{1}{ru_kv_k}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda

$$g(x) = \left(\sum_k \left|\sum_{j=0}^{k-1} u_k(rv_j + sv_{j+1})x_j + ru_kv_kx_k\right|^{p_k}\right)^{1/M}$$
$$= \sum_k |y_k|^{p_k} = g_1(y) < \infty$$

olur. Bu yüzden $x \in \ell(u,v,p;B)$ ve dolayısıyla da L örtendir ve paranormu korur. Sonuç olarak L lineer dönüşümü bire-bir ve örten olduğundan istenilen sağlanır.

Teorem 3.1.4. $\forall k \in \mathbb{N}$ için $0 < p_k \leq H < \infty$ ve $\alpha_k = \{G(u,v;B)x\}_k$ olsun ve her bir sabit $k \in \mathbb{N}$ için $b^{(k)} = \left\{b_n^{(k)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi

$$b_n^{(k)} = \begin{cases} \dfrac{\bar{\Delta}(n,k)}{u_k} & (0 \leq n \leq k-1) \\ \dfrac{1}{ru_kv_k} & (n = k) \\ 0 & (n > k) \end{cases} \tag{3.1.8}$$

şeklinde tanımlansın. O zaman $\left\{b^{(k)}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ dizisi $\ell(u,v,p;B)$ uzayının bir bazıdır ve $\ell(u,v,p;B)$ uzayındaki herhangi bir x elemanı

$$x = \sum_k \alpha_k\, b^{(k)}$$

formunda bir tek şekilde yazılabilir.

İspat: Teorem 3.1.3'ün ispatında verilen L dönüşümü $\ell(u,v,p;B)$ ve $\ell(p)$ uzayları arasında bir örten izomorfizm olduğundan, $\ell(p)$'nin bazının bu izomorfizm altındaki ters görüntüsü $\ell(u,v,p;B)$ uzayının bir bazıdır. Dolayısıyla istenilen sağlanır.

3.2. $\boldsymbol{\ell(u,v,p;B)}$ Uzayının $\boldsymbol{\alpha-}$, $\boldsymbol{\beta-}$ ve $\boldsymbol{\gamma-}$dualleri

Bu bölümde $\ell(u,v,p;B)$ uzayının $\alpha-$, $\beta-$ ve $\gamma-$dualleri belirlenecektir.

Lemma 3.2.1. (i) Her bir $k \in \mathbb{N}$ için $1 < p_k \leq H < \infty$ olsun. O zaman $A \in (\ell(p), \ell_1)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sup_{N \in \mathcal{F}} \sum_k \left| \sum_{n \in N} a_{nk} K^{-1} \right|^{p'_k} < \infty$$

olacak şekilde bir $K > 1$ tam sayısının bulunmasıdır.

(ii) Her bir $k \in \mathbb{N}$ için $0 < p_k \leq 1$ olsun. O zaman $A \in (\ell(p), \ell_1)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sup_{N \in \mathcal{F}} \sup_{k \in \mathbb{N}} \left| \sum_{n \in N} a_{nk} \right|^{p_k} < \infty$$

olmasıdır [83].

Lemma 3.2.2. (i) Her bir $k \in \mathbb{N}$ için $1 < p_k \leq H < \infty$ olsun. O zaman $A \in (\ell(p), \ell_\infty)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_k |a_{nk} K^{-1}|^{p'_k} < \infty \tag{3.2.1}$$

olacak şekilde bir $K > 1$ tam sayısının bulunmasıdır.

(ii) Her bir $k \in \mathbb{N}$ için $0 < p_k \leq 1$ olsun. O zaman $A \in (\ell(p), \ell_\infty)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sup_{n,k \in \mathbb{N}} |a_{nk}|^{p_k} < \infty \tag{3.2.2}$$

olmasıdır [84].

Lemma 3.2.3. Her bir $k \in \mathbb{N}$ için $0 < p_k \leq H < \infty$ olsun. O zaman

$A \in (\ell(p), c) \Leftrightarrow$ (3.2.1), (3.2.2) sağlanır ve ayrıca

$$\forall k \in \mathbb{N} \text{ için } \lim_{n \to \infty} a_{nk} = \beta_k \tag{3.2.3}$$

şartı da sağlanır [83].

Teorem 3.2.4. $N \in \mathcal{F}$ kümesi için $N_k^* = N \cap \{n \in \mathbb{N}: n \geq k\}$ olsun ve $C = (c_{nk})$ matrisi $\forall n, k \in \mathbb{N}$ için

$$c_{nk} = \begin{cases} \dfrac{\bar{\Delta}(n,k)}{u_k} a_n & (0 \leq k \leq n-1) \\ \dfrac{a_n}{r u_n v_n} & (n = k) \\ 0 & (n > k) \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda

$$d_1(p) = \left\{ a = (a_n) \in \omega : \sup_{N \in \mathcal{F}} \sup_{k \in \mathbb{N}} \left| \sum_{n \in N_k^*} c_{nk} \right|^{p_k} < \infty \right\}$$

ve

$$d_2(p) = \bigcup_{K > 1} \left\{ a = (a_n) \in \omega : \sup_{N \in \mathcal{F}} \left| \sum_{n \in N_k^*} c_{nk} K^{-1} \right|^{p_k'} < \infty \right\}$$

olmak üzere

(i) $\forall k \in \mathbb{N}$ için $0 < p_k \leq 1$ ise $\{\ell(u, v, p; B)\}^\alpha = d_1(p)$'dir.

(ii) $\forall k \in \mathbb{N}$ için $1 < p_k \leq H < \infty$ ise $\{\ell(u, v, p; B)\}^\alpha = d_2(p)$'dir.

İspat: (i) ile (ii)'nin ispat yöntemi aynı olduğundan sadece (ii)'nin ispatı verilecektir.

$a = (a_n) \in \omega$ olsun. $y = (y_k)$ dizisi (3.1.1) ile verilen dizi olmak üzere

$$a_n x_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\bar{\Delta}(n,k)}{u_k} y_k a_n + \frac{1}{r u_n v_n} y_n a_n = C_n(y); (n \in \mathbb{N})$$

dir. Dolayısıyla $x \in \ell(u,v,p;B) \Leftrightarrow y \in \ell(p)$ olduğu kullanılarak yukarıdaki eşitlikten

$$x \in \ell(u,v,p;B) \text{ iken } ax = (a_n x_n) \in \ell_1 \Leftrightarrow y \in \ell(p) \text{ iken } C(y) \in \ell_1$$

yani

$$a = (a_k) \in \{\ell(u,v,p;B)\}^{\alpha} \Leftrightarrow C \in (\ell(p), \ell_1)$$

elde edilir. O halde Lemma 3.2.1 (i)'de A matrisi yerine C matrisi alınırsa $\{\ell(u,v,p;B)\}^{\alpha} = d_2(p)$ bulunur.

Teorem 3.2.5. $\forall a = (a_n) \in \omega$ ve $k < n$ $(k,n \in \mathbb{N})$ için

$$\tilde{a}_k(n) = \frac{1}{r u_k v_k} a_k + \frac{1}{u_k} \sum_{j=k+1}^{n} \bar{\Delta}(j,k) a_j$$

olmak üzere $d_3(p)$, $d_4(p)$ ve $d_5(p)$ kümeleri

$$d_3(p) = \left\{ a = (a_n) \in \omega \colon \sup_{n,k \in \mathbb{N}} |\tilde{a}_k(n)|^{p_k} < \infty \text{ ve } \left(\frac{a_k}{r u_k v_k} \right) \in \ell_\infty(p) \right\},$$

$$d_4(p) = \left\{ a = (a_n) \in \omega \colon \forall k \in \mathbb{N} \text{ için } \sum_{j=k+1}^{\infty} \bar{\Delta}(j,k) a_j \text{ mevcut} \right\}$$

ve

$$d_5(p) = \bigcup_{K>1} \left\{ a = (a_n) \in \omega : \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{n-1} |\tilde{a}_k(n) K^{-1}|^{p_k'} < \infty \text{ ve } \left(\frac{a_k}{r u_k v_k} K^{-1} \right) \in \ell_\infty(p') \right\}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda

(i) $\forall k \in \mathbb{N}$ için $0 < p_k \leq 1$ ise $\{\ell(u, v, p; B)\}^\beta = d_3(p) \cap d_4(p)$'dir.
(ii) $\forall k \in \mathbb{N}$ için $1 < p_k \leq H < \infty$ ise $\{\ell(u, v, p; B)\}^\beta = d_4(p) \cap d_5(p)$'dir.

İspat: (i) $a = (a_n) \in \omega$ olsun ve $D = (d_{nk})$ matrisi $\forall n, k \in \mathbb{N}$ için

$$d_{nk} = \begin{cases} \tilde{a}_k(n) & (k < n) \\ \dfrac{a_n}{r u_n v_n} & (k = n) \\ 0 & (k > n) \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. $y = (y_k)$ dizisi (3.1.1) ile verilen dizi olmak üzere

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} a_k x_k &= \sum_{k=0}^{n} a_k \left(\sum_{j=0}^{k-1} \frac{\bar{\Delta}(k,j)}{u_j} y_j + \frac{1}{r u_k v_k} y_k \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{r u_k v_k} a_k + \frac{1}{u_k} \sum_{j=k+1}^{n} \bar{\Delta}(j,k) a_j \right) y_k + \frac{a_n}{r u_n v_n} y_n \qquad (3.2.4) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{a}_k(n) y_k + \frac{a_n}{r u_n v_n} y_n = D_n(y); \ \ (n \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

eşitliği sağlanır. $x \in \ell(u, v, p; B) \Leftrightarrow y \in \ell(p)$ olduğu kullanılarak (3.2.4) eşitliğinden

$$x \in \ell(u, v, p; B) \text{ iken } ax = (a_n x_n) \in cs \Leftrightarrow y \in \ell(p) \text{ iken } D(y) \in c$$

yani

$$a = (a_k) \in \{\ell(u, v, p; B)\}^\beta \Leftrightarrow D \in (\ell(p): c)$$

elde edilir. Bu yüzden Lemma 3.2.3 ile (3.2.4) eşitliği birlikte kullanılırsa $\{\ell(u, v, p; B)\}^\beta = d_3(p) \cap d_4(p)$ bulunur.

(ii)'nin ispatı da benzer şekilde yapılabileceğinden detaylara girilmeyecektir.

Teorem 3.2.6.
(i) $\forall k \in \mathbb{N}$ için $0 < p_k \leq 1$ ise $\{\ell(u, v, p; B)\}^\gamma = d_3(p)$'dir.
(ii) $\forall k \in \mathbb{N}$ için $1 < p_k \leq H < \infty$ ise $\{\ell(u, v, p; B)\}^\gamma = d_5(p)$'dir.

İspat: Lemma 3.2.2 ile (3.2.4) ifadesi birlikte düşünülürse

$$x \in \ell(u, v, p; B) \text{iken } ax = (a_n x_n) \in bs \Leftrightarrow y \in \ell(p) \text{ iken } D(y) \in \ell_\infty$$

elde edilir. Bu yüzden (3.2.1) ve (3.2.2)'den, $0 < p_k \leq 1$ için $\{\ell(u, v, p; B)\}^\gamma = d_3(p)$ ve $p_k > 1$ için $\{\ell(u, v, p; B)\}^\gamma = d_5(p)$ bulunur. Bu da ispatı tamamlar.

Lemma 3.2.7. $a = (a_k) \in \omega$ olsun ve $\tilde{a} = (\tilde{a}_k)$ dizisi

$$\tilde{a}_k = \frac{1}{r u_k v_k} a_k + \frac{1}{u_k} \sum_{j=k+1}^{n} \bar{\Delta}(j, k) a_j \,;\, (k \in \mathbb{N})$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $a = (a_k) \in \{\ell_p(u, v; B)\}^\beta$ ise $\tilde{a} = (\tilde{a}_k) \in \ell_q$'dir ve $\forall x = (x_k) \in \ell_p(u, v; B)$ için

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_k = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{a}_k y_k \tag{3.2.5}$$

eşitliği sağlanır ($y = (y_k)$ dizisi (3.1.1) ile verilen dizidir).

İspat: Teorem 3.1.2(ii)'den dolayı $x \in \ell_p(u,v;B) \Leftrightarrow y \in \ell_p$ olduğu ve (3.2.4) eşitliği kullanılarak ispat kolaylıkla yapılabilir.

$1 \leq p < \infty$ olsun. $\ell_p(u,v;B) \supset \varphi$ kapsamasını garantilemek amacı ile, bundan sonra $\ell_p(u,v;B)$ uzayından bahsedildiğinde $u = (u_k) \in \ell_p$ olduğu kabul edilecektir.

Teorem 3.2.8. $1 \leq p < \infty$ olsun ve $\tilde{a} = (\tilde{a}_k)$ dizisi Lemma 3.2.7'deki gibi tanımlansın. Bu durumda her $a = (a_k) \in \{\ell_p(u,v;B)\}^\beta$ için

$$\|a\|^*_{\ell_p(u,v;B)} = \|\tilde{a}\|_{\ell_q} = \begin{cases} \left(\sum_{k=0}^{\infty} |\tilde{a}_k|^q\right)^{1/q} & (1 < p < \infty) \\ \sup_k |\tilde{a}_k| & (p = 1) \end{cases}$$

dir.

İspat: $a = (a_k) \in \{\ell_p(u,v;B)\}^\beta$ olsun. O zaman Lemma 3.2.7'den dolayı $\tilde{a} = (\tilde{a}_k) \in \ell_q$'dir. Ayrıca her $x = (x_k) \in \ell_p(u,v;B)$ ve (3.1.1) bağıntısı ile verilen $y = (y_k) \in \ell_p$ dizileri için (3.2.5) eşitsizliği sağlanır. Diğer taraftan Teorem 3.1.2(ii)'den dolayı $x \in S_{\ell_p(u,v;B)} \Leftrightarrow y \in S_{\ell_p}$ yazılabilir. Dolayısıyla Tanım 1.2.9'dan

$$\|a\|^*_{\ell_p(u,v;B)} = \sup_{x \in S_{\ell_p(u,v;B)}} \left|\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_k\right| = \sup_{y \in S_{\ell_p}} \left|\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{a}_k y_k\right| = \|\tilde{a}\|^*_{\ell(p)} \qquad (3.2.6)$$

elde edilir. Sonuç olarak $\tilde{a} \in \ell_q$ olduğundan Lemma 1.2.31 ve (3.2.6)'dan

$$\|a\|^*_{\ell_p(u,v;B)} = \|\tilde{a}\|^*_{\ell_p} = \|\tilde{a}\|_{\ell_q} < \infty$$

bulunur. Bu da ispatı tamamlar.

3.3. $\boldsymbol{\ell(u,v,p;B)}$ Dizi Uzayı Üzerindeki Bazı Matris Dönüşümleri

Bu bölümde $(\ell(u,v,p;B),\ell_\infty)$, $(\ell(u,v,p;B),c)$ ve $(\ell(u,v,p;B),c_0)$ sınıfları karakterize edilecektir.

Kısalık olması bakımından, bir $A=(a_{nk})$ matrisi verildiğinde $\forall n,k,m\in\mathbb{N}$ için

$$\tilde{a}_{nk}(m)=\frac{a_{nk}}{ru_kv_k}+\frac{1}{u_k}\sum_{j=k+1}^{m}\bar{\Delta}(j,k)a_{nj}\,;(k<m) \tag{3.3.1}$$

ve

$$\tilde{a}_{nk}=\frac{a_{nk}}{ru_kv_k}+\frac{1}{u_k}\sum_{j=k+1}^{\infty}\bar{\Delta}(j,k)a_{nj} \tag{3.3.2}$$

gösterimleri kullanılacaktır.

Teorem 3.3.1. (i) Her bir $k\in\mathbb{N}$ için $1<p_k\leq H<\infty$ olsun. Bu durumda $A\in(\ell(u,v,p;B),\ell_\infty)$ olması için gerek ve yeter şartlar

$$C(K)=\sup_{n\in\mathbb{N}}\sum_k|\tilde{a}_{nk}K^{-1}|^{p_k'}<\infty \tag{3.3.3}$$

olacak şekilde bir $K>1$ tamsayısının bulunabilmesi ve

$$\{\tilde{a}_{nk}\}_{k\in\mathbb{N}}\in d_3(p)\cap d_4(p);\ (n\in\mathbb{N}) \tag{3.3.4}$$

olmasıdır.

(ii) Her bir $k\in\mathbb{N}$ için $0<p_k\leq 1$ olsun. Bu durumda $A\in(\ell(u,v,p;B),\ell_\infty)$ olması için gerek ve yeter şartlar

$$\sup_{n,k\in\mathbb{N}}|\tilde{a}_{nk}|^{p_k}<\infty \tag{3.3.5}$$

ve

$$\{\tilde{a}_{nk}\}_{k\in\mathbb{N}} \in d_4(p) \cap d_5(p);\ (n \in \mathbb{N}) \tag{3.3.6}$$

olmasıdır.

İspat: $0 < p_k \leq 1$ durumu benzer şekilde ispatlanabileceği için sadece $1 < p_k \leq H < \infty$ durumu incelenecektir.

(3.3.3) ve (3.3.4) şartları sağlansın ve herhangi bir $x = (x_k) \in \ell(u, v, p; B)$ verilsin. O zaman Teorem 3.2.5(ii)'den dolayı her bir $n \in \mathbb{N}$ için $\{a_{nk}\}_{k\in\mathbb{N}} \in \{\ell(u, v, p; B)\}^{\beta}$'dir. Dolayısıyla x'in A-dönüşümü yani $A(x)$'in varlığı garantilenmiş olur. (3.1.1) bağıntısı ve $\sum_k a_{nk}x_k$ serisinin m. kısmi toplamı kullanılarak

$$\sum_{k=0}^{m} a_{nk}x_k = \sum_{k=0}^{m-1} \tilde{a}_{nk}(m)y_k + \frac{1}{ru_m v_m} y_m \tag{3.3.7}$$

eşitliği yazılabilir. Kabuldeki şartlar altında (3.3.7) eşitliğinde $m \to \infty$ iken limite geçilirse

$$\sum_{k} a_{nk}x_k = \sum_{k} \tilde{a}_{nk}y_k \tag{3.3.8}$$

elde edilir. Diğer taraftan Lemma 1.1.19 ve (3.3.8) eşitliği birlikte düşünülürse

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left|\sum_{k} a_{nk}x_k\right| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k} |\tilde{a}_{nk}||y_k| \leq K[C(K) + g_1^K(y)] < \infty$$

olduğu görülür. Bu ise $A(x) \in \ell_\infty$ demektir. Dolayısıyla $A \in (\ell(u, v, p; B), \ell_\infty)$'dir.

Tersine $A \in (\ell(u, v, p; B), \ell_\infty)$ ve her bir $k \in \mathbb{N}$ için $1 < p_k \leq H < \infty$ olsun. O zaman $\forall x \in \ell(u, v, p; B)$ için $A(x)$ mevcuttur ve dolayısıyla da her bir $n \in \mathbb{N}$ için $\{a_{nk}\}_{k\in\mathbb{N}} \in \{\ell(u, v, p; B)\}^{\beta}$'dir. Bu yüzden (3.3.4) şartının gerekliliği

Teorem 3.2.5(ii)'den görülür. Diğer taraftan $x \in \ell(u,v,p;B) \Leftrightarrow y \in \ell(p)$ olduğu göz önünde bulundurularak (3.3.8) eşitliği kullanılırsa $\tilde{A} = (\tilde{a}_{nk})$ matrisi $(\ell(p), \ell_\infty)$ sınıfında olur. Bu yüzden $\tilde{A}$ matrisi (3.2.1) şartını sağlar. Bu ise (3.3.3)'ün gerekliliğini gösterir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

Teorem 3.3.2. Her bir $k \in \mathbb{N}$ için $0 < p_k \leq H < \infty$ olsun. Bu durumda $A \in (\ell(u,v,p;B), c)$ olması için gerek ve yeter şartlar $(3.3.3) - (3.3.6)$ şartlarının sağlanması ve

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{a}_{nk} = \tilde{\alpha}_k; \quad (k \in \mathbb{N}) \tag{3.3.9}$$

olacak şekilde bir $(\tilde{\alpha}_k)$ skalerler dizisinin bulunabilmesidir.

İspat: $A \in (\ell(u,v,p;B), c)$ ve her bir $k \in \mathbb{N}$ için $1 < p_k \leq H < \infty$ olsun. $c \subset \ell_\infty$ kapsaması sağlandığından (3.3.3) ve (3.3.4) şartlarının gerekliliği Teorem 3.3.1(i)'den görülür.

Şimdi, her bir $k \in \mathbb{N}$ için (3.1.8)'deki gibi tanımlanan $\{b^{(k)}\} \in \ell(u,v,p;B)$ dizisi verilsin. Hipotezden dolayı her bir $x \in \ell(u,v,p;B)$ için x'in A-dönüşüm dizisi mevcut ve c uzayında olduğundan her bir $k \in \mathbb{N}$ için $A(b^{(k)}) = \{\tilde{a}_{nk}\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi de c uzayındadır. Bu da (3.3.9)'un gerekliliğini gösterir.

Tersine (3.3.3), (3.3.4) ve (3.3.9) şartları sağlansın ve herhangi bir $x = (x_k) \in \ell(u,v,p;B)$ verilsin. O zaman $A(x)$ mevcuttur. Ayrıca $y = (y_k)$ dizisi (3.1.1) ile verilen dizi olmak üzere $y \in \ell(p)$'dir. Bu durumda (3.3.3) ve (3.3.9) şartları ile Lemma 3.2.3 birlikte düşünülürse $\tilde{A} = (\tilde{a}_{nk})$ matrisi $(\ell(p), c)$ sınıfına ait olduğu görülür. Yani $y \in \ell(p)$ ve $\tilde{A}(y) \in \ell(p)$'dir. Sonuç olarak (3.3.8) eşitliğinden $x \in \ell(u,v,p;B)$ iken $A(x) \in c$ elde edilir.

Benzer şekilde $0 < p_k \leq 1$ durumu da incelenebileceğinden ispat tamamlanır.

c uzayı yerine c_0 uzayının alınması ile Teorem 3.3.2'den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.3.3. Her bir $k \in \mathbb{N}$ için $0 < p_k \leq H < \infty$ olsun. Bu durumda $A \in (\ell(u,v,p;B),c_0)$ olması için gerek ve yeter şartlar $(3.3.3) - (3.3.6)$ şartlarının sağlanması ve her bir $k \in \mathbb{N}$ için

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{a}_{nk} = 0$$

olmasıdır.

Teorem 3.3.4. X bir dizi uzayı ve $1 \leq p < \infty$ olsun. Bu durumda $A \in (\ell_p(u,v;B),X)$ ise $\tilde{A} \in (\ell_p,X)$'dir ve $\forall x = (x_k) \in \ell_p(u,v;B)$ için $y = (y_k) \in \ell_p$ dizisi (3.3.1) ile verilen dizi olmak üzere $A(x) = \tilde{A}(y)$'dir.

İspat: $x \in \ell_p(u,v;B)$ ve $A \in (\ell_p(u,v;B),X)$ olsun. Bu durumda her bir $n \in \mathbb{N}$ için $A_n = \{a_{nk}\}_{k\in\mathbb{N}} \in \{\ell_p(u,v;B)\}^{\beta}$'dir. Dolayısıyla Lemma 3.2.7'den her bir $n \in \mathbb{N}$ için $\tilde{A}_n = \{\tilde{a}_{nk}\}_{k\in\mathbb{N}} \in \ell_q$ ve $A(x) = \tilde{A}(y)$ olur. Bu yüzden $\tilde{A}(y) \in X$'dir. Her bir $y \in \ell_p$ dizisi (3.3.1) ile verilen dizi olduğundan dolayı $\tilde{A} \in (\ell_p,X)$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.3.5. Bir $A = (a_{nk})$ sonsuz matrisi verilsin ve $1 < p < \infty$, $q = p/(p-1)$ olsun.

(i) A matrisi $(\ell_p(u,v;B),c_0)$, $(\ell_p(u,v;B),c)$ ya da $(\ell_p(u,v;B),\ell_\infty)$ sınıflarından herhangi birinde ise o zaman

$$\|L_A\| = \|A\|_{(\ell_p(u,v;B),\ell_\infty)} = \sup_n \left(\sum_{k=0}^{\infty} |\tilde{a}_{nk}|^q\right)^{1/q} < \infty$$

dır.

(ii) A matrisi $(\ell_1(u,v;B),c_0)$, $(\ell_1(u,v;B),c)$ ya da $(\ell_1(u,v;B),\ell_\infty)$ sınıflarından herhangi birinde ise o zaman

$$\|L_A\| = \|A\|_{(\ell_1(u,v;B),\ell_\infty)} = \sup_{n,k}|\tilde{a}_{nk}| < \infty$$

dır.

İspat: Bu sonuç Lemma 1.2.33 ve Teorem 3.2.8'den kolaylıkla görülür.

Teorem 3.3.6. $1 \leq p < \infty$ olsun. Eğer $A \in (\ell_1(u,v;B),\ell_p)$ ise

$$\|L_A\| = \|A\|_{(\ell_1(u,v;B),\ell_p)} = \sup_k\left(\sum_{n=0}^{\infty}|\tilde{a}_{nk}|^p\right)^{1/p} < \infty$$

dir.

İspat: Bu teoremin ispatı Teorem 3.3.4'ün göz önünde bulundurulması ile kolaylıkla yapılabileceği için detaylara girilmeyecektir.

Teorem 3.3.7. $1 < p < \infty$, $q = p/(p-1)$ ve

$$\|A\|_{(\ell_p(u,v;B),\ell_1)} = \sup_{N\in\mathcal{F}}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left|\sum_{n\in N}\tilde{a}_{nk}\right|^q\right)^{1/q} < \infty$$

olsun. Eğer $A \in (\ell_p(u,v;B),\ell_1)$ ise

$$\|A\|_{(\ell_p(u,v;B),\ell_1)} \leq \|L_A\| \leq 4.\,\|A\|_{(\ell_p(u,v;B),\ell_1)}$$

dir.

İspat: Bu sonuç Lemma 1.2.35 ve Teorem 3.2.8'den elde edilir.

3.4. $\boldsymbol{\ell_p(u,v;B)}$ $(\mathbf{1 \leq p < \infty})$ Dizi Uzayında Kompakt Operatörler

Bu bölümde $1 \leq p < \infty$ için $\ell_p(u,v;B)$ uzayından c_0, c, ℓ_∞ ve ℓ_1 uzaylarına tanımlanan sonsuz matris dönüşümlerinin kompakt olması için taşıması gereken şartlar belirlenecektir. Son olarak da $K\big(\ell_1(u,v;B),\ell_p\big)$ $(1 \leq p < \infty)$ sınıfı karakterize edilecektir.

Bölüm boyunca kullanılacak olan $\tilde{A} = (\tilde{a}_{nk})$ $(n,k \in \mathbb{N})$ matrisi ve $\tilde{\alpha} = (\tilde{\alpha}_k)$ dizisi sırasıyla (3.3.2) ve (3.3.9)'da tanımlandığı gibi alınacaktır.

Teorem 3.4.1. $1 \leq p < \infty$ ve q da p'nin eşleniği olsun.

(i) $A \in (\ell_p(u,v;B)\,,c_0)$ ise

$$\|L_A\|_\chi = \lim_{r\to\infty}\left(\sup_{n>r}\|\tilde{A}_n\|_{\ell_q}\right) \tag{3.4.1}$$

dir.

(ii) $A \in (\ell_p(u,v;B)\,,c)$ ise

$$\frac{1}{2}\lim_{r\to\infty}\left(\sup_{n\geq r}\|\tilde{A}_n-\tilde{\alpha}\|_{\ell_q}\right) \leq \|L_A\|_\chi \leq \lim_{r\to\infty}\left(\sup_{n\geq r}\|\tilde{A}_n-\tilde{\alpha}\|_{\ell_q}\right) \tag{3.4.2}$$

dir.

(iii) $A \in (\ell_p(u,v;B)\,,\ell_\infty)$ ise

$$0 \leq \|L_A\|_\chi \leq \lim_{r\to\infty}\left(\sup_{n>r}\|\tilde{A}_n\|_{\ell_q}\right) \tag{3.4.3}$$

dir.

İspat: Teorem 3.3.5'den dolayı (3.4.1) ve (3.4.3)'deki limitlerin varlığı açıktır. Benzer şekilde, $A \in (\ell_p(u, v; B), c)$ ise Teorem 3.3.4'den dolayı $\tilde{A} \in (\ell_p, c)$'dir. Dolayısıyla negatif olmayan reel sayıların $\left(\sup_{n\geq r}\left\|\tilde{A}_n - \tilde{\alpha}\right\|_{\ell_q}\right)_{r=0}^{\infty}$ dizisi Lemma 1.2.12'den dolayı artmayan ve sınırlı bir dizidir. O halde (3.4.2)'deki limit de mevcuttur.

Kısalık olması bakımından $S = S_{\ell_p}$ olarak alınsın. Lemma 1.2.26(i) ve Tanım 1.3.9(i)'den dolayı

$$\|L_A\|_\chi = \chi(AS) \tag{3.4.4}$$

dir.

(i) $AS \in \mathcal{M}_{c_0}$'dır. Her $x = (x_k) \in c_0$ için $P_r: c_0 \to c_0$ $(r \in \mathbb{N})$ operatörü (2.4.5)'deki gibi tanımlansın. O zaman Lemma 1.3.8'den

$$\chi(AS) = \lim_{r\to\infty}\left(\sup_{x\in S}\|(I - P_r)(A(x))\|_{\ell_\infty}\right) \tag{3.4.5}$$

olur. Bu yüzden her $x \in \ell_p(u, v; B)$ ve her bir $r \in \mathbb{N}$ için $\|(I - P_r)(A(x))\|_{\ell_\infty} = \sup_{n>r}|A_n(x)|$'dir. O halde Tanım 1.2.29 ve Teorem 3.2.8'den her bir $r \in \mathbb{N}$ için

$$\sup_{x\in S}\|(I - P_r)(A(x))\|_{\ell_\infty} = \sup_{n>r}\|A_n\|_{\ell_p(u,v;B)}^* = \sup_{n>r}\|\bar{A}_n\|_{\ell_q}$$

bulunur. Dolayısıyla (3.4.5)'den (3.4.1) elde edilir.

(ii) $AS \in \mathcal{M}_c$'dır. Bu durumda (3.4.4)'deki $\chi(AS)$'nın değerini hesaplamak için Lemma 1.3.10 uygulanacaktır. Şimdi $\forall z = (z_n) \in c$ için $P_r: c \to c$ $(r \in \mathbb{N})$ projektör dönüşümü $P_0(z) = \bar{z}e$ ve $r \geq 1$ için $P_r(z) = \bar{z}e + \sum_{n=0}^{r-1}(z_n - \bar{z})e^{(n)}$ şeklinde tanımlansın $(\bar{z} = \lim_{n\to\infty} z_n)$. O zaman I dönüşümü c üzerinde birim dönüşüm olmak üzere her bir $r \in \mathbb{N}$ için $(I-P_r)(z) = \sum_{n=r}^{\infty}(z_n - \bar{z})e^{(n)}$ ve bu yüzden de her $z \in c$ ve her bir $r \in \mathbb{N}$ için

$$\|(I-P_r)(z)\|_{\ell_\infty} = \sup_{n\geq r}|z_n - \bar{z}| \tag{3.4.6}$$

olur. Diğer taraftan her bir $r \in \mathbb{N}$ için $\|I-P_r\| = 2$ olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Dolayısıyla

$$\mu(A) = \limsup_{r\to\infty}\left(\sup_{x\in S}\|(I-P_r)(A(x))\|_{\ell_\infty}\right)$$

olmak üzere (3.4.4) ve Lemma 1.3.10'dan

$$\frac{1}{2}\mu(A) \leq \|L_A\|_\chi \leq \mu(A) \tag{3.4.7}$$

bulunur.

Şimdi verilen her bir $x \in \ell_p(u,v;B)$ için $y \in \ell_p$ dizisi (3.1.1)'de tanımlanan dizi olsun. $A \in (\ell_p(u,v;B),c)$ olduğu için Teorem 3.3.4'den dolayı $\tilde{A} \in (\ell_p, c)$ ve $A(x) = \tilde{A}(y)$'dir. Bu durumda Lemma 1.2.12 kullanılırsa her bir $k \in \mathbb{N}$ için $\tilde{\alpha}_k = \lim_{n\to\infty}\tilde{a}_{nk}$ limitleri mevcut, $\tilde{\alpha} = (\tilde{\alpha}_k) \in \ell_q$ ve

$$\lim_{n\to\infty}\tilde{A}_n(y) = \sum_{k=0}^{\infty}\tilde{\alpha}_k y_k$$

dir. Bu yüzden (3.4.6) ifadesinden her $r \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}\|(I-P_r)(A(x))\|_{\ell_\infty} &= \left\|(I-P_r)\big(\tilde{A}(y)\big)\right\|_{\ell_\infty}\\ &= \sup_{n\geq r}\left|\tilde{A}_n(y) - \sum_{k=0}^{\infty}\tilde{\alpha}_k y_k\right|\end{aligned}$$

$$= \sup_{n\geq r}\left|\sum_{k=0}^{\infty}(\tilde{a}_{nk}-\tilde{\alpha}_k)y_k\right|$$

bulunur. Ayrıca $x \in S = S_{\ell_p(u,v;B)} \Leftrightarrow y \in S_{\ell_p}$ olduğundan Tanım 1.2.29 ve Lemma 1.2.31'den $\forall r \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}\sup_{x\in S}\left\|(I-P_r)\big(A(x)\big)\right\|_{\ell_\infty} &= \sup_{n\geq r}\left(\sup_{y\in S_{\ell_p}}\left|\sum_{k=0}^{\infty}(\bar{a}_{nk}-\bar{\alpha}_k)y_k\right|\right)\\ &= \sup_{n\geq r}\left\|\tilde{A}_n-\tilde{\alpha}\right\|_{\ell_p}^{*}\\ &= \sup_{n\geq r}\left\|\tilde{A}_n-\tilde{\alpha}\right\|_{\ell_q}\end{aligned}$$

olur. Sonuç olarak (3.4.7)'den (3.4.2) elde edilir.

Son olarak (iii) kısmını ispatlamak için, $P_r\colon \ell_\infty \to \ell_\infty\ (r \in \mathbb{N})$ dönüşümü her $x = (x_k) \in \ell_\infty$ için (2.4.5)'deki gibi tanımlansın. O halde

$$AS \subset P_r(AS) + (I-P_r)\ (r \in \mathbb{N})$$

kapsamasının sağlandığı açıktır. Bu yüzden χ fonksiyonunun özellikleri kullanılırsa her $r \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}0 \leq \chi(AS) &\leq \chi\big(P_r(AS)\big) + \chi\big((I-P_r)(AS)\big)\\ &= \chi\big((I-P_r)(AS)\big)\\ &\leq \sup_{x\in S}\|(I-P_r)(A(x))\|_{\ell_\infty}\\ &= \sup_{n>r}\left\|\tilde{A}_n\right\|_{\ell_q}\end{aligned}$$

bulunur. Bu son eşitsizlik ve (3.4.4) birlikte düşünülürse (3.4.3) elde edilir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

Teorem 3.4.2. $1 < p < \infty$ ve $q = p/(p-1)$ olsun.

(i) $A \in (\ell_p(u,v;B)\,, c_0)$ ise

$$\|L_A\|_\chi = \limsup_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}|\tilde{a}_{nk}|^q\right)^{1/q} < \infty$$

ve

$$L_A \text{ kompakt} \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}|\tilde{a}_{nk}|^q\right)^{1/q} = 0$$

dir.

(ii) $A \in (\ell_p(u,v;B)\,, c)$ ise

$$\frac{1}{2}.\limsup_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}|\tilde{a}_{nk} - \tilde{\alpha}_k|^q\right)^{1/q} \le \|L_A\|_\chi \le \limsup_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}|\tilde{a}_{nk} - \tilde{\alpha}_k|^q\right)^{1/q}$$

ve

$$L_A \text{ kompakt} \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}|\tilde{a}_{nk} - \tilde{\alpha}_k|^q\right)^{1/q} = 0$$

dir.

(iii) $A \in (\ell_p(u,v;B)\,, \ell_\infty)$ ise

$$0 \le \|L_A\|_\chi \le \limsup_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}|\tilde{a}_{nk}|^q\right)^{1/q}$$

ve

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}|\tilde{a}_{nk}|^q\right)^{1/q} = 0 \text{ ise } L_A \text{ kompakttır.}$$

İspat: Bu sonuç, Teorem 3.4.1 ile Tanım 1.1.3 ve Tanım 1.3.9(ii)'nin birlikte kullanılmasıyla elde edilir.

Teorem 3.4.3.

(i) $A \in (\ell_1(u,v;B)\,, c_0)$ ise

$$\|L_A\|_\chi = \limsup_{n\to\infty}\left(\sup_k|\tilde{a}_{nk}|\right) < \infty$$

ve

$$L_A \text{ kompakt} \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\sup_k|\tilde{a}_{nk}|\right) = 0$$

dir.

(ii) $A \in (\ell_1(u,v;B)\,, c)$ ise

$$\frac{1}{2}.\limsup_{n\to\infty}\left(\sup_k|\tilde{a}_{nk} - \tilde{\alpha}_k|\right) \le \|L_A\|_\chi \le \limsup_{n\to\infty}\left(\sup_k|\tilde{a}_{nk} - \tilde{\alpha}_k|\right)$$

ve

$$L_A \text{ kompakt} \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\sup_k|\tilde{a}_{nk} - \tilde{\alpha}_k|\right) = 0$$

dir.

(iii) $A \in (\ell_1(u,v;B)\,, \ell_\infty)$ ise

$$0 \le \|L_A\|_\chi \le \limsup_{n\to\infty}\left(\sup_k|\tilde{a}_{nk}|\right)$$

ve

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_k|\tilde{a}_{nk}|\right) = 0 \text{ ise } L_A \text{ kompakttır.}$$

İspat: Teorem 3.4.1 ile Tanım 1.1.3 ve Tanım 1.3.9 (ii)'nin birlikte kullanılmasıyla bu teoremin ispatı kolay bir şekilde yapılabilir.

Teorem 3.4.4. $1 \leq p < \infty$ olsun. Bu durumda $A \in (\ell_1(u,v;B), \ell_p)$ ise

$$\|L_A\|_\chi = \lim_{r\to\infty}\left(\sup_k \left(\sum_{n=r}^{\infty} |\tilde{a}_{nk}|^p\right)^{1/p}\right) \tag{3.4.8}$$

ve

$$L_A \text{ kompakt} \Leftrightarrow \lim_{r\to\infty}\left(\sup_k \left(\sum_{n=r}^{\infty} |\tilde{a}_{nk}|^p\right)\right) = 0$$

dır.

İspat: $S = S_{\ell_1(u,v;B)}$ olsun. O zaman Lemma 1.2.26(i)'den dolayı $L_A(S) = AS \in \ell_p$ olur. $P_r: \ell_p \to \ell_p (r \in \mathbb{N})$ dönüşümü her $x = (x_k) \in \ell_p$ için $P_r(x) = (x_0, x_1, \dots, x_r, 0, 0, \dots)$ şeklinde tanımlanırsa Tanım 1.3.9(i) ve Lemma 1.3.8'den

$$\|L_A\|_\chi = \chi(AS) = \lim_{r\to\infty}\left(\sup_{x\in S}\|(I-P_r)(A(x))\|_{\ell_p}\right) \tag{3.4.9}$$

yazılabilir. Her bir $x \in \ell_1(u,v;B)$ için $y \in \ell_1$ dizisi (3.1.1)'de tanımlanan dizi olsun. $A \in (\ell_1(u,v;B), \ell_p)$ olduğu için Teorem 3.3.4'den dolayı $\tilde{A} \in (\ell_1, c)$ ve $A(x) = \tilde{A}(y)$'dir. Bu yüzden her bir $r \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}
\|(I-P_r)(A(x))\|_{\ell_p} &= \left\|(I-P_r)(\tilde{A}(y))\right\|_{\ell_p} \\
&= \left(\sum_{n=r+1}^{\infty} \left|\tilde{A}_n(y)\right|^p\right)^{1/p} \\
&= \left(\sum_{n=r+1}^{\infty} \left|\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{a}_{nk} y_k\right|^p\right)^{1/p} \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{n=r+1}^{\infty} |\tilde{a}_{nk} y_k|^p\right)^{1/p} \\
&\leq \|y\|_{\ell_1}\left(\sup_k\left(\sum_{n=r+1}^{\infty} |\tilde{a}_{nk}|^p\right)^{1/p}\right)
\end{aligned}$$

$$= \|x\|_{\ell_1} \left(\sup_k \left(\sum_{n=r+1}^{\infty} |\tilde{a}_{nk}|^p \right)^{1/p} \right)$$

bulunur. Bu ise

$$\sup_{x \in S} \|(I - P_r)(A(x))\|_{\ell_p} \leq \sup_k \left(\sum_{n=r+1}^{\infty} |\tilde{a}_{nk}|^p \right)^{1/p} \; ; (r \in \mathbb{N})$$

olduğunu gösterir. Dolayısıyla (3.4.9)'dan

$$\|L_A\|_\chi \leq \lim_{r \to \infty} \left(\sup_k \left(\sum_{n=r+1}^{\infty} |\tilde{a}_{nk}|^p \right)^{1/p} \right) \tag{3.4.10}$$

elde edilir.

Eşitsizliğin tersini göstermek için $G(u, v; B)\left(e_G^{(k)}\right) = e^{(k)}$ $(k \in \mathbb{N})$ olacak şekilde $e_G^{(k)} \in \ell_1(u, v; B)$ dizisi verilsin. Teorem 3.3.4'den dolayı her bir $k \in \mathbb{N}$ için $A\left(e_G^{(k)}\right) = \tilde{A}\left(e^{(k)}\right) = (\tilde{a}_{nk})_{n=0}^{\infty}$'dir. $E = \left\{e_G^{(k)} : k \in \mathbb{N}\right\}$ olsun. Bu durumda $E \subset S$ ve bu yüzden de $AE \subset AS$ olur. Dolayısıyla $\chi(AE) \leq \chi(AS) = \|L_A\|_\chi$ bulunur. Diğer taraftan Lemma 1.3.8'den dolayı

$$\chi(AE) = \lim_{r \to \infty} \left(\sup_k \left(\sum_{n=r+1}^{\infty} \left|A_n(e_G^{(k)})\right|^p \right)^{1/p} \right)$$

$$= \lim_{r \to \infty} \left(\sup_k \left(\sum_{n=r+1}^{\infty} |\tilde{a}_{nk}|^p \right)^{1/p} \right)$$

dir. O halde

$$\lim_{r\to\infty}\left(\sup_k\left(\sum_{n=r+1}^{\infty}|\tilde{a}_{nk}|^p\right)^{1/p}\right)\leq \|L_A\|_\chi \tag{3.4.11}$$

bulunur. Sonuç olarak (3.4.10) ve (3.4.11) eşitsizliklerinden (3.4.8) elde edilir.

Teoremin ikinci kısmı Tanım 1.3.9(ii) ve (3.4.8)'in sonucudur. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

Teorem 3.4.5. $1 < p < \infty$ ve $q = p/(p-1)$ olsun ve

$$\|A\|^{(r)}_{(\ell_p(u,v;B)\,,\ell_1)} = \sup_{N\in\mathcal{F}_r}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left|\sum_{n\in N}\tilde{a}_{nk}\right|^q\right)^{1/q} \quad ; (r\in\mathbb{N})$$

olarak tanımlansın. Eğer $A \in (\ell_p(u,v;B)\,,\ell_1)$ ise

$$\lim_{r\to\infty}\|A\|^{(r)}_{(\ell_p(u,v;B)\,,\ell_1)} \leq \|L_A\|_\chi \leq 4.\lim_{r\to\infty}\|A\|^{(r)}_{(\ell_p(u,v;B)\,,\ell_1)}$$

ve

$$L_A \text{ kompakt} \Leftrightarrow \lim_{r\to\infty}\|A\|^{(r)}_{(\ell_p(u,v;B)\,,\ell_1)} = 0$$

dır.

İspat: Teorem 3.3.7'nin kullanılmasıyla Teorem 2.4.11'in ispatındaki benzer yöntemler takip edilirse ispat kolayca elde edilir.

3.5. Bazı Uygulamalar

Bu bölümde, bir önceki bölümde bulunan sonuçları kullanarak $\ell_p(u,v;B)$ uzayından ℓ_∞, c ve c_0 uzaylarındaki matris etki alanlarına tanımlanan matris dönüşümlerinin kompaktlık durumu incelenecektir.

$A=(a_{nk})$ sonsuz bir matris ve $T=(t_{nk})$ bir üçgensel matris olmak üzere $C=(c_{nk})$ matrisi $C=TA$ olarak tanımlansın. Yani

$$c_{nk}=\sum_{m=0}^{n} t_{nm}a_{mk}\,;\quad (n,k\in\mathbb{N}) \tag{3.5.1}$$

olsun. O halde $\forall n\in\mathbb{N}$ için

$$C_n=\sum_{m=0}^{n} t_{nm}A_m=\left(\sum_{m=0}^{n} t_{nm}a_{mk}\right)_{k=0}^{\infty}$$

dır.

$\tilde{A}=(\tilde{a}_{nk})$ ve $\tilde{C}=(\tilde{c}_{nk})$ matrisleri sırasıyla A ve C matrisleriyle (3.3.2)'deki gibi ilişkili matrisler olsun. Bu durumda $\forall n,k\in\mathbb{N}$ için

$$\tilde{c}_{nk}=\sum_{m=0}^{n} t_{nm}\tilde{a}_{mk} \tag{3.5.2}$$

yazılabilir. Dolayısıyla $\forall n\in\mathbb{N}$ için

$$\tilde{C}_n=\sum_{m=0}^{n} t_{nm}\tilde{A}_m=\left(\sum_{m=0}^{n} t_{nm}\tilde{a}_{mk}\right)_{k=0}^{\infty}$$

dır. Ayrıca $A\in\left(\ell_p(u,v;B),c_T\right)$ ise her bir $k\in\mathbb{N}$ için

$$\tilde{c}_k=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{m=0}^{n} t_{nm}\tilde{a}_{mk}\right) \tag{3.5.3}$$

limitleri mevcut olsun.

Teorem 3.5.1. T bir üçgensel matris, $1 < p < \infty$ ve $q = p/(p-1)$ olsun.

(i) $A \in \left(\ell_p(u,v;B),(c_0)_T\right)$ ise

$$\|L_A\|_\chi = \limsup_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}|\tilde{c}_{nk}|^q\right)^{1/q}$$

ve

$$L_A \text{ kompakt} \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}|\tilde{c}_{nk}|^q\right)^{1/q} = 0$$

dır.

(ii) $A \in \left(\ell_p(u,v;B),c_T\right)$ ise

$$\frac{1}{2}.\limsup_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}|\tilde{c}_{nk}-\tilde{c}_k|^q\right)^{1/q} \le \|L_A\|_\chi \le \limsup_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}|\tilde{c}_{nk}-\tilde{c}_k|^q\right)^{1/q}$$

ve

$$L_A \text{ kompakttır} \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}|\tilde{c}_{nk}-\tilde{c}_k|^q\right)^{1/q} = 0$$

dır.

(iii) $A \in \left(\ell_p(u,v;B),(\ell_\infty)_T\right)$ ise

$$0 \le \|L_A\|_\chi \le \limsup_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}|\tilde{c}_{nk}|^q\right)^{1/q}$$

ve

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}|\tilde{c}_{nk}|^q\right)^{1/q} = 0$$

ise L_A kompakt operatördür.

İspat: (ii) ve (iii)'nin ispatı benzer şekilde yapılabileceğinden sadece (i)'nin ispatı verilecektir.

$A \in \left(\ell_p(u,v;B),(c_0)_T\right)$ olsun. Lemma 1.2.23'den dolayı $C = TA \in (\ell_p(u,v;B),c_0)$'dır. Bu durumda $\tilde{C} = (\tilde{c}_{nk})$ matrisi (3.5.2)'de tanımlanan matris olmak üzere Teorem 3.3.4'den $\tilde{C} \in (\ell_p, c_0)$ elde edilir. Dolayısıyla Teorem 3.4.1 (i)'den istenilen elde edilir.

Teorem 3.5.1(i)'nin ispatındaki yöntem ile aşağıdaki teoremler ispatlanabilir.

Teorem 3.5.2. T bir üçgensel matris ve $1 \le p < \infty$ olsun. Bu durumda $A \in \left(\ell_1(u,v;B),\left(\ell_p\right)_T\right)$ ise

$$\|L_A\|_\chi = \lim_{r\to\infty}\left(\sup_k\left(\sum_{n=r}^{\infty}|\tilde{c}_{nk}|^p\right)^{1/p}\right)$$

ve

$$L_A \text{ kompakt} \Leftrightarrow \lim_{r\to\infty}\left(\sup_k\left(\sum_{n=r}^{\infty}|\tilde{c}_{nk}|^p\right)\right) = 0$$

dır.

Teorem 3.5.3. T bir üçgensel matris, $1 < p < \infty$ ve $q = p/(p-1)$ olsun. Ayrıca

$$\|A\|^{(r)}_{(\ell_p(u,v;B)\,,(\ell_1)_T)} = \sup_{N\in\mathcal{F}_r}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left|\sum_{n\in N}\tilde{c}_{nk}\right|^q\right)^{1/q} \quad ;(r\in\mathbb{N})$$

olarak tanımlansın. Eğer $A \in (\ell_p(u,v;B)\,,(\ell_1)_T)$ ise

$$\lim_{r\to\infty}\|A\|^{(r)}_{(\ell_p(u,v;B)\,,(\ell_1)_T)} \le \|L_A\|_\chi \le 4.\,\|A\|^{(r)}_{(\ell_p(u,v;B)\,,(\ell_1)_T)}$$

ve

$$L_A \text{ kompakt} \Leftrightarrow \lim_{r\to\infty} \|A\|^{(r)}_{(\ell_p(u,v;B)\,,(\ell_1)_T)} = 0$$

dır.

Sonuç 3.5.4. $1 < p < \infty$ ve $q = p/(p-1)$ olsun.

(i) $A \in (\ell_p(u,v;B), cs_0)$ ise

$$\|L_A\|_\chi = \limsup_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left| \sum_{m=0}^{n} \tilde{a}_{mk} \right|^q \right)^{1/q}$$

ve

$$L_A \text{ kompakt} \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left| \sum_{m=0}^{n} \tilde{a}_{mk} \right|^q \right)^{1/q} = 0$$

dır.

(ii) Her $k \in \mathbb{N}$ için $\tilde{a}_k = \lim_{n\to\infty}(\sum_{m=0}^{n} \tilde{a}_{mk})$ olmak üzere $A \in (\ell_p(u,v;B), cs)$ ise

$$\frac{1}{2}.\limsup_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left| \sum_{m=0}^{n} \tilde{a}_{mk} - \tilde{a}_k \right|^q \right)^{1/q} \le \|L_A\|_\chi$$

$$\le \limsup_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left| \sum_{m=0}^{n} \tilde{a}_{mk} - \tilde{a}_k \right|^q \right)^{1/q}$$

ve

$$L_A \text{ kompakt} \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left| \sum_{m=0}^{n} \tilde{a}_{mk} - \tilde{a}_k \right|^q \right)^{1/q} = 0$$

dır.

(iii) $A \in (\ell_p(u, v; B), bs)$ ise

$$0 \leq \|L_A\|_\chi \leq \limsup_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left| \sum_{m=0}^{n} \tilde{a}_{mk} \right|^q \right)^{1/q}$$

ve

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} |\tilde{c}_{nk}|^q \right)^{1/q} = 0$$

ise L_A kompakt operatördür.

İspat: Teorem 3.5.1'de T matrisi olarak S toplam matrisi alınırsa istenilen elde edilir.

Son olarak Teorem 3.5.2 ve Teorem 3.5.3'de $T = \Delta^{(1)}$ alınırsa aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 3.5.5. $1 \leq p < \infty$ olsun. O zaman $A \in (\ell_1(u, v; B), bv^p)$ ise

$$\|L_A\|_\chi = \lim_{r\to\infty} \left(\sup_k \left(\sum_{n=r}^{\infty} \left| \tilde{a}_{nk} - \tilde{a}_{n-1,k} \right|^p \right)^{1/p} \right)$$

ve

$$L_A \text{ kompakt} \Leftrightarrow \lim_{r\to\infty} \left(\sup_k \left(\sum_{n=r}^{\infty} \left| \tilde{a}_{nk} - \tilde{a}_{n-1,k} \right|^p \right)^{1/p} \right) = 0$$

dır.

Sonuç 3.5.6. $1 < p < \infty$, $q = p/(p-1)$ olsun ve

$$\|A\|^{(r)}_{(\ell_p(u,v;B)\,,bv)} = \sup_{N\in\mathcal{F}_r}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left|\sum_{n\in N}(\tilde{a}_{nk}-\tilde{a}_{n-1,k})\right|^q\right)^{1/q} \quad ; (r\in\mathbb{N})$$

olarak tanımlansın. Eğer $A\in(\ell_p(u,v;B)\,,bv)$ ise

$$\lim_{r\to\infty}\|A\|^{(r)}_{(\ell_p(u,v;B)\,,bv)} \le \|L_A\|_\chi \le 4.\,\|A\|^{(r)}_{(\ell_p(u,v;B)\,,bv)}$$

ve

$$L_A \text{ kompakt} \Leftrightarrow \lim_{r\to\infty}\|A\|^{(r)}_{(\ell_p(u,v;B)\,,bv)} = 0$$

dır.

BÖLÜM 4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu bölümde, tez çalışmasının orijinal kısmı olan ikinci ve üçüncü bölümde tanımlanan dizi uzaylarının özel durumları verilecek ve bazı önerilerde bulunulacaktır.

Sonuç 4.1. Eğer $e_0^t(B^{(m)})$, $e_c^t(B^{(m)})$ ve $e_\infty^t(B^{(m)})$ uzaylarında $r=1$ ve $s=-1$ alınırsa, [33] nolu çalışmada Polat ve Başar tarafından tanımlanan $e_0^t(\Delta^{(m)})$, $e_c^t(\Delta^{(m)})$ ve $e_\infty^t(\Delta^{(m)})$ dizi uzayları elde edilir.

Sonuç 4.2. Eğer $e_0^t(B^{(m)})$, $e_c^t(B^{(m)})$ ve $e_\infty^t(B^{(m)})$ uzaylarında $r=1$, $s=-1$ ve $m=1$ alınırsa, Altay ve Polat [32] tarafından çalışılan $e_0^t(\Delta)$, $e_c^t(\Delta)$ ve $e_\infty^t(\Delta)$ dizi uzayları elde edilir.

Sonuç 4.3. Eğer $T=G(u,v).\Delta^{(1)}$ olsun. Eğer $\ell(u,v,p;B)$ ve $\ell_p(u,v;B)$ uzaylarında $r=1$ ve $s=-1$ alınırsa, $\ell(u,v,p;\Delta)=(\ell(p))_T$ ve $\ell_p(u,v;\Delta)=(\ell_p)_T$ uzayları elde edilir.

Sonuç 4.4. (λ_k) dizisi Tanım 1.2.18'deki Λ matrisine ait dizi olsun. Bu durumda $\ell_p(u,v;B)$ uzayında $v=(\lambda_k-\lambda_{k-1})$, $u=(\frac{1}{\lambda_n})$ ve $r=1$, $s=-1$ alınırsa $\ell_p^\lambda(\Delta)=\left(\ell_p^\lambda\right)_{\Delta^{(1)}}$ uzayı elde edilir. Buradaki ℓ_p^λ uzayı Mursaleen ve Noman [45] tarafından tanımlanmıştır.

Sonuç 4.5. Eğer $\ell_p(u,v;B)$ uzayında $v=(1+t^k)$ $(0<t<1)$, $u=(1/(n+1))$, $r=1$ ve $s=-1$ alınırsa, [36] nolu çalışmada Demiriz ve Çakan tarafından tanımlanan $a_p^r(\Delta)$ uzayı elde edilir.

Sonuç 4.6. (q_k) dizisi Riesz ortalamasına ait dizi ve $Q_n = \sum_{k=0}^{n} q_k$ $(n \in \mathbb{N})$ olsun. Bu durumda $\ell(u, v, p; B)$ uzayında $v = (q_k)$ ve $u = (\frac{1}{Q_n})$ alınırsa, Başarır [56] tarafından tanımlanan $r^q(p, B)$ uzayı elde edilir. Ayrıca aynı şartlar altında $r = 1$ ve $s = -1$ alınırsa, Başarır ve Öztürk [54] tarafından çalışılan $r^q(p, \Delta)$ dizi uzayı elde edilir.

Dolayısıyla tez çalışmasında bulunan sonuçlar yukarıda elde edilen uzaylara kolaylıkla taşınabilir.

Öneri 4.7. (Pitt Teoremi) $1 \leq p < q < +\infty$ olsun. Bu durumda ℓ_q uzayından ℓ_p uzayına tanımlanan her sınırlı lineer dönüşüm kompakttır [85].

Pitt Teoremi'nin lineer ve lineer olmayan ispatları bazı matematikçiler tarafından çalışılmıştır. NH ölçüsü kullanılarak Pitt Teoremi'nin ispatının yapılması çalışılacak bir problemdir.

Öneri 4.8. 2-normlu Banach uzaylarında ya da daha genel anlamda n-normlu Banach uzaylarında lineer operatörler için NH ölçüsünün tanımlanması çalışılacak bir problemdir.

Öneri 4.9. Paranormlu dizi uzaylarında lineer operatörlere NH ölçüsünün uygulanması çalışılacak bir problemdir.

KAYNAKLAR

[1] MADDOX, I.J., Elements of Functional Analysis, Cambridge Univ. Press., Cambridge, 1970.

[2] MURSALEEN, M., Elements of Metric Spaces, Anamaya Publishers, New Delhi, 2011.

[3] MURSALEEN, M., NOMAN, A.K., Compactness by the Hausdorff mesasure of noncompactness, Nonlinear Analysis, 73 (8), 2541-2557, 2010.

[4] MALKOWSKY, E., RAKOČEVIĆ, V., An introduction into the theory of sequence spaces and measures of noncompactness, Zb. Rad.(Beogr.), 9 (17), 143-234, 2010.

[5] ŞUHUBİ, E.S., Fonksiyonel Analiz, İTÜ Vakfı Yayınları, 2001.

[6] LASCARIDES, C.G., MADDOX, I.J., Matrix transformations between some classes of sequences, Proc. Camb. Phil. Soc., 68, 99-104, 1970.

[7] BOSS, J., PETER, C., Classical and Modern Methods in Summability, Oxford University Press, 2000.

[8] BAŞAR, F., Summability Theory and Its Applications, Bentham Science Publishers, İstanbul, 2011.

[9] MURSALEEN, M., KARAKAYA, V., POLAT, H., ŞİMŞEK, N., Measure of noncompactness of matrix operators on some difference sequence spaces of weighted means, Comput. Math. Appl., 62 (2), 814-820, 2011.

[10] MURSALEEN, M., NOMAN, A.K., Applications of the Hausdorff measure of noncompactness in some sequence spaces of weighted means, Comput. Math. Appl., 60 (5), 1245-1258, 2010.

[11] ALTAY, B., BAŞAR, F., Some paranormed sequence spaces of non-absolute type derived by weighted mean, J. Math. Anal. Appl., 319 (2), 494-508, 2006.

[12] AYDIN, C., BAŞAR, F., On the new sequence spaces which include the spaces c_0 and c, Hokkaido Math. J., 33 (1), 1-16, 2004.

[13] MURSALEEN, M., NOMAN, A.K., On the spaces of λ-convergent and bounded sequences, Thai J. Math., 8 (2), 311-329, 2010.

[14] MUSAYEV, B., ALP, M., Fonksiyonel Analiz, Balcı Yayınları, Kütahya, 2000.

[15] ALTAY, B., BAŞAR, F., On the fine spectrum of the generalized difference operator $B(r,s)$ over the sequence spaces c_0 and c, IJMMS, 18, 3005-3013, 2005.

[16] BAŞARIR, M., KAYIKÇI, M., On the generalized B^m-Riesz sequence spaces and β-property, J. Inequal. Appl., DOI: 10.1155/2009/385029, 2009.

[17] WILANSKY, A., Summability Through Functional Analysis, North-Holland Math. Studies 85, Amsterdam, 1986.

[18] DJOLOVIĆ, I, MALKOWSKY, E., A note on compact operators on matrix domains, J. Math. Anal. Appl., 340 (1), 291-303, 2008.

[19] WANG, C.-S., On Nörlund sequence spaces, Tamkang J. Math., 9, 269-274, 1978.

[20] NG, P.-N., Matrix transformations on Cesaro sequence spaces of non-absolute type, Tamkang J. Math., 10 (2), 215-221, 1978.

[21] ET, M., On some generalized Cesaro difference sequence spaces, İstanbul Üniv., Fen Fak. Mat. Derg., 55-56, 221-229, 1996-1997.

[22] MALKOWSKY, E., Recent results in the theory of matrix transformations in sequence spaces, Mat. Vesnik, 49, 187-196, 1997.

[23] KIZMAZ, H., On certain sequence spaces, Canad. Math. Bull., 24 (2), 169-176, 1981.

[24] RHOADES, B.E., Some sequence spaces which include c_0 and c, Hokkaido Math. J., 35, 587-599, 2006.

[25] KİRİŞÇİ, M., BAŞAR, F., Some new sequence spaces derived by the domain of generalized difference matrix, Comput. Math. Appl., 60(5), 1299-1309, 2010.

[26] MALKOWSKY, E., SAVAŞ, E., Matrix transformations between sequence spaces of generalized weighted mean, Appl. Math. Comput., 147, 333-345, 2004.

[27] ŞENGÖNÜL, M., BAŞAR, F., Some new Cesaro sequence spaces of non-absolute type which include the spaces c_0 and c, Soochow J. Math., 31 (1), 107-119, 2005.

[28] ALTAY, B., BAŞAR, F., On some Euler sequence spaces of nonabsolute type, Ukranian Math. J., 57 (1), 1-17, 2005.

[29] ALTAY, B., BAŞAR, F., MURSALEEN, M., On the Euler sequence spaces which include the spaces ℓ_p and ℓ_∞ I, Inform Sci., 176 (10), 1450-1462, 2006.

[30] MURSALEEN, M., BAŞAR, F., ALTAY, B., On the Euler sequence spaces which include the spaces ℓ_p and ℓ_∞ II, Nonlinear Anal. TMA, 65(3), 707-717, 2006.

[31] AYDIN, C., BAŞAR, F., Some new sequence spaces which include the spaces ℓ_p and ℓ_∞, Demonstratio Math., 38 (3), 641-656, 2005.

[32] ALTAY, B., POLAT, H., On some new Euler difference sequence spaces, Southeast Asian Bulletin of Math., 30, 209-220, 2006.

[33] POLAT, H., BAŞAR, F., Some Euler spaces of difference sequences of order m, Acta Math. Sci., 27B(2), 254-266, 2007.

[34] KARA, E.E., BAŞARIR, M., On some Euler $B^{(m)}$-difference sequence spaces and compact operators, J. Math. Anal. Appl., 379, 499-511, 2011.

[35] AYDIN, C., BAŞAR, F., Some new difference sequence spaces, Appl. Math. Comp., 157 (3), 677-693, 2004.

[36] DEMİRİZ, S., ÇAKAN, C., Some topological and geometrical properties of a new difference sequence space, Abst. Appl. Anal., DOI:10.1155/2011/213878.

[37] POLAT, H., KARAKAYA, V., ŞİMŞEK, N., Difference sequence spaces derived by weighted mean, Appl. Math. Lett., 24 (5), 608-614, 2011.

[38] BAŞAR, F., ALTAY, B., On the space of sequences of p-bounded variation and related matrix mappings, Ukrainian Math. J., 55 (1), 136-147, 2003.

[39] ÇOLAK, R., ET, M., MALKOWSKY, E., Some topics of sequence spaces, Lecture Notes in Mathematics, Fırat Üniversitesi Yayınları, Elazığ, 2004.

[40] ALTAY B., BAŞAR F., The matrix domain and the fine spectrum of the difference operator Δ on the sequence space ℓ_p $(0 < p < 1)$, Commun. Math. Anal., 2 (2), 1-11, 2007.

[41] ÇOLAK, R., ET, M., On some generalized difference sequence spaces and related matrix transformations, Hokkaido Math. J., 26 (3), 483-492, 1997.

[42] ET, M., ÇOLAK, R., On some generalized difference sequence spaces, Soochow J. Math., 21 (4), 377-386, 1995.

[43] MALKOWSKY, M., PARASHAR, S.D., Matrix transformations in space of bounded and convergent difference sequences of order m, Analysis, 17 (1), 87-97, 1997.

[44] ALTAY B., On the space of p-summable difference sequences of order m, $(1 \leq p < \infty)$, Stud. Sci. Math. Hungar., 43 (4), 387-402, 2006.

[45] MURSALEEN, M., NOMAN, A.K., On some new sequence spaces of non-absolute type related to the spaces ℓ_p and ℓ_∞ I, FILOMAT, 25(2), 33-51, 2011.

[46] BAŞAR, F., Infinite matrices and almost boundedness, Boll. Unione Mat. Ital., A(7) 6(3), 395-402, 1992.

[47] BAŞAR, F., ALTAY, B., Matrix mappings on the space $bs(p)$ and its α-, β- and γ-duals, Aligarh Bull. Math., 21 (1), 79-91, 2001.

[48] CHOUDHARY, B., MISHRA, S.K., On Köthe-Toeplitz duals of certain sequence spaces and their matrix transformations, Indian J. Pure Appl. Math., 24 (5), 291-301, 1993.

[49] AHMAD, Z.U., MURSALEEN, M., Köthe-Toeplitz duals of some new sequence spaces and their matrix maps, Publ. Inst. Math. (Beograd), 42, 57-61, 1987.

[50] ET, M., BAŞARIR, M., On some new new generalized difference sequence spaces, Period. Math. Hung., 35 (3), 169-175, 1997.

[51] ALTAY, B., BAŞAR, F., On the paranormed Riesz sequence spaces of non-absolute type, Southeast Asian Bull. Math., 26, 701-715, 2002.

[52] ALTAY, B., BAŞAR, F., Some paranormed Riesz sequence spaces of non-absolute type, Southeast Asian Bull. Math., 30 (5), 591-608, 2006.

[53] KARA, E.E., ÖZTÜRK, M., BAŞARIR, M., Some topological and geometric properties of generalized Euler sequence spaces, Math. Slovaca, 60 (3), 385-398, 2010.

[54] BAŞARIR, M., ÖZTÜRK, M., On the Riesz difference sequence space, Rend. Circ. Mat. Palermo, 57 (3), 377-389, 2008.

[55] ALTAY, B., BAŞAR, F., Generalization of the sequence space $\ell(p)$ derived by weighted mean, J. Math. Anal. Appl., 330, 174-185, 2007.

[56] BAŞARIR, M., On the generalized Riesz B-difference sequence spaces, FILOMAT, 24 (4), 35-52, 2010.

[57] MALAFOSSE DE, B., MALKOWSKY, E., RAKOČEVIĆ, V., Measure of noncompactness of operators and matrices on the spaces c and c_0, IJMMS, DOI: 10.155/IJMMS/2006/46930, 1-5, 2006.

[58] DJOLOVIĆ, I., MALKOWSKY, E., Matrix transformations and compact operators on some new mth order difference sequences, Appl. Math. Comp., 198 (2), 700-714, 2008.

[59] MURSALEEN, M., NOMAN, A.K., The Hausdorff measure of noncompactness of matrix operators on some BK spaces, Operators and Matrices (online).

[60] GOHBERG, I.T., GOLDENSTEIN, L.S., MARKUS, A.S., Investigations of some properties of bounded linear operators with their q-norms, Učenie Zapiski, Kishinevskii Gosuniversitet, 29, 29-36, 1957.

[61] MALAFOSSE DE, B., RAKOČEVIĆ, V., Applications of measures of noncompactness in operators on the spaces, s_α, s_α^0, s_α^c, ℓ_α^p, J. Math. Anal. Appl., 323 (1), 131-145, 2006.

[62] BAŞAR, F., MALKOWSKY, E., The characterization of compact operators on spaces of strongly summable and bounded sequences. Appl. Math. Comput., 217, 5199-5207, 2011.

[63] DJOLOVIĆ, I., Compact operators on the spaces $a_0^r(\Delta)$ and $a_c^r(\Delta)$, J. Math. Anal. Appl., 318, 658-666, 2006.

[64] MALKOWSKY, E., RAKOČEVIĆ, V., ŽIVKOVIC, S., Matrix transformations between the sequence space bv^p and certain BK spaces, Bulletin T. CXXIII de I'Académie Serbe des Sciences et des Arts, Classe des Sciences mathématiques et naturelles, Sciences mathématique, 27, 33-46, 2003.

[65] BAŞARIR, M., KARA, E.E., On some difference sequence spaces of weighted means and compact operators, Ann. Funct. Anal., 2 (2), 116-131, 2011.

[66] DJOLOVIĆ, I., On the space of bounded Euler difference sequences and some classes of compact operators, Appl. Math. Comput., 182, 1803-1811, 2006.

[67] MALAFOSSE DE, B., MALKOWSKY, E., On the measure of noncompactness of linear operators in spaces of strongly α-summable and bounded sequences, Periodica Math. Hung., 55 (2), 129-148, 2007.

[68] MALKOWSKY, E., RAKOČEVIĆ, V., Measure of noncompactness of linear operators between spaces of of sequences that are $(\overline{N}, q)$ summable or bounded, Czechoslovak Mathematical J., 51 (3), 505-522, 2001.

[69] MALKOWSKY, E., RAKOČEVIĆ, V., The measures of noncompactness of linear operators between spaces of mth-order difference sequence spaces, Stu. Sci. Math. Hung., 33, 381-391, 1996.

[70] MALKOWSKY, E., RAKOČEVIĆ, V., The measure of noncompactness of linear operators between certain sequence spaces, Acta Sci. Math (Szeged), 64, 151-170, 1998.

[71] MALKOWSKY, E., RAKOČEVIĆ V., The measure of noncompactness of linear operators between spaces of strongly C_1 summable and bounded sequences, Acta. Math. Hungar., 89 (1-2), 29-45, 2000.

[72] MALKOWSKY, E., RAKOČEVIĆ, V., ŽIVKOVIC, S., Matrix transformations between the sequence spaces $w_0^p(\Lambda)$, $v_0^p(\Lambda)$, $c_0^p(\Lambda)$ $(1 < p < \infty)$ and certain BK spaces, Appl. Math. Comput., 147, 377-396, 2004.

[73] MURSALEEN, M., NOMAN, A.K., Compactness of matrix operators on some new difference sequence spaces, Linear Algebra Appl., DOI:10.1016/j.laa.2011.06.014, 2011.

[74] MURSALEEN, M., NOMAN, A.K., On σ-conservative matrices and compact operators on the space V_σ, Appl. Math. Letters, 24, 1554-1560, 2011.

[75] BAŞARIR, M., KARA, E.E., On compact operators on the Riesz B^m difference sequence space, Iranian. J Sci. Techn., 35 (A4), 279-285, 2011.

[76] RAKOČEVIĆ, V., Measures of noncompactness and some applications, Filomat, 12, 87-120, 1998.

[77] MALKOWSKY, E., RAKOČEVIĆ, V., On matrix domains of triangles, Appl. Math. Comp., 189 (2), 1146-1163, 2007.

[78] DJOLOVI, I., MALKOWSKY, E., A note on Fredholm operators on $(c_0)_T$, Appl. Math. Letters, 22, 1734-1739, 2009.

[79] MURSALEEN, M., Application of measure of noncompactness to infinite system of differential equations, Canadian Math. Bull., DOI:10.4153/CMB-2011-170-7, 2011.

[80] AKHMEROV, R.R., KAMENSKII, M.I., POTAPOV, A.S., RODKINA, A.E., SADOVSKII, B.N., Measures of noncompactness and condensing operators, Operator Theory: Advances and Applications, 55, Birkhauser Verlag, Basel, 1992.

[81] JARRAH, A.M., MALKOWSKY, E., Ordinary, absolute and strong summability and matrix transformations, FILOMAT, 17, 59-78, 2003.

[82] STIEGLITZ, M., TIETZ, H., Matrix transformationen von folgenräumen eine ergebnisübersicht, Math. Z., 154, 1-16, 1977.

[83] GROSSE-ERDMANN, K.-G., Matrix transformations between the sequence spaces of Maddox, J. Math. Anal. Appl., 180, 223-238, 1993.

[84] LASCARİDES, C.G., MADDOX, I.J., Matrix transformations between some classes of sequences, Proc. Camb. Phil. Soc., 68, 99-104, 1970.

[85] FABIAN, M., ZIZLER, V., A ‘’Nonlinear’’ proof of Pitt’s Compactness Theorem, Proceedings of the American Math. Society, 131 (12), 3693-3694, 2003.

ÖZGEÇMİŞ

Emrah Evren KARA, 03.08.1982 tarihinde Hatay'ın İskenderun ilçesinde doğdu. İlk ve orta öğrenimini İskenderun'da tamamladı. 2002-2003 eğitim yılında başladığı Sakarya Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümündeki Lisans eğitimini 2005-2006 eğitim yılında Bölüm Birincisi olarak bitirdi. 2006 yılında Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında başladığı Yüksek Lisans eğitimini 2008 yılında tamamladı. Aynı yıl Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Doktora eğitimine başladı.