

**T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**1. VE 2. TİP BISHOP ÇATILARI İÇİN SIACCI
TEOREMİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
Kahraman Esen ÖZEN**

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK
Enstitü Bilim Dalı : GEOMETRİ
Tez Danışmanı : Prof. Dr. Murat TOSUN

Haziran 2015

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

1. VE 2. TİP BISHOP ÇATILARI İÇİN SIACCI
TEOREMİ

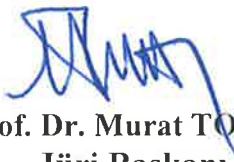
YÜKSEK LİSANS TEZİ


Kahraman Esen ÖZEN

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Enstitü Bilim Dalı : GEOMETRİ

Bu tez 10 / 06 /2015 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği ile kabul edilmiştir.


Prof. Dr. Murat TOSUN
Jüri Başkanı


Prof. Dr. İbrahim OKUR
Üye


Doç. Dr. Nesip AKTAN
Üye

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

Kahraman Esen ÖZEN

10.06.2015

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans danışmanlığımı üstlenip, bilgi ve tecrübesiyle destek veren, çalışmalarım boyunca yardımlarımı esirgemeyen Saygı değer hocam sayın Prof. Dr. Murat TOSUN'a şükran ve saygılarımı sunarım.

Tez çalışmam sırasında sorularıma sabırla cevap vererek bana yardımcı olan Yrd. Doç. Dr. Mahmut AKYİĞİT'e teşekkürü borç bilirim.

Desteklerini her zaman yanımda hissettiğim değerli aileme teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR.....	i
İÇİNDEKİLER.....	ii
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ.....	iv
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	v
ÖZET.....	vi
SUMMARY.....	vii
BÖLÜM 1.	
GİRİŞ.....	1
BÖLÜM 2.	
TEMEL KAVRAMLAR.....	3
2.1. Matematiksel Kavramlar.....	3
2.2. Fiziksel Kavramlar.....	11
BÖLÜM 3.	
E^3 , 3-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA 1. VE 2. TİP BISHOP ÇATILARI..	16
3.1. 1. Tip Bishop Çatısı.....	16
3.2. 2. Tip Bishop Çatısı.....	19
BÖLÜM 4.	
BİR UZAY EĞRİSİNİN İVME VEKTÖRÜ İÇİN SIACCI'NİN ÇÖZÜMÜ.....	22
4.1. Siacci Teoremi.....	24

BÖLÜM 5.

1. VE 2. TİP BISHOP ÇATILARI İÇİN SIACCI TEOREMİ.....	32
5.1. 1.Tip Bishop Çatısı İle Belirli Bir Uzay Eğrisi İçin Siacci Teoremi.....	32
5.1.1. 1.tip Bishop çatısına göre Siacci teoremi.....	35
5.2. 2.Tip Bishop Çatısı İle Belirli Bir Uzay Eğrisi İçin Siacci Teoremi.....	50
5.2.1. 2.tip Bishop çatısına göre Siacci teoremi.....	53
KAYNAKLAR.....	64
ÖZGEÇMİŞ.....	66

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

E^n	: n-boyutlu Öklid uzay
$T_M(m)$: M eğrisinin m noktasındaki tanjant uzayı
$\langle \cdot, \cdot \rangle$: Öklid iç çarpımı
$\ \cdot \ $: Norm
\mathbf{T}	: Teğet vektör
\mathbf{N}	: Asli normal vektör
\mathbf{B}	: Binormal vektör
κ	: Eğrilik
τ	: Burulma
$\boldsymbol{\omega}$: Darboux vektörü
$\mathbf{T}, \mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2$: 1. tip Bishop çatısı
k_1, k_2	: Bishop çatısının doğal eğrilikleri
$\boldsymbol{\zeta}_1, \boldsymbol{\zeta}_2, \mathbf{B}$: 2. tip Bishop çatısı
H_O	: O noktasında açısız momentum
S_t	: Teğet Siacci ivme bileşeni
S_r	: Radyal Siacci ivme bileşeni
\wedge	: Vektörel çarpım
I	: Reel Öklid uzayında bir açık aralık
ϵ_1, ϵ_2	: 2. tip Bishop eğrilikleri
d	: Öklid metriği

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 2.1. Eğri.....	5
Şekil 2.2. Parametre değişimi.....	5
Şekil 2.3. Yay uzunluğu.....	6
Şekil 2.4. Maddesel noktanın yer vektörü.....	12
Şekil 2.5. Maddesel noktanın hız vektörü.....	12
Şekil 2.6. Hız değişimi.....	13
Şekil 2.7. Moment.....	14
Şekil 2.8. Açısal momentum vektörü.....	15
Şekil 4.1. P parçacığının bir uzay eğrisi boyunca hareketi.....	25
Şekil 5.1. P parçacığının 1. tip Bishop bazlarıyla belirli bir uzay eğrisi boyunca hareketi.....	36
Şekil 5.2. P parçacığının 1. tip Bishop bazlarıyla belirli dairesel helis boyunca hareketi.....	44
Şekil 5.3. P parçacığının 2. tip Bishop bazlarıyla belirli bir uzay eğrisi boyunca hareketi.....	54
Şekil 5.4. P parçacığının 2. tip Bishop bazlarıyla belirli dairesel helis boyunca hareketi.....	61

ÖZET

Anahtar kelimeler: Siacci Teoremi, Uzay Eğrisi, Bishop Çatısı

Bu çalışma beş bölüm halinde düzenlenmiştir. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde matematiksel temel kavramlara ve çalışmanın orijinal kısmı için faydalı olacağı düşünülen bazı fiziksel konulara yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde E^3 , 3-boyutlu Öklid uzayında eğriler için 1. ve 2. tip Bishop çatıları tanıtılmıştır.

Dördüncü bölümde Siacci Teoremi açıklanmış ve Frenet formülleri yardımıyla uzayda Siacci Teoreminin ispatı verilmiştir.

Beşinci bölüm çalışmamızın orijinal kısmını oluşturmaktadır. Bu bölümde 1. ve 2. tip Bishop çatılarına göre Siacci Teoremi, ispatları ile birlikte verilmiş ve ayrıca aydınlatıcı birer örneğe de yer ayrılmıştır.

SIACCI'S THEOREM FOR THE FIRST AND THE SECOND BISHOP FRAME

SUMMARY

Keywords: Siacci's Theorem, Space Curve, Bishop Frame

This work is prepared as five chapters. The first chapter is devoted to the introduction.

In the second chapter we have given the mathematical basic concepts and also some physical topics that are thought to be useful for the original part of the study.

In the third chapter of this study we have introduced the Bishop frame and Type 2 Bishop frame for curves in 3-dimensional Euclidean space.

In the fourth chapter, the Siacci's theorem is explained. Also, with the aid of the Frenet formulae a proof of Siacci's theorem in space is given.

The fifth chapter is the original part of this study. In this chapter, the Siacci's theorem according to Bishop frame and Type-2 Bishop frame are given with their proofs. Also an illustrative example is given for each of these theorems.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Bir maddesel noktanın hareketi esnasında oluşan ivme vektörüyle ve bu vektörün bileşenleriyle ilgilenen Siacci teoremi, İtalyan matematikçi Francesco Siacci tarafından 1879 yılında verilmiştir. F. Siacci tarafından yapılan bu çalışmada maddesel noktanın hareketi düzlemle kısıtlanmıştır [1]. Daha sonra F. Siacci, uzayda hareket halinde bulunan bir maddesel nokta için de benzer bir çalışma gerçekleştirmiştir [2]. F. Siacci'den sonra bu konuyla ilk ilgilenen E. T. Whittaker, 1937 yılında yaptığı çalışmada düzlemde Siacci teoreminin geometrik bir ispatını vermiştir [3]. Daha sonra N. Grossman, E. T. Whittaker'ın ispatına göre daha modern bir ispat vermiştir [4]. Ayrıca James Casey Serret-Frenet formüllerine dayalı uzayda Siacci teoreminin ispatını vermiştir [5]. Günümüze en yakın çalışma ise 2012 yılında Z. Küçükarslan, M. Y. Yılmaz ve M. Bektaş tarafından yapılmıştır [6]. Bu çalışmada yazarlar F^3 , Finsler manifoldunda eğriler için Siacci teoremini ifade etmişlerdir. Siacci teoreminden en fazla yararlanan alan, mekanik olarak göze çarpmaktadır. Özellikle açısal momentumun sabit olduğu, merkezi kuvvetler gibi konularda yer alan problemler için oldukça kullanışlı bir teoremdir.

Bir çok araştırmacı eğrilerin özelliklerini karakterize etmek için Frenet çatısını kullanır. Fakat Frenet çatısı yalnızca diferensiyellenebilen eğriler için tanımlıdır ve bazı noktalarda eğrinin ikinci türevi sıfır olabilir. Bu durumda eğri için alternatif bir çatıya ihtiyaç vardır. Bu sebeple L. R. Bishop E^3 , 3 boyutlu Öklid uzayındaki eğriler için relatif paralel uyarlanmış çatı veya Bishop çatısı adı verilen bir alternatif çatı tanımlamıştır [7]. Bu alternatif çatının bulunuşuyla birlikte araştırmacılar bazı temel konuları bu yeni çatıya göre incelemeyi amaçlamışlardır ve Bishop çatısı üzerine pek çok çalışma yapmışlardır [8, 9, 10]. Bu çalışmalardan bir tanesini de S. Yılmaz ve M. Turgut gerçekleştirmiştir [11]. Bu çalışmada yazarlar, Bishop çatısının yeni bir versiyonunu tanıtmış ve bu çatıyı 2. tip Bishop çatısı olarak isimlendirmişlerdir. 2. tip Bishop çatısı üzerine de pek çok çalışma yapılmıştır [12, 13, 14].

Günümüze gelindiğinde, Bishop çatısı üzerine yapılan çalışmalar biyoloji ve bilgisayar grafikleri gibi alanlara kadar sıçramış durumdadır. Biyolojide DNA sarmalının yapısal bilgisi hakkında tahmin yürütülmesinde ve bilgisayar grafikleri alanında sanal kameraların kontrol edilmesinde Bishop çatısından faydalanılmaktadır.

Bu çalışmada ise 1. ve 2. Tip Bishop çatılarıyla belirli eğriler için uzayda "Siacci Teoremi" verilmiş ve her iki teorem içinde aydınlatıcı birer örnek sunulmuştur.

BÖLÜM 2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Matematiksel Kavramlar

Tanım 2.1.1. A boş olmayan bir küme, V ise bir K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Eğer bir $f : A \times A \rightarrow V$ fonksiyonu

(i). $\forall P, Q, R \in A$ için $f(P, Q) + f(Q, R) = f(P, R)$

(ii). $\forall P \in A$ ve $\forall \alpha \in V$ için $f(P, Q) = \alpha$ olacak biçimde bir tek $Q \in A$ noktası vardır.

özelliklerini sağlıyorsa A ya V ile birleştirilmiş afin uzay denir [15].

Tanım 2.1.2. A bir reel afin uzay ve A ile birleşen vektör uzayı da V olsun. V de bir iç çarpım işlemi

$$\langle , \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad \begin{cases} x = (x_1, \dots, x_n) \\ y = (y_1, \dots, y_n) \end{cases}$$

şeklinde tanımlanırsa A afin uzayına n -boyutlu Öklid uzayı adı verilir ve E^n ile gösterilir. Buradaki iç çarpıma da Öklid iç çarpımı denir [15].

Tanım 2.1.3. E^n , n -boyutlu Öklid uzayı alınsın. Bu takdirde

$$d : E^n \times E^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow d(x, y) = \|\overrightarrow{xy}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2}, \quad \begin{cases} x = (x_1, \dots, x_n) \\ y = (y_1, \dots, y_n) \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan d fonksiyonuna, E^n de uzaklık fonksiyonu, $d(x, y)$ reel değerine ise $x, y \in E^n$ noktaları arasındaki uzaklık denir [15].

Teorem 2.1.4. E^n , n –boyutlu Öklid uzayında uzaklık fonksiyonu bir metriktir [15].

Tanım 2.1.5. E^n , n –boyutlu Öklid uzayında X, Y, Z gibi farklı üç nokta seçilsin.

\overrightarrow{XY} ve \overrightarrow{XZ} vektörleri arasındaki $\theta \in \mathbb{R}$ açısı, $0 \leq \theta \leq \pi$ olmak üzere,

$$\cos \theta = \frac{\langle \overrightarrow{XY}, \overrightarrow{XZ} \rangle}{\|\overrightarrow{XY}\| \|\overrightarrow{XZ}\|}$$

eşitliği yardımıyla tanımlanır [16].

Tanım 2.1.6. n –boyutlu reel iç çarpım uzayı \mathbb{R}^n ile birleşen E^n Öklid uzayında sıralı bir $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ nokta $(n+1)$ –lisi için eğer $\{P_0P_1, P_0P_2, \dots, P_0P_n\}$ vektör sistemi \mathbb{R}^n in bir ortonormal bazı ise bu nokta $(n+1)$ –lisine E^n de bir dik çatı veya Öklid çatısı denir [15].

Tanım 2.1.7. E^n , n –boyutlu Öklid uzayında

$$E_0 = (0, 0, \dots, 0), E_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, E_n = (0, 0, \dots, 1)$$

olmak üzere $\{E_0, E_1, \dots, E_n\}$ çatısına standart Öklid çatısı denir [15].

Tanım 2.1.8. E^n , n –boyutlu Öklid uzayında bir X noktasının E^n deki standart Öklid çatısına göre ifadesi

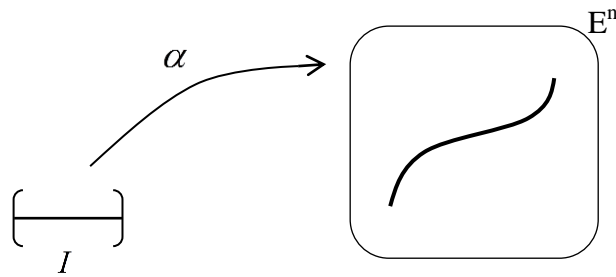
$$\overrightarrow{E_0X} = \sum_{i=1}^n x_i \overrightarrow{E_0E_i}$$

biçimindedir. Buradaki

$$x_i: E^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad 1 \leq i \leq n$$

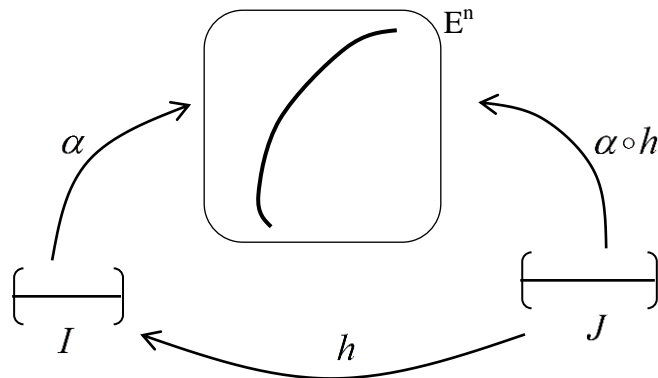
fonksiyonlarına X noktasının Öklid koordinat fonksiyonları ve $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ sıralı ve reel değerli fonksiyon n -lisine E^n in Öklid koordinat sistemi adı verilir [15].

Tanım 2.1.9. I , \mathbb{R} nin bir açık aralığı olmak üzere $\alpha: I \rightarrow E^n$ biçiminde düzgün (C^∞ sınıfından) bir α dönüşümüne, E^n de bir eğri (I, α) ya da eğrinin koordinat komşuluğu denir [17].



Şekil 2.1. Eğri (Sabuncuoğlu, 2004).

Tanım 2.1.10. $\alpha: I \rightarrow E^n$ bir eğri olsun. J açık bir aralık olmak üzere, bir $h: J \rightarrow I$ difeomorfizmine, α eğrisi için bir parametre dönüşümü denir. $\alpha \circ h$ eğrisine de α eğrisinin h ile yeniden parametrelendirilmiş denir (Şekil 2.2) [17].



Şekil 2.2. Parametre değişimi (Sabuncuoğlu, 2004).

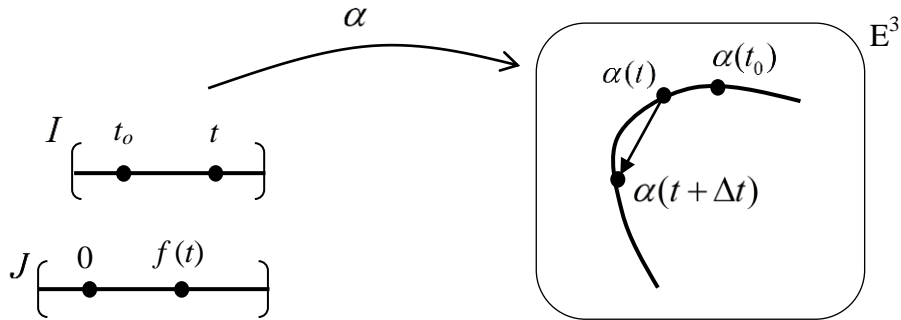
Tanım 2.1.11. $X: I \rightarrow E^n$ bir eğri olsun. $\forall t \in I$ sayısı için X in t ye karşılık gelen $X(t)$ noktasındaki $X'(t) \in T_{E^n} X(t)$ tanjant vektörüne eğrinin hız vektörü denir. Öyle ki

$$X'(t) = \left(\frac{dx_1}{dt} \Big|_t, \dots, \frac{dx_n}{dt} \Big|_t \right) \Big|_{X(t)}$$

dir [18].

Tanım 2.1.12. Her noktasındaki hız vektörü sıfırdan farklı olan eğriye regüler (düzenli) eğri denir [15].

Tanım 2.1.13. $\alpha: I \rightarrow E^n$ eğrisi verilsin. $t_0 \in I$ için eğri üstünde $\alpha(t_0)$ noktasından başlayarak yay uzunluğunu ölçmeye başlayalım. (Şekil 2.3).



Şekil 2.3. Yay uzunluğu (Sabuncuoğlu, 2004).

$t < t_0$ olmak üzere $\alpha(t_0)$ ve $\alpha(t)$ noktaları arasında kalan eğri parçasının uzunluğunun negatifi $f(t)$ olsun. $t = t_0$ için $f(t_0) = 0$ olarak tanımlayalım. $t_0 < t$ olmak üzere $\alpha(t_0)$ ve $\alpha(t)$ noktaları arasında kalan eğri parçasının uzunluğunu $f(t)$ ile gösterelim.

Böylece I aralığından \mathbb{R} ye giden $f: t \rightarrow f(t)$ fonksiyonu tanımlanmış olur ve f fonksiyonu, α eğrisinin yay uzunluğu fonksiyonu olarak adlandırılır [17].

Teorem 2.1.14. $\alpha : I \rightarrow E^n$ eğrisinin yay uzunluğu fonksiyonu f olmak üzere

$$f' = \|\alpha'\| \quad (2.1)$$

dir [17].

Teorem 2.1.15. $\alpha : I \rightarrow E^n$ eğrisinin yay uzunluğu fonksiyonu f olmak üzere

$$f(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(u)\| du \quad (2.2)$$

dir [17].

Teorem 2.1.16. $\alpha : I \rightarrow E^n$ eğrisi düzenli bir eğri ise her bir $s \in J$ için $\|(\alpha \circ h)'\| = 1$ olacak biçimde bir $h: J \rightarrow I$ parametre dönüşümü vardır [17].

Sonuç 2.1.17. E^n uzayındaki düzenli bir eğri, birim hızlı olacak şekilde yeniden parametrelendirilebilir [17].

Teorem 2.1.18. $\alpha : I \rightarrow E^n$ eğrisinin yay uzunluğu fonksiyonu f olmak üzere

$$f'(t) = \|\alpha'(t)\| = 1 \quad (2.3)$$

ise α eğrisine birim hızlı eğri, t parametresine de yay parametresi adı verilir [17].

Tanım 2.1.19. E^3 uzayında birim hızlı $\alpha : I \rightarrow E^3$ eğrisi için

$$\mathbf{T}(s) = \alpha'(s) \quad (2.4)$$

eşitliğiyle belirli $\mathbf{T}(s)$ vektörüne α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki birim teğet vektörü denir [17].

Tanım 2.1.20. E^3 uzayındaki birim hızlı $\alpha : I \rightarrow E^3$ eğrisi için

$$\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad \kappa(s) = \|\mathbf{T}'(s)\| \quad (2.5)$$

fonksiyonuna α eğrisinin eğrilik fonksiyonu denir. $\kappa(s)$ sayısına da eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki eğriliği adı verilir [17].

Tanım 2.1.21. E^3 uzayındaki birim hızlı $\alpha : I \rightarrow E^3$ eğrisi için

$$\mathbf{N}(s) = \frac{1}{\kappa(s)} \mathbf{T}'(s) \quad (2.6)$$

eşitliğiyle belirli $\mathbf{N}(s)$ vektörüne, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki birinci dik vektörü (asli normal) denir [17].

Tanım 2.1.22. E^3 uzayında birim hızlı $\alpha : I \rightarrow E^3$ eğrisi için

$$\mathbf{B}(s) = \mathbf{T}(s) \wedge \mathbf{N}(s) \quad (2.7)$$

eşitliğiyle tanımlı $\mathbf{B}(s)$ vektörüne, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki ikinci dik vektörü (binormal) denir [17].

Tanım 2.1.23. $\mathbf{T}(s)$, $\mathbf{N}(s)$, $\mathbf{B}(s)$ vektörlerine, $\alpha : I \rightarrow E^3$ eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet vektörleri denir. $\{\mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s), \mathbf{B}(s)\}$ kümesine, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet çatısı denir [17].

Tanım 2.1.24. E^3 uzayındaki birim hızlı $\alpha : I \rightarrow E^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları \mathbf{T} , \mathbf{N} , \mathbf{B} olmak üzere

$$\tau : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tau(s) = -\langle \mathbf{B}'(s), \mathbf{N}(s) \rangle \quad (2.8)$$

fonksiyonuna, α eğrisinin burulma fonksiyonu, $\tau(s)$ sayısına da eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki burulması denir [17].

Teorem 2.1.25. E^3 uzayındaki birim hızlı $\alpha : I \rightarrow E^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları \mathbf{T} , \mathbf{N} , \mathbf{B} olmak üzere

$$\begin{aligned}\mathbf{T}' &= \kappa\mathbf{N} \\ \mathbf{N}' &= -\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B} \\ \mathbf{B}' &= -\tau\mathbf{N}\end{aligned}\tag{2.9}$$

dir [17].

Tanım 2.1.26. E^3 uzayındaki birim hızlı $\alpha : I \rightarrow E^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları \mathbf{T} , \mathbf{N} , \mathbf{B} olsun. $\{\mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s)\}$ kümesinin gerdiği düzleme, $\alpha(s)$ noktasındaki dokunum düzlemi veya oskütatör düzlem, $\{\mathbf{T}(s), \mathbf{B}(s)\}$ kümesinin gerdiği düzleme, $\alpha(s)$ noktasındaki doğrultma düzlemi veya rektifiyan düzlem, $\{\mathbf{N}(s), \mathbf{B}(s)\}$ kümesinin gerdiği düzleme, $\alpha(s)$ noktasındaki dik düzlem veya normal düzlem denir [17].

Teorem 2.1.27. $\alpha : I \rightarrow E^3$ birim hızlı eğrisinin Frenet vektör alanları \mathbf{T} , \mathbf{N} , \mathbf{B} olmak üzere

$$\begin{aligned}\mathbf{N} \wedge \mathbf{B} &= \mathbf{T} \\ \mathbf{B} \wedge \mathbf{T} &= \mathbf{N}\end{aligned}\tag{2.10}$$

dir [17].

Teorem 2.1.28. Genel parametreyle parametrelendirilmiş bir $\alpha : I \rightarrow E^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları \mathbf{T} , \mathbf{N} , \mathbf{B} olmak üzere

$$\mathbf{T} = \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|}, \quad \mathbf{B} = \frac{\alpha' \wedge \alpha''}{\|\alpha' \wedge \alpha''\|}, \quad \mathbf{N} = \mathbf{B} \wedge \mathbf{T} \quad (2.11)$$

dir. $\alpha : I \rightarrow E^3$ eğrisinin eğrilik ve burulma fonksiyonları κ ve τ ise

$$\kappa = \frac{\|\alpha' \wedge \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3}, \quad \tau = \frac{\langle \alpha' \wedge \alpha'', \alpha''' \rangle}{\|\alpha' \wedge \alpha''\|^2} \quad (2.12)$$

dir [17].

Tanım 2.1.29. Eğer bir eğrinin tüm noktaları bir düzlem tarafından içeriliyorsa bu eğriye düzlemseldir denir [19].

Teorem 2.1.30. $\alpha : I \rightarrow E^3$ eğrisi düzlemsel ise $\tau = 0$ dır ve eğrinin her bir noktasındaki dokunum (oskütör) düzlemi, eğrinin içinde bulunduğu E düzlemidir. Tersine, $\tau = 0$ ise $\alpha : I \rightarrow E^3$ eğrisi düzlemseldir [17].

Tanım 2.1.31. $\alpha : I \rightarrow E^n$ eğrisi verilsin. $\forall s \in I$ için $\alpha'(s)$ hız vektörü, bir \mathbf{U} sabit vektörü ile sabit açı yapıyorsa, α eğrisine bir genel helis (eğilim çizgisi), $S_p\{\mathbf{U}\}$ ya da α nın eğilim eksenini denir [15].

Tanım 2.1.32. $\alpha : I \rightarrow E^n$ eğrisi verilsin. $\forall s \in I$ ya karşılık gelen $\alpha(s)$ noktasında α nın eğriliği ve burulması $\kappa(s)$ ve $\tau(s)$ ise

$$\begin{aligned} \mathbf{H} : I &\rightarrow \mathbb{R} \\ s &\rightarrow \mathbf{H}(s) = \frac{\kappa(s)}{\tau(s)} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı \mathbf{H} fonksiyonuna, α nın $\alpha(s)$ noktasındaki birinci harmonik eğriliği denir [15].

Teorem 2.1.33. $\alpha : I \rightarrow E^3$ eğrisi verilsin. Bu durumda,

$$\alpha \text{ bir genel helisidir} \Leftrightarrow \forall s \in I \text{ için } H(s) = \frac{\kappa(s)}{\tau(s)} = \text{sabittir [15].}$$

Özel olarak κ ve τ değerleri sabit ise eğri bir silindirik helisdir [20].

Tanım 2.1.34. α , E^3 de bir eğri olsun. Eğri üzerindeki bir P noktası eğriyi çizerken **T**, **N**, **B** vektörleri değişirler, dolayısıyla küresel göstergeler oluşur. Eğrinin **T**, **N**, **B** üçayaklısının her s anında, bir eksen etrafında, bir ani helis hareketi yaptığı kabul edilir. Bu eksene eğrinin bu s parametresine karşılık gelen $\alpha(s)$ noktasındaki Darboux (ani dönme) eksenini denir. Bu eksenin yön ve doğrultusunu veren vektör,

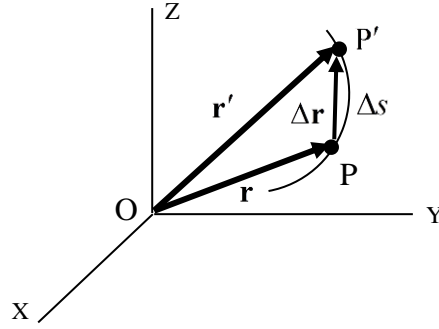
$$\boldsymbol{\omega} = \tau \mathbf{T} + \kappa \mathbf{B} \quad (2.13)$$

olup eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki Darboux vektörü adını alır [15].

2.2. Fiziksel Kavramlar

Bir maddesel nokta doğrusal olmayan bir çizgi üzerinde hareket ediyorsa nokta eğrisel hareket yapıyor denir. Noktanın verilen bir t zamanında bulunduğu P yerini tanımlamak için Şekil 2.4'deki gibi eksenleri sabit bir dik koordinat sistemi seçilir ve O başlangıç noktasını P ye bağlayan \mathbf{r} vektörü çizilir. \mathbf{r} vektörü, r şiddeti ile ve koordinat eksenlerine göre doğrultusu ve yönü ile tanımlandığından noktanın yerini bu eksenlere göre tam olarak belirtmiş olur; bu \mathbf{r} vektörüne, noktanın t anındaki yer vektörü adı verilir.

Şimdi aynı noktanın, $t + \Delta t$ zamanında bulunduğu P' yerini tanımlayan \mathbf{r}' vektörünü göz önüne alalım. P ile P' noktalarını birleştiren $\Delta \mathbf{r}$ vektörü, yer vektörünün Δt zaman aralığındaki değişimini gösterebilir (Şekil 2.4).



Şekil 2.4. Maddesel noktanın yer vektörü (Tameroglu ve Özbek, 1972).

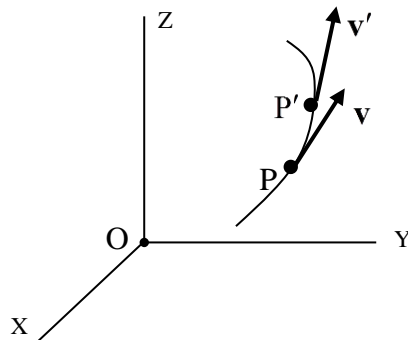
Maddesel noktanın t anındaki ani hızı, Δt zaman aralıklarını ve $\Delta \mathbf{r}$ vektör artımlarını gittikçe küçülterek elde edilir. Böylece ani hız

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (2.14)$$

vektörü ile verilir. Δt ve $\Delta \mathbf{r}$ küçüldükçe, P ve P' noktaları birbirine yaklaşır; bu durumda \mathbf{v} vektörü limite maddesel noktanın yörüngesine teğet olur. \mathbf{v} vektörünün şiddeti olan v ye maddesel noktanın yörünge hızı adı verilir ve yörünge hızı (2.14) denkleminde $\Delta \mathbf{r}$ vektörünün yerine, PP' kirişinin uzunluğunu koyarak elde edilebilir. Δt azaldıkça, PP' kirişinin boyu PP' yayının Δs boyuna yaklaşır (Şekil 2.4). Dolayısıyla

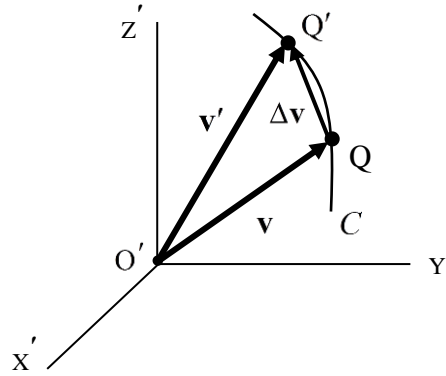
$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{PP'}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} \quad (2.15)$$

yazılabilir.



Şekil 2.5. Maddesel noktanın hız vektörü (Tameroglu ve Özbek, 1972).

Maddesel noktanın t anındaki \mathbf{v} hızı ile $t + \Delta t$ anındaki \mathbf{v}' hızını göz önüne alalım. (Şekil 2.5). \mathbf{v} ve \mathbf{v}' vektörlerini aynı O' başlangıç noktasına taşıyalım. (Şekil 2.6). Q ve Q' noktalarını birleştiren $\Delta \mathbf{v}$ vektörü Δt zaman aralığında maddesel noktanın hızındaki değişmeyi gösterir. Şekil 2.6'da gösterilen C eğrisi maddesel noktanın ani hız vektörlerinin uçlarının çizdiği eğridir.



Şekil 2.6. Hız değişimi (Tameroglu ve Özbek, 1972).

Maddesel noktanın t zamanındaki ani ivmesi, Δt ve $\Delta \mathbf{v}$ yi gittikçe küçülterek elde edilir. Böylece ani ivme

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (2.16)$$

vektörü ile verilir [21].

Tanım 2.2.1. Bir \mathbf{F} kuvvetinin etkisinde bulunan bir m maddesel noktasını göz önüne alalım. Newton'un ikinci kanunu olan $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ formülünde \mathbf{a} ivme değeri yerine $\frac{d\mathbf{v}}{dt}$ yazılırsa, $\mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt}$ elde edilir. m kütlesi sabit olduğundan son eşitlikten

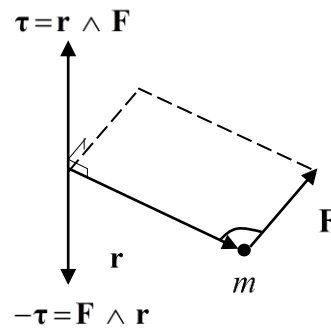
$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) \quad (2.17)$$

yazılabilir. $m\mathbf{v}$ vektörüne, maddesel noktanın doğrusal momentumu veya yalnızca momentumu denir [21].

Tanım 2.2.2. Bir \mathbf{F} kuvvetinin seçilen bir eksene göre döndürme etkisine moment adı verilir. Matematiksel ifadeler ile moment, yer vektörü ile kuvvet vektörünün vektörel çarpımı

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{F} \quad (2.18)$$

olarak da tanımlanır. Burada \mathbf{r} yer vektörü, cismin dönme eksenini ile cisme uygulanan kuvvet vektörü \mathbf{F} arasındaki vektördür [22].



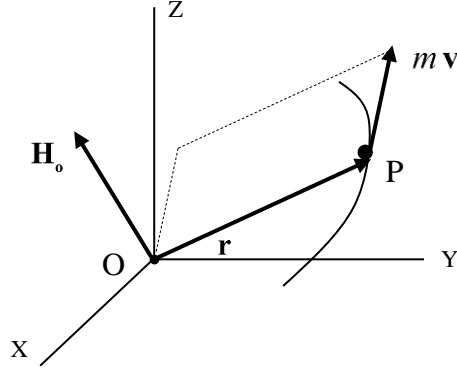
Şekil 2.7. Moment (Tameroglu ve Özbek, 1972).

Tanım 2.2.3. OXYZ sabit koordinat sistemine göre hareket halindeki m kütleli bir P maddesel noktası göz önüne alınsın. Maddesel noktanın herhangi bir andaki momentumu olan $m\mathbf{v}$ vektörünün O noktasına göre momentine, maddesel noktanın o anda O ya göre, momentumunun momentini veya açısal momentumu adı verilir ve H_o ile gösterilir [21].

P nin yer vektörü \mathbf{r} ile gösterilmek üzere bir vektörün momentini tanımlayarak

$$H_o = \mathbf{r} \wedge m\mathbf{v} \quad (2.19)$$

yazılır. Buradan H_o vektörünün \mathbf{r} ile $m\mathbf{v}$ nin bulunduğu düzleme dik olduğu görülür (Şekil 2.8) [21].



Şekil 2.8. Açısal momentum vektörü (Tameröglü ve Özbek, 1972).

BÖLÜM 3. E^3 , 3- BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA 1. VE 2. TİP BISHOP ÇATILARI

3.1. 1. Tip Bishop Çatısı

Tanım 3.1.1. Bir eğri boyunca M normal vektör alanı için M nin türevi teğetsel ise M vektör alanına relatif paraleldir denir. Bir teğet vektör alanı içinse, eğri boyunca T birim teğet vektör alanının sabit bir katı ise relatif paraleldir denir [7].

Tanım 3.1.2. E^3 , 3 boyutlu Öklid uzayında C^2 sınıfından regüler bir eğri üzerindeki paralel vektör alanları, \mathbb{R} cismi üzerinde yönlendirilmiş bir boyutlu teğet bileşeni ve iki boyutlu normal bileşeni olan, 3-boyutlu bir vektör uzayı oluşturur. Bu vektör uzayının bir ortonormal bazına relatif paralel uyarlanmış çatı veya Bishop çatısı denir [7].

1. tip Bishop çatısı, bazı noktalarında ikinci türevi sıfır olan eğriler için iyi tanımlı hareketli bir çatıdır. Bir eğrinin birim teğet vektörü tek olarak belirlidir. 1. tip Bishop çatısının temeli; çatının birim teğet vektör dışında kalan $(N_1(s), N_2(s))$ elemanlarının, eğrinin her bir noktasında, $T(s)$ ye dik olan normal düzlemde yer almak ve türevleri sadece $T(s)$ ye bağlı olmak kaydıyla keyfi şekilde seçilebilmesi düşüncesine dayanmaktadır. Böylece $N_1(s)$ ve $N_2(s)$ vektörlerinin türevleri eğrilik ne olursa olsun mevcuttur. O halde,

$$\langle T, T \rangle = \langle N_1, N_1 \rangle = \langle N_2, N_2 \rangle = 1 \quad , \quad \langle T, N_1 \rangle = \langle T, N_2 \rangle = \langle N_1, N_2 \rangle = 0 \quad (3.1)$$

olmak üzere alternatif çatı denklemleri

$$\begin{pmatrix} \mathbf{T}' \\ \mathbf{N}'_1 \\ \mathbf{N}'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k_1 & k_2 \\ -k_1 & 0 & 0 \\ -k_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N}_1 \\ \mathbf{N}_2 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

şeklindedir. 1. tip Bishop çatısı için, s yay parametresine göre türev formülleri (3.2) denkleminle belirlidir. Burada k_1 ve k_2 , 1. tip Bishop çatısının doğal eğrilikleri olarak isimlendirilirler [8].

κ eğrinin eğrilik fonksiyonu olmak üzere (3.2) denkleminde

$$\kappa = \|\mathbf{T}'\| = \|k_1 \mathbf{N}_1 + k_2 \mathbf{N}_2\| = \sqrt{k_1^2 + k_2^2} \quad (3.3)$$

elde edilir. θ , eğrinin 1. tip Bishop çatısının \mathbf{N}_1 normal vektör alanı ile Frenet çatısının \mathbf{N} asli normal vektör alanı arasındaki açı olmak üzere, \mathbf{N} asli normal vektör alanı için $\mathbf{N} = \cos\theta \mathbf{N}_1 + \sin\theta \mathbf{N}_2$ dir. Böylece, $\mathbf{T}' = \kappa \mathbf{N}$ Frenet formülü ve $\mathbf{T}' = k_1 \mathbf{N}_1 + k_2 \mathbf{N}_2$ Bishop formülü göz önüne alınırsa

$$\mathbf{T}' = \kappa \mathbf{N} = \kappa \cos\theta \mathbf{N}_1 + \kappa \sin\theta \mathbf{N}_2 = k_1 \mathbf{N}_1 + k_2 \mathbf{N}_2 \quad (3.4)$$

bulunur. Bu son denklemden

$$k_1 = \kappa \cos\theta \quad , \quad k_2 = \kappa \sin\theta \quad , \quad \tan\theta = k_2 / k_1 \quad (3.5)$$

bulunur. Dolayısıyla

$$\theta = \arctan\left(\frac{k_2}{k_1}\right) \quad (3.6)$$

dır. (3.4) denkleminde açıktır ki

$$\mathbf{N} = \cos \theta \mathbf{N}_1 + \sin \theta \mathbf{N}_2 = \frac{k_1}{\kappa} \mathbf{N}_1 + \frac{k_2}{\kappa} \mathbf{N}_2 \quad (3.7)$$

dır. Bu son denklemin türevi alınır ve (3.2), (3.5) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} \mathbf{N}' &= -\mathbf{N}_1 \sin \theta \frac{d\theta}{ds} + \mathbf{N}_1' \cos \theta + \mathbf{N}_2 \cos \theta \frac{d\theta}{ds} + \mathbf{N}_2' \sin \theta \\ &= -(k_1 \cos \theta + k_2 \sin \theta) \mathbf{T} + \theta' (-\sin \theta \mathbf{N}_1 + \cos \theta \mathbf{N}_2) \\ &= -(\kappa \cos^2 \theta + \kappa \sin^2 \theta) \mathbf{T} + \theta' (-\sin \theta \mathbf{N}_1 + \cos \theta \mathbf{N}_2) \\ &= -\kappa \mathbf{T} + \theta' (-\sin \theta \mathbf{N}_1 + \cos \theta \mathbf{N}_2) \end{aligned}$$

elde edilir. $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2\}$ sistemi uygun bir şekilde yönlendirilmek üzere

$$\mathbf{B} = -\sin \theta \mathbf{N}_1 + \cos \theta \mathbf{N}_2 \quad (3.8)$$

alınabilir. Böylece

$$\tau = \theta' \quad , \quad \theta = \int \tau ds \quad (3.9)$$

olur [7]. O halde (3.7) ve (3.8) denklemlerinden, Frenet ve 1. tip Bishop bazları arasında geçiş matrisi

$$\begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N}_1 \\ \mathbf{N}_2 \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

ile verilir. Dolayısıyla

$$\begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N}_1 \\ \mathbf{N}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

dır [10].

3.2. 2. Tip Bishop Çatısı

$\alpha = \alpha(s)$, E^3 de düzenli ve birim hızlı bir eğri olsun.

$$\begin{pmatrix} \zeta'_1 \\ \zeta'_2 \\ \mathbf{B}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\epsilon_1 \\ 0 & 0 & -\epsilon_2 \\ \epsilon_1 & \epsilon_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

paralel çatısı tanımlansın. Bu çatı 2. tip Bishop çatısı olarak adlandırılır. $\mathbf{B}' = -\tau \mathbf{N}$ Frenet formülü ve (3.12) eşitliği göz önüne alınırsa

$$\mathbf{B}' = -\tau \mathbf{N} = \epsilon_1 \zeta_1 + \epsilon_2 \zeta_2 \quad (3.13)$$

yazılabilir. Son denklemden her iki tarafın normu alınır

$$\tau = \sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2} \quad (3.14)$$

elde edilir.

ϕ , α eğrisinin 2. tip Bishop çatısının ζ_1 vektör alanı ile Frenet çatısının \mathbf{N} asli normal vektör alanı arasındaki açı olmak üzere, \mathbf{T} teğet vektör alanı,

$$\mathbf{T} = \sin \phi \zeta_1 - \cos \phi \zeta_2 \quad (3.15)$$

şeklinde yazılır ve burada s yay parametresine göre türev alınır

$$\begin{aligned}\mathbf{T}' &= \kappa \mathbf{N} = \phi' \cos \phi \zeta_1 + \sin \phi \zeta_1' + \phi' \sin \phi \zeta_2 - \cos \phi \zeta_2' \\ &= \phi' (\cos \phi \zeta_1 + \sin \phi \zeta_2) + \sin \phi \zeta_1' - \cos \phi \zeta_2'\end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitlikte $\zeta_1' = -\epsilon_1 \mathbf{B}$ ve $\zeta_2' = -\epsilon_2 \mathbf{B}$ eşitlikleri yerine yazılırsa

$$\kappa \mathbf{N} = \phi' (\cos \phi \zeta_1 + \sin \phi \zeta_2) + (\cos \phi \epsilon_2 - \sin \phi \epsilon_1) \mathbf{B}$$

bulunur. ζ_1, ζ_2 ve \mathbf{N} vektörleri oskületör düzlemindedirler. Dolayısıyla yukarıdaki denklemde binormal vektörün katsayısı sıfırdır. O halde

$$\kappa \mathbf{N} = \phi' (\cos \phi \zeta_1 + \sin \phi \zeta_2)$$

elde edilir. Son denklemde,

$$\kappa = \phi' \quad , \quad \phi(s) = \int_0^s \kappa(s) ds \quad (3.16)$$

alınırsa,

$$\mathbf{N} = \cos \phi \zeta_1 + \sin \phi \zeta_2 \quad (3.17)$$

elde edilir. Eğer (3.17) denklemi (3.13) denkleminde yerine yazılırsa

$$\epsilon_1 = -\tau \cos \phi \quad , \quad \epsilon_2 = -\tau \sin \phi \quad (3.18)$$

bulunur. (3.18)_{1,2} eşitlikleri göz önüne alındığında $\tan \phi = \epsilon_2 / \epsilon_1$ olup

$$\phi = \arctan \left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \right) \quad (3.19)$$

elde edilir [11].

(3.15) ve (3.17) denklemleri yardımıyla, Frenet ve 2. tip Bishop bazları arasındaki geçiş matrisi,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \phi & -\cos \phi & 0 \\ \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

olur. Buradan ise

$$\begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ -\cos \phi & \sin \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

elde edilir [12].

Birim hızlı bir α eğrisinin 2. tip Bishop Darboux vektörü

$$\boldsymbol{\omega} = a\zeta_1 + b\zeta_2 + c\mathbf{B} \quad (3.22)$$

olsun. $\boldsymbol{\omega}$ ile 2. tip Bishop baz vektörleri arasındaki ilişki

$$\zeta_1' = \boldsymbol{\omega} \wedge \zeta_1, \quad \zeta_2' = \boldsymbol{\omega} \wedge \zeta_2, \quad \mathbf{B}' = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{B}$$

şeklindedir. Bu son eşitlikte (3.22) yazılır ve (3.12) denklemini göz önünde tutulursa $a = -\epsilon_2$, $b = \epsilon_1$, $c = 0$ bulunur. Dolayısıyla 2. tip Bishop Darboux vektörü

$$\boldsymbol{\omega} = -\epsilon_2 \zeta_1 + \epsilon_1 \zeta_2 \quad (3.23)$$

olarak elde edilir.

BÖLÜM 4. BİR UZAY EĞRİSİNİN İVME VEKTÖRÜ İÇİN SIACCI'NİN ÇÖZÜMÜ

Kinematikte, uzaydaki bir eğri boyunca hareket halinde olan bir parçacığın ivme vektörü, parçacığın hız vektörünün zamana göre türevidir. Bir çok uygulamada ivme vektörü birbirlerine dik olan teğet ivme bileşeni ve normal ivme bileşenlerinin toplamı şeklinde tanımlanır. İvme vektörünün kinematikte ki bu kullanım şeklinden ayrışan, ivme vektörünün, genelde birbirine dik olmayan teğet ve radyal doğrultular boyunca yazabilmesini sağlayan Siacci Teoremi İtalyan matematikçi Francesco Siacci (1839-1907) tarafından formüle edilmiştir [1]. Bu çalışma bir parçacığın düzlemsel hareketi için yapılmıştır. Daha sonra Siacci bir parçacığın uzaydaki hareketi için de ivme vektörünü benzer formda yazmayı başarmıştır [2]. Siaccinin uzayda hareket halindeki bir parçacığın ivmesine ilişkin bulduğu bu çözümde, ivmenin iki bileşeninin parçacığın yörünge eğrisinin ani oskülatör düzleminde yattığı ifade edilmiştir. Bunlardan biri yörünge eğrisine teğet iken, diğeri ise P parçacığından, sabit bir orijin noktasından oskülatör düzleme inilen dikmenin ayağı olan noktaya doğru uzanır [5].

Keyfi kuvvetlerin etkisi altında E^3 , 3 boyutlu Öklid uzayında hareket eden $m (>0)$ kütleli bir P parçacığı ve E^3 de keyfi sabit bir O başlangıç noktası alalım. \mathbf{x} , P nin t anına karşılık gelen yer vektörü, $C \subset E^3$, $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$ ile verilen, P nin izlediği yol ile yönlendirilmiş eğri ve s de, t ye bağlı olmak üzere, C nin yay parametresi olsun. Bu durumda

$$\mathbf{x} = \overline{OP} = \overline{O\alpha(s)} = \alpha(s) \quad (4.1)$$

yazılabilir. C birim hızlı eğrisi için, $s \in I$ noktasında birim teğet vektör $\mathbf{T}(s) = \alpha'(s)$ olmak üzere (4.1) eşitliğinde s ye göre türev alınırsa

$$\mathbf{T} = \mathbf{x}' = \frac{d\mathbf{x}}{ds} \quad (4.2)$$

elde edilir. $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$, Frenet ortonormal baz sistemi, κ ve τ ise sırasıyla eğrilik ve burulma fonksiyonlarını göstermek üzere Frenet türev formülleri

$$\mathbf{T}' = \kappa \mathbf{N} \quad , \quad \mathbf{N}' = -\kappa \mathbf{T} + \tau \mathbf{B} \quad , \quad \mathbf{B}' = -\tau \mathbf{N} \quad (4.3)$$

dir. \mathbf{P} nin t anındaki hız vektörü, yer vektörünün zamana göre türevi olup (4.2) denklemi yardımıyla

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{ds} \frac{ds}{dt} = v \mathbf{T} \quad , \quad v = \frac{ds}{dt} = \dot{s} \quad (4.4)$$

elde edilir. \mathbf{P} nin t anındaki ivme vektörü, hız vektörünün zamana göre türevi olduğundan

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \dot{v} \mathbf{T} + \dot{\mathbf{T}} v = \dot{v} \mathbf{T} + v \frac{d\mathbf{T}}{ds} \frac{ds}{dt}$$

yazılabilir. Bu son eşitlikte (4.3)₁ ve (4.4)₂ eşitlikleri göz önüne alınırsa

$$\mathbf{a} = \dot{v} \mathbf{T} + \kappa v^2 \mathbf{N} \quad (4.5)$$

elde edilir. C eğrisi boyunca v , s nin bir fonksiyonu olarak belirli olabilir. Bu durumda $\dot{v} = \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt} = v \frac{dv}{ds}$ olup bu eşitlik (4.5) eşitliğinde yazıldığı takdirde ivme vektörü

$$\mathbf{a} = v \frac{dv}{ds} \mathbf{T} + \kappa v^2 \mathbf{N} \quad (4.6)$$

olur. Eğrinin, P parçacığının üzerinde bulunduğu noktası P ile gösterilsin. Bu durumda P parçacığının t anındaki ivme vektörü, C nin P noktasındaki oskulator düzlemi olan π de yatar.

Birim hızlı bir eğrinin Frenet bazları için Darboux vektörünün Tanım 2.1.34'den,

$$\boldsymbol{\omega} = \tau \mathbf{T} + \kappa \mathbf{B}$$

olduğunu biliyoruz. Böylece C nin s yay parametresinin t ye bağlı olduğu göz önüne alındığında Frenet bazları için açısal hız vektörü

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{s} (\tau \mathbf{T} + \kappa \mathbf{B}) \quad (4.7)$$

olur. $\boldsymbol{\omega}$ açısal hız vektörü C nin rektifiyen düzleminde yatar ve

$$\dot{\mathbf{T}} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{T} \quad , \quad \dot{\mathbf{N}} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{N} \quad , \quad \dot{\mathbf{B}} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{B} \quad (4.8)$$

eşitliklerini sağlar. P nin O başlangıç noktasına göre açısal momentumu, P nin yer vektörü ile doğrusal momentumunun vektörel çarpımı olup

$$\mathbf{H}_O = \mathbf{x} \wedge m \mathbf{v} = \mathbf{x} \wedge m v \mathbf{T} \quad (4.9)$$

şeklindedir [5].

4.1. Siacci Teoremi

Keyfi kuvvetlerin etkisi altında E^3 de C eğrisi boyunca hareket eden P parçacığının, Frenet bazlarına göre yer vektörü

$$\mathbf{x} = q \mathbf{T} - p \mathbf{N} + b \mathbf{B} \quad (4.10)$$

olmak üzere

$$q = \langle \mathbf{x}, \mathbf{T} \rangle, \quad -p = \langle \mathbf{x}, \mathbf{N} \rangle, \quad b = \langle \mathbf{x}, \mathbf{B} \rangle \quad (4.11)$$

dir. (Şekil 4.1). Bu taktirde π oskulator düzleminde \mathbf{r} vektörü,

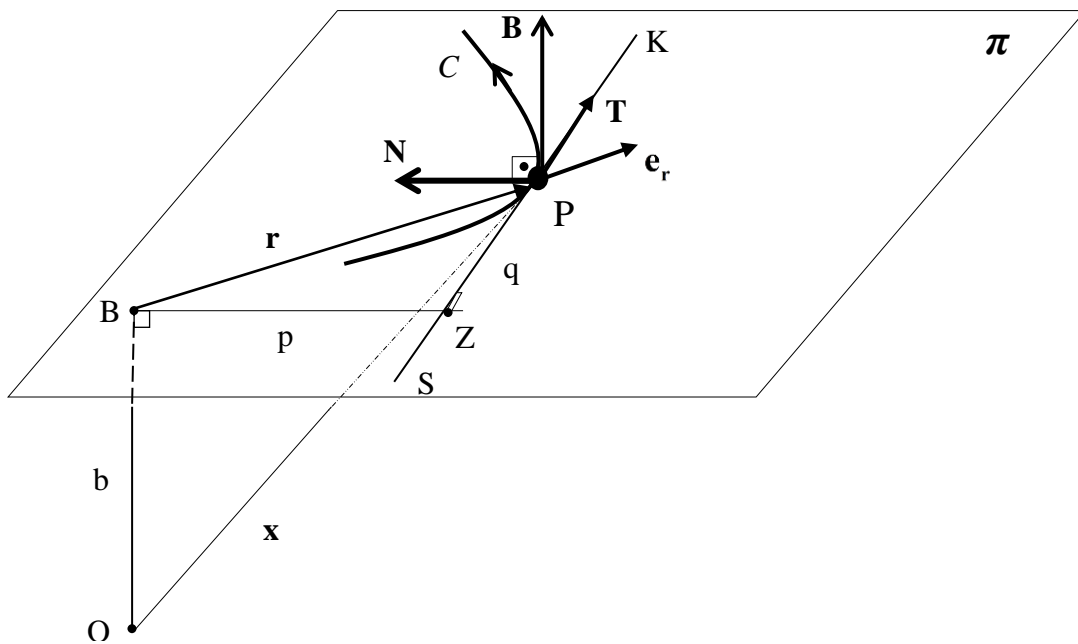
$$\mathbf{r} = q\mathbf{T} - p\mathbf{N} \quad (4.12)$$

dir. Böylece $\|\mathbf{r}\| = r$ olmak üzere,

$$r^2 = \langle \mathbf{r}, \mathbf{r} \rangle = q^2 \langle \mathbf{T}, \mathbf{T} \rangle + p^2 \langle \mathbf{N}, \mathbf{N} \rangle = q^2 + p^2 \quad (4.13)$$

yazılabilir.

Şekil 4.1. e göre SPK doğrusu C eğrisinin P noktasındaki teğet doğrusudur. Uzaydaki sabit bir O başlangıç noktasından π oskulator düzlemine inilen dik, OB vektörüdür ve dolayısıyla B nin O ya göre yer vektörü, $b\mathbf{B}$ dir. Ayrıca, BZ vektörü teğet doğrusuna dik olduğundan dolayı Z noktasının B referans noktasına göre yer vektörü, $-p\mathbf{N}$ dir. Burada, P noktasının B referans noktasına göre yer vektörü \mathbf{r} ve Z referans noktasına göre yer vektörü de $q\mathbf{T}$ dir.



Şekil 4.1. P parçacığının bir uzay eğrisi boyunca hareketi (Casey, 2011).

(4.2) ve (4.3) eşitlikleri göz önünde bulundurulur ve (4.10) denkleminin yay parametresine göre türevi alınırsa,

$$\mathbf{T} = (q\mathbf{T} - p\mathbf{N} + b\mathbf{B})' = (q' + p\kappa)\mathbf{T} + (q\kappa - p' - b\tau)\mathbf{N} + (-p\tau + b')\mathbf{B} \quad (4.14)$$

bulunur. Böylece, son denklemden

$$q' + p\kappa = 1 \quad , \quad q\kappa - p' - b\tau = 0 \quad , \quad -p\tau + b' = 0 \quad (4.15)$$

elde edilir. (4.15)_{1,2,3} denklemlerinden

$$q' = 1 - \kappa p \quad , \quad p' = \kappa q - \tau b \quad , \quad b' = \tau p \quad (4.16)$$

olur. (4.13) denkleminin türevi alınırsa

$$r r' = p p' + q q'$$

bulunur. Bu son denklemde, (4.16)_{1,2,3} göz önüne alınırsa,

$$r r' = q - b \tau p \quad , \quad r r' = q - b b' \quad (4.17)$$

elde edilir.

$\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ sisteminin bir sağ sistem olduğu göz önünde bulundurularak (4.10) ile verilen yer vektörü, açılal momentum vektörünü belirten (4.9) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_o &= (q\mathbf{T} - p\mathbf{N} + b\mathbf{B}) \wedge m v \mathbf{T} \\ &= -p m v (\mathbf{N} \wedge \mathbf{T}) + b m v (\mathbf{B} \wedge \mathbf{T}) \\ &= m v b \mathbf{N} + m v p \mathbf{B} \end{aligned} \quad (4.18)$$

elde edilir.

Kabul edelimki

$$h = pv \quad , \quad w = bv \quad (4.19)$$

olsun.

F. Siacci, (4.6) da yer alan \mathbf{a} ivme vektörünü, oskülatör düzlemdeki, SPK teğet doğrultusu ve BP radyal doğrultusu boyunca elde etmeyi amaçlamıştır. Bunu gerçekleştirmek için, (4.6) eşitliğinde, \mathbf{N} vektörünün \mathbf{r} ve \mathbf{T} vektörleri cinsinden yazılması gereklidir. "Açısal momentumun binormal bileşeni sıfırdan farklıdır " fiziki varsayımından dolayı $p \neq 0$ dır. (4.13) de $p \neq 0$ olduğu göz önüne alınırsa $r \neq 0$ olup, böylece $\overline{BP} = \mathbf{r}$ vektörü yönündeki birim vektör \mathbf{e}_r tanımlıdır ve

$$\mathbf{e}_r = \frac{1}{r} \mathbf{r} \quad (4.20)$$

şeklinde dir. $p \neq 0$ olduğundan, (4.20) ve (4.12) denklemleri yardımıyla

$$\mathbf{N} = \frac{1}{p} (-r \mathbf{e}_r + q \mathbf{T}) \quad (4.21)$$

elde edilir. Böylece, (4.21) denklemi dikkate alınarak, (4.6) denklemi tekrar düzenlenirse, ivme vektörü,

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= v \frac{dv}{ds} \mathbf{T} + \kappa v^2 \mathbf{N} \\ &= v \frac{dv}{ds} \mathbf{T} + \kappa v^2 \left(\frac{1}{p} (-r \mathbf{e}_r + q \mathbf{T}) \right) \\ &= -\frac{\kappa v^2 r}{p} \mathbf{e}_r + \left(v \frac{dv}{ds} + \frac{\kappa v^2 q}{p} \right) \mathbf{T} \\ &= -\frac{\kappa v^2 r}{p} \mathbf{e}_r + \left(v \frac{dv}{ds} + \frac{\kappa v^2 q}{p} \right) \mathbf{T} = S_r \mathbf{e}_r + S_t \mathbf{T} \quad (4.22) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradaki S_r ve S_t bileşenleri, sırasıyla, radyal ve teğet Siacci ivme bileşenleri olarak adlandırılır.

Eğer (4.19)₁ dikkate alınırsa, radyal Siacci ivme bileşeni,

$$S_r = -\frac{\kappa v^2 r p^2}{p p^2} = -\frac{\kappa r h^2}{p^3} \quad (4.23)$$

dır. Teğet Siacci ivme bileşeni ise birkaç farklı formda yazılabilir. (4.16)_{2,3} ve (4.19)₁ denklemleri dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} S_t &= v \frac{dv}{ds} + \frac{\kappa v^2 q}{p} = v v' + \frac{(p' + \tau b) v^2}{p} \\ &= v v' + \frac{v^2 p'}{p} + \frac{\tau b v^2}{p} = \frac{2v v' p^2 + 2p p' v^2}{2p^2} + \frac{\tau b v^2}{p} \\ &= \frac{(h^2)'}{2p^2} + \frac{\tau b h^2}{p^3} = \frac{1}{2p^2} \left\{ (h^2)' + \frac{2h^2 b \tau p}{p p} \right\} \\ &= \frac{1}{2p^2} \left\{ (h^2)' + \frac{2h^2 b b'}{p^2} \right\} \\ &= \frac{1}{2p^2} \left\{ (h^2)' + \frac{h^2}{p^2} (b^2)' \right\} \end{aligned} \quad (4.24)$$

elde edilir. Ayrıca (4.17)₁ yardımıyla da

$$S_t = \frac{1}{2} (v^2)' + \kappa v^2 \frac{q}{p} = \frac{1}{2} (v^2)' + \kappa v^2 \frac{r r' + \tau p b}{p}$$

olup teğet Siacci ivme bileşeni için farklı bir form da

$$S_t = \frac{1}{2} (v^2)' + \kappa v^2 \left\{ \frac{(r^2)'}{2p} + \tau \mathbf{b} \right\} \quad (4.25)$$

olur. İlave olarak (4.17)₂ eşitliği kullanılırsa,

$$S_t = \frac{1}{2} (v^2)' + \kappa v^2 \frac{q}{p} = \frac{1}{2} (v^2)' + \kappa v^2 \frac{r r' + b b'}{p}$$

elde edilir. Burada

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \langle q\mathbf{T} - p\mathbf{N} + b\mathbf{B}, q\mathbf{T} - p\mathbf{N} + b\mathbf{B} \rangle = q^2 + p^2 + b^2 = r^2 + b^2$$

eşitliği göz önüne alındığı takdirde

$$S_t = \frac{1}{2} (v^2)' + \frac{\kappa v^2}{2p} (r^2 + b^2)' = \frac{1}{2} (v^2)' + \frac{\kappa v^2}{2p} \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle' \quad (4.26)$$

bulunur [5].

Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.1.1. (Siacci Teoremi) Kabul edelim ki $m (>0)$ kütleli bir P parçacığı E^3 Öklid uzayında bir C eğrisi boyunca hareket etsin ve P parçacığının açısız momentum vektörünün binormal bileşeni hiç bir zaman sıfır olmasın. Bu takdirde, P nin ivme vektörü, iki yatay Siacci bileşeninin toplamı şeklindedir. Siacci bileşenlerinden biri C nin teğeti boyunca uzanırken, diğeri de P den, sabit bir orijin noktasından oskülatör düzleme inilen dikmenin ayağı olan noktaya doğru uzanır [5].

Radyal bileşen (4.22) deki gibi bir tek şekilde yazılabilirken, teğet bileşen, (4.24), (4.25) ve (4.26) eşitliklerinde olduğu gibi üç farklı şekilde yazılabilir.

Sonuç 4.1.2. Kabul edelim ki, P parçacığının hareketi, O başlangıç noktasını içermek zorunda olmayan sabit bir düzleme sınırlansın ve P nin açısal momentumun düzleme dik olan bileşeni hiçbir zaman sıfır olmasın. Bu taktirde, \mathbf{e}_r düzlemdeki polar koordinat sisteminin radyal baz vektörünü belirtmek üzere, P nin ivme vektörü, (4.22) eşitliğiyle ifade edilebilir. Burada,

$$S_t = \frac{(h^2)'}{2p^2} \quad (4.27)$$

veya

$$S_t = \frac{1}{2} \left\{ (v^2)' + \frac{\kappa v^2}{p} (r^2)' \right\} \quad (4.28)$$

dır [5].

İspat : Düzlemsel durumda $\tau=0$ dır. Binormal vektör, \mathbf{B} sabittir ve eğri boyunca düzleme diktir.

(4.20) denkleminde (4.12) denklemi yerine yazılırsa

$$r \mathbf{e}_r = q \mathbf{T} - p \mathbf{N}$$

bulunur. Bu eşitlik dikkate alınarak (4.10) eşitliği tekrar düzenlenirse, P nin yer vektörü

$$\mathbf{x} = r \mathbf{e}_r + b \mathbf{B} \quad (4.29)$$

olur. Böylece (4.22) ifadesi, düzlemsel harekette ivme vektörüne karşılık gelir. $\tau=0$ ve $b' = \tau p$ olduğundan, (4.24) denklemi (4.27) halini alır. Benzer şekilde (4.25) denkleminde $\tau=0$ olduğu dikkate alınır (4.28) denklemi elde edilir.

Sonuç 4.1.3. Kabul edelim ki Sonuç 4.1.2 deki sabit düzlem O başlangıç noktasından geçsin ve P nin açısal momentumu hiç bir zaman sıfır olmasın. Bu takdirde, Siacci'nin (4.22) deki ifadesi (4.27) ve (4.28) denklemleriyle verilen S_t , teğet Siacci bileşeni ile belirlidir [5].

İspat : Bu durum Sonuç 4.1.2 nin $b = 0$ için özel bir halidir.

BÖLÜM 5. 1. VE 2. TİP BISHOP ÇATILARI İÇİN SIACCI TEOREMİ

Çalışmanın orijinal kısmını bu bölüm oluşturmaktadır. Bu bölümde 1. ve 2. Tip Bishop çatılarıyla belirli eğriler için Siacci Teoremi elde edilmiş ve birer örnek verilmiştir.

5.1. 1. Tip Bishop Çatısıyla Belirli Bir Uzay Eğrisi İçin Siacci Teoremi

E^3 , 3-boyutlu Öklid uzayında, keyfi kuvvetlerin etkisi altında hareket eden $m (>0)$ kütleli bir P parçacığını ele alalım. E^3 de sabit bir başlangıç noktası O, P nin t anına karşılık gelen yer vektörü \mathbf{x} olmak üzere $C \subset E^3$, $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$ P nin izlediği yol ile yönlendirilmiş eğri ve s de, t ye bağlı C eğrisinin yay parametresi olsun. Böylece

$$\mathbf{x} = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{O\alpha(s)} = \alpha(s) \quad (5.1)$$

yazılabilir. C birim hızlı eğrisi için bir $s \in I$ noktasında birim teğet vektör $\mathbf{T}(s) = \alpha'(s)$ olduğundan (5.1) denkleminin s ye göre türevi alınırsa

$$\mathbf{T} = \mathbf{x}' = \frac{d\mathbf{x}}{ds} \quad (5.2)$$

bulunur. Burada $\mathbf{T}(s)$ yerine \mathbf{T} alınmıştır. Bundan sonra kısalık için C eğrisinin tüm vektör alanları, eğrilik fonksiyonları veya s yay parametresine bağlı tüm fonksiyonlar için benzer yol takip edilecektir.

$\{\mathbf{T}, \mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2\}$, Bishop ortonormal baz sistemi, k_1 ve k_2 de 1. tip Bishop eğrilikleri olmak üzere (3.2) türev matrisiyle verilen eşitliklerin

$$\mathbf{T}' = k_1 \mathbf{N}_1 + k_2 \mathbf{N}_2 \quad , \quad \mathbf{N}_1' = -k_1 \mathbf{T} \quad , \quad \mathbf{N}_2' = -k_2 \mathbf{T} \quad (5.3)$$

olduğunu biliyoruz. P nin t anındaki hız vektörü, yer vektörünün zamana göre türevi olduğundan (5.2) denklemini göz önüne alınırsa

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{ds} \frac{ds}{dt} = v \mathbf{T} \quad , \quad v = \frac{ds}{dt} = \dot{s} \quad (5.4)$$

bulunur. Burada nokta işareti ile zamana göre türev belirtilmektedir. Ayrıca $v = \|\mathbf{v}\|$ olup v , P nin t anındaki hızıdır. P nin t anındaki ivme vektörü, hız vektörünün zamana göre türevidir. O halde

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \dot{v} \mathbf{T} + \dot{\mathbf{T}} v = \dot{v} \mathbf{T} + v \frac{d\mathbf{T}}{ds} \frac{ds}{dt}$$

yazılabilir. Bu son eşitlikte $v = \frac{ds}{dt}$ olduğu göz önüne alınır ve (5.3)₁ denklemini kullanılırsa

$$\mathbf{a} = \dot{v} \mathbf{T} + v^2 k_1 \mathbf{N}_1 + v^2 k_2 \mathbf{N}_2 \quad (5.5)$$

elde edilir. C eğrisi boyunca v , s nin bir fonksiyonudur. Böylece, $\dot{v} = \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt} = v \frac{dv}{ds}$ dır. Bu son eşitlik (5.5) denkleminde yerine yazılırsa

$$\mathbf{a} = v \frac{dv}{ds} \mathbf{T} + k_1 v^2 \mathbf{N}_1 + k_2 v^2 \mathbf{N}_2 \quad (5.6)$$

elde edilir. (3.3), (3.5) ve (3.6) denklemleri ile verilen

$$\theta = \arctan\left(\frac{k_2}{k_1}\right) \quad \text{için} \quad k_1 = \sqrt{k_1^2 + k_2^2} \cos \theta \quad , \quad k_2 = \sqrt{k_1^2 + k_2^2} \sin \theta$$

eşitlikleri (5.6) denkleminde yerine yazılırsa

$$\mathbf{a} = v \frac{dv}{ds} \mathbf{T} + \sqrt{k_1^2 + k_2^2} v^2 (\cos \theta \mathbf{N}_1 + \sin \theta \mathbf{N}_2) \quad (5.7)$$

bulunur. Bu son denklem ifade eder ki C nin P noktasındaki ivme vektörü $S_p \{ \mathbf{T}, \cos \theta \mathbf{N}_1 + \sin \theta \mathbf{N}_2 \}$ düzleminde yatar.

Birim hızlı bir eğri için 1. tip Bishop Darboux vektörünün $\boldsymbol{\omega} = -k_2 \mathbf{N}_1 + k_1 \mathbf{N}_2$ olduğunu biliyoruz [9]. Böylece C nin yay parametresinin t ye bağlı olduğu göz önüne alındığında 1. tip Bishop bazları için açısız hız vektörü,

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{s} (-k_2 \mathbf{N}_1 + k_1 \mathbf{N}_2) \quad (5.8)$$

olur. (5.8) denklemi ifade eder ki açısız hız vektörü $S_p \{ \mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2 \}$ düzleminde yatar ve $\boldsymbol{\omega}$ açısız hız vektörü

$$\dot{\mathbf{T}} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{T} \quad , \quad \dot{\mathbf{N}}_1 = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{N}_1 \quad , \quad \dot{\mathbf{N}}_2 = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{N}_2 \quad (5.9)$$

eşitliklerini sağlar.

O başlangıç noktasına göre P nin açısız momentumu, P nin yer vektörü ile doğrusal momentumunun vektörel çarpımı olup

$$\mathbf{H}_O = \mathbf{x} \wedge m \mathbf{v} = \mathbf{x} \wedge m v \mathbf{T} \quad (5.10)$$

şekindedir.

5.1.1. 1. tip Bishop çatısına göre Siacci teoremi

E^3 de keyfi kuvvetlerin etkisi altında hareket eden P parçacığının, 1. tip Bishop bazlarına göre yer vektörü,

$$\mathbf{x} = q\mathbf{T} - p(\cos\theta\mathbf{N}_1 + \sin\theta\mathbf{N}_2) + b(-\sin\theta\mathbf{N}_1 + \cos\theta\mathbf{N}_2) \quad (5.11)$$

dır. (Şekil 5.1). Şekil 5.1 deki θ açısı binormal vektör ile 1. Tip Bishop çatısının \mathbf{N}_2 baz vektörü arasındaki açıdır. $\mathbf{T} \wedge (\cos\theta\mathbf{N}_1 + \sin\theta\mathbf{N}_2) = (-\sin\theta\mathbf{N}_1 + \cos\theta\mathbf{N}_2)$ olduğundan $(-\sin\theta\mathbf{N}_1 + \cos\theta\mathbf{N}_2)$ vektörü, $S_p\{\mathbf{T}, \cos\theta\mathbf{N}_1 + \sin\theta\mathbf{N}_2\}$ düzleminin normalidir. Ayrıca,

$$q = \langle \mathbf{x}, \mathbf{T} \rangle, \quad -p = \langle \mathbf{x}, \cos\theta\mathbf{N}_1 + \sin\theta\mathbf{N}_2 \rangle, \quad b = \langle \mathbf{x}, -\sin\theta\mathbf{N}_1 + \cos\theta\mathbf{N}_2 \rangle \quad (5.12)$$

dir. $S_p\{\mathbf{T}, \cos\theta\mathbf{N}_1 + \sin\theta\mathbf{N}_2\}$ düzleminde bir \mathbf{r} vektörü,

$$\mathbf{r} = q\mathbf{T} - p(\cos\theta\mathbf{N}_1 + \sin\theta\mathbf{N}_2) \quad (5.13)$$

olsun. Bu takdirde, $\|\mathbf{r}\| = r$ olmak üzere, (3.1) yardımıyla

$$\begin{aligned} r^2 &= \langle \mathbf{r}, \mathbf{r} \rangle = q^2 \langle \mathbf{T}, \mathbf{T} \rangle + p^2 \cos^2\theta \langle \mathbf{N}_1, \mathbf{N}_1 \rangle + p^2 \sin^2\theta \langle \mathbf{N}_2, \mathbf{N}_2 \rangle \\ &= q^2 + p^2 (\cos^2\theta + \sin^2\theta) \\ &= p^2 + q^2 \end{aligned} \quad (5.14)$$

elde edilir.

Aşağıda verilen Şekil 5.1'e bakılacak olursa SPK doğrusu C eğrisinin P noktasındaki teğet doğrusudur. Ayrıca uzaydaki sabit bir O başlangıç noktasından

olduğu görülür.

O halde (5.16)₁ eşitliğinde $k_1 = \sqrt{k_1^2 + k_2^2} \cos \theta$ ve $k_2 = \sqrt{k_1^2 + k_2^2} \sin \theta$ ifadeleri yerine yazılırsa,

$$q' = 1 - \sqrt{k_1^2 + k_2^2} p$$

bulunur.

Benzer şekilde, $k_1 = \sqrt{k_1^2 + k_2^2} \cos \theta$ ve $k_2 = \sqrt{k_1^2 + k_2^2} \sin \theta$ ifadeleri (5.16)₂ ve (5.16)₃ eşitliklerinde yerlerine yazılırsa

$$q \sqrt{k_1^2 + k_2^2} - \theta' b (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) - p' (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = 0$$

yani

$$p' = \sqrt{k_1^2 + k_2^2} q - \theta' b$$

elde edilir. Şimdi de (5.16)₂, $\sin \theta$ ile (5.16)₃, $(-\cos \theta)$ ile genişletilerek taraf tarafa toplanırsa

$$-b' (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + \theta' p (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = 0$$

yani

$$b' = \theta' p$$

bulunur. O halde,

$$q' = 1 - \sqrt{k_1^2 + k_2^2} p \quad , \quad p' = \sqrt{k_1^2 + k_2^2} q - \theta' b \quad , \quad b' = \theta' p \quad (5.17)$$

yazılabilir. (5.14) eşitliğinin türevi alınırsa

$$r r' = p p' + q q'$$

bulunur. Bu son denklemde (5.17)_{1,2,3} eşitlikleri göz önüne alınırsa,

$$r r' = q - b \theta' p \quad , \quad r r' = q - b b' \quad (5.18)$$

elde edilir.

$\{\mathbf{T}, \mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2\}$ sisteminin bir sağ sistem olduğu göz önünde tutularak, (5.11) ile verilen yer vektörü, (5.10) ile verilen açısal momentum vektöründe yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_O &= [q \mathbf{T} - p (\cos \theta \mathbf{N}_1 + \sin \theta \mathbf{N}_2) + b (-\sin \theta \mathbf{N}_1 + \cos \theta \mathbf{N}_2)] \wedge m v \mathbf{T} \\ &= m v (b \cos \theta - p \sin \theta) \mathbf{N}_1 + m v (b \sin \theta + p \cos \theta) \mathbf{N}_2 \end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$\mathbf{H}_O = m b v (\cos \theta \mathbf{N}_1 + \sin \theta \mathbf{N}_2) + m p v (-\sin \theta \mathbf{N}_1 + \cos \theta \mathbf{N}_2) \quad (5.19)$$

elde edilir. Burada

$$h = p v \quad , \quad w = b v \quad (5.20)$$

seçelim.

(5.7) eşitliğiyle verilen ivme vektörünü, $S_p \{\mathbf{T}, \cos \theta \mathbf{N}_1 + \sin \theta \mathbf{N}_2\}$ düzlemindeki SPK teğet doğrultusu ve BP radyal doğrultusu boyunca elde edelim. (5.7)'de yer

alan $(\cos \theta \mathbf{N}_1 + \sin \theta \mathbf{N}_2)$ vektörünün, $\overline{BP} = \mathbf{r}$ vektörü yönündeki birim vektör \mathbf{e}_r olmak üzere \mathbf{e}_r ve \mathbf{T} cinsinden yazılabildiğini göstereceğiz.

Açısal momentumun, ivme vektörünün yattığı $S_p \{ \mathbf{T}, \cos \theta \mathbf{N}_1 + \sin \theta \mathbf{N}_2 \}$ düzleminin normali olan $-\sin \theta \mathbf{N}_1 + \cos \theta \mathbf{N}_2$ vektörü doğrultusunda bileşeni, daima sıfırdan farklıdır. Dolayısıyla (5.19) denkleminde $p \neq 0$ elde edilir. (5.14) de bu durum göz önüne alınırsa $r \neq 0$ olup, böylece $\overline{BP} = \mathbf{r}$ vektörü yönündeki birim vektör \mathbf{e}_r tanımlıdır ve

$$\mathbf{e}_r = \frac{1}{r} \mathbf{r} \quad (5.21)$$

şeklindedir. $p \neq 0$ olduğundan (5.21) ve (5.13) denklemlerinden

$$\cos \theta \mathbf{N}_1 + \sin \theta \mathbf{N}_2 = \frac{1}{p} (-r \mathbf{e}_r + q \mathbf{T}) \quad (5.22)$$

bulunur. Bu son denklem (5.7) denkleminde yerine yazılırsa, ivme vektörü,

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= v \frac{dv}{ds} \mathbf{T} + \sqrt{k_1^2 + k_2^2} v^2 (\cos \theta \mathbf{N}_1 + \sin \theta \mathbf{N}_2) \\ &= v \frac{dv}{ds} \mathbf{T} + \sqrt{k_1^2 + k_2^2} v^2 \left(\frac{1}{p} (-r \mathbf{e}_r + q \mathbf{T}) \right) \\ &= -\frac{\sqrt{k_1^2 + k_2^2} v^2 r}{p} \mathbf{e}_r + \left(v \frac{dv}{ds} + \frac{\sqrt{k_1^2 + k_2^2} v^2 q}{p} \right) \mathbf{T} \\ &= -\frac{\sqrt{k_1^2 + k_2^2} v^2 r}{p} \mathbf{e}_r + \left(v \frac{dv}{ds} + \frac{\sqrt{k_1^2 + k_2^2} v^2 q}{p} \right) \mathbf{T} = S_r \mathbf{e}_r + S_t \mathbf{T} \quad (5.23) \end{aligned}$$

olur. Burada S_r ve S_t , sırasıyla, radyal ve teğet Siacci ivme bileşenleri olarak adlandırılır. $p \neq 0$ olduğundan dolayı (5.20)₁ denkleminde radyal Siacci ivme bileşeni,

$$S_r = -\frac{\sqrt{k_1^2 + k_2^2} v^2 r p^2}{p p^2} = -\frac{\sqrt{k_1^2 + k_2^2} r h^2}{p^3} \quad (5.24)$$

dır. Teğet Siacci ivme bileşeni farklı formlarda yazılabilir. İlk olarak teğet Siacci ivme bileşeni (5.17)_{2,3} ve (5.20)₁ denklemleri göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} S_t &= v \frac{dv}{ds} + \frac{\sqrt{k_1^2 + k_2^2} v^2 q}{p} = v v' + \frac{(p' + \theta' b) v^2}{p} \\ &= v v' + \frac{v^2 p'}{p} + \frac{\theta' b v^2}{p} = \frac{2v v' p^2 + 2p p' v^2}{2p^2} + \frac{\theta' b v^2}{p} \\ &= \frac{(h^2)'}{2p^2} + \frac{\theta' b h^2}{p^3} = \frac{1}{2p^2} \left\{ (h^2)' + \frac{2h^2 b \theta' p}{p p} \right\} \\ &= \frac{1}{2p^2} \left\{ (h^2)' + \frac{2h^2 b b'}{p^2} \right\} \\ &= \frac{1}{2p^2} \left\{ (h^2)' + \frac{h^2}{p^2} (b^2)' \right\} \end{aligned} \quad (5.25)$$

elde edilir. İkinci olarak (5.18)₁ denkleminde

$$S_t = \frac{1}{2} (v^2)' + \sqrt{k_1^2 + k_2^2} v^2 \frac{q}{p} = \frac{1}{2} (v^2)' + \sqrt{k_1^2 + k_2^2} v^2 \frac{r r' + \theta' p b}{p}$$

olup, teğet Siacci ivme bileşeni için farklı bir form

$$S_t = \frac{1}{2} (v^2)' + \sqrt{k_1^2 + k_2^2} v^2 \left\{ \frac{(r^2)'}{2p} + \theta' b \right\} \quad (5.26)$$

bulunur. Son olarak (5.18)₂ denklemini dikkate alınırsa

$$S_t = \frac{1}{2} (v^2)' + \sqrt{k_1^2 + k_2^2} v^2 \frac{q}{p} = \frac{1}{2} (v^2)' + \sqrt{k_1^2 + k_2^2} v^2 \frac{r r' + b b'}{p}$$

bulunur. $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = q^2 + p^2 + b^2 = r^2 + b^2$ eşitliği göz önüne alınırsa son denklemden

$$S_t = \frac{1}{2} (v^2)' + \frac{\sqrt{k_1^2 + k_2^2} v^2}{2p} (r^2 + b^2)' = \frac{1}{2} (v^2)' + \frac{\sqrt{k_1^2 + k_2^2} v^2}{2p} \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle' \quad (5.27)$$

elde edilir.

Böylece, 1. tip Bishop çatısına göre Siacci Teoremi aşağıdaki gibi verilebilir.

Teorem 5.1.1.1. (1. tip Bishop çatısına göre Siacci teoremi) Bir C eğrisi boyunca $m(>0)$ kütleli bir P parçacığı E^3 Öklid uzayında hareket etsin. Kabul edelim ki bu P parçacığının açısız momentumunun, C eğrisinin P noktasındaki $S_p \{ \mathbf{T}, \cos \theta \mathbf{N}_1 + \sin \theta \mathbf{N}_2 \}$ düzlemine dik olan, $(-\sin \theta \mathbf{N}_1 + \cos \theta \mathbf{N}_2)$ vektörü doğrultusundaki bileşeni hiçbir zaman sıfır olmasın. Bu takdirde, P nin ivme vektörü

$$\mathbf{a} = - \frac{\sqrt{k_1^2 + k_2^2} v^2 r}{p} \mathbf{e}_r + \left(v \frac{dv}{ds} + \frac{\sqrt{k_1^2 + k_2^2} v^2 q}{p} \right) \mathbf{T} = S_r \mathbf{e}_r + S_t \mathbf{T}$$

olmak üzere iki yatay bileşenin toplamı şeklinde ifade edilebilir. Burada S_r ve S_t yatay bileşenleri, sırasıyla, radyal ve teğet Siacci ivme bileşenleri olarak adlandırılır. Radyal ve teğet Siacci ivme bileşenleri, sırasıyla, (5.24) ve (5.25), (5.26), (5.27) formlarındadırlar.

Kabul edelim ki P parçasığı $S_p \{ \mathbf{T}, \cos \theta \mathbf{N}_1 + \sin \theta \mathbf{N}_2 \}$ düzleminde yatan bir C eğrisi boyunca hareket etsin. Bu taktirde $\mathbf{T} \times (\cos \theta \mathbf{N}_1 + \sin \theta \mathbf{N}_2) = (-\sin \theta \mathbf{N}_1 + \cos \theta \mathbf{N}_2)$ vektörü düzlemin birim normal vektörü olup, sabittir. O halde eğri üzerindeki tüm noktalar için $(-\sin \theta \mathbf{N}_1 + \cos \theta \mathbf{N}_2)' = 0$ dır. Böylece

$$(k_1 \sin \theta - k_2 \cos \theta) \mathbf{T} + (-\theta' \cos \theta) \mathbf{N}_1 + (-\theta' \sin \theta) \mathbf{N}_2 = 0$$

olup son eşitlikte $k_1 = \sqrt{k_1^2 + k_2^2} \cos \theta$ ve $k_2 = \sqrt{k_1^2 + k_2^2} \sin \theta$ yerlerine yazılırsa

$$(-\theta' \cos \theta) \mathbf{N}_1 + (-\theta' \sin \theta) \mathbf{N}_2 = 0$$

elde edilir. $\cos \theta$ ve $\sin \theta$ aynı anda sıfır olamayacağından dolayı $\theta' = 0$ dır. (5.11), (5.13), ve (5.21) denklemleri göz önüne alınırsa,

$$\mathbf{x} = r \mathbf{e}_r + b(-\sin \theta \mathbf{N}_1 + \cos \theta \mathbf{N}_2) \quad (5.28)$$

elde edilir. Böylece düzlemsel harekette (5.23) denklemi ivme vektörüne karşılık gelir. $\theta' = 0$ ve $\mathbf{b}' = \theta' \mathbf{p}$ olduğu göz önünde bulundurulursa sırasıyla, (5.25) ve (5.26) denklemlerinden

$$S_t = \frac{(h^2)'}{2p^2}$$

ve

$$S_t = \frac{1}{2} \left\{ (v^2)' + \frac{\sqrt{k_1^2 + k_2^2} v^2}{p} (r^2)' \right\}$$

elde edilir.

Böylece aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 5.1.1.2. P parçacığının hareketinin, O başlangıç noktasını içermek zorunda olmayan $S_p \{ \mathbf{T}, \cos \theta \mathbf{N}_1 + \sin \theta \mathbf{N}_2 \}$ düzlemine sınırlandığı ve açısal momentumunun düzleme dik olan bileşeninin hiçbir zaman sıfır olmadığı varsayalım. Bu durumda, \mathbf{e}_r düzlemdeki polar koordinat sisteminin radyal baz vektörünü belirtmek üzere P nin ivme vektörü, (5.23) de gösterilen şekilde ifade edilebilir. Teğet Siacci ivme bileşeni,

$$S_t = \frac{(h^2)'}{2p^2} \quad (5.29)$$

halini veya buna denk olarak,

$$S_t = \frac{1}{2} \left\{ (v^2)' + \frac{\sqrt{k_1^2 + k_2^2} v^2}{p} (r^2)' \right\} \quad (5.30)$$

halini alır.

Özel olarak Sonuç 5.1.1.2 de $b=0$ seçilirse aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 5.1.1.3. Kabul edelim ki Sonuç 5.1.1.2'deki sabit düzlem O başlangıç noktasından geçsin ve P nin açısal momentumu hiçbir zaman sıfır olmasın. Bu takdirde, Siacci' nin (5.23)'deki ifadesi (5.29) ve (5.30)'da verilen S_t ile belirlidir.

Örnek 5.1.1.4. (Sağ dairesel helis boyunca hareket) E^3 de bir P parçacığı, M silindir yüzeyi üzerinde bulunan C dairesel helis eğrisi boyunca hareket etsin. Eğilim eksenini \mathbf{k} olmak üzere, α helis açısıdır. (R, ψ, z) silindirik koordinat sistemini temsil etmek üzere, $\mathbf{e}_R = \cos \psi \mathbf{i} + \sin \psi \mathbf{j}$ ve $\mathbf{e}_\psi = -\sin \psi \mathbf{i} + \cos \psi \mathbf{j}$ olup $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ bir sabit ortonormal baz sistemi olsun. $A(>0)$ ve $B(>0)$ sabit olmak üzere P nin yer vektörü,

$$\mathbf{a} = -A\omega^2 \mathbf{e}_R + \dot{\omega}(A\mathbf{e}_\psi + B\mathbf{k}) \quad (5.33)$$

olur. Eğer (5.32) denkleminde $\mathbf{e}_\psi = -\sin \psi \mathbf{i} + \cos \psi \mathbf{j}$ yerine yazılırsa

$$\mathbf{v} = -\omega A \cos \psi \mathbf{i} + \omega A \sin \psi \mathbf{j} + \omega B \mathbf{k}$$

elde edilir. Bu son denklemde (5.4)₂ denklemini kullanılırsa

$$\begin{aligned} \dot{s} = v = \|\mathbf{v}\| &= \sqrt{\omega^2 A^2 \cos^2 \psi + \omega^2 A^2 \sin^2 \psi + \omega^2 B^2} \\ &= \omega \sqrt{A^2 + B^2} \end{aligned}$$

Bulunur. Eğer $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ seçilirse

$$v = \dot{s} = C\omega \quad (5.34)$$

olur. $\omega = \dot{\psi}$ olduğundan (5.34) denklemini göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} = C \frac{d\psi}{dt} &\Rightarrow 1 = C \frac{d\psi}{ds} \\ &\Rightarrow \int 1 ds = \int C \frac{d\psi}{ds} ds = \int C d\psi \\ &\Rightarrow \int ds = \int C d\psi \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$s = C\psi + \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (5.35)$$

dir. Bu ifade eder ki yay uzunluğu ψ açısıyla birlikte doğrusal olarak artmaktadır.

(5.34) denklemini göz önüne alınırsa P parçacığının hızının zamana göre türevi

$$v \frac{dv}{ds} = C \dot{\omega} \quad (5.36)$$

dir.

$\mathbf{e}_R = \cos \psi \mathbf{i} + \sin \psi \mathbf{j}$ olduğu göz önüne alınırsa (5.31) den P nin \mathbf{x} yer vektörü,

$$\mathbf{x} = A \cos \psi \mathbf{i} + A \sin \psi \mathbf{j} + B \psi \mathbf{k}$$

olur. P parçacığı eğri üzerinde hareket ettiğinden dolayı

$$\alpha(\psi) = A \cos \psi \mathbf{i} + A \sin \psi \mathbf{j} + B \psi \mathbf{k} = (A \cos \psi, A \sin \psi, B \psi)$$

dir. $\tan \alpha = A/B$ olmak üzere C , sağ dairesel helis eğrisi için, \mathbf{T} , \mathbf{N} , \mathbf{B} , κ , τ Frenet elemanlarını hesaplayalım.

$A > 0$, $B > 0$, $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ ve $\tan \alpha = \frac{A}{B}$ olduğundan

$$\sin \alpha = \frac{A}{C}, \quad \cos \alpha = \frac{B}{C} \quad (5.37)$$

dir. Herhangi parametre cinsinden verilen bir eğri için Frenet elemanlarının

$$\mathbf{T} = \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|}, \quad \mathbf{N} = \mathbf{B} \wedge \mathbf{T}, \quad \mathbf{B} = \frac{\alpha' \wedge \alpha''}{\|\alpha' \wedge \alpha''\|}$$

$$\kappa = \frac{\|\alpha' \wedge \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3} \quad (5.38)$$

$$\tau = \frac{\det(\alpha', \alpha'', \alpha''')}{\|\alpha' \wedge \alpha''\|^2}$$

olduğunu biliyoruz.

Böylece,

$$\alpha' = (-A \sin \psi, A \cos \psi, B)$$

$$\alpha'' = (-A \cos \psi, -A \sin \psi, 0)$$

$$\alpha''' = (A \sin \psi, -A \cos \psi, 0)$$

$$\|\alpha'\| = \sqrt{A^2 \sin^2 \psi + A^2 \cos^2 \psi + B^2} = \sqrt{A^2 + B^2} = C$$

$$\alpha' \wedge \alpha'' = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -A \sin \psi & A \cos \psi & B \\ -A \cos \psi & -A \sin \psi & 0 \end{vmatrix} = (AB \sin \psi, -AB \cos \psi, A^2)$$

$$\|\alpha' \wedge \alpha''\| = \sqrt{A^2 B^2 \sin^2 \psi + A^2 B^2 \cos^2 \psi + A^4} = \sqrt{A^2 (A^2 + B^2)} = \sqrt{A^2 C^2} = AC$$

$$\det(\alpha', \alpha'', \alpha''') = \begin{vmatrix} -A \sin \psi & A \cos \psi & B \\ -A \cos \psi & -A \sin \psi & 0 \\ A \sin \psi & -A \cos \psi & 0 \end{vmatrix} = B(A^2 \cos^2 \psi + A^2 \sin^2 \psi) = BA^2$$

dir. O halde (5.38)_{1,2,3,4,5}, (5.37)_{1,2} ve yukarıdaki eşitlikler yardımıyla,

$$\mathbf{T} = -\frac{A}{C} \sin \psi \mathbf{i} + \frac{A}{C} \cos \psi \mathbf{j} + \frac{B}{C} \mathbf{k} = \sin \alpha \mathbf{e}_\psi + \cos \alpha \mathbf{k}$$

$$\mathbf{B} = \frac{B}{C} \sin \psi \mathbf{i} - \frac{B}{C} \cos \psi \mathbf{j} + \frac{A}{C} \mathbf{k} = -\cos \alpha \mathbf{e}_\psi + \sin \alpha \mathbf{k}$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{B} \wedge \mathbf{T} = -\cos \psi \mathbf{i} - \sin \psi \mathbf{j} = -\mathbf{e}_R \quad (5.39)$$

$$\kappa = \frac{A}{C^2}$$

$$\tau = \frac{B}{C^2}$$

elde edilir. Helis için 1. tip Bishop bazları, (5.39)_{1,2,3} eşitlikleri (3.11)'de yerlerine yazıldığı taktirde,

$$\begin{aligned}\mathbf{T} &= \sin \alpha \mathbf{e}_\psi + \cos \alpha \mathbf{k} \\ \mathbf{N}_1 &= -\cos \theta \mathbf{e}_R + \sin \theta \cos \alpha \mathbf{e}_\psi - \sin \theta \sin \alpha \mathbf{k} \\ \mathbf{N}_2 &= -\sin \theta \mathbf{e}_R - \cos \theta \cos \alpha \mathbf{e}_\psi + \cos \theta \sin \alpha \mathbf{k}\end{aligned}\quad (5.40)$$

bulunur. (3.5) den $k_1 = \kappa \cos \theta$, $k_2 = \kappa \sin \theta$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla (5.39)₄ eşitlikliği yardımıyla k_1 ve k_2 eğrilikleri

$$k_1 = \frac{A}{C^2} \cos \theta \quad , \quad k_2 = \frac{A}{C^2} \sin \theta = k_1 \tan \theta \quad (5.41)$$

olur. (5.8) denkleminde, (5.40)_{2,3} ve (5.41)₂ yerlerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa 1. tip Bishop bazları için açılmal hız vektörü,

$$\boldsymbol{\omega} = -vk_1 \sec \theta \left(\cos \alpha \mathbf{e}_\psi - \sin \alpha \mathbf{k} \right) \quad (5.42)$$

bulunur.

\mathbf{e}_R ve \mathbf{e}_ψ birim vektörleri \mathbf{ij} düzleminde yer alıp birbirlerine diktir. Dolayısıyla \mathbf{k} baz vektörü her ikisine de diktir. Bu durumda

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{e}_R , \mathbf{e}_R \rangle &= \langle \mathbf{e}_\psi , \mathbf{e}_\psi \rangle = \langle \mathbf{k} , \mathbf{k} \rangle = 1 \\ \langle \mathbf{e}_R , \mathbf{e}_\psi \rangle &= \langle \mathbf{e}_R , \mathbf{k} \rangle = \langle \mathbf{e}_\psi , \mathbf{k} \rangle = 0\end{aligned}\quad (5.43)$$

dır.

(5.43) deki eşitlikler göz önünde tutularak (5.12)_{1,2,3} eşitliklerinde (5.31) ve (5.40)_{1,2,3} deki denklemler yerlerine yazılırsa,

$$q = z \cos \alpha \quad , \quad p = A \quad , \quad b = z \sin \alpha \quad (5.44)$$

elde edilir. (5.44)_{1,2,3} eşitlikleri (5.11) denkleminde yerlerine yazılırsa \mathbf{x} yer vektörü,

$$\mathbf{x} = z \cos \alpha \mathbf{T} - A (\cos \theta \mathbf{N}_1 + \sin \theta \mathbf{N}_2) + z \sin \alpha (-\sin \theta \mathbf{N}_1 + \cos \theta \mathbf{N}_2) \quad (5.45)$$

olur. Eğer (5.45) denkleminde gerekli düzenlemeler yapılırsa 1.tip Bishop bazları doğrultusunda \mathbf{x} yer vektörü,

$$\mathbf{x} = z \cos \alpha \mathbf{T} - (z \sin \alpha \sin \theta + A \cos \theta) \mathbf{N}_1 + (z \sin \alpha \cos \theta - A \sin \theta) \mathbf{N}_2 \quad (5.46)$$

bulunur.

(5.20)_{1,2} denkleminde (5.37)₁ , (5.34) ve (5.44)_{2,3} denklemleri kullanılırsa

$$h = p v = A C \omega \quad w = b v = z \sin \alpha C \omega = A z \omega \quad (5.47)$$

bulunur.

Şimdi; 1. tip Bishop çatısı üzerinde Siacci teoremi uygulanırsa; S_r radyal Siacci bileşeni için (5.44)_{1,2}, (5.34), (5.41)_{1,2} ve (5.14) denklemleri yardımıyla

$$\begin{aligned} S_r &= - \frac{\sqrt{k_1^2 + k_2^2} v^2 r}{p} = - \frac{\sqrt{k_1^2 + k_2^2} v^2 \sqrt{p^2 + q^2}}{p} \\ &= - \frac{\sqrt{\frac{A^2}{C^4} \cos^2 \theta + \frac{A^2}{C^4} \sin^2 \theta} C^2 \omega^2 \sqrt{A^2 + z^2 \cos^2 \alpha}}{A} \\ &= - \frac{\frac{A}{C^2} C^2 \omega^2 \sqrt{A^2 + z^2 \cos^2 \alpha}}{A} \\ &= - \omega^2 \sqrt{A^2 + z^2 \cos^2 \alpha} \end{aligned} \quad (5.48)$$

bulunur. S_t teğet Siacci bileşeni için ise (5.41)_{1,2}, (5.34) ve (5.44)_{1,2} ve (5.36) denklemleri yardımıyla

$$\begin{aligned} S_t = v \frac{dv}{ds} + \frac{\sqrt{k_1^2 + k_2^2} v^2 q}{p} &= C\dot{\omega} + \frac{\sqrt{\frac{A^2}{C^4} \cos^2 \theta + \frac{A^2}{C^4} \sin^2 \theta} C^2 \omega^2 z \cos \alpha}{A} \\ &= C\dot{\omega} + \frac{\frac{A}{C^2} C^2 \omega^2 z \cos \alpha}{A} \end{aligned}$$

olup,

$$S_t = C\dot{\omega} + \omega^2 z \cos \alpha \quad (5.49)$$

elde edilir.

5.2. 2. Tip Bishop Çatısıyla Belirli Bir Uzay Eğrisi İçin Siacci Teoremi

E^3 , 3-boyutlu Öklid uzayında keyfi kuvvetlerin etkisi altında hareket eden $m(>0)$ kütleli bir parçacık P ve E^3 de keyfi sabit bir başlangıç noktası O olsun. E^3 de bir C eğrisi $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$; P parçacığının izlediği yol ile yönlendirilsin ve \mathbf{x} de yer vektörü olsun. C eğrisinin yay parametresi s ve s de t ye bağlı bir fonksiyon olmak üzere

$$\mathbf{x} = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{O\alpha(s)} = \alpha(s) \quad (5.50)$$

yazılabilir. Bu durumda (5.50) eşitliğinde s ye göre türev alınır ve $\{\zeta_1, \zeta_2, \mathbf{B}\}$, 2. tip Bishop ortonormal baz sistemi için (3.20) denklemleri kullanılırsa,

$$\mathbf{T} = \mathbf{x}' = \frac{d\mathbf{x}}{ds} = \sin \phi \zeta_1 - \cos \phi \zeta_2 \quad (5.51)$$

bulunur.

ϵ_1 ve ϵ_2 , 2. tip Bishop eğrilikleri olmak üzere, (3.12) türev matrisinden

$$\zeta_1' = -\epsilon_1 \mathbf{B} \quad , \quad \zeta_2' = -\epsilon_2 \mathbf{B} \quad , \quad \mathbf{B}' = \epsilon_1 \zeta_1 + \epsilon_2 \zeta_2 \quad (5.52)$$

dir.

\mathbf{x} yer vektörünün zamana göre türevi \mathbf{P} nin t anındaki hız vektörü olduğundan (5.51) denklemi göz önünde bulundurulursa

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{ds} \frac{ds}{dt} = v(\sin \phi \zeta_1 - \cos \phi \zeta_2) \quad , \quad v = \frac{ds}{dt} = \dot{s} \quad (5.53)$$

elde edilir. Burada $v = \|\mathbf{v}\|$ olup v , \mathbf{P} nin t anındaki hızıdır. Hız vektörünün zamana göre türevi \mathbf{P} nin t anındaki ivme vektörünü verdiğiinden

$$\begin{aligned} \mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} &= \dot{v}(\sin \phi \zeta_1 - \cos \phi \zeta_2) + \frac{d}{dt}(\sin \phi \zeta_1 - \cos \phi \zeta_2) v \\ &= \dot{v}(\sin \phi \zeta_1 - \cos \phi \zeta_2) + \frac{d(\sin \phi \zeta_1 - \cos \phi \zeta_2)}{ds} \frac{ds}{dt} v \\ &= \dot{v}(\sin \phi \zeta_1 - \cos \phi \zeta_2) + \frac{d(\sin \phi \zeta_1 - \cos \phi \zeta_2)}{ds} v v \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu son eşitlikte

$$\begin{aligned} \frac{d(\sin \phi \zeta_1 - \cos \phi \zeta_2)}{ds} &= \phi' \cos \phi \zeta_1 + \zeta_1' \sin \phi + \phi' \sin \phi \zeta_2 - \zeta_2' \cos \phi \\ &= \phi' \cos \phi \zeta_1 - \epsilon_1 \sin \phi \mathbf{B} + \phi' \sin \phi \zeta_2 + \epsilon_2 \cos \phi \mathbf{B} \end{aligned}$$

ifadesi yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\mathbf{a} = (\dot{v} \sin \phi + \phi' v^2 \cos \phi) \zeta_1 + (-\dot{v} \cos \phi + \phi' v^2 \sin \phi) \zeta_2 + (v^2 \epsilon_2 \cos \phi - v^2 \epsilon_1 \sin \phi) \mathbf{B} \quad (5.54)$$

bulunur. (3.14), (3.18) ve (3.19) denklemleri göz önüne alındığında

$$\phi = \arctan\left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}\right) \text{ için } \epsilon_1 = -\sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2} \cos \phi, \quad \epsilon_2 = -\sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2} \sin \phi$$

olduğunu biliyoruz. O halde son üç denklem (5.54) denkleminde kullanılırsa

$$\mathbf{a} = (\dot{v} \sin \phi + \phi' v^2 \cos \phi) \zeta_1 + (-\dot{v} \cos \phi + \phi' v^2 \sin \phi) \zeta_2$$

elde edilir. Böylece \mathbf{a} ivme vektörünün denklemi, teğet doğrultudaki bileşeni görülebilecek şekilde düzenlenirse,

$$\mathbf{a} = \dot{v} (\sin \phi \zeta_1 - \cos \phi \zeta_2) + \phi' v^2 (\cos \phi \zeta_1 + \sin \phi \zeta_2) \quad (5.55)$$

bulunur. C eğrisi boyunca \mathbf{v} , s ye bağlı bir fonksiyon olduğundan

$$\dot{v} = \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt} = v \frac{dv}{ds}$$

dır. Eğer son denklem (5.55) denkleminde yerine yazılırsa \mathbf{a} ivme vektörü

$$\mathbf{a} = v \frac{dv}{ds} (\sin \phi \zeta_1 - \cos \phi \zeta_2) + \phi' v^2 (\cos \phi \zeta_1 + \sin \phi \zeta_2) \quad (5.56)$$

olur. Bu ifade ederki \mathbf{a} ivme vektörü C eğrisinin P noktasındaki, $S_p \{ \sin \phi \zeta_1 - \cos \phi \zeta_2, \cos \phi \zeta_1 + \sin \phi \zeta_2 \}$ düzleminde yatar.

C eğrisinin yay parametresi s nin t ye bağlı olduğu göz önünde bulundurulursa, 2. tip Bishop bazları için açısız hız vektörü,

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{s} (-\epsilon_2 \zeta_1 + \epsilon_1 \zeta_2) \quad (5.57)$$

olur. Bu son denklemden açıktır ki $\boldsymbol{\omega}$ açısal hız vektörü C nin $S_p\{\zeta_1, \zeta_2\}$ düzleminde yatar ve

$$\dot{\zeta}_1 = \boldsymbol{\omega} \wedge \zeta_1 \quad , \quad \dot{\zeta}_2 = \boldsymbol{\omega} \wedge \zeta_2 \quad , \quad \dot{\mathbf{B}} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{B} \quad (5.58)$$

eşitlikleri sağlanır.

O başlangıç noktasına göre P nin açısal momentumu, P nin yer vektörü ile doğrusal momentum vektörünün vektörel çarpımı olduğundan

$$\mathbf{H}_O = \mathbf{x} \wedge m \mathbf{v} = \mathbf{x} \wedge m v (\sin \phi \zeta_1 - \cos \phi \zeta_2) \quad (5.59)$$

dır.

5.2.1. 2. tip Bishop çatısına göre Siacci teoremi

Keyfi kuvvetlerin etkisi altında E^3 de hareket ettiği belirtilen P parçacığının, 2. tip Bishop bazlarına göre yer vektörü,

$$\mathbf{x} = q (\sin \phi \zeta_1 - \cos \phi \zeta_2) - p (\cos \phi \zeta_1 + \sin \phi \zeta_2) + b \mathbf{B} \quad (5.60)$$

olsun (Şekil 5.3). Burada ϕ , asli normal vektör ile 2. Tip Bishop çatısının ζ_1 baz vektörü arasındaki açı olup, $(\sin \phi \zeta_1 - \cos \phi \zeta_2) \wedge (\cos \phi \zeta_1 + \sin \phi \zeta_2) = \mathbf{B}$ olduğundan dolayı \mathbf{B} binormal vektörü $S_p\{\sin \phi \zeta_1 - \cos \phi \zeta_2, \cos \phi \zeta_1 + \sin \phi \zeta_2\}$ düzleminin normalidir. Ayrıca,

$$q = \langle \mathbf{x}, \sin \phi \zeta_1 - \cos \phi \zeta_2 \rangle \quad , \quad -p = \langle \mathbf{x}, \cos \phi \zeta_1 + \sin \phi \zeta_2 \rangle \quad , \quad b = \langle \mathbf{x}, \mathbf{B} \rangle \quad (5.61)$$

dir. Kabul edelim ki $S_p\{\sin \phi \zeta_1 - \cos \phi \zeta_2, \cos \phi \zeta_1 + \sin \phi \zeta_2\}$ düzleminde \mathbf{r} vektörü,

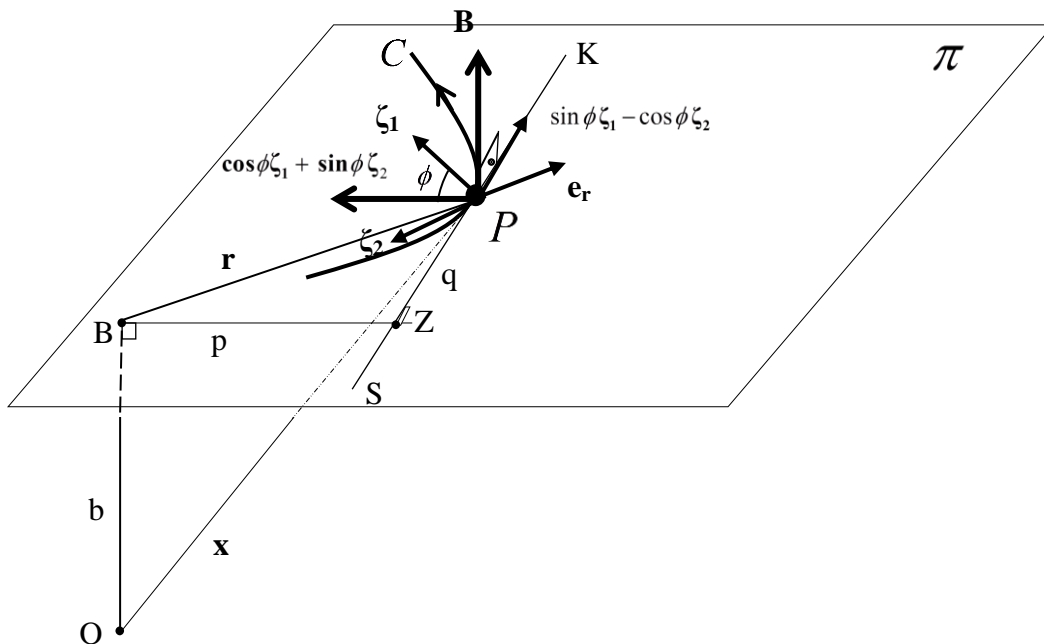
$$\mathbf{r} = q(\sin \phi \zeta_1 - \cos \phi \zeta_2) - p(\cos \phi \zeta_1 + \sin \phi \zeta_2) \quad (5.62)$$

olsun. $\{\zeta_1, \zeta_2, \mathbf{B}\}$ sisteminin bir ortonormal sistem olduğu göz önüne alındığında $\langle \mathbf{r}, \mathbf{r} \rangle = p^2 + q^2$ dir. Dolayısıyla, $\|\mathbf{r}\| = r$ olmak üzere,

$$r^2 = \langle \mathbf{r}, \mathbf{r} \rangle = p^2 + q^2 \quad (5.63)$$

dir.

Şekil 5.3 de SPK doğrusu C eğrisinin P noktasındaki teğet doğrusudur. Uzaydaki sabit bir O başlangıç noktasından $\pi = S_p \{ \sin \phi \zeta_1 - \cos \phi \zeta_2, \cos \phi \zeta_1 + \sin \phi \zeta_2 \}$ düzlemine inilen dik OB vektörüdür ve dolayısıyla B nin O ya göre yer vektörü $b\mathbf{B}$ dir. Ayrıca, BZ teğet doğrusuna dik olduğundan dolayı Z noktasının B referans noktasına göre yer vektörü $-p(\cos \phi \zeta_1 + \sin \phi \zeta_2)$ dir. Burada, P noktasının B referans noktasına göre yer vektörü \mathbf{r} ve Z referans noktasına göre yer vektörü de $q(\sin \phi \zeta_1 - \cos \phi \zeta_2)$ dir.



Şekil 5.3. P parçacığının 2.tip Bishop bazlarıyla belirli bir uzay eğrisi boyunca hareketi

Eğer (5.51) denklemini göz önünde bulundurulur ve (5.60) denkleminin türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \sin \phi \zeta_1 - \cos \phi \zeta_2 &= (q' \sin \phi + \phi' \cos \phi q - p' \cos \phi + \phi' \sin \phi p + \epsilon_1 b) \zeta_1 \\ &+ (-q' \cos \phi + \phi' \sin \phi q - p' \sin \phi - \phi' \cos \phi p + \epsilon_2 b) \zeta_2 \quad (5.64) \\ &+ (b' - \epsilon_1 q \sin \phi + \epsilon_1 p \cos \phi + \epsilon_2 q \cos \phi + \epsilon_2 p \sin \phi) \mathbf{B} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned} q' \sin \phi + \phi' \cos \phi q - p' \cos \phi + \phi' \sin \phi p + \epsilon_1 b &= \sin \phi \\ q' \cos \phi - \phi' \sin \phi q + p' \sin \phi + \phi' \cos \phi p - \epsilon_2 b &= \cos \phi \quad (5.65) \\ b' - \epsilon_1 q \sin \phi + \epsilon_1 p \cos \phi + \epsilon_2 q \cos \phi + \epsilon_2 p \sin \phi &= 0 \end{aligned}$$

olduğu görülür.

(5.65)₃ de $\epsilon_1 = -\sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2} \cos \phi$ ve $\epsilon_2 = -\sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2} \sin \phi$ eşitlikleri yerlerine yazılırsa

$$b' = \sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2} p$$

bulunur.

Benzer şekilde, $\epsilon_1 = -\sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2} \cos \phi$ ve $\epsilon_2 = -\sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2} \sin \phi$ eşitlikleri (5.65)₁ ve

(5.65)₂ de yerlerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$q' (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi) + \phi' p (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi) = \sin^2 \phi + \cos^2 \phi$$

ve

$$q' = 1 - \phi' p$$

elde edilir. Eğer (5.65)₁, $-\cos\phi$ ile (5.65)₂, $\sin\phi$ ile genişletilerek taraf tarafa toplanır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$-\phi' q (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) + p' + \sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2} b (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) = 0$$

ve

$$p' = \phi' q - \sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2} b$$

elde edilir. Böylece

$$q' = 1 - \phi' p \quad , \quad p' = \phi' q - \sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2} b \quad , \quad b' = \sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2} p \quad (5.66)$$

dir. (5.63) eşitliğinin türevi alınır

$$r r' = p p' + q q'$$

bulunur. Bu son denklemde (5.66)_{1,2,3} denklemleri yerlerine yazılırsa

$$r r' = q - b \sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2} p \quad , \quad r r' = q - b b' \quad (5.67)$$

elde edilir.

$\{\zeta_1, \zeta_2, \mathbf{B}\}$ vektör sisteminin bir sağ sistem olduğu göz önünde bulundurularak, (5.60) ile verilen yer vektörü, (5.59) denkleminde yerine yazılırsa açıl momentum vektörü

$$\mathbf{H}_O = m v b (\cos \phi \zeta_1 + \sin \phi \zeta_2) + m v p \mathbf{B} \quad (5.68)$$

olur. Burada

$$h = pv \quad , \quad w = bv \quad (5.69)$$

seçelim. (5.56) ile verilen ivme vektörünü, $S_p \{ \sin \phi \zeta_1 - \cos \phi \zeta_2, \cos \phi \zeta_1 + \sin \phi \zeta_2 \}$ düzlemindeki SPK teğet doğrultusu ve BP radyal doğrultusu boyunca elde edelim. Şimdi (5.56) da yer alan $(\cos \phi \zeta_1 + \sin \phi \zeta_2)$ vektörünün, $\overline{BP} = \mathbf{r}$ vektörü yönündeki birim vektör \mathbf{e}_r ve $(\sin \phi \zeta_1 - \cos \phi \zeta_2)$ vektörleri cinsinden yazabildiğini gösterelim.

İvme vektörünün yattığı $S_p \{ \sin \phi \zeta_1 - \cos \phi \zeta_2, \cos \phi \zeta_1 + \sin \phi \zeta_2 \}$ düzleminin normali olan \mathbf{B} binormal vektörü doğrultusunda, açısal momentumun bileşeni daima sıfırdan farklıdır. Dolayısıyla (5.68) denkleminde $p \neq 0$ olduğundan dolayı (5.63) denkleminde $r \neq 0$ olur. Böylece $\overline{BP} = \mathbf{r}$ vektörü yönündeki birim vektör \mathbf{e}_r tanımlıdır ve

$$\mathbf{e}_r = \frac{1}{r} \mathbf{r} \quad (5.70)$$

şeklindedir. $p \neq 0$ olduğu göz önünde bulundurulursa (5.70) ve (5.62) eşitlikleri yardımıyla

$$(\cos \phi \zeta_1 + \sin \phi \zeta_2) = \frac{1}{p} \left[-r \mathbf{e}_r + q (\sin \phi \zeta_1 - \cos \phi \zeta_2) \right] \quad (5.71)$$

bulunur. O halde, son denklem (5.56) denkleminde yerine yazılırsa \mathbf{a} ivme vektörü

$$\mathbf{a} = -\frac{\phi' v^2 r}{p} \mathbf{e}_r + \left(v \frac{dv}{ds} + \frac{\phi' v^2 q}{p} \right) (\sin \phi \zeta_1 - \cos \phi \zeta_2) = S_r \mathbf{e}_r + S_t (\sin \phi \zeta_1 - \cos \phi \zeta_2) \quad (5.72)$$

şeklinde elde edilir. Buradaki S_r ve S_t , sırasıyla, radyal ve teğet Siacci ivme bileşenleri olarak isimlendirilirler. Burada kolayca radyal Siacci ivme bileşeninin

$$S_r = -\frac{\phi' v^2 r}{p} = \frac{\phi' v^2 r p^2}{p p^2} = -\frac{\phi' r h^2}{p^3} \quad (5.73)$$

ve teğet Siacci ivme bileşeninin ise üç farklı şekilde

$$S_t = \frac{1}{2p^2} \left\{ (h^2)' + \frac{h^2}{p^2} (b^2)' \right\} \quad (5.74)$$

$$S_t = \frac{1}{2} (v^2)' + \phi' v^2 \left\{ \frac{(r^2)'}{2p} + \sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2} b \right\} \quad (5.75)$$

$$S_t = \frac{1}{2} (v^2)' + \frac{\phi' v^2}{2p} (r^2 + b^2)' = \frac{1}{2} (v^2)' + \frac{\phi' v^2}{2p} \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle' \quad (5.76)$$

olduğu görülebilir.

Böylece 2. tip Bishop çatısına göre Siacci Teoremi aşağıdaki gibi verilebilir.

Teorem 5.2.1.1. (2. tip Bishop çatısına göre Siacci Teoremi) $m (>0)$ kütleli bir P parçacığı E^3 Öklid uzayında bir C eğrisi boyunca hareket etsin ve kabul edelim ki bu P parçacığının açıl momentumunun binormal bileşeni hiçbir zaman sıfır olmasın. Bu takdirde, P nin ivme vektörü

$$\mathbf{a} = -\frac{\phi' v^2 r}{p} \mathbf{e}_r + \left(v \frac{dv}{ds} + \frac{\phi' v^2 q}{p} \right) (\sin \phi \zeta_1 - \cos \phi \zeta_2) = S_r \mathbf{e}_r + S_t (\sin \phi \zeta_1 - \cos \phi \zeta_2)$$

olmak üzere iki yatay bileşeninin toplamı şeklinde ifade edilebilir. Burada S_r ve S_t yatay bileşenleri sırasıyla radyal ve teğet Siacci ivme bileşenleri olarak isimlendirilirler. Ayrıca, radyal Siacci bileşeni (5.73) ve teğet Siacci bileşenleri (5.74), (5.75) ve (5.76) ile verilirler.

Kabul edelim ki $P, S_p \{ \sin \phi \zeta_1 - \cos \phi \zeta_2, \cos \phi \zeta_1 + \sin \phi \zeta_2 \}$ düzleminde yatan bir C eğrisi boyunca hareket etsin. Bu durumda \mathbf{B} binormal vektörü, düzlemin birim normal vektörüdür ve sabittir. O halde eğri üzerindeki tüm noktalar için $\mathbf{B}' = 0$ dır. Böylece (5.52)₃ denkleminde

$$\mathbf{B}' = \epsilon_1 \zeta_1 + \epsilon_2 \zeta_2 = 0$$

olup buradan,

$$\|\mathbf{B}'\| = \sqrt{\langle \mathbf{B}', \mathbf{B}' \rangle} = \sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2} = 0$$

elde edilir.

(5.60), (5.62), ve (5.70) denklemleri göz önüne alınırsa,

$$\mathbf{x} = r \mathbf{e}_r + b \mathbf{B} \quad (5.77)$$

bulunur. Böylece (5.72) ifadesi düzlemsel bir harekette ivme vektörüne karşılık gelir.

Eğer $\sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2} = 0$ ve $b' = \sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2} p$ olduğu göz önünde bulundurulursa (5.74) ve (5.75) denklemlerinden sırasıyla

$$S_t = \frac{(h^2)'}{2p^2}$$

ve

$$S_t = \frac{1}{2} \left\{ (v^2)' + \frac{\phi' v^2}{p} (r^2)' \right\}$$

elde edilir.

Böylece aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 5.2.1.2. Kabul edelim ki P parçacığının hareketi O başlangıç noktasını içermek zorunda olmayan $S_p \{ \sin \phi \zeta_1 - \cos \phi \zeta_2, \cos \phi \zeta_1 + \sin \phi \zeta_2 \}$ düzlemine sınırlansın ve açısal momentumun düzleme dik olan bileşeni hiçbir zaman sıfır olmasın. Bu durumda, e_r , düzlemdeki polar koordinat sisteminin radyal baz vektörünü belirtmek üzere P nin ivme vektörü, (5.72) de gösterilen şekilde ifade edilebilir. Teğet Siacci bileşeni,

$$S_t = \frac{(h^2)'}{2p^2} \quad (5.78)$$

veya buna denk olarak,

$$S_t = \frac{1}{2} \left\{ (v^2)' + \frac{\phi' v^2}{p} (r^2)' \right\} \quad (5.79)$$

formuna indirgenir.

Sonuç 5.2.1.2. de $b=0$ olması durumunda aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 5.2.1.3. Varsayalım ki Sonuç 5.2.1.2'deki sabit düzlem O başlangıç noktasından geçsin ve P nin açısal momentumu hiç bir zaman sıfırlanmasın. Bu takdirde, Siacci'nin (5.72)' deki ifadesi (5.78) ve (5.79)'da verilen S_t ile belirlidir.

Örnek 5.2.1.4. (Sağ dairesel helis boyunca hareket) Bir P parçacığı uzayda, M silindir yüzeyi üzerinde bulunan C dairesel helis eğrisi boyunca hareket etsin. Eğilim ekseni k ve helis açısı α olsun. (R, ψ, z) silindirik koordinat sistemini temsil etmek üzere, $e_R = \cos \psi i + \sin \psi j$ ve $e_\psi = -\sin \psi i + \cos \psi j$ olup $\{i, j, k\}$ bir sabit ortonormal baz sistemi olsun. $A(>0)$ ve $B(>0)$ sabit olmak üzere P nin yer vektörü,

$$\begin{aligned}
\zeta_1 &= -\cos \phi \mathbf{e}_R + \sin \phi \sin \alpha \mathbf{e}_\psi + \sin \phi \cos \alpha \mathbf{k} \\
\zeta_2 &= -\sin \phi \mathbf{e}_R - \cos \phi \sin \alpha \mathbf{e}_\psi - \cos \phi \cos \alpha \mathbf{k} \\
\mathbf{B} &= -\cos \alpha \mathbf{e}_\psi + \sin \alpha \mathbf{k}
\end{aligned} \tag{5.81}$$

olarak elde edilir.

Bölüm 5.1.1'den τ burulma fonksiyonu sabittir ve $\tau = B/C^2$ dir. Ayrıca (3.18)'den $\epsilon_1 = -\tau \cos \phi$, $\epsilon_2 = -\tau \sin \phi$ ilgisi mevcuttur. Buradan, ϵ_1 ve ϵ_2 2. tip Bishop eğrilikleri

$$\epsilon_1 = -\frac{B}{C^2} \cos \phi \quad , \quad \epsilon_2 = -\frac{B}{C^2} \sin \phi = \epsilon_1 \tan \phi \tag{5.82}$$

şeklinde elde edilir. Yine bölüm 5.1.1' den κ eğrilik fonksiyonu sabittir ve $\kappa = A/C^2$ dir. Ayrıca (3.16)₁ eşitliğinden $\kappa = \phi'$ ilgisi mevcuttur. Dolayısıyla,

$$\phi' = \frac{A}{C^2} \tag{5.83}$$

elde edilir.

(5.57) eşitliğinde, (5.81)_{1,2} ve (5.82)₂ deki ϵ_2 için ikinci eşitlik yerlerine yazılırsa gerekli düzenlemelerin ardından, 2. tip Bishop bazları için açılmal hız vektörü,

$$\boldsymbol{\omega} = -v \epsilon_1 \sec \phi (\sin \alpha \mathbf{e}_\psi + \cos \alpha \mathbf{k}) \tag{5.84}$$

olarak bulunur.

(5.43) deki eşitlikler göz önünde tutularak (5.61)_{1,2,3} eşitliklerinde (5.80) eşitliği ve (5.81)_{1,2,3} denklemleri yerlerine yazılırsa,

$$q = z \cos \alpha \quad , \quad p = A \quad , \quad b = z \sin \alpha \tag{5.85}$$

elde edilir. (5.85)_{1,2,3} eşitlikleri (5.60) da yazılıp düzenlendiği takdirde P parçacığının 2. tip Bishop bazları doğrultusunda yer vektörü,

$$\mathbf{x} = (z \cos \alpha \sin \phi - A \cos \phi) \boldsymbol{\zeta}_1 - (z \cos \alpha \cos \phi + A \sin \phi) \boldsymbol{\zeta}_2 + z \sin \alpha \mathbf{B} \quad (5.86)$$

şeklinde elde edilir.

Bölüm 5.1.1'den $A = C \sin \alpha$ olup (5.34), (5.85)_{2,3} ve (5.69)_{1,2} eşitlikleri yardımıyla

$$h = p v = A C \omega \quad w = b v = z \sin \alpha C \omega = A z \omega \quad (5.87)$$

bulunur.

2. tip Bishop çatısı üzerinde Siacci teoremi uygulanırsa; S_r için (5.83), (5.34), (5.63) ve (5.85)_{1,2} eşitlikleri yardımıyla,

$$S_r = -\omega^2 \sqrt{A^2 + z^2 \cos^2 \alpha} \quad (5.88)$$

bulunur. S_t için ise (5.83), (5.34), (5.85)_{1,2} ve (5.36) eşitlikleri yardımıyla

$$S_t = C \dot{\omega} + \omega^2 z \cos \alpha \quad (5.89)$$

elde edilir.

KAYNAKLAR

- [1] Siacci, F., Moto per una linea piana, Atti R Accad Sci.Torino, 14: 750-760, 1879.
- [2] Siacci, F., Moto per una linea gobba, Atti R Accad Sci. Torino, 14: 946-951, 1879.
- [3] Whittaker, E. T., A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies, 4th edn.Cambridge University Press, Cambridge. Dover, New York, 1937.
- [4] Grossman, N., The sheer joys of celestial mechanics. Birkhauser, Basel, 1996.
- [5] Casey, J., Siacci's resolution of the acceleration vector for a space curve, Meccanica, 46: 471-476 DOI: 10.1007/s11012-010-9296-x, 2011.
- [6] Yılmaz, M.Y., Bektaş, M., Küçükarslan, Z., Siacci's Theorem for curves in Finsler Manifold F^3 , Turkish Journal of Science and Technology, 7(2): 181-185, 2012.
- [7] Bishop, L. R., There is more than one way to frame a curve, Amer. Math. Monthly, 82 (3), 246-251, 1975.
- [8] Hanson, A. J., Ma, H., Parallel Transport Approach to Curve Framing, Indiana University, TechreportsTR425, January 11, 1995.
- [9] Güven, İ. A, Nurkan, S. K., The Relation Among Spherical Indicatrix Curves, International Mathematical Forum, 6(25): 1209-1215, 2011.
- [10] Körpınar, T., Asil, V., Baş, S., On characterization inextensible flows of curves according to Bishop frame in E^3 , Revista Notas de Matematica, 7(1), No 302, 37-45, 2011.
- [11] Yılmaz, S., Turgut, M., A new version of Bishop frame and application to spherical images, J. Math. Anal.Appl., 371: 764-776, 2010.
- [12] Özyılmaz, E., Classical differential geometry of curves according to type-2 Bishop trihedra, Mathematical and Computational Applications, 16(4): 858-867, 2011.
- [13] Kızıltuğ, S., Kaya, S., Tarakcı, Ö., Tube surfaces with type-2 Bishop frame of Weingarten types in E^3 , Int. Journal of Math. Analysis, 7(1): 9-18, 2013.

- [14] Kızıltuğ, S., Kaya, S., Tarakcı, Ö., The slant helices according to type-2 Bishop frame in Euclidean 3-space, *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 85(2): 211-222, 2013.
- [15] Hacısalihoğlu, H., *Diferensiyel Geometri 1. Cilt*, Ankara Üniversitesi, 1998.
- [16] Hacısalihoğlu, H., *İki ve üç boyutlu uzaylarda Dönüşümler ve Geometriler*, Ankara Üniversitesi, 1998.
- [17] Sabuncuoğlu, A., *Diferensiyel Geometri*, Nobel Yayınları, Ankara, 2004.
- [18] Hacısalihoğlu, H., *Yüksek Diferensiyel Geometriye Giriş*, Fırat Üniversitesi, Elazığ, 1980.
- [19] Karger, A., Novak, J., *Space Kinematics, Lie Groups*. Gordon and Breach Science Publishers, 1985.
- [20] Izumiya, S., Tkeuchi, N., Generic properties of helices and Bertrand curves. *Journal of Geometry* 74, 97-109, 2002.
- [21] Tameroğlu S.S., Özbek, T., *Mühendisler için Mekanik 2.Cilt*, İnkılap ve Aka Basımevi, 1972.
- [22] Güney, Y., Okur, İ., *Fizik I(Mekanik) Değişim Yayınları* 2009.

ÖZGEÇMİŞ

Kahraman Esen ÖZEN, 07.10.1988 tarihinde Düzce'de doğdu. İlköğrenimini Düzce'de Azmimilli İlköğretim okulunda, ortaöğretimini Düzce Anadolu Öğretmen Lisesinde tamamladı. 2009 yılında Sakarya Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde başladığı lisans eğitimini 2013 yılında tamamladı. Yine aynı yıl Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalında Yüksek Lisans Programına kaydoldu. Halen aynı üniversitede öğrenimini sürdürmektedir.